

Matematikus és alkalmazott matematikus MSc Szakdolgozati témajavaslatok

2011/2012

Algebra és Számelmélet Tanszék

1. Téma: Algebrák reprezentációdimenziója

Témavezető: Ágoston István

Rövid leírás: Auslander az 1970-es évek elején vezette be az algebrák reprezentációdimenziójának fogalmát: ez a dimenzió homológikus eszközökkel méri azt, hogy egy algebra milyen messze van a reprezentációvégtől. Auslander bizonyította, hogy egy algebra pontosan akkor reprezentációvéges, ha $\text{rep. dim } A \leq 2$. Sokáig nem volt ismeretes, hogy $\text{rep. dim } A$ mindig véges-e; ezt Iyama bizonyította egy 2003-as cikkében. Igusa és Todorov 2005-ben megmutatták, hogy ha egy algebra reprezentációdimenziója legfőbb 3, akkor a finitistikus dimenziója véges (általános véges dimenziós algebrákra ez a homológikus algebra egyik legismertebb megoldatlan sejtése). Sajnos, ezzel lényegében egyidőben (2006-ban) Rouquier mutatott példát olyan algebrákra, melyek reprezentációdimenziója 4 (ezt megelőzően ilyen példa sem volt ismeretes). Azóta számos eljárás született nagy dimenziójú algebrák konstruálására, de a finitistikus dimenzióval való kapcsolat még számos kiderítenivalót rejt, s a fogalom kutatása meglehetősen nyitott.

Ajánlott irodalom:

- [1] M. Auslander: Representation dimension of Artin algebras. *Queen Mary College Mathematics Notes, London.* (1971)
- [2] O. Iyama: Finiteness of representation dimension. *Proc. Am. Math. Soc.* **131** (2003), 1011–1014.
- [3] K. Igusa, G. Todorov: On the finitistic global dimension conjecture for Artin algebras. *Repr. of Algebras and Related Topics.* Am. Math. Soc. (2005), 201–204.
- [4] R. Rouquier: Representation dimension of exterior algebras. *Invent. Math.* **165** (2006), 357–367.
- [5] S. Opperman: A lower bound for the representation dimension of kC_p^n . *Math. Z.* **256** (2007), 481–490.

Szak: matematikus

2. Téma: Leibniz-algebrák

Témavezető: Fialowski Alice

Rövid leírás: A Leibniz-algebrákat Jean-Louis Loday vezette be 1993-ban. A nemasszociatív algebrák egy osztálya. Egy kommutatív R gyűrű feletti L modulus, amiben egy bilineáris $[,]$ szorzás van értelmezve, amelyre teljesül az ún. Leibniz-azonosság: $[[a, b], c] = [a, [b, c]] + [[a, c], b]$. Azóta intenzíven kutatják ezen algebrák tulajdonságait, és sok nyitott probléma van.

Ajánlott irodalom: A témában megjelent alapvető cikkek.

Szak: matematikus.

3. Téma: Algebrai egyenlőtlenségek pozitív szemidefinit mátrixokra

Témavezető: Frenkel Péter

Rövid leírás: Számos – részben ismert, részben csak sejtett – egyenlőtlenség vonatkozik pozitív szemidefinit mátrixok permanensének, illetve a permanens különféle változatainak alsó becslésére. Ezek a multilineáris algebra eszközeivel vizsgálhatók.

Ajánlott irodalom:

[1] Minc: Permanents

[2] Cheon, Gi-Sang; Wanless, Ian M.: An update on Minc's survey of open problems involving permanents. *Linear Algebra Appl.* **403** (2005), 314–342.

Szak: matematikus.

4. Téma: Pszeudovéletlen bináris sorozatok és rácsok

Témavezető: Gyarmati Katalin

Rövid leírás: A kriptográfiában meghatározó szerepet játszó pszeudovéletlen bináris sorozatok és rácsok konstrukciója és tanulmányozása

Ajánlott irodalom:

[1] A. J. Menezes, P. C. van Oorschot, Scott A. Vanstone, *Handbook of Applied Cryptography*

[2] C. Mauduit, A. Sárközy, On finite pseudorandom binary sequences. I. Measure of pseudorandomness, the Legendre symbol

Szak: matematikus.

5. Téma: Eliminációelmélet

Témavezető: Károlyi Gyula

Rövid leírás: Hogyan lehet szisztematikusan megoldani magasabbfokú egyenletrendszereket? A kérdés minőségi vizsgálata a projektív algebrai geometria eszközeivel.

