Sztochasztikus modellek az egészségbiztosításban

Diplomamunka

Írta: Márton Anikó

alkalmazott matematikus szak

Témavezetők:

Mályusz Károly, vezető aktuárius

Cardif Életbiztosító Zrt.

és

Arató Miklós, belső konzulens

Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2010

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **3**

2. Jelölések **4**

3. Irodalmi áttekintés **6**

3.1. Jackson hálózatok 6

3.1.1. A nyílt hálózat: 6

3.1.2. A zárt hálózat 9

3.1.3. Szeminyílt hálózatok 10

3.1.4. A hálózat áteresztőképessége 11

3.2. Egyéb tulajdonságai a Jackson hálózatoknak 11

4. A modell **13**

5. Aktuális helyzet Magyarországon **15**

6. Adatok elemzése **16**

6.1. Eloszlások illesztése 21

6.2. A modell vizsgálata 24

7. Összegzés **32**

8. Függelék **34**

1. fejezet - Bevezetés

A napjainkban létező Irányított Betegellátási Rendszer (IBR)-rel mindenki találkozhat, akinek valamilyen egészségügyi problémája van. A betegeket egyik helyről a másikra küldik, minden helyen várakoznia kell, általában nem is olyan keveset. Minél többet vár valaki, annál valószínűbb, hogy a várakozásából következően akár maradandó egészségkárosodása is származik. Már próbálták számszerűsíteni az orvosilag megengedhető maximális várakozási időt egyes beavatkozások kapcsán. Azonban még ezek a felmérések sem vizsgálták azt, hogy mire valaki beutalót kap, addig menynyi idő telik el. Ennek vizsgálata nagyon bonyolult és összetett lenne, viszont ezen számszerűsített adatok segítséget nyújthatnak nekünk is. Nyilvánvaló, hogy a nem egészséges emberek komoly veszteséget okoznak a gazdaságnak, nem csak amiatt, hogy nem termelnek, de az ellátásuk is pénzbe kerül. Illetve, ha egy családban van egy beteg ember, akkor a család többi tagjának termelőképességét is befolyásolja. Tehát az lenne az érdekünk, hogy egy beteg ember minél hamarabb felépüljön. Persze a szükségtelenül elvégzett vizsgálatok is nagy veszteséget okoznak, így meg kellene találnunk a középutat. A diplomamunkám során azt vizsgálom, hogy ha valaki megbetegszik és orvoshoz kell mennie, akkor mire meggyógyítják összességében mennyi időt tölt a különböző vizsgálatokra várva. Az egészség megóvása szempontjából az lenne a legelőnyösebb, ha minél kevesebbet kellene várakozni. A rendszer modellezésére a Jackson hálózatok elméletét használtam fel.

2. fejezet - Jelölések

A sorbanállás elméletében van néhány fontos jelölés, amelyeket Kendall-féle jelölésnek neveznek. A sorbanállási modellek alapvető tulajdonságait foglalja össze. Általánosan az alábbi képlettel írhatjuk le a modelleket:

$$A/B/m/n$$

- A a beérkezési időközök eloszlása
- B a kiszolgálási idők eloszlása
- n a kiszolgáló eszközök száma
- m a várakozási helyek száma

Ha az m egy véges szám, akkor azt úgy képzelhetjük el, hogyha kevesebben állnak a sorban, mint m akkor az új belépő beáll a sorba, de ha már m igény várakozik, akkor tisztán elutasítják az új belépőt. Gyakran az m-et nem is írják ki, ekkor feltételezésünk szerint végtelen sok várakozási helyünk van. Az eloszlásokhoz pedig az alábbi jelöléseket használjuk:

- M exponenciális eloszlás
- E_r r-ed rendű Erlang eloszlás
- D konstans
- G általános (tetszőleges azonos eloszlású idő telik el a két belépés között)

Az alábbiakban ismertetett modellben végig $M/M/1$-es rendszereket képzelünk a csomópontokba. Ez első megközelítésre kényelmes, hiszen az exponenciális eloszlást jól ismerjük, és örökifjú tulajdonsága miatt könnyű vele számolni aszimptotikusan is. Amennyiben a beérkezések között exponenciális idő telik el, akkor Poisson folyamatot kapunk, amivel szintén egyszerűbb számolnunk.

Általában a belépés intenzitását λ-val, a kiszolgálás intenzitását pedig μ-vel szokás jelölni. Ezekkel a jelölésekkel a ϱ jelöli a forgalmi intenzitást, amelyet az előbbiekből így kaphatunk meg: $\varrho = \frac{\lambda}{\mu}$. Az egynél nagyobb forgalmi intenzitás azt jelenti, hogy az igények gyorsabban érkeznek, mint ahogy egy kiszolgálóegység ki tudja szolgálni. Egy csomópont esetén az áteresztőképességet a következő minimum határozza meg:

$$min\,\{\lambda,\, m\mu\}$$

3. fejezet - Irodalmi áttekintés

3.1. Jackson hálózatok

A Jackson hálózatok a sorbanállási feladatoknak egy speciális típusával foglalkoznak, amely tipust úgy képzelhetünk el, hogy van J darab csomópontunk és a t-edik időpontban $x_i(t)$ munkafolyamat található az i-edik csomópontban. Összességében α paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek az igények. A kiszolgálási folyamat pedig μ_i paraméterű Poisson folyamat $\forall i$-re, ahol $i = 1, ..., J$.Legyen továbbá $P = (p_{ij})\ \forall\ i, j = 1; ...; J$, ahol p_{ij} jelöli annak a valószínűségét, hogyha egy munkafolyamat befejeződik i-ben, akkor j-be megy át.

Az előbb leírt modellnek két változatát ismertetem: a nyílt hálózatot és a zárt hálózatot, majd megmutatom a kétféle modell közti kapcsolatot.

3.1.1. A nyílt hálózat

A beérkező folyamat független, α-Poisson, a $p_{0j} \geqq 0$ valószínűségi változó annak a valószínűségét jelöli, hogy amikor az új igény belép a rendszerbe, az a j-edik csomópontba kerül és $\sum_{j=1}^{J} p_{0j} = 1$. Ekkor a csomópontokba beérkező folyamat αp_{0j} paraméterű Poisson. Amikor egy igény kiszolgálása befejeződött i-ben, két dolog történhet: p_{ij} valószínűséggel a j csomópontba megy át a folyamat és $p_{i0} = 1 - \sum_{j=1}^{J} p_{ij}$ valószínűséggel elhagyja a rendszert. Jelölje λ_i az összes i csomópontba beérkező igény intenzitását, amit felírhatunk az alábbi módon:

$$\lambda_i \ = \ \alpha p_{0i} + \sum_{j=1}^{J} \lambda_j p_{ji},\ i = 1, ...J.$$

Ezt mátrixokkal kifejezhetjük a

$$\lambda = a + P^T \lambda$$

alakban, ahol $\lambda \doteq (\lambda_i)$,és $a \doteq (\alpha p_{0i})$ a P mátrixunk pedig szubsztochasztikus, ebből pedig következik az alábbi egyenlet:

$$\lambda \;=\; (I - P^T)^{-1} a$$

Legyen $X_i(t)$ a t időpontban az i csomópontban tartózkodó igények száma, $\mu_i(x_i)$ jelöli az i-edik csomópontban jelenlevő x_i darab igény kiszolgálási intenzitását. Az egyszerűség kedvéért elhagyjuk az időt. Ekkor egy Markovlánchoz jutunk az alábbi intenzitásokkal:

$$q(x, x + e_i) = \alpha p_{0i}$$

$$q(x, x - e_i) = \mu_i(x_i) p_{i0}$$

$$q(x, x - e_i + e_j) = \mu_i(x_i) p_{ij}$$

ahol e_i jelöli az i-edik egységvektort. Jelölje $\pi(x) = P[X = x]$ az egyensúlyi eloszlást.
$\pi(x)$ az alábbi egyensúlyi egyenlettel egyértelműen van meghatározva:

$$\pi(x)\sum_{i=1}^{J}[\alpha p_{0i}+\mu_i(x_i)(1-p_{ii})]=$$
$$=\sum_{i=1}^{J}[\pi(x-e_i)\alpha p_{0i}+\pi(x+e_i)\mu_i(x_i+1)p_{i0}]+$$
$$+\sum_{i=1}^{J}\sum_{j\neq i}\pi(x+e_i-e_j)\mu_i(x_i+1)p_{ij}$$

Ez $\forall\, x\in\mathbb{Z}_+^J$-re igaz, valamint az is megfigyelhető, hogy a fenti egyenlet a $\pi^TQ=0$ egyenlet sorról sorra történő felírása, ahol π jelöli $\left\{\pi(x),\ x\in\mathbb{Z}_+^J\right\}$-t és Q a belépők intenzitás mátrixa és $q(x,y)$ megfelel az x csomópontból y csomópontba érkező igények intenzitásával, ahol az y a fentiek alapján definiált.

