Többszörösen redundánsan merev és globálisan merev gráfok a síkban

Diplomamunka

Írta: Bilics Adrián

Alkalmazott matematikus szak

Témavezető:

Jordán Tibor, tanszékvezető egyetemi tanár
Operációkutatási Tanszék
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2011

Tartalomjegyzék

Bevezetés **1**

1. Síkbeli szerkezetek merevsége **3**

1.1. Síkbeli szerkezetek 3
1.2. Szerkezetek mozgása, illetve merevsége 4
1.3. A merevségi mátrix 6
1.4. Nevezetes tételek 7

2. Többszörösen redundánsan merev gráfok **9**

2.1. Alapfogalmak és megfigyelések 9
2.2. Összefüggőségi és merevségi indexek kapcsolata 10
2.3. A k-élmerev gráfosztály 14
2.4. A 2-pontmerev gráfosztály 15
2.5. A 3-pontmerev gráfosztály 19
2.6. Statisztikai redundáns merevség 21

3. Globálisan merev gráfok **24**

3.1. Alapfogalmak és megfigyelések 24
3.2. Kapcsolatok egyéb gráfosztályokkal 25
3.3. Hatszoros vegyes-összefüggőség 27
3.4. Minimalitás és redundancia 27
3.5. Globálisan 2-pontmerev gráfok 29
3.6. Globálisan 3-pontmerev gráfok 30

4. Matroidelméleti megközelítés **33**

4.1. Matroidok 33
4.2. A merevségi matroid 34
4.3. $\mathcal{M}(G)$ komponensei 35
4.4. A merevségi matroid egyértelműsége 37
4.5. Gráfok poligonja 38

4.6. Gráfok szeparálása 39

Függelék **43**

Irodalomjegyzék **44**

Köszönetnyilvánítás **45**

Ábrák jegyzéke

1.1. Síkbeli szerkezet 3
1.2. Síkbeli szerkezetek mozgása 5
1.3. Henneberg-féle konstrukció 8

2.1. $\lambda(G)$ és $R_e(G)$ kapcsolata 13
2.2. $\kappa(G)$ és $R_e(G)$ függetlensége 14
2.3. A C_8 gráf második hatványa 16
2.4. Erősen minimális 2-pontmerev gráfok 17
2.5. Példa gyengén minimális 2-pontmerev gráfra 18
2.6. Gyengén minimális 2-pontmerev gráfok növekvő többlettel 18
2.7. Erősen minimális 2-pontmerev gráfok konstrukciója 19
2.8. Újabb példa gyengén minimális 2-pontmerev gráfra 19
2.9. Erősen minimális 3-pontmerev gráf hat ponton 20
2.10. Megfelelő élszám mellett mégsem 3-pontmerev gráf 20
2.11. Erősen minimális 3-pontmerev gráfok hét és nyolc ponton 21
2.12. A kerék-gráf pontmerevsége 22

3.1. Példa nem redundánsan pontmerev, de globálisan merev gráfra 26
3.2. Példa redundánsan élmerev, de nem globálisan merev gráfra 26
3.3. Példa 3-összefüggő, de nem globálisan merev gráfra 26
3.4. Példa erősen minimális globálisan 2-pontmerev gráfra 29
3.5. A globálisan 3-pontmerev R_{2n} gráf $(n = 4)$ 31
3.6. Erősen minimális globálisan 3-pontmerev gráfok konstrukciója 32

4.1. A tárgyalt gráfosztályok közötti kapcsolatok $|V| \geq 4$ feltétel mellett . 37
4.2. Egy síkbeli gráf keresztező 2-szeparátorai 40
4.3. $\mathcal{M}$–összefüggő gráfok konstrukciója K_4-ből 41

Bevezetés

A XX. század második felében felgyorsult az élet, a rohamos technikai fejlődés rengeteg kérdést vet fel. A napjainkban felmerülő gyakorlati problémák egy része jól modellezhető a gráfelmélet segítségével. Szakdolgozatomban ezen terület egyik speciális részével, a merev gráfok jellemzésével foglalkozom. A gráfelmélet egy érdekes részterülete a matematikának, de további motiváció végett, illetve a témakör fontosságának igazolására következik most néhány olyan gyakorlatban felmerülő kérdés, amelyek megválaszolásához segítséget nyújt a merev gráfok elméletének alaposabb ismerete.