Ajánlott irodalom:

[1] D.A. Cox, J.B. Little, D. O'Shea: *Ideals, Varieties, and Algorithms* további fejezetei

Szak: matematikus

6. Téma: Általános algebrák, hálók.

Témavezető: Kiss Emil

Rövid leírás: Az általános algebráknak az utóbbi évtizedekben mély elmélete alakult ki. Az alapok elsajátítása mellett szabadon lehet választani olyan témákból, mint teljességi kérdések, kommutátorelmélet, kongruenciaszelídítés, a szubdirekt irreducibilis algebrák viselkedése.

Ajánlott irodalom:

[1] Kiss: Bevezetés az algebrába, 8. fejezet

[2] Hobby–McKenzie: The structure of finite algebras

Szak: matematikus

7. Téma: Öröklődő kongruenciahálók

Témavezető: Pálffy Péter Pál

Rövid leírás: Az univerzális algebra talán legnevezetesebb megoldatlan problémája a véges algebrák kongruenciahálóinak jellemzése. Még egyetlen véges hálóról sem sikerült bizonyítani, hogy ne lehetne egy véges algebra kongruenciahálója, bár vélhetően a hálók nagy része nem áll így elő. Nemrégiben Snow a legkisebb moduláris de nem disztributív hálóvarietás véges tagjairól mutatta meg, hogy előállíthatók véges algebrák kongruenciahálóként. Ezt Hegedűs és Pálffy általánosították és bevezették az öröklődő kongruenciaháló fogalmát. A

szakdolgozat célja ezeknek az eredményeknek a feldolgozása és esetleg további öröklődő kongruenciahálókonstruálása.

Ajánlott irodalom:

- [1] Hegedűs Pál és Pálffy Péter Pál, Modular congruence lattices, *Algebra Universalis* **54** (2005), 105–120.
- [2] John Snow, Every lattice in $V(M_3)$ is representable, *Algebra Universalis* **50** (2003), 75–81.

Szak: matematikus.

8. *Téma: Reprezentációk, amelyek a külső négyzetük faktorai*

Témavezető: Pálffy Péter Pál

Rövid leírás: A feladat olyan csoportreprezentációk vizsgálata, amelyek előállnak az önmagukkal vett külső szorzat faktoraként. A kérdés az olyan p^2 exponensű véges csoportok tanulmányozásakor merült fel, amelyeknek egyetlen nemtriviális karakterisztikus részcsoporthoz a Frattini részcsoporthoz tartozik. A munka „kísérleti” szakaszból és elméleti részből áll. A kísérleti szakaszban a GAP programcsomag segítségével minél több ilyen reprezentációt kell találni, utána pedig ezek alapján elméleti sejtéseket lehet megfogalmazni és bizonyítani.

Ajánlott irodalom:

- [1] Stephen Glasby, Pálffy Péter Pál és Schneider Csaba, p -groups with a unique characteristic subgroups, *Journal of Algebra*, megjelenés alatt

Szak: matematikus

9. *Téma: A p -adikus Langlands-program.*

Témavezető: Zábrádi Gergely

Rövid leírás: A p -adikus csoportok p -adikus reprezentációelmélete a matematika egy viszonylag új, dinamikus fejlődő ága, melynek komoly alkalmazásai vannak az algebrai számelméletben. A Langlands-program arról szól, hogy bizonyos Galois-reprezentációknak próbálunk (viszonylag jól meghatározható szisztematikus módon) megfeleltetni bizonyos automorf reprezentációkat. Az úgynevezett p -adikus Langlands-programban az automorf oldalon a $GL_n(\mathbb{Q}_p)$ csoport (és további, ennél általánosabb csoportok) p -adikus Banach-tér reprezentációi, a Galois oldalon pedig a $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ abszolút Galois-csoportnak p -adikus reprezentációi állnak, ahol \mathbb{Q}_p a p -adikus számok teste, $\overline{\mathbb{Q}_p}$ pedig annak algebrai lezártja. A szakdolgozat a hallgató érdeklődésétől függően szólhat vagy csak a Galois oldalról, vagy csak az automorf oldalról, vagy akár ezek kapcsolatáról.

Ajánlott irodalom: angol, ill. francia nyelvű szakcikkek, előadásjegyzetek a szakdolgozó érdeklődésétől függően, többek között:

- [1] Pierre Colmez: Représentations de $GL_2(Q_p)$ et (φ, Γ) -modules
- [2] Peter Schneider és Jeremy Teitelbaum: Banach space representations and Iwasawa theory
- [3] Laurent Berger: Galois representations and (φ, Γ) -modules

Szak: matematikus.