Az alábbi tétel összekapcsolja az $x=(\ x_1\ \ .\ .\ .\ \ x_J)$ vektort az $Y=(Y_1\ \ .\ .\ .\ \ Y_J)$ vektorral, amely elemei független valószínűségi változók. Az Y_i eloszlása a következő:

$$P(Y_i\ =\ n)=P(Y_i=0)\cdot\frac{\lambda_i^n}{M_i(n)} \tag{1}$$

ahol $M_i(n)=\mu_i(1)\cdot\ldots\cdot\mu_i(n)$ $n=1,\,2,\,\ldots$ és feltételezzük, hogy $\sum\limits_{n=1}\frac{\lambda_i^n}{M_i(n)}<\infty$, így $P(Y_i=0)$ jól definiált.

$$P(Y_i=0)=\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_i^n}{M_i(n)}\right]^{-1}$$

Y_i a munkák száma egy születési-halálozási folyamat egyensúlyi állapotában (λ_i születési arány, $\mu_i(n)$ halálozási arány)

3.1 Tétel: Tegyük fel, hogy teljesül (1) $\forall\, i = 1 \dots J$, ekkor a nyílt Jackson hálózat egyensúlyi eloszlása

$$\pi(x) = \prod_{i=1}^{J} P(Y_i = x_i)$$

$\forall\, x \in \mathbb{Z}_+^J$, ha Y_i eloszlására teljesül $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_i^n}{M_i(n)} < \infty$.

3.1.2. A zárt hálózat

Sok alkalmazásban a munkák összszámát egy konstans szinten tartják fent, legyen ez mondjuk N. Amikor egy igény kiszolgálása befejeződött az összes lehetséges pontban és elhagyja a rendszert, akkor azonnal belép egy újabb igény. Erre a rendszerre úgy is tekinthetünk, hogy az igény a csomópontok között bolyong és soha nem hagyja el és soha nem lép be új igény és ebben a tekintetben tekinthetjük ezt a hálózatot „zárt-nak". A zárt hálózat átmenetvalószínűség mátrixa sztochasztikus, azaz a sorösszeg 1. A nyílt hálózat jelölésével a $p_{i0} = p_{0j} = 0\, \forall\, i, j = 1, \dots, J$. Feltesszük, hogy $(r_{ij})_{i,j}^J$ irreducibilis, mert ekkor minden pontból minden pontba el tudunk jutni véges időn belül pozitív valószínűséggel. Jelölje $(v_i)_{i=1}^J$ a $v_i = \sum\limits_{j=1}^{J} v_j p_{ji}$, $i = 1, \dots, J$ megoldását. Ahhoz, hogy egyértelmű legyen a megoldás kell még egy feltétel: $\sum\limits_{i=1}^{J} v_i = v$, az egyszerűség kedvéért legyen $v = 1$. Így $\{v_i : i = 1, \dots, J\}$ lényegében egyensúlyi eloszlása egy diszkrétidejű Markov-láncnak, amely átmenetvalószínűség mátrixa $(r_{ij})_{i,j}^J$ és az i-edik csomópontba belépő igények intenzitása Nv_i, amely a nyílt modellben a λ_i-nek felel meg. Az egyensúlyi egyenlet is nagyon hasonló, csak most $\alpha = 0$ és $p_{i0} = p_{0j} = 0\, \forall\, i, j = 1, \dots, J$.

Tehát az egyenlet az alábbi:

$$\pi(x)\sum_{i=1}^{J}\mu_i(x_i)(1-p_{ii}) \;=\; \sum_{i=1}^{J}\sum_{j\neq i}\pi(x+e_i-e_j)\mu_i(x_i+1)p_{ij}$$

teljesül $\forall\, x \in \mathbb{Z}_+^J$-re, amelyekre $\mid x \mid= N$, ahol $\mid x \mid\doteq x_1+\ldots+x_J$. Hasonlóan definiálhatjuk $\mid X \mid$-et és $\mid Y \mid$-et.

3.2. Tétel: A zárt Jackson hálózatnak az egyensúlyi eloszlása N munkadarab szám esetén a következő: $\forall\, x \in \mathbb{Z}_+^J$ és $\mid x \mid= N$ esetén

$$\pi(x) = \prod_{i=1}^{J}\frac{P(Y_i = x_i)}{P(\mid Y \mid= N)}$$

ahol Y_i eloszlása ugyanaz mint a nyílt esetben (1), $x_i \leq N$ és λ_i helyére v_i-t írunk.

Megjegyzés: A $\pi(x)$ nevezője a normalizálási feltételből jön.

3.1.3. Szeminyílt hálózatok

Ez a modell gyakorlatilag általánosítja az eddig ismertetett modelleket. A modellt úgy kell elképzelni, mint a nyílt modellt egy kivétellel, hogy legfeljebb K igény lehet jelen egyszerre a rendszerben, ezt nevezhetjük egy K hosszú buffernek. Ezt a szeminyílt hálózatot könnyedén tudjuk zárt hálózattá redukálni, csak fel kell venni egy $J+1$. pontot, és feltesszük, hogy a hálózatban mindig K igény van jelen. Legyen ez a pont 0-nak indexelve, ekkor a nyílt hálózatnál használt jelöléssel p_{0i} és p_{j0} ebből a pontból indul és ebbe lép be. A 0. pont kiszolgálási intenzitása $\mu_0(i) = \alpha\ \forall\, i \geq 1$-re és $\mu_0(0) = 0$. Ez utóbbi pedig azt jelenti, hogyha a K nagyságú buffer tele van, akkor nem szolgál ki újabb igényt. A szeminyílt hálózat egyensúlyi eloszlása nagyon hasonlít a zárt modellben találhatóra.

3.3. Tétel: A szeminyílt Jackson hálózatnak az egyensúlyi eloszlása legfeljebb K munkadarab szám esetén a következő: $\forall\, x \in \mathbb{Z}_+^J$ és $\mid x \mid\leq K$

esetén

$$\pi(x) = \prod_{i=1}^{J} \frac{P(Y_i = x_i)}{P(\mid Y \mid \leq K)}$$

ahol Y_i eloszlása ugyanaz mint a nyílt esetben (1), $x_i \leq K$ és λ_i helyére v_i-t írunk.

3.2. A hálózat áteresztőképessége

Az i-edik pont áteresztőképességéhez ki kell számolnunk az alábbi várható értéket:

$$TH_i(N) = E(\mu_i(x_i)) = v_i \cdot \frac{P(|Y|=N-1)}{P(|Y|=N)}$$

Az egész hálózat áteresztőképességét pedig így lehet definiálni:

$$TH(N) = \sum_{i=1}^{J} TH_i(N)$$

3.3.1. A Jackson hálózatok egyéb tulajdonságai

Q. Gong, K. K. Lai, S.Wang cikke alapján az áteresztőképesség néhány tulajdonságát vizsgáljuk:

1. Az áteresztőképesség $TH(N)$ N-ben növekvő, ha minden i pontra a kiszolgálási intenzitás $\mu_i(n)$ egy monoton növő függvény, ahol N a rendszerben szereplő összes igény száma.

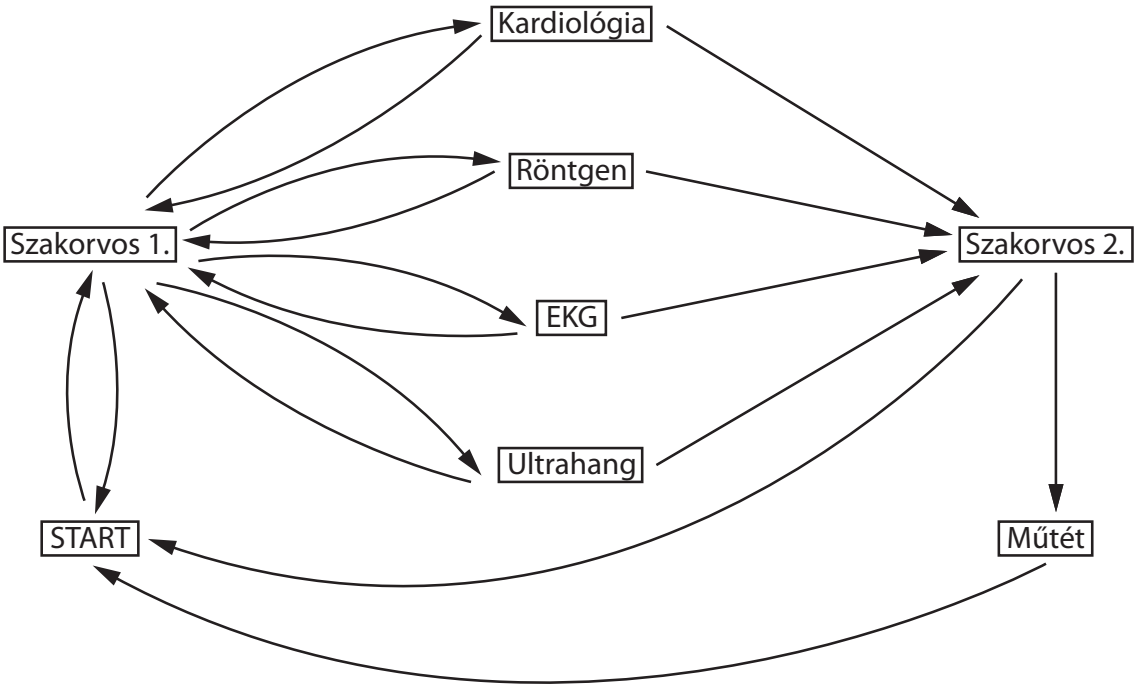
2. Egy zárt hálózatban tegyük fel, hogy minden pont kiszolgálási intenzitása monoton növő függvény. Ekkor növelve a kiszolgálási intenzitást

a pontok egy részhalmazán (mondjuk jelöljük B-vel) növelni fogja a munkák egyensúlyi számát az összes csúcsnál, amelyek nincsenek B-ben.