A) Pilóta nélküli repülőeszközöket (angolul Unmanned Aerial Vehicle, UAV) a katonai repülésben az 1960-as évek óta alkalmaznak olyan feladatokra, amelyek túl veszélyesek ahhoz, hogy emberek életét kockáztassák teljesítésük érdekében vagy túl sokáig tartanak, így csak több pilóta lenne képes azt teljesíteni. Ezek a gépek gyakran egy előre meghatározott formációt alkotva közlekednek a levegőben. A repülés ideje alatt egy erre alkalmas műszer segítségével az egymástól való távolság minden pillanatban mérhető. Feltehetjük a kérdést, hogy egy-egy alakzat mennyire merev, azaz csupán ennyi információ birtokában megőrizhető-e az adott formáció a feladat végrehajtása során [15], [16], [18].

B) A szenzorhálózatok sok intelligens érzékelő egységből felépített, autonóm működésre képes elosztott számítógépes hálózatok, amelyek a tér különböző pontjain megfigyeléseket és esetleg beavatkozó tevékenységeket is végezhetnek. Az alapvető adatgyűjtő funkción kívül az érzékelő hálózat képes adatfeldolgozás és analízis jellegű feladatok elvégzésére is. Az alacsony árnak és a kis méretnek köszönhetően a szenzorok a megfigyelt térrészben vagy annak közelében viszonylag sűrűn és nagy számban helyezkedhetnek el. Költségmegtakarítás céljából azonban csak néhány szenzor képes a pontos saját helyzetét megállapítani. A többi érzékelő egység csupán a közelében tartózkodó szenzoroktól való távolságának mérésére képes. Felmerülhet a kérdés, hogy melyik egysé-

gek számára nélkülözhetetlen a saját helymeghatározás ahhoz, hogy a többi szenzor pillanatnyi koordinátái is ismertté váljanak számunkra [15], [16].

C) Szintén fontos szempont lehet a kiépített hálózatok, illetve formációk robusztussága. Természetesen adódó kérés, hogy lehetőség szerint egy szenzor vagy légi jármű meghibásodása és elvesztése, máskor néhány egység közötti kapcsolat megszakadása minél kisebb mértékben nehezítse meg egy adott feladat végrehajtását [12], [15], [16].

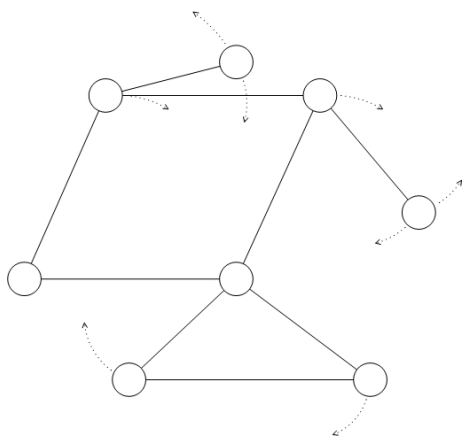
1. fejezet

Síkbeli szerkezetek merevsége

A továbbiakban gráfok merevsége minden esetben a síkban értendő. A szakdolgozatomban elsősorban a többszörösen redundánsan pont-, illetve élmerev, valamint globálisan merev gráfok karakterizációját és egymáshoz való kapcsolatát vizsgálom. Ezenfelül lehetőség szerint előállítási tételeket is kimondok, illetve érdekes nyitott kérdéseket említek meg. Ez a fejezet a mindezekhez szükséges alapvető definíciókat és elnevezéseket, a gráfok merevségének fogalmát, valamint néhány nevezetes tételt tartalmaz.

1.1. Síkbeli szerkezetek

1.1.1. Definíció (Síkbeli szerkezet). *Egy (G, p) párt síkbeli szerkezetnek nevezünk, ha $G = (V, E)$ egy egyszerű, irányítatlan gráf, $p : V \longmapsto \mathbf{R}^2$ pedig a gráf csúcshalmazának a síkba történő leképezése.*



1.1. ábra. Síkbeli szerkezet

1.1.2. Definíció (Realizáció). *Az 1.1.1 definícióban szereplő* $p : V \longmapsto \mathbf{R}^2$ *függvényt a* $G = (V, E)$ *gráf egy realizációjának hívjuk.*

A bevezető részben említett feladatok esetén az adott probléma egy gráf és annak egy realizációja segítségével modellezhető. Tekintsük most az alábbi példát. Vegyük a $G = K_{3,3}$ gráf két különböző realizációját. (G, p) legyen olyan, amelyben a pontok egy szabályos hatszöget alkotnak, míg (G, q) olyan, amelyben a pontok koordinátái algebrailag függetlenek egymástól. Ellenőrizhető, hogy a (G, p) szerkezet kismértékben deformálható a síkban, ellenben (G, q) nem. Ezen tulajdonság miatt a most következő definícióra hivatkozni fogok a későbbiek során is.

