2006-2007/I. félév

I. matematika BSc Analízis alapszint 1. ZH

2006. október 17.

Minden feladat 1 pontot ér, de csak teljes **indoklással**. Részpontszám is kapható.

Minden előadáson vagy gyakorlaton szerepelt állítás felhasználható bizonyítás nélkül az állítást pontosan idézve (pl. Volt előadáson, hogy...), kivéve ha a feladat épp a szerepelt állítás bizonyítása.

A dolgozat értéke osztályzatban körülbelül 1-gyel kevesebb az elért pontok számánál.

Semmilyen segédeszköz nem használható, **számológép sem**!

Jó munkát!

1. Fogadjuk el igaznak, hogy nem zörög a haraszt, ha nem fújja a szél. Következik-e ebből, hogy

   a) zörög a haraszt, ha fújja a szél?

   b) fúj a szél, ha zörög a haraszt?

   c) nem fúj a szél, ha nem zörög a haraszt?

2. Írja fel szöveggel az alábbi állítást, és döntse el, hogy igaz-e! Írja fel a tagadását logikai jelekkel is és szöveggel is! Döntse el a tagadásról is, hogy igaz-e!
$$(\forall x \in \mathbb{N}^+)\ (\exists y \in \mathbb{N}^+)\ x|y$$
(Itt $a|b$ azt jelöli, hogy a osztója b-nek, $\mathbb{N}^+$ pedig a pozitív egész számok halmaza.)

3. Egy sorozat elemeiről tudjuk, hogy $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n$, továbbá $a_0 = 1$, $a_1 = 3$. Adjon képletet a_n-re (amelyből a_n közvetlenül kiszámítható)!

4. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges $a_1, \ldots, a_n$ valós számokra
$$|a_1 + \ldots + a_n| \leq |a_1| + \ldots + |a_n|\ !$$

5. Bizonyítsa be az alábbi egyenlőtlenséget a, b, c pozitív számokra!
$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} \geq 6$$

6. Döntse el, hogy igaz-e az alábbi következtetés minden $A, B \subset \mathbb{R}$ halmazra!
$$\Big((\forall x \in A)\ (\exists y \in B)\ x < y\Big) \Longrightarrow \Big((\forall y \in B)\ (\exists x \in A)\ x < y\Big)$$

7. Bizonyítsa be, hogy az alábbi egyenlőtlenségek tetszőleges pozitív egész n-re fennállnak!
$$a)\ \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n \geq \frac{1}{2} \qquad\qquad b)\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} \geq 4$$