

Végtelen sorok

1. feladat

Számítsuk ki a következő sorok összegét!

(a) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

(b) $1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots$

(c) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$

(d) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots$

(e) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \dots$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 5^n}{9^n}$

2. feladat

Igaz-e, hogy ha

(a) $a_n \rightarrow 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens?

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens $\implies a_n \rightarrow 0$?

(c) $a_n \rightarrow 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens?

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens $\implies a_n \rightarrow 1$?

3. feladat

Konvergensek-e a következő sorok?

(a) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

(b) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$

(c) $\frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} - \dots$

(d) $1 - 3 + 5 - 7 + \dots$

(e) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$

(f) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$

4. feladat

Konvergensek-e a következő sorok?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{0,0001}$ (i) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+5)$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+2}$ (k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ (l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ (m) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$

(n) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ (o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ (p) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})$ (q) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n})$

(r) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2}{5})^n$ (s) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{5}{2})^n$ (t) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$ (u) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{5^n}$

5. feladat

Konvergensek-e a következő sorok?

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n} \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n} \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n$$
$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n \quad (f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!} \quad (g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!^2}{(2n)!} \quad (h) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+200}{2n+7}\right)^n$$

6. feladat

Bizonyítsuk be, hogy ha $\forall n$ esetén $a_n > 0$, akkor

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens vagy végtelen.}$$
$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$
$$(c) \forall n \quad a_n \leq b_n \leq c_n, \text{ továbbá } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 7 \text{ és } \sum_{n=1}^{\infty} c_n = 10 \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konvergens.}$$
$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens} \implies \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=k}^{\infty} a_n = 0$$

7. feladat

Milyen c esetén konvergens a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^c}$ sor?

8. feladat

$$(a) \text{ Lehet-e } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens, ha } \frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 2?$$
$$(b) \text{ Lehet-e } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens, ha } \frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 1?$$
$$(c) \text{ Lehet-e } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergens, ha } \frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 1?$$
$$(d) \sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow \frac{1}{2}. \text{ Következik-e ebből, hogy } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens?}$$
$$(e) \sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow 1. \text{ Következik-e ebből, hogy } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens?}$$
$$(f) \sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow 1. \text{ Következik-e ebből, hogy } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergens?}$$