1.1.3. Definíció (Generikus realizáció). *Egy* (G, p) *realizációt generikusnak nevezünk, ha a csúcsok koordinátái algebrailag függetlenek.*

Egy (G, p) realizáció merevségének definiálásához két további tulajdonságra van szükségünk.

1.1.4. Definíció (Ekvivalencia és kongruencia). *Azt mondjuk, hogy* (G, p) *és* (G, q) *ekvivalensek, ha tetszőleges* $e = (u, v) \in E$ *élre* $|p(u) - p(v)| = |q(u) - q(v)|$ *fennáll, valamint kongruenseknek nevezzük őket, ha az iménti* $|p(u) - p(v)| = |q(u) - q(v)|$ *egyenlőséget tetszőleges* $u, v \in V$ *csúcspárra teljesítik.*

1.2. Szerkezetek mozgása, illetve merevsége

Egy merev szerkezettől azt várjuk, hogy ne lehessen azt a csuklók mentén deformálni. Mindezt most már precízen is megfogalmazhatjuk.

1.2.1. Definíció (Merevség I.). *A* (G, p) *szerkezet merev, ha létezik olyan* $\varepsilon > 0$, *amelyre teljesül az alábbi feltétel: ha* (G, q) *ekvivalens* (G, p)*-vel és tetszőleges* $v \in V$ *esetén* $|q(v) - p(v)| \leq \varepsilon$, *akkor* (G, q) *kongruens* (G, p)*-vel.*

A következő függvény egy (G, p) síkbeli szerkezet lehetséges mozgásait írja le. Rögtön látni fogjuk, hogy ennek segítségével szintén megadható a merevség fogalma.

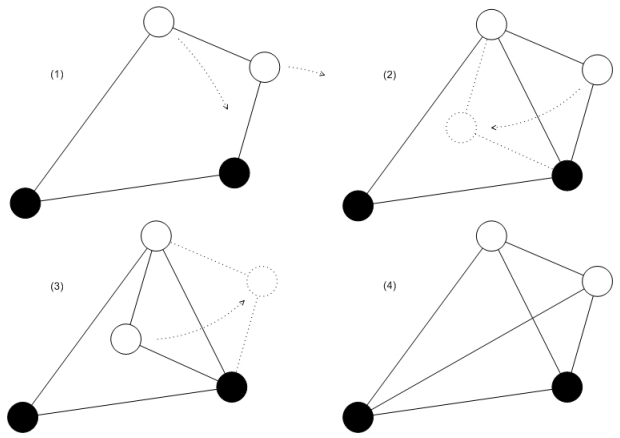
1.2.2. Definíció (Szerkezet mozgása). (G, p) *mozgása* (G, q)*-ba egy olyan*

$$f : [0, 1] \times V \longmapsto \mathbf{R}^2$$

függvény, amelyre

- *minden* $v \in V$ *esetén* $f(0, v) = p(v)$ *és* $f(1, v) = q(v)$

- *minden* $e = (u, v) \in E$ *esetén* $|f(t, u) - f(t, v)| = |p(u) - p(v)|$ *bármely* $0 \leq t \leq 1$*-re*
- $p(t, v)$ *folytonos* t*-ben minden* $v \in V$ *esetén.*



1.2. ábra. Síkbeli szerkezetek mozgása

1.2.3. Definíció (Merevség II.). *Egy* (G, p) *szerkezetet merevnek nevezünk, ha kizárólag vele kongruens szerkezetbe mozog át.*

A most ismertetett definíció ekvivalens a korábban megfogalmazott 1.2.1 definícióval. Egy (G, p) merev szerkezet bármely $f : [0, 1] \times V \longmapsto \mathbf{R}^2$ mozgása síkban történő eltolást vagy forgatást jelent. Az 1.2 ábrán négy szerkezet látható. Az első a szaggatott nyilak mentén deformálható, ennek megfelelően nem merev. A második és a harmadik gráf azonban merev. A két eltérő realizáció jóllehet ugyanahhoz a gráfhoz tartozik, de mégsem létezik olyan $f : [0, 1] \times V \longmapsto \mathbf{R}^2$ mozgást leíró függvény, amely az egyik realizációt a másikba viszi át. A negyedik gráf bármely két realizációja kongruans egymással.

1.2.4. Definíció (Infinitezimális mozgás). *A* (G, p) *szerkezet infinitezimális mozgása egy* $u : V \longmapsto \mathbf{R}^2$ *függvénnyel írható le, amelyre*

$$(u(x) - u(y))(p(x) - p(y)) = 0$$

bármely $(x, y) \in E$ *esetén.*

Tehát egy szerkezet vagy gráf infinitezimális mozgása egy olyan függvény, amely a pontokhoz sebességvektorokat rendelve egy olyan mozgásirányt ír le, amely során minden élhosszúság változatlan marad. Ezek közül triviálisnak tekinthető az elforgatás, illetve az eltolás, amelyekre a következő tulajdonság jellemző.

