2006-2007/I. félév

I. matematika BSc Analízis alapszint 2. ZH

1. csoport (Keleti Tamás csoportja)

2006. december 6.

Minden feladat 1 pontot ér, de csak teljes **indoklással**. Részpontszám is kapható.
Minden előadáson vagy gyakorlaton szerepelt állítás felhasználható bizonyítás nélkül az állítást pontosan idézve (pl. Volt előadáson, hogy...), kivéve ha a feladat épp a szerepelt állítás bizonyítása.

A dolgozat értéke osztályzatban körülbelül 1-gyel kevesebb az elért pontok számánál.
Semmilyen segédeszköz nem használható, **számológép sem**!
Jó munkát!

1. Legyen H a valós számok egy olyan részhalmaza, amelynek van maximuma! Lehet-e
   a) $\inf H = \max H$? b) $\inf H < \max H$? c) $\inf H > \max H$?

2. a) Mi az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény értelmezési tartománya, értékkészlete?

   b) Döntsük el, hogy a teljes értelmezési tartományon páros-e, páratlan-e, periodikus-e, injektív-e, monoton növő illetve csökkenő-e, konvex-e, konkáv-e!

   c) Bijekció-e f az értelmezési tartománya és az értékkészlete között?

   d) Van-e inverze, ha igen, adjuk is meg!

   e) Döntsük el, hogy $(0, \infty)$-n illetve $(-\infty, 0)$-n monoton növő illetve csökkenő-e, szigorúan monoton növő illetve csökkenő-e, konvex-e, konkáv-e, szigorúan konvex-e, szigorúan konkáv-e!

   A konvexitásra illetve konkávitásra adott válaszokat (terjedelmi okok miatt) kivételesen nem kell indokoloni, de az összes többit, mint ahogy a többi feladatra adott válaszokat is, bizonyítani kell!

3. Határozzuk meg az alábbi sorozat határértéket, ha létezik!
$$a_n = \frac{n^2 \cdot 2^n + \cos n + 3 \cdot 5^n}{5^n \cdot \sqrt[n]{n} - n^{100}}$$

4. Van-e határértéke az $\sqrt[n]{3^n + 5^n}$ sorozatnak, ha igen, mi az?

5. Döntsük el, hogy az $f(x) = \frac{[x]}{x}$ függvénynek van-e 0-ban határértéke, bal oldali határértéke, illetve jobb oldali határértéke; amelyik van, azt határozzuk is meg!

6. Az (a_n) és (b_n) sorozatokról tudjuk, hogy (a_n) konvergens, továbbá hogy $|a_n - b_n| < \frac{1}{n}$ minden n-re. Következik-e ebből, hogy b_n is konvergens?

7. Az (a_n) sorozat konvergens, a (b_n) oszcillálva divergens. Tarthat-e az $(a_n \cdot b_n)$ sorozat végtelenhez?