3. Vegyük a többkiszolgálós pontokat B-ben. Azáltal, hogy csökkentjük a kiszolgálók számát amellett, hogy fenntartjuk a maximális kiszolgálási kapacitást, növeljük a rendszer áteresztőképességét.

4. Egy zárt Jackson hálózatban hozzunk létre egy csoportot (legyen B), amelyben csak azok a pontok vannak, ahol több kiszolgáló egység is található. Azáltal hogy helyettük egy darab egy kiszolgálós pontot iktatunk be, növeljük a hálózat áteresztőképességét.

4. fejezet - A modell



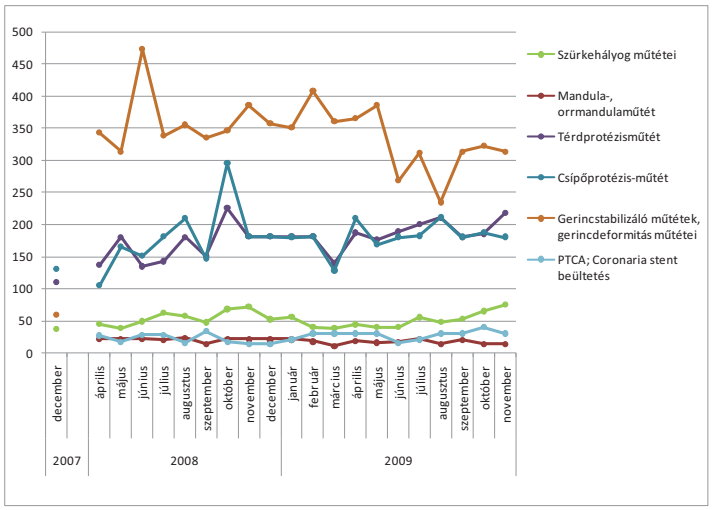
6.1. ábra: a hálózat

A fenti ábrán látható az általam feltételezett modell. A beteg lehetséges bolyongását írja le a rendszerben, onnantól kezdve, hogy a szakorvoshoz időpontot kap. Az első pont a START állapot, amelyből indul ki nyíl illetve mutat bele. Ennek annyi a jelentőssége, hogy egy zárt Jackson hálózatot feltételezünk, amelyből ténylegesen nem léphet ki igény, illetve nincs belépő igény sem és a rendszerben jelen lévő igények száma mindig állandó. Gyakorlatilag ennek a pontnak a hozzáadásával egy tetszőleges nyitott hálózatból zárt hálózat készíthető. A szakorvos lehetőségei: elegendő valamilyen gyógykezelés, nincs szükség további vizsgálatra, ekkor elhagyja rendszert, azaz a START állapotba kerül. Amennyiben szükséges valamilyen vizsgálat elvégzése, akkor a lehetséges továbblépési irányok a kardiológia, röntgen, ekg, ultrahang. Ezután a Szakorvoshoz visszakerülhet a beteg, ha szükséges valamilyen vizsgálat, illetve kerülhet a Szakor-

vos2 csomópontba is. A Szakorvos2 a gyakorlatban ugyanaz a sorbanállási csomópont mint a Szakorvos, de ha már ide eljut a beteg, akkor már csak 2 döntési lehetősége marad az orvosnak: vagy a vizsgálatok alapján nem szükséges műteni, esetleg nem lehet műteni egyéb egészségügyi probléma miatt, vagy előjegyzi műtétre. A műtét után pedig a beteg elhagyja rendszert. Egy beteg a szakorvoshoz csak háziorvosi beutalóval tud eljutni, ezt azonban nem vizsgáltam, hogy mennyit kell sorbanállnia a háziorvosnál a betegnek, mivel általában napokban számolva jelentéktelen ez az idő.

5. fejezet - Aktuális helyzet Magyarországon

Az Egészségbiztosítási Felügyelet honlapján megtalálható elemzés szerint a várakozási idők az elmúlt időszakban az alábbi ábra szerint alakultak:



6.2.ábra: várakozási idők alakulása Magyarországon

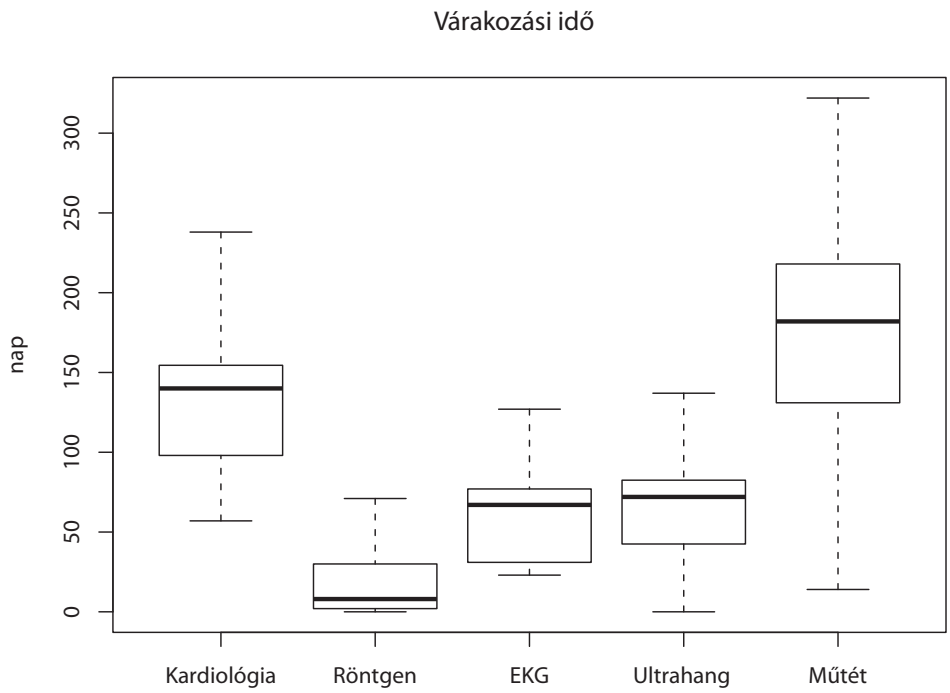
Mint ahogy az ábrán is látható a legnagyobb várakozási időre a gerincstabilizáló, gerincdeformitás műtétnél kell számolni, a legkevesebbre pedig a szürkehályog, PTCA, mandula-, és orrmandulaműtét esetén kell várakozni. Én a közepes tartományba eső eseteket kezdtem el vizsgálni, azaz a térdprotézisműtéteket, illetve csípőprotézis-műtéteket. Példának a Szegedi Tudományegyetem Szent-Györgyi Albert Klinikai Központ honlapja által szolgáltatott adatokat kezdtem vizsgálni, de itt csak a műtétekre találtam adatot, a műtéteket megelőző vizsgálatokhoz nem. A műtét előtt vizsgálatokhoz az adatot a Mohács Város Kórháza honlapjáról szedtem. A várólisták mindig frissülnek, én a március 17-én fent lévő adatokkal számoltam.

6. fejezet - Adatok elemzése

A rendelkezésemre álló adatok alapján elvégeztem néhány vizsgálatot. Az alábbi táblázatban látható adatok azért szükségesek, hogy össze lehessen hasonlítani a kanadai adatokkal.

	átlag	minimum	maximum	medián
Kardiológia	134,4390244	57	357	140
Röntgen	24,08823529	0	98	8
EKG	60,42011834	23	216	67
Ultrahang	70,77314815	0	216	72
Csípőprotézis műtét	180,2741935	14	388	182