1.2.5. Definíció (Triviális infinitezimális mozgás). *Egy u infinitezimális mozgást triviálisnak nevezünk, ha felírható $u(v) = Sp(v) + t$ alakban, ahol $S \in R^{2x2}$ antiszimmetrikus mátrix, t pedig síkbeli vektor.*

1.3. A merevségi mátrix

Az infinitezimális mozgásokat egy mátrixba rendezve az infinitezimális merevség fogalmához jutunk. Most megmutatjuk, hogy általános esetben a merevség és az infinitezimális merevség egymással egyenértékű.

1.3.1. Definíció (Merevségi mátrix). *Egy (G, p) szerkezet merevségi mátrixát $R(G, p)$-vel jelöljük. $R(G, p)$-nek $|E|$ sora és $2|V|$ oszlopa van, az $e = (u, v)$ élnek megfelelő i-edik sora pedig az alábbi:*

$$\mathbf{R(G,p)_i} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & u_1 - v_1 & u_2 - v_2 & \dots & 0 & \dots & v_1 - u_1 & v_2 - u_2 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

1.3.2. Definíció (Infinitezimális merevség). *Azt mondjuk, hogy a (G, p) realizáció infinitezimálisan merev, ha merevségi mátrixának rangjára*

$$r(R(G, p)) = 2|V| - 3$$

Mivel a triviális infinitezimális mozgások, azaz a síkban történő eltolások, illetve a forgatás merőlegesek a merevségi mátrix minden sorára, valamint az azoknak megfelelő $R(G, p)$-beli sorok lineárisan függetlenek, ezért $r(R(G, p)) \leq 2|V| - 3$.

1.3.3. Definíció (Gráfok merevsége). *Egy $G = (V, E)$ gráfot merevnek nevezünk, ha létezik olyan $p : V \longmapsto \mathbf{R}^2$ hozzárendelés, amelyre (G, p) infinitezimálisan merev.*

1. Példa. Tekintsük az a gráfot, amely három pontjának koordinátái rendre $(0, 0)$, $(0, 3)$ és $(4, 0)$. Ekkor

$$R(G, p) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Számolással ellenőrizhető, hogy a mátrix sorai lineárisan függetlenek, azaz a realizáció infinitezimálisan merev. Tehát a K_3 gráf merev.

2. Példa. Most tekintsünk egy olyan gráfot, amely három pontjának koordinátái egy egyenesre esnek. Legyenek ezek az egyszerűség kedvéért $(0,0)$, $(1,0)$ és $(2,0)$. Ekkor

$$R(G,p) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A második példában a sorok nem függetlenek, így ugyanannak a merev gráfnak egy másik realizációja már nem infinitezimálisan merev.

1.3.4. Állítás (Inf. merevség és merevség kapcsolata). *Ha egy (G,p) szerkezet infinitezimálisan merev, akkor merev. A megfordítás nem feltétlenül igaz. Amennyiben azonban a szerkezet generikus, akkor az infinitezimális merevség egyenértékű a merevséggel. Ilyen esetben a merevség csupán a gráftól függ és nem annak realizációjától.*

1.4. Nevezetes tételek

A fejezet végén megemlítek három olyan tételt, amelyek a merev gráfok elméletében jelentős szerepet játszanak. Elsőként Laman tételét mondom ki, amelyhez szükség lesz gráfok függetlenségének és ritkaságának fogalmára.

1.4.1. Definíció (Függetlenség). *Egy (G,p) realizáció független, ha $R(G,p)$ sorai lineárisan függetlenek, illetve egy $G = (V,E)$ gráf független, ha létezik olyan (G,p) realizációja, amely független.*

1.3.4 alapján igazolható, hogy amennyiben létezik független realizáció, akkor minden generikus realizáció független.

