

Kalkulus1, második vizsga 2. feladat megoldása

2.(a) (5 pont) Határozza meg a $\frac{\sin x}{1 - \cos x}$ függvény baloldali határértékét 0-ban, jobboldali

határértékét 0-ban és a határértékét 0-ban!

MEGOLDÁS:

Baloldali határérték:

1. megoldás:

Mivel a számláló és a nevező is 0-hoz tart, hat ha $x \rightarrow 0$ balról, ezért próbálkozzunk a L'Hospital-szabállyal: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x}{\sin x} = -\infty$, mert a számlálóban lévő függvény határértéke 0-ban balról 1, és a nevezőben lévő függvény határértéke 0-ban balról 0, továbbá a nevező negatív. Így a L'Hospital-szabály miatt $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{1 - \cos x} = -\infty$.

2. megoldás:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{1 - \cos x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x(1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x(1 + \cos x)}{\sin^2 x} =$$
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 + \cos x}{\sin x} = -\infty$$
, mert a számlálóban lévő függvény határértéke 0-ban balról 2, és a nevezőben

lévő függvény határértéke 0-ban balról 0, továbbá a nevező negatív.

Jobboldali határérték:

1. megoldás:

A deriváltak hányadosának határértéke: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{\sin x} = \infty$, mert a számlálóban lévő függvény határértéke 0-ban jobbról 1, és a nevezőben lévő függvény határértéke 0-ban jobbról 0, továbbá a nevező pozitív. Így a L'Hospital-szabály miatt $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \infty$.

2. megoldás:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \infty$$
, mert a számlálóban lévő függvény határértéke 0-ban balról

2, és a nevezőben lévő függvény határértéke 0-ban balról 0, továbbá a nevező pozitív.

Határérték: Mivel a függvény baloldali és jobboldali határértéke 0-ban nem egyezik meg, a függvénynek 0-ban nincs határértéke.

2.(b) (15 pont) Végezze el a $\frac{\sin x}{1 - \cos x}$ függvény teljes függvényvizsgálatát!

MEGOLDÁS:

Értelmezési tartomány: $\mathbb{R} \setminus \{2k\pi\}$, ahol k egész szám.

Zérushely: $x = (2k + 1)\pi$, ahol k egész szám.

Mivel $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{1 - \cos(-x)} = \frac{-\sin x}{1 - \cos x} = -f(x)$, a függvény páratlan.

Mivel $f(x + 2\pi) = \frac{\sin(x + 2\pi)}{1 - \cos(x + 2\pi)} = \frac{\sin x}{1 - \cos x} = f(x)$, ezért a függvény periodikus, 2π pedig periódus.

Határértékek:

Az (a) részében bizonyítottak és a periodikusság miatt

$$\lim_{x \rightarrow 2k\pi^-} \frac{\sin x}{1 - \cos x} = -\infty \text{ és } \lim_{x \rightarrow 2k\pi^+} \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \infty, \text{ ahol } k \text{ egész szám.}$$

A függvény periodikus és nem konstans, ezért végtelenben és mínusz végtelenben nincs határértéke.

Függőleges aszimptoták: $x = 2k\pi$, ahol k egész szám.

A függvény az értelmezési tartományának minden pontjában folytonos, mert folytonos függvényekből van összerakva.

A függvény menete:

$$f'(x) = \frac{\cos x(1 - \cos x) - \sin^2 x}{(1 - \cos x)^2} = \frac{\cos x - 1}{(1 - \cos x)^2} = \frac{-1}{1 - \cos x} < 0, \text{ mert a nevező mindig pozitív.}$$

A függvény egy periódusa, ahol k egész szám:

	$2k\pi$	$(2k\pi, (2k + 2)\pi)$
f'	nincs értelmezve	–
f	nincs értelmezve	szig. mon. csökken

A függvénynek nincs lokális szélsőértéke.

A függvény alakja:

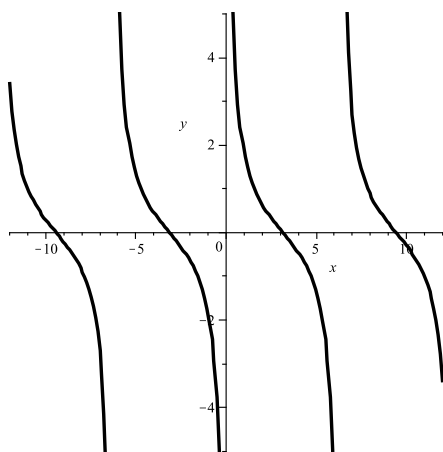
$$f''(x) = \frac{\sin x}{(1 - \cos x)^2}$$

Mivel a nevező minden x -re pozitív, $f''(x)$ előjele csak $\sin x$ előjelétől függ.

A függvény egy periódusa, ahol k egész szám:

	$2k\pi$	$(2k\pi, (2k + 1)\pi)$	$(2k + 1)\pi$	$((2k + 1)\pi, (2k + 2)\pi)$
f' nincs ért.		+	0	–
f nincs ért.		konvex	infl. pont	konkáv

A függvény grafikonja:



A függvénynek nincs abszolút minimuma, és nincs abszolút maximuma.

A függvény értékészlete: \mathbb{R} .