6.1. táblázat: várakozási idő Magyarországon



6.3.ábra

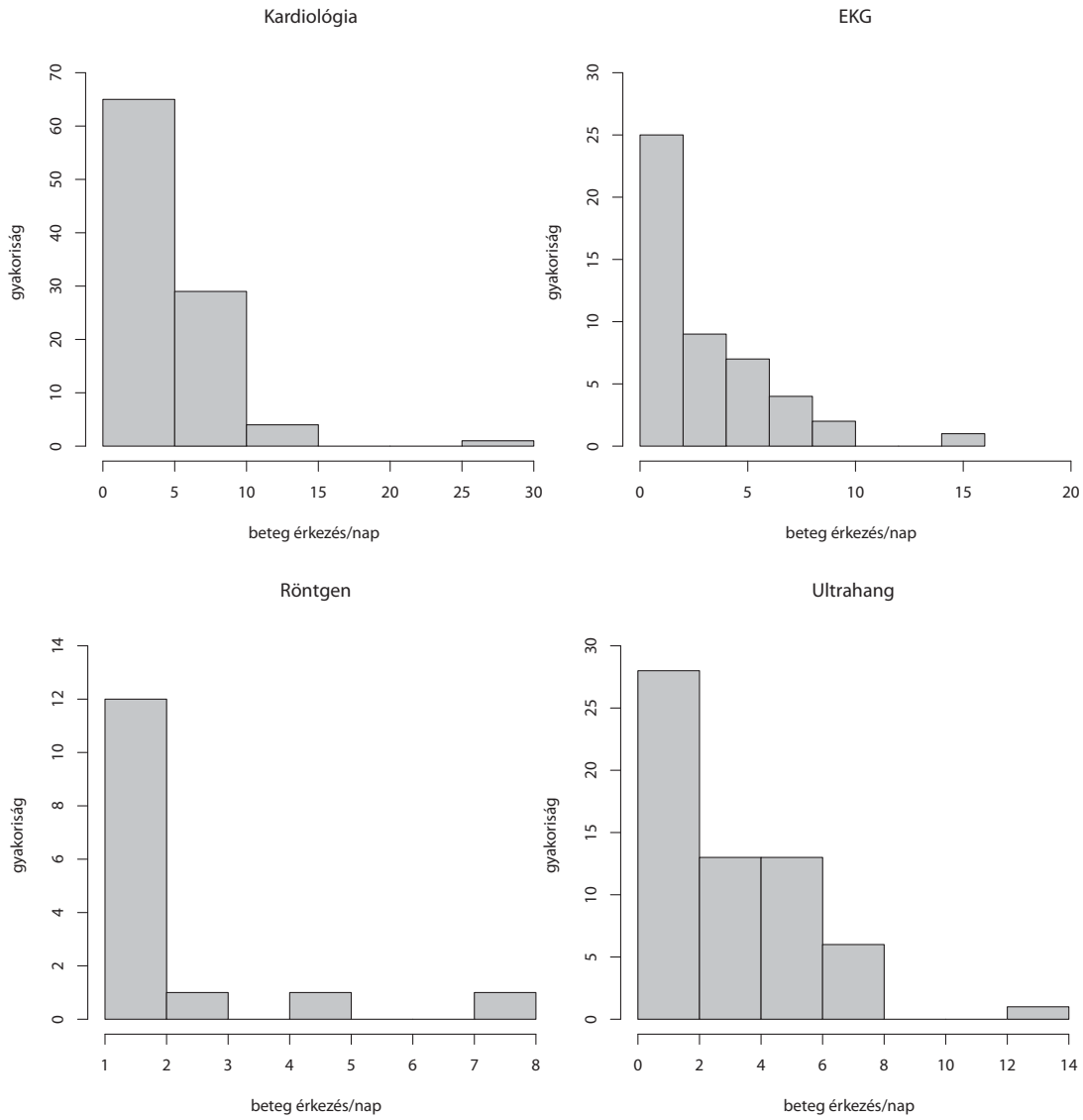
A fenti 2. ábrán azt láthatjuk, hogy az adataim hogyan helyezkednek el a mediánhoz viszonyítva. Csak a röntgen esetén fordul elő, hogy a medián a mintának az alsó felében helyezkedik el. Ez azt jelenti, hogy a mediánnál lévő betegnek elég keveset kell várakoznia.
A kanadai elemzés arról szól, hogy mennyi az orvosilag megengedett maximális várakozási idő és milyen jellegű gazdasági következményei vannak, ha valaki hosszabb ideig beteg.

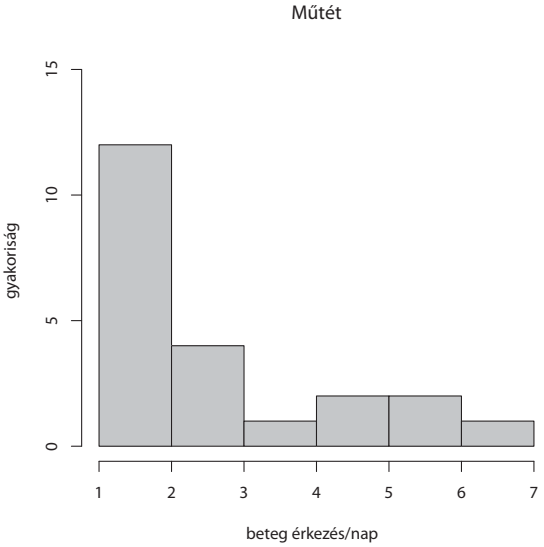
Orvosilag megengedett maximális várakozási idő	
Csípőprotézis műtét	182
Szürkehályog műtét	112
Coronaria stent beültetés	42
MRI	30

6.2. táblázat: kanadai adatok mediánra

Amint a táblázatokból kiolvasva is látható, a Magyarországon a várólista mediánján lévő beteg pont eléri az orvosilag ajánlott maximális várakozási időt (kanadai számítások alapján). Ez azt jelenti, hogy jelenleg még éppen határon belül vagyunk, azonban az 1. ábra alapján 2008 okóberében ez a várakozási idő elérte országosan a 300 napot is. Összevetve a kanadai táblázattal, ahol a tartományok között a maximális érték 161, a magyarországi adat már nem tűnik olyan jónak.
Az adatok elemzéséhez először egy hisztogram segítségével megnéztem, hogy egyáltalán milyen eloszláshoz hasonlíthat. Az ábrán azt láthatjuk, hogy hány olyan nap (y tengelyen) van, amikor x igény jelentkezik. Látható az x tengelyen nagy érték is, ennek oka, hogy csak olyan listához juthatunk hozzá, hogy hányan várakoznak jelenleg, és ők mikor kerültek fel a listára. Vannak olyanok, akik csak későbbre kapnak időpontot és van aki korábbra. Így a jelenlegi rendszerben mindig kevesen vannak, akik régen jelentkeztek (mondjuk annyira kiritkul, hogy úgy tűnik, mintha aznap csak 1 ember jelentkezett volna), de dátum szerint soknak tűnik. Viszont az olyan napok ritkán és kevés számban fordulnak elő, amikor sokan jelentkeznek.

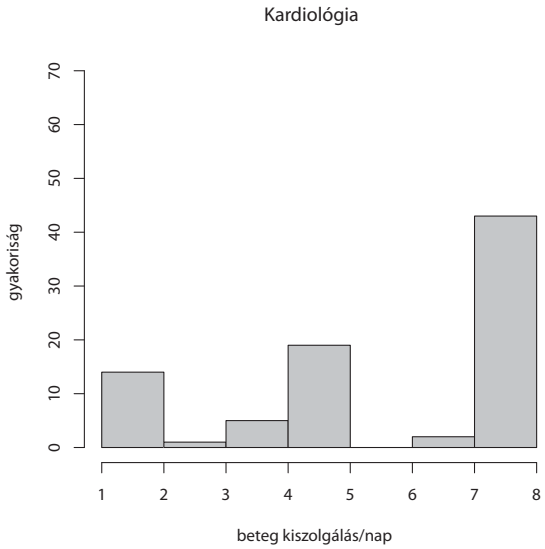
A következő hisztogrammokon a bejövő igények intenzitását láthatjuk:

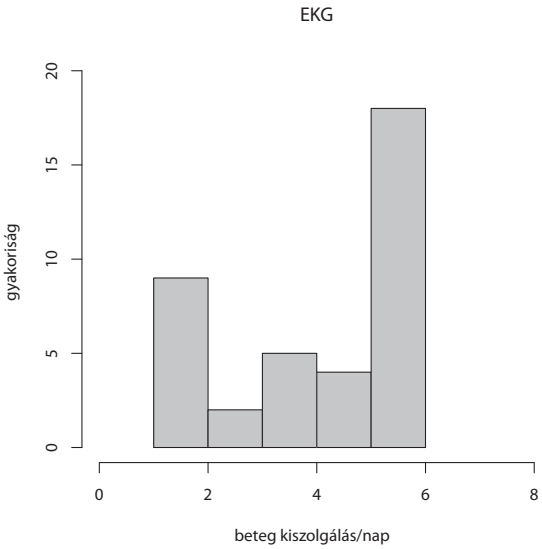


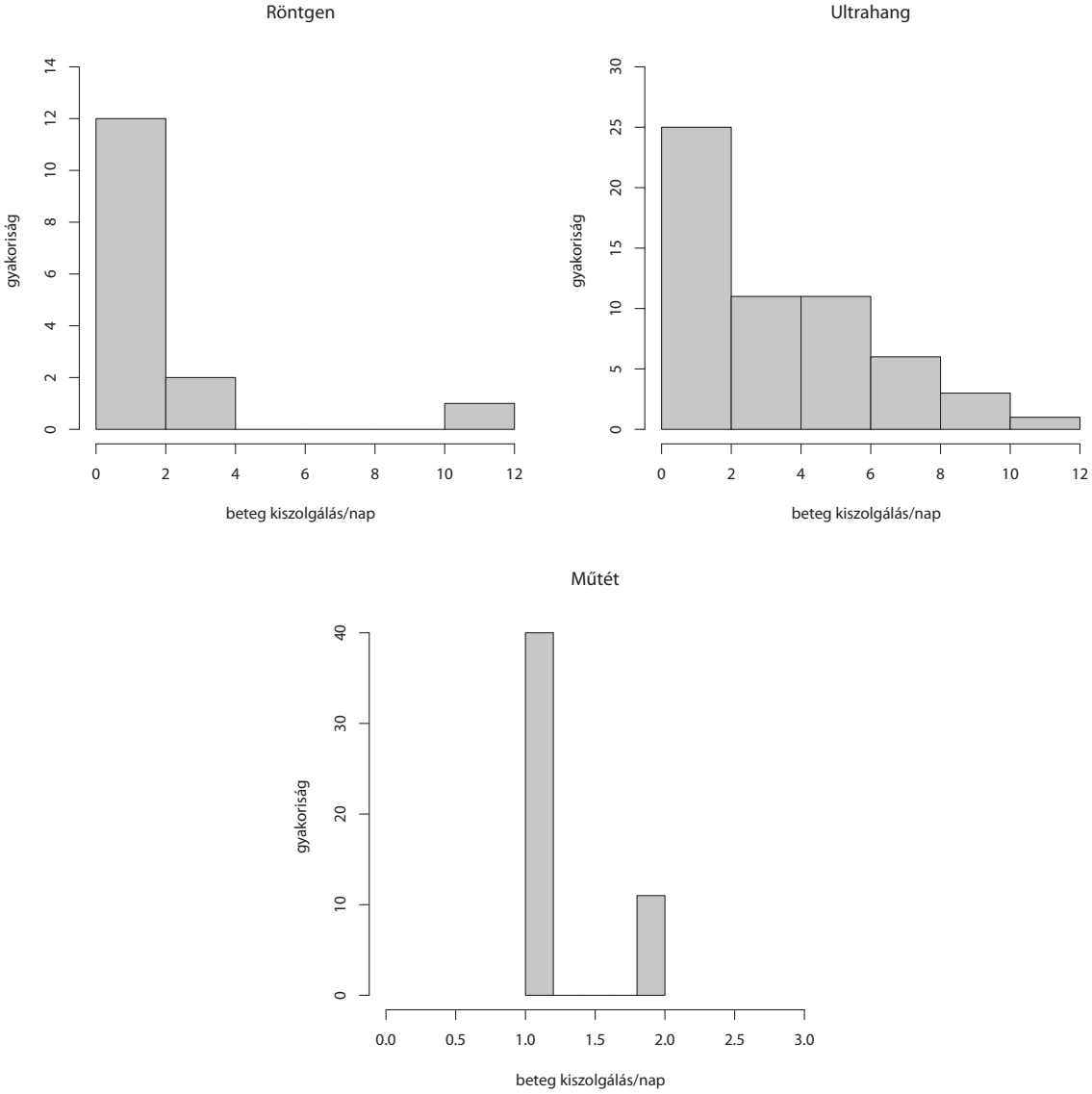


6.4.ábra: beérkezések

A kiszolgálás intenzitásának hisztogramjai pedig a következő ábrákon látható:







6.5. ábra: kiszolgálások

A kiszolgálás intenzitásra felrajzolt hisztogrammokon azt láthatjuk, hogy milyen gyakran fordult elő az, hogy egy napon x embert szolgáltak ki.
Az adatok, amelyekhez hozzájutottam nem teljesen fedik le a valóságot, ugyanis előfordulhatnak olyan esetek, amikor a várólista rövidül, például valakinek az állapota hirtelen romlik és szükséges a beavatkozás azonnali elvégzése.

6.1. Eloszlások illesztése

A konkrét várólistákról szerzett adatok alapján az R statisztikai programcsomag segítségével megvizsgáltam, hogy az adatok milyen eloszlásra illeszkednek.

A következő eloszlásokat vizsgáltam:

- Exponenciális eloszlás: Az eloszlások közül az egyik legkedveltebb örökifjú tulajdonsága miatt. Az X valószínűségi változó λ paraméterű exponenciális eloszlású, ha eloszlásfüggvénye:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases}$$

  Várható értéke és szórása pedig a következő: $\mathrm{E}X = \lambda$ és $\mathrm{D}^2X = \lambda^2$

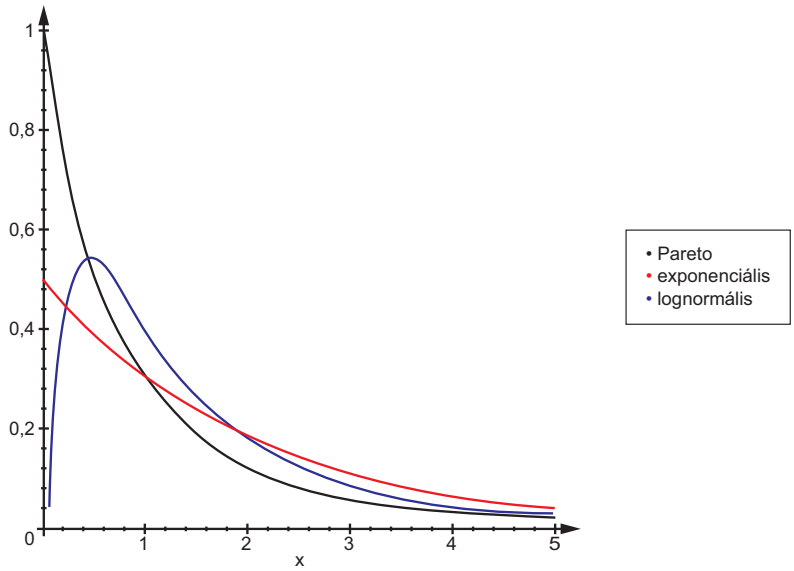
- Pareto eloszlás: az X valószínűségi változó (α, β) paraméterű Pareto-eloszlású, ha eloszlásfüggvénye:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - (\frac{\beta}{\beta+x})^{\alpha} & x > 0 \end{cases}$$

  A Pareto-eloszlást gyakran alkalmazzák tűzbiztosítások modellezéséhez, mivel a várható értéke csak $\alpha > 1$-re, a szórásnégyzete pedig csak $\alpha > 2$-re véges: $\mathrm{E}X = \frac{\beta}{\alpha-1}$, ha $\alpha > 1$és $\mathrm{D}^2X = \frac{\alpha\beta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$

- Lognormális eloszlás: az X valószínűségi változó (μ, σ^2) paraméterű lognormális, ha logaritmusa (μ, σ^2) paraméterű normális eloszlású, tehát a sűrűségfüggvénye $f_X(x) = \frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}(\frac{lnx-\mu}{\sigma})^2\right]$ A várható értéke és szórásnégyzete pedig:
  $\mathrm{E}X = exp(\mu + \sigma^2/2)$, $\mathrm{D}^2X = exp(2\mu + \sigma^2)\left[exp(\sigma^2) - 1\right]$

Az előbbiekben felírt eloszlások sűrűségfüggvényeit láthatjuk az ábrán kirajzolva.



6.6. ábra: eloszlások

Először megvizsgáltam, hogy normális eloszlás illeszkedik-e az adataimra. A fenti hisztogrammok alapján elutasítottam ennek lehetőségét. Következő megközelítésben exponenciális eloszlásra illesztettem, mivel a modell jelenleg exponenciális eloszlású beérkezési illetve kiszolgálási intenzitással tud számolni. A vizsgálathoz a legnépszerűbb módszert, a χ^2-próbát használtam. Az adatok 95%-os megbízhatósággal elfogadhatóak, ahol ezt megtehettük. Az alábbi táblázatban összefoglalom, hogy melyik adatra milyen eredmény jött ki:

	belépési intenzitás	kiszolgálási intenzitás
Kardiológia	exp(0,204)	nem exponenciális
Röntgen	exp(0,441)	exp(0,441)
EKG	exp(0,284)	nem exponenciális
Ultrahang	exp(0,282)	nem exponenciális
Műtét	exp(0,355)	nem exponenciális

6.3. táblázat: exponenciális illesztés

A fenti táblázat alapján a belépési intenzitásokból származó adataim szépen illeszthetőek exponenciális eloszlásra, amelyhez a paramétert az átlaggal becsültem. Azonban a kiszolgálási intenzitásnál nem kaptam ilyen szép eredményt. Azon adatokra, amelyek nem illeszkednek exponenciális eloszlásra, további vizsgálatokat végeztem.

Sorrendben a következő a Pareto-eloszlás illesztése: a paraméterek becsléhez az adatokból számítható tapasztalati szórást, illetve tapasztalati várható értéket használtam. Ezekkel kifejezve az α illetve a β paraméterek becslései a következőképpen néznek ki:

$$\hat{\alpha} = \frac{2\mathrm{D}^2\overline{X}}{\mathrm{D}^2\overline{X} - (\mathrm{E}\overline{X})^2}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\mathrm{E}\overline{X} \cdot (\mathrm{D}^2\overline{X} + (\mathrm{E}\overline{X})^2)}{\mathrm{D}^2\overline{X} - (\mathrm{E}\overline{X})^2}$$

A hisztogrammok alapján a kardiológiára és az EKG adatsorra biztosan nem fog illeszkedni egyik felsorolt eloszlás sem. Így a χ^2 statisztikát elegendő megnézni a műtétekből, illetve az ultrahangokból származó adatokra. A ultrahangból származó adatokra azt mondhatjuk a χ^2 statisztika alkalmazásával, hogy nagy biztonsággal Pareto eloszlású, $\alpha = 2,62$ és $\beta = 6,15$ paraméterekkel. A műtétekből származó adatokra pedig negatív α illetve β paramétereket kaptam, így ezek sem lesznek Pareto eloszlásúak.