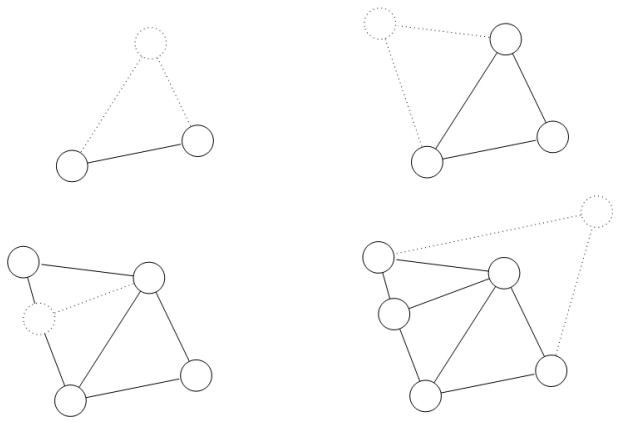
1.4.2. Definíció (Ritka gráfok). *Egy $G = (V,E)$ gráf ritka, ha tetszőleges $X \subseteq V$ és $|X| \geq 2$ esetén $i(X) \leq 2|X| - 3$ fennáll, ahol $i(X)$ az X halmaz által feszített élek számát jelöli.*

1.4.3. Tétel (Laman). *[10] Egy $G = (V,E)$ gráf pontosan akkor ritka, ha független.*

A második tétel Hennebergtől származik és egy konstrukciót ad számunkra. Ennek segítségével tetszőleges méretű merev gráfokat állíthatunk elő, amelyekre $|E| = 2|V| - 3$ teljesül. A konstrukció lépéseit a 1.3 ábra szemlélteti.

1.4.4. Tétel (Henneberg). *[3] Egy $G = (V, E)$ egyszerű, összefüggő síkbeli gráf pontosan akkor merev, ha létezik olyan feszítő részgráfja, amely felépíthető a K_2 gráfból a következő két lépés tetszőlegesen ismételt alkalmazásával:*

- *0-kiterjesztés: vegyünk a gráfhoz egy új w csúcsot és kössük össze két már meglévő különböző csúccsal*
- *1-kiterjesztés: az egyik élet egy új csúcs segítségével osszunk fel, majd az új csúcsot kössük össze egy vele még nem szomszédos ponttal*



1.3. ábra. Henneberg-féle konstrukció

A harmadik tétel Lovász és Yemini nevéhez fűződik. A gráf élhalmazának egy bizonyos feltételeket teljesítő fedése szükséges és elegendő feltétel a merevség igazolására.

1.4.5. Definíció (Gráf fedése). *Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{X} = \{X_1, \ldots, X_t\}$ a $G = (V, E)$ gráf fedése, ha minden $1 \leq i \leq t$ esetén $X_i \subseteq V$, valamint $\{E(G[X_1]), \ldots, E(G[X_t])\}$ a gráf élhalmazának egy partícióját alkotja, ahol $G[X]$ az X által feszített részgráfot jelöli.*

1.4.6. Tétel (Lovász-Yemini). *[11] A $G = (V, E)$ gráf pontosan akkor merev, ha bármely $\mathcal{X}$ fedésére teljesül az alábbi feltétel:*

$$\sum_{X \in \mathcal{X}} (2|X| - 3) \geq 2|V| - 3$$

Többek között a felsorolt tételekre támaszkodva azt mondhatjuk, hogy a síkbeli gráfok merevségének karakterizációja ma már jól ismert terület. Megemlítem, hogy egy $G = (V, E)$ gráfról részben Laman tételére támaszkodva, részben pedig egy gráfok irányítására vonatkozó szubrutin segítségével algoritmikusan $O(|V|^2)$ időben eldönthető a merevség kérdése. A továbbiakban a most ismertetett fogalmakra és eredményekre épülő összetettebb kérdéseket vizsgáljuk.

2. fejezet

Többszörösen redundánsan merev gráfok

A előző fejezet végén kimondott tételek megadták a gráfok merevségének teljes karakterizációját. Kiderült, hogy amennyiben egy gráf merev, úgy $|E| \geq 2|V| - 3$, valamint a Henneberg-tétel segítségével előállítottunk merev gráfokat is tetszőleges pontszámon. A most következő részben arra a kérdésre keressük a választ, hogy néhány pont vagy él elhagyása mennyiben befolyásolhatja a merevséget.

2.1. Alapfogalmak és megfigyelések

Elsőként a redundáns pont- és élmerevség definícióját ismertetem.

2.1.1. Definíció. *A $G = (V, E)$ gráf redundánsan élmerev, ha egyrészt G merev, másrészt bármely $e \in E$ esetén $G - \{e\}$ is merev.*

2.1.2. Definíció. *A $G = (V, E)$ gráf redundánsan pontmerev, ha egyrészt G merev, másrészt bármely $v \in V$ esetén $G - \{v\}$ is merev.*

Mindkét definíció természetes módon kiterjeszthető a többszörös redundancia esetére is.

2.1.3. Definíció. *A $G = (V, E)$ gráf k-élmerev, ha egyrészt G merev, másrészt bármely $k - 