Kalkulus 2. zh megoldása

1. Deriváljuk a következő függvényeket!

a) $\dfrac{3x^2-x+1}{5}+7x\sin^2(3x+1)$

MEGOLDÁS:

$$f(x)=\frac{1}{5}(3x^2-x+1)+7x\sin^2(3x+1)$$

$$f'(x)=\frac{1}{5}(6x-1)+7\sin^2(3x+1)+7x\cdot 3\cdot\cos(3x+1)\cdot 2\sin(3x+1)$$

b) $g(x)=\dfrac{x\,\mathrm{tg}(-x)}{\sqrt[3]{x}-\cos x}+\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

MEGOLDÁS:

$$g'(x)=\frac{\left(\mathrm{tg}(-x)-\dfrac{x}{\cos^2(-x)}\right)(\sqrt[3]{x}-\cos x)-x\,\mathrm{tg}(-x)\left(\dfrac{1}{3}x^{-2/3}+\sin x\right)}{\left(\sqrt[3]{x}-\cos x\right)^2}+0$$

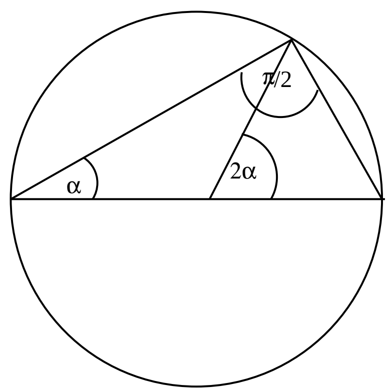
2. Pisti egy 100m sugarú kör alakú tó partján áll és át akar jutni az átellenes pontra. Úszik egy húr mentén, majd onnan gyalog megy. Hogyan ér át a leghamarabb, ha 1m/s sebességgel úszik és 2 m/s sebességgel gyalogol?

MEGOLDÁS:

Ha az átmérővel α szöget bezáró húr mentén úszik, akkor akkor $200\cos\alpha\ m$ utat kell leúsznia, hiszen a húr egy $200\ m$ átfogójú derékszög (Tálész tétel!) α szöge melletti befogó. Utána egy $100\cdot 2\alpha\ m$ hosszú íven fog sétálni. (L. ábra) Tehát az α szöghöz

$$f(\alpha)=\frac{200\cos\alpha}{1}+\frac{100\cdot 2\alpha}{2}=200\cos\alpha+100\alpha$$

másodperc idő tartozik. A feladat $\alpha\in[0,\pi/2]$-re értelmes. Mivel $f'(\alpha)=100-200\sin\alpha$ ezért $\sin\alpha=1/2$-nél, azaz $\alpha=\pi/6$-nál lehet f-nek lokális szélsőértéke. Vagyis ki kell számolnunk f-et a végpontokban és $\pi/6$-ban: $f(0)=200$, $f(\pi/6)=100(\sqrt{3}+\pi/6)$, $f(\pi/2)=100(\pi/2)$. Mivel $2>\sqrt{3}>\pi/2$, ezért $\alpha=\pi/2$-nél van a minimum, Pistike akkor ér a túloldalra a leggyorsabban, ha végig a parton sétál.



3. A Boszorkánykonyha piackutatói szerint ha x petákért árulják a varázspor 1 grammját, akkor $\frac{20}{x^2}$ kg fogy belőle egy évben. Milyen ár esetén lesz a legnagyobb a Boszorkánykonyha haszna (haszon = összes bevétel - összes költség), ha 1 gramm varázspor előállítási költsége 5 peták, és mennyi lesz ekkor az éves hasznuk?

MEGOLDÁS:

Számoljunk mindent grammban. Egy gramm varázsporon $x - 5$ peták a haszon tehát az összhaszon

$$f(x) = \frac{20000}{x^2}(x-5)$$

lesz. Mivel $x < 5$ petákra negatív a haszon ezért a feladat $x \in [5, \infty)$-re értelmes. Mivel

$$f'(x) = 20000 \cdot \frac{x^2 - 2x(x-5)}{x^4},$$

ezért lokális szélsőérték ott lehet, ahol $x^2 - 2x(x-5) = 10x - x^2 = x(10-x)$-nek gyöke van, vagyis $x = 0$ vagy $x = 10$. Csak az $x = 10$ van benne $[5, \infty)$-ben, tehát elég észrevennünk, hogy $f'(x)$ nevezője mindig pozitív, a számláló meg $5 \leq x < 10$-re pozitív és $x > 10$-re negatív, tehát $f(x)$ szigorúan monoton nő $5 \leq x \leq 10$-re és szigorúan monoton csökken $x \geq 10$-re. Vagyis $x = 10$-nél $f(x)$-nek abszolút maximuma van. Az éves haszon ekkor:

$$f(10) = \frac{20000}{100} \cdot 5 = 1000$$

peták.

4. (2 pont) Végezzük el az $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$ teljes függvényvizsgálatát!

MEGOLDÁS:

Értelmezési tartomány: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Zérushely: $x = 0$.
Mivel $f(-x) = \frac{-x^3}{-x-1} \neq f(x)$ és $f(-x) \neq f(x)$, a függvény se nem páros, se nem páratlan.
A függvény nem periodikus.