3 adatsorra nem sikerült eloszlást illesztenem, a műtét, kardiológia és EKG adatsorokra.

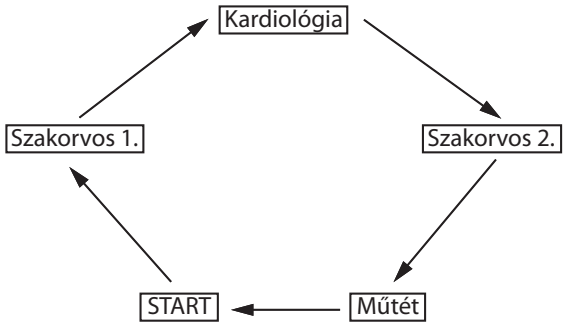
Az továbbiakban feltesszük, hogy mind a várakozási, mind a kiszolgálási idők exponenciális eloszlásúak, méghozzá az átlagból meghatározott paraméterrel. Az előző vizsgálatok szerint ez nem teljesen jogos, de modellünk alkalmazásához kénytelenek vagyunk ezt a feltételezést megtenni.

6.2. A modell vizsgálata

A modellt az R statisztikai program és egy pdq elnevezésű csomag segítségével építettük fel. A felípítés során nem tudunk elágazó hálózatot megadni, zárt hálózatokra kellett felbontani a modellünket. Nem tekintettem az összes lehetséges zárt hálózatot, ugyanis számunkra nem lényeges a műtétre várakozás szempontjából az, ha elegendő a betegnek gyógyszeres kezelés, illetve az is érdektelen eset számunkra, ha valamely vizsgálatot követően kiderül, hogy nem szükséges, avagy nem lehet megműteni. Valamint nem tekintettem azt az esetet sem, amikor még további vizsgálat is szükséges. Tehát tekinthetünk ezekre a zárt hálózatokra úgy is, mintha már csak egy vizsgálat elvégzése szükséges a műtét előtt. Ezek alapján négy zárt hálózatot képeztem, az alapján, hogy mely paraméterek befolyásolják a hálózat áteresztőképességét. Továbbá feltettem, hogy annak a valószínűsége, hogy egy beteg melyik zárt hálózatba kerül, az egyformán valószínű. Ez azt jelenti, hogy mind a négy hálózatra feltételezem, hogy a zárt hálózatokra jellemző jelen lévő igények száma $N = 200$.
Tehát a négy irányított kör a következő:

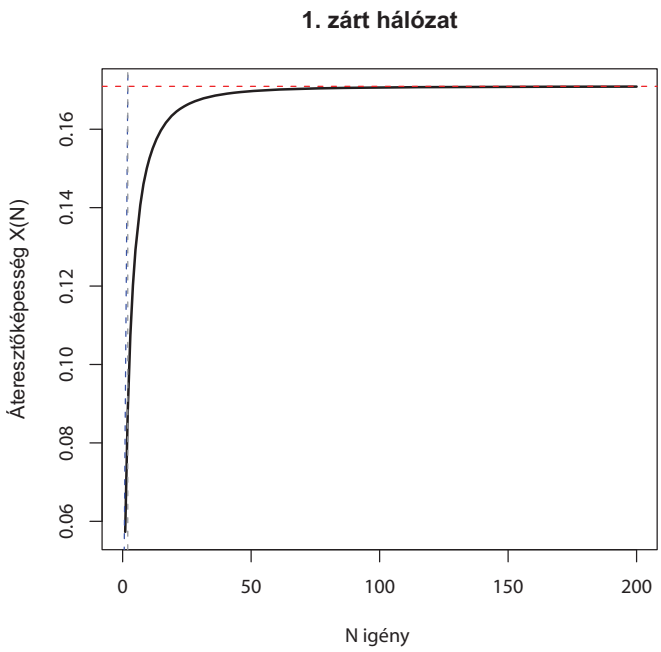
1. START $\rightarrow$ Szakorvos 1. $\rightarrow$ Kardiológia $\rightarrow$ Szakorvos 2. $\rightarrow$ Műtét $\rightarrow$ START
2. START $\rightarrow$ Szakorvos 1. $\rightarrow$ Röntgen $\rightarrow$ Szakorvos 2. $\rightarrow$ Műtét $\rightarrow$ START
3. START $\rightarrow$ Szakorvos 1. $\rightarrow$ EKG $\rightarrow$ Szakorvos 2. $\rightarrow$ Műtét $\rightarrow$ START
4. START $\rightarrow$ Szakorvos 1. $\rightarrow$ Ultrahang $\rightarrow$ Szakorvos 2. $\rightarrow$ Műtét $\rightarrow$ START

Az alábbi ábrán látható az első zárt hálózat:



6.7. ábra: 1. zárt hálózat

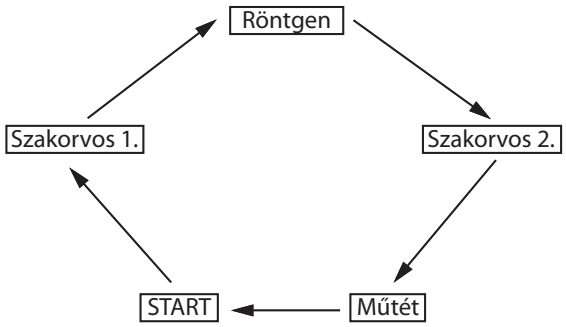
Az eredeti modellel összevetve az ábrán látható hálózatot, egy irányított kört alkot az eredeti modellben. Eme zárt hálózatot modellezve az alábbi áteresztőképességet kapjuk:



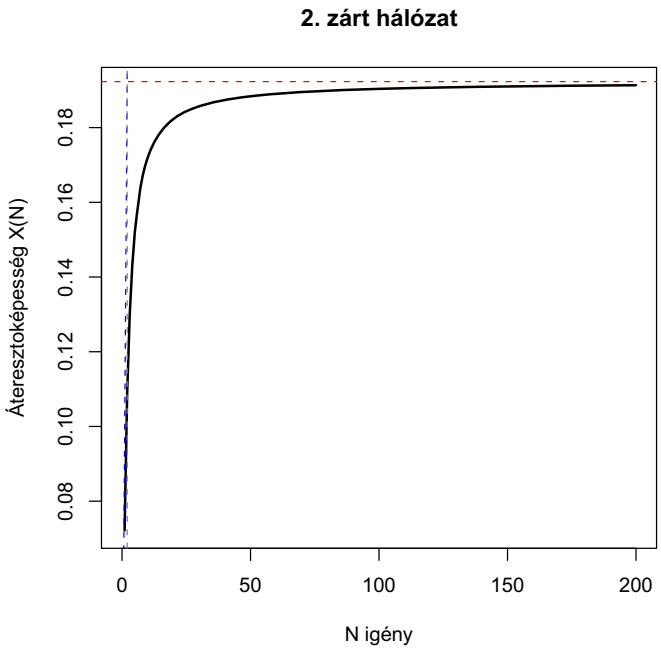
6.8. ábra: az 1. zárt hálózat áteresztőképessége

A grafikon x tengelyén azt láthatjuk, ha az igények számát növeljük egészen 200-ra, amely az igények feltételezett állandó száma, hogyan változik az áteresztőképesség, amely azt adja meg, hogy egységnyi idő alatt hány igényt tud kiszolgálni a hálózat. Az y tengelyen a kiszolgált emberek számát láthatjuk. Az áteresztőképesség monoton növő, de meglehetősen gyorsan konvergál 0.17-hez. Ha növeljük a kiszolgáló egységek számát, akkor lassabban éri el a maximumát. Az ábrán alig látható, azonban a kék szaggatott vonal mellett halad egy szürke szaggatott vonal, amely az optimális igények számát jelenti. N. J. Gunther szerint az optimális igények száma körülbelül a kiszolgáló pontok száma körül mozog. Ez magyarázat arra, hogy az előbbi és a következő grafikonokon is miért nem látható a szaggatott vonal.

Tekintsük a 2. zárt hálózatot, illetve az áteresztőképességét:

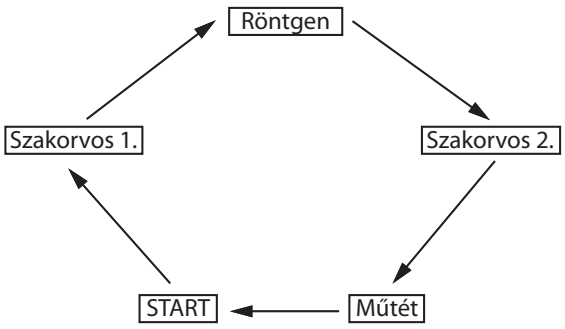


6.9. ábra: 2. zárt hálózat

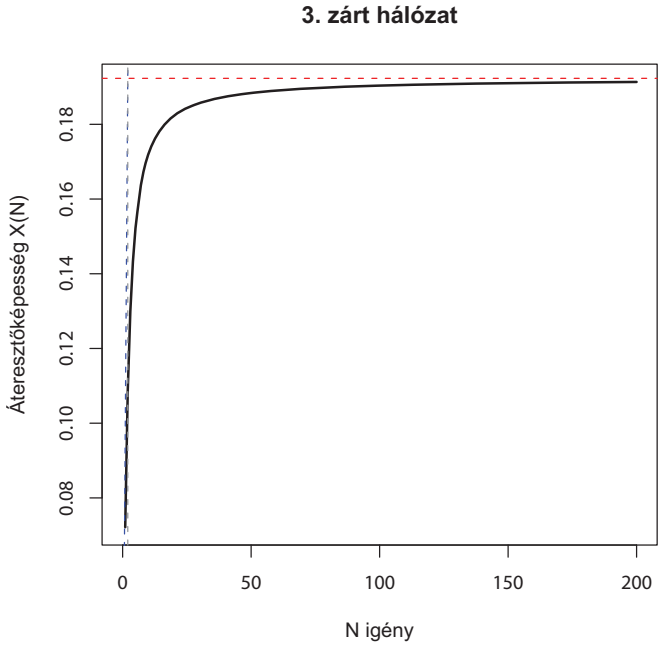


6.10. ábra: a 2. zárt hálózat áteresztőképessége

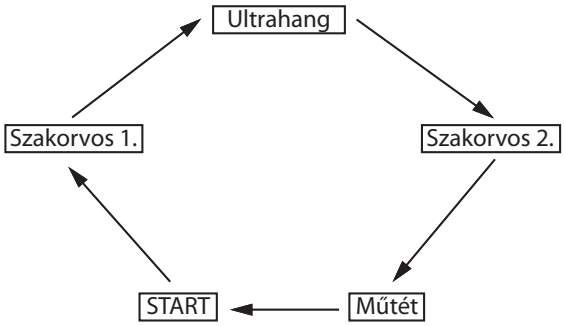
A 3. és 4. zárt hálózat ábráját, illetve áteresztőképességét az alábbi ábrán láthatjuk.



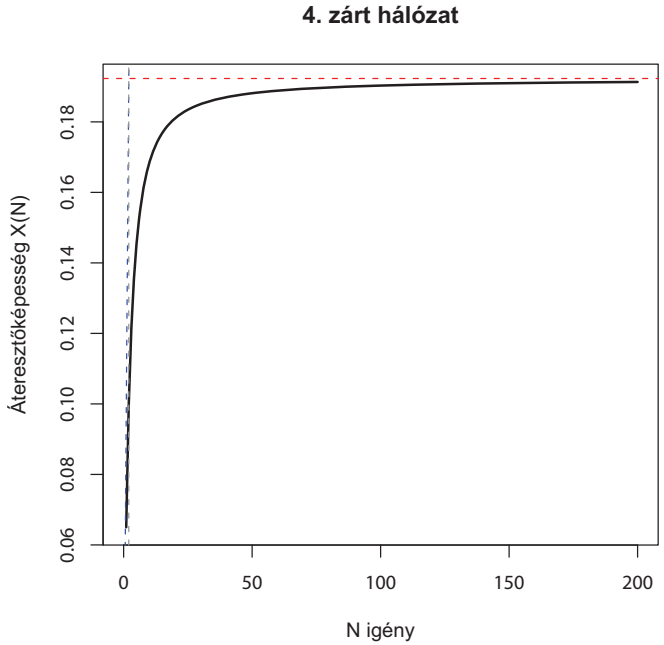
6.11. ábra: 3. zárt hálózat



6.12.ábra: a 3. zárt hálózat áteresztőképessége

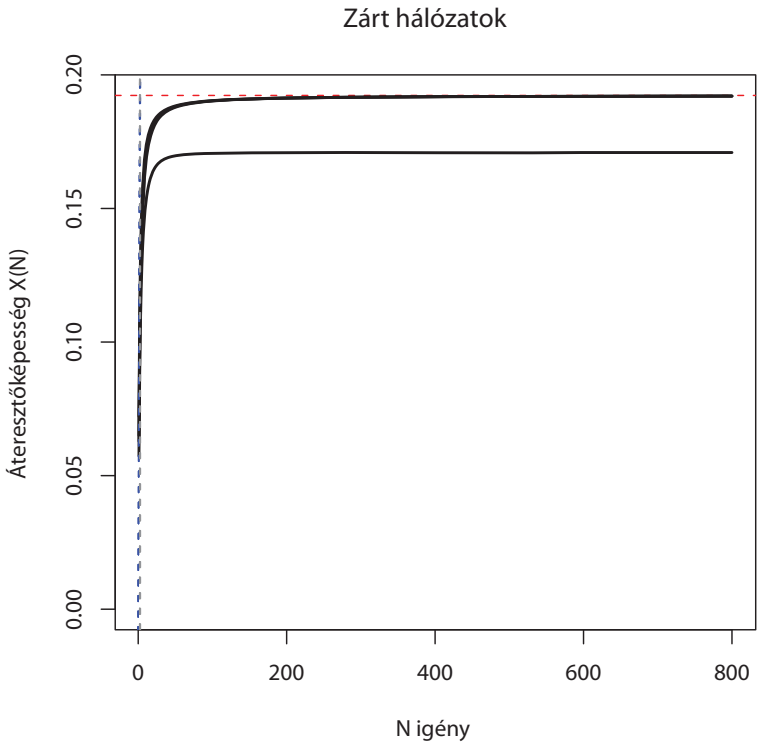


6.13. ábra: 4. zárt hálózat



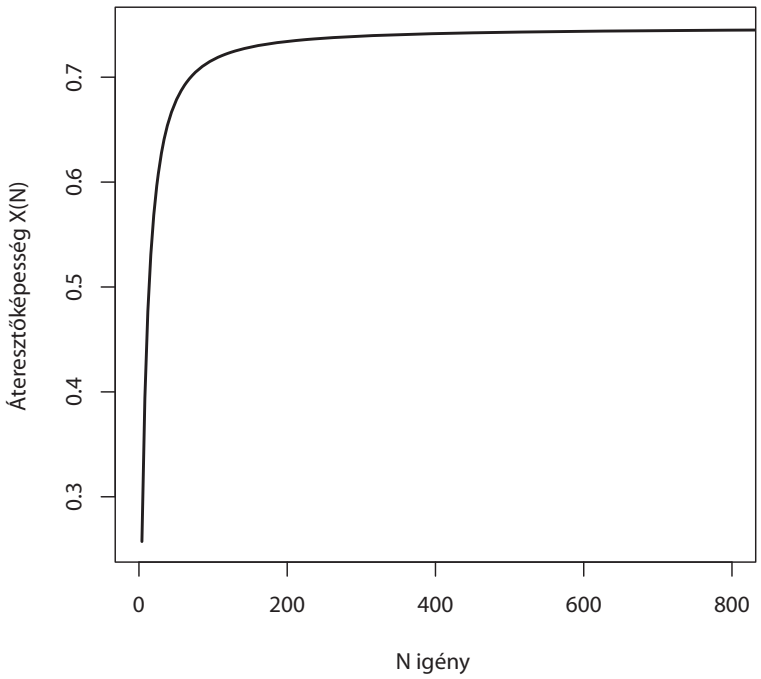
6.14. ábra: a 4. zárt hálózat áteresztőképessége

Ha egy grafikonon nézzük a görbéinket jól látható, hogy csak egy jelentősen eltérő görbe van.



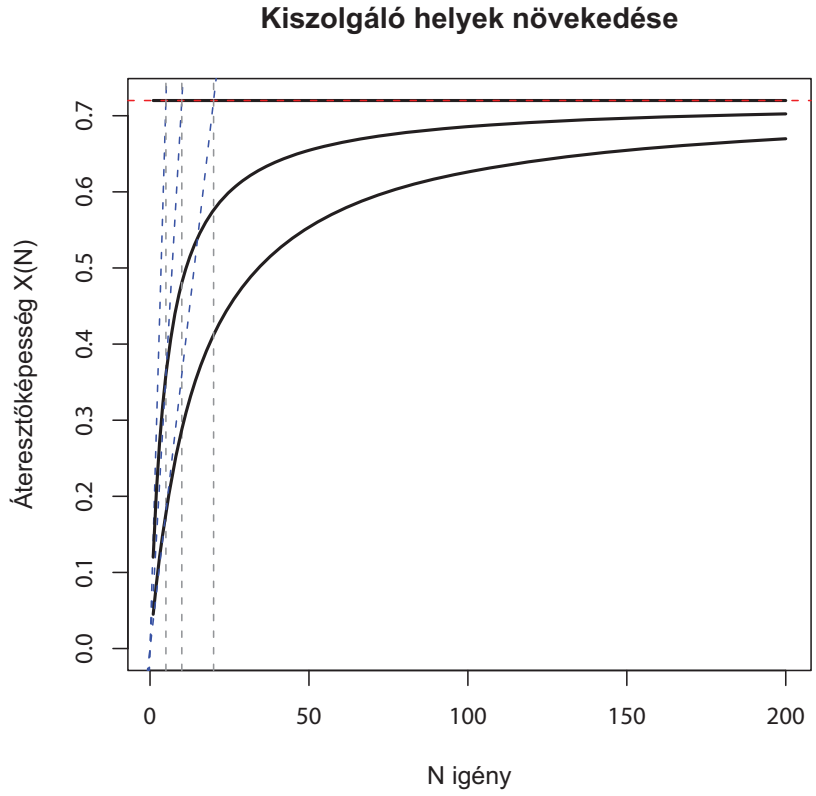
6.15. ábra: A zárt hálózatok áteresztőképessége

Ha a zárt hálózatok áteresztőképességét összeadjuk, az irodalmi áttekintésben található leírás alapján ezt nyugodtan megtehetjük, az alábbi áteresztőképességet kapjuk:



6.16. ábra: a modell áteresztőképessége

Amint az ábrán láthatjuk, valamivel 0.7 felett éri el a telítettségét a hálózat. A fenti ábra azt jelenti, hogy a négy zárt hálózat által meghatározott modellünknek összesen mennyi az áteresztőképessége.
Vizsgáljuk most azt az esetet, amikor növeljük a kiszolgáló helyek számát. Amint a grafikonon is látható, ha megduplázzuk, avagy megnégyszerezzük a kiszolgáló egységek számát, az áteresztőképesség maximumát csak jelentősen lassabban éri el.



A fenti ábra alapján azt mondhatjuk, hogy a várakozási idő csökkentésének érdekében indokolt lenne a kiszolgáló egységek számának növelése, mivel jelentősen javulna a rendszerünk a betgek szempontjából.

7. fejezet - Összegzés

A diplomamunkám során a magyar egészségügy vizsgálatával foglalkoztam, a betegek szempontjából vizsgáltam a jelenlegi rendszert. A modellezéshez a Jackson hálózatok modelljét választottam, mivel ez felel meg legjobban az elvárásainknak. A 2. fejezet a Jackson hálózatok elméleti áttekintésével foglalkozik, majd miután bemutattam a különböző változatokat, a zárt modell mellett döntöttem. Ezt követően a rendelkezésemre álló magyar adatokat kezdtem el vizsgálni, összevetve egy kanadai felméréssel. A modell felépítéséhez szükséges volt eloszlás illesztése az adatsorra, majd a paraméterek vizsgálata. A felépített modellben megvizsgáltam, hogy amennyiben minden csomópontban csak egy kiszolgálóegység található, hogyan változik az áteresztőképesség. Ezt követően azt is meg vizsgáltam, hogyan változna az áteresztőképesség, ha növelnénk a kiszolgáló helyek számát. A későbbiekben érdekes lehet megvizsgálni az adatokat azokra az eloszlásokra, amelykre sikerült illeszteni, illetve tovább optimalizálni a rendszert, hogy a betegeknek ne kelljen a vizsgálatokkal együtt sem többet várakozni, mint amennyi az orvosilag indokolt maximum.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni témavezetőimnek, Arató Miklósnak és Mályusz Károlynak, hogy szakdolgozatom elkészüléséhez hozzájárultak szakmai tudásukkal, tanácsaikkal. Mályusz Károlynak, hogy már szeptembertől kezdve foglalkozott velem, és ötleteivel segített a megfelelő irányba terelni.

8. fejezet - Függelék

```
#Eloszlás illesztése
#Kardiológia
kardio1 <- matrix(adat1[[2]],ncol=1,byrow=T)
kardio<-kardio1[1:99]
intervallum <- c(inter1<-kardio[1:32], inter2<-kardio[33:55], inter3<-kardio[56:72],
inter4<-kardio[73:84], inter5<-kardio[85:94], inter6<-kardio[95:99])
atlag<-c(mean(inter1), mean(inter2), mean(inter3), mean(inter4),
mean(inter5), mean(inter6))
elmeleti1 <- 99*(1-exp(-kardio[32]/mean(intervallum)))
elmeleti2 <- 99*(1-exp(-kardio[55]/mean(intervallum)))-elmeleti1
elmeleti3 <- 99*(1-exp(-kardio[72]/mean(intervallum)))-elmeleti2-elmeleti1
elmeleti4 <- 99*(1-exp(-kardio[84]/mean(intervallum)))-elmeleti3-elmeleti2-elmeleti1
elmeleti5 <- 99*(1-exp(-kardio[94]/mean(intervallum)))-elmeleti4-elmeleti3-elmeleti2-
elmeleti1
elmeleti6 <- 99*(1-exp(-kardio[99]/mean(intervallum)))-elmeleti4-elmeleti5-elmeleti3-
elmeleti2-elmeleti1
elmeleti<-elmeleti<-c(elmeleti1, elmeleti2, elmeleti3, elmeleti4, elmeleti5, elmeleti6)
gyakorisag<-c(32, 22, 17, 12, 10, 5)
egy<-((elmeleti[1]-gyakorisag[1])^2)/gyakorisag[1]
ketto<-((elmeleti[2]-gyakorisag[2])^2)/gyakorisag[2]
harom<-((elmeleti[3]-gyakorisag[3])^2)/gyakorisag[3]
negy<-((elmeleti[4]-gyakorisag[4])^2)/gyakorisag[4]
ot<-((elmeleti[5]-gyakorisag[5])^2)/gyakorisag[5]
hat<-((elmeleti[6]-gyakorisag[6])^2)/gyakorisag[6]
khi<-egy+ketto+harom+negy+ot+hat khi



#Áteresztőképességet mérő függvény
clients =800
stime<-5.2
think=0
node1="Szakorvos"
node2="Kardiologia"
node3="Rontgen"
node4="EKG"
node5="Ultrahang"
node6="Szakorvos2"
node7="Mutet"
kardio="w"
#definiálom a 4 zárt hálózat paramétereit
xc<-0
```

```
yc<-0
for (i in 1:clients) {
Init("")
CreateClosed(kardio, TERM, as.double(i), think)
CreateNode(node1, CEN, FCFS)
CreateNode(node2, CEN, FCFS)
CreateNode(node6, CEN, FCFS)
CreateNode(node7, CEN, FCFS)
SetDemand(node1, kardio, 5.2)
SetDemand(node2, kardio, 5.85)
SetDemand(node6, kardio, 5.2)
SetDemand(node7, kardio, 1.2)
Solve(APPROX)
xc[i]<-as.double(i)
yc[i]<-GetThruput(TERM, kardio)
nopt1<-GetLoadOpt(TERM, kardio)
}
xd<-0
yd<-0
for (i in 1:clients) {
Init("")
CreateClosed(rontgen, TERM, as.double(i), think)
CreateNode(node1, CEN, FCFS)
CreateNode(node3, CEN, FCFS)
CreateNode(node6, CEN, FCFS)
CreateNode(node7, CEN, FCFS)
SetDemand(node1, rontgen, 5.2)
SetDemand(node3, rontgen, 2.26)
SetDemand(node6, rontgen, 5.2)
SetDemand(node7, rontgen, 1.2)
Solve(APPROX)
xd[i]<-as.double(i)
yd[i]<-GetThruput(TERM, rontgen)
nopt2<-GetLoadOpt(TERM, rontgen)
}
xe<-0
ye<-0
for (i in 1:clients) {
Init("")
CreateClosed(ekg, TERM, as.double(i), think)
CreateNode(node1, CEN, FCFS)
CreateNode(node4, CEN, FCFS)
CreateNode(node6, CEN, FCFS)
CreateNode(node7, CEN, FCFS)
SetDemand(node1, ekg, 5.2)
```

```
SetDemand(node4, ekg, 4.31)
SetDemand(node6, ekg, 5.2)
SetDemand(node7, ekg, 1.2)
Solve(APPROX)
xe[i]<-as.double(i)
ye[i]<-GetThruput(TERM, ekg)
nopt3<-GetLoadOpt(TERM, ekg)
}
xf<-0
yf<-0
for (i in 1:clients) {
Init("")
CreateClosed(ultrahang, TERM, as.double(i), think)
CreateNode(node1, CEN, FCFS)
CreateNode(node5, CEN, FCFS)
CreateNode(node6, CEN, FCFS)
CreateNode(node7, CEN, FCFS)
SetDemand(node1, ultrahang, 5.2)
SetDemand(node5, ultrahang, 3.78)
SetDemand(node6, ultrahang, 5.2)
SetDemand(node7, ultrahang, 1.2)
Solve(APPROX)
xf[i]<-as.double(i)
yf[i]<-GetThruput(TERM, ultrahang)
nopt4<-GetLoadOpt(TERM, ultrahang)
}
x<-xc+xd+xe+xf
y<-yc+yd+ye+yf
plot(x, y, type="l", xlim=c(0,800), lwd=2, xlab="N igény",
ylab="ÁteresztőképességX(N)")
title("Zárt hálózatok")
abline(0, 1/(nopt1*stime), lty="dashed", col="blue")
abline(v=nopt1, lty="dashed", col="gray50")
abline(1/stime, 0, lty="dashed", col="red")
```

Hivatkozások

[1] Hong Chen, David D. Yao: *Fundamentals of Queueing Networks: Performance, Asymptotics, and Optimization,* Springer (2001)

[2] The Centre for Spatial Economics: *The economic cost of wait times in Canada* (2008)

[3] Qiguo Gong, K. K. Lai, Shouyang Wang: *Supply chain networks: Closed Jackson network models and properties* (2007)

[4] http://ebf.hu/letoltes/varolista/vlista_stat_2009_nov_v1.0.pdf

[5] http://www.szote.u-szeged.hu/medcentrum/centrum/index.php?option=com_wrapper&Itemid=139

[6] http://www.mohacskorhaz.hu/OUTPUT/varolista.html

[7] N. J. Gunther: Analyzing Computer System Performance with Perl::PDQ (2005)