Határértékek:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{1-1/x} = \infty \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1-1/x} = \infty$$

$$\lim_{x\to1^-} \frac{x^3}{x-1} = -\infty \qquad \lim_{x\to1^+} \frac{x^3}{x-1} = \infty$$

Függőleges aszimptota: $x = 1$.

A függvény az értelmezési tartományának minden pontjában folytonos.

A függvény menete:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-1) - x^3}{(x-1)^2} = \frac{x^2}{(x-1)^2}(2x-3)$$

$f'(x)$ előjele megegyezik $2x-3$ előjelével. Így

	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,3/2)$	$3/2$	$(3/2,\infty)$
f'	–	0	–	nincs ért.	–	0	+
f	szig. mon. csökken		szig. mon. csökken	nincs ért.	szig. mon. csökken	lok. min. hely	szig. mon. nő

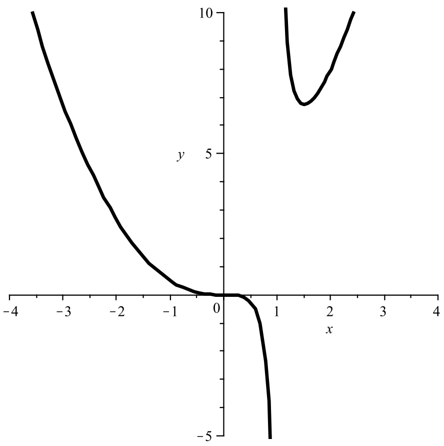
Lokális minimum érték: $f(3/2)=6,75$.

A függvény alakja:

$$f''(x)=\frac{(6x^2-6x)(x-1)^2-(2x^3-3x^2)(2x-2)}{(x-1)^4}=\frac{2x^3-6x^2+6x}{(x-1)^3}=\frac{2x}{(x-1)^3}(x^2-3x+3).$$

Mivel (x^2-3x+3) minden x-re pozitív, $f''(x)$ előjele csak $\dfrac{2x}{(x-1)^3}$-tól függ. Továbbá, ha $x<0$, akkor $x-1<0$ is teljesül.

	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
f''	+	0	–	nincs ért.	+
f	konvex	infl. pont	konkáv	nincs ért.	konvex



A függvénynek nincs abszolút minimuma, és nincs abszolút maximuma.
A függvény értékkészlete: $\mathbb{R}$.

5.

a) Van-e olyan differenciálható függvény, amely szigorúan konvex a számegyenesen, és van lokális maximuma?

MEGOLDÁS:

Egy $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényre akkor mondtuk, hogy szig. konvex az egész számegyenesen, ha mindenhol differenciálható, és az f' derivált függvény szig. monoton nő az egész $\mathbb{R}$-en. Előadáson láttuk, hogy ha egy differenciálható függvénynek egy x_0 pontban lokális szélsőértéke van, akkor $f'(x_0)=0$. Mivel f' szigorúan monoton nő és $f'(x_0)=0$, ezért x_0 előtt f' negatív, x_0 után pedig pozitív, így $(-\infty,x_0]$-n f szig. monoton csökken, míg $[x_0,\infty)$-n szig. monoton nő. Vagyis az x_0 pontban nem lehet lokális maximuma. (Sőt, biztosan tudjuk, hogy itt abszolút minimuma van.)

b) Van-e olyan differenciálható függvény, amely szigorúan konvex $[1,\infty)$-en, és nincs abszolút minimuma $[1,\infty)$-en?

MEGOLDÁS:

Van ilyen függvény, például az $f(x)=1/x$. Egyrészt $f''(x)=2/x^3>0$ az $[1,\infty)$ intervallumon, így f ott szig. konvex. Másrészt, $1/x$ szig. monoton csökken $[1,\infty)$-n, így természetesen nincs abszolút minimuma.

6. Határozzuk meg az alábbi határértékeket!

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{\sqrt{x}-1}$

1. MEGOLDÁS:

Mind a számláló, mind a nevező határértéke 0, ha $x\to 1$; megpróbálhatjuk alkalmazni a L'Hospital-szabályt:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+x-2)'}{(\sqrt{x}-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+1}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\frac{3}{1/2}=6$$

Mivel ez a határérték létezik, ezért a L'Hospital-szabály értelmében az eredeti határérték is létezik és egyenlő 6-tal.

2. MEGOLDÁS:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(x+2)}{\sqrt{x}-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}(\sqrt{x}+1)(x+2)=6$$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\sin x}{x^3}\right)$

MEGOLDÁS:

Közös nevezőre hozással fölírjuk a különbséget hányadosként, hogy a L'Hospital-szabállyal próbálkozhassunk:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\sin x}{x^3}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

Mind a számláló, mind a nevező határértéke 0, ha $x\to 0$; L'Hospitalással próbálkozunk:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$$

Ez továbbra is kritikus alak.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}$$

Még mindig.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}$$

Mivel ez az utolsó határérték létezik, ezért a korábbiak is léteznek, és mind egyenlőek 1/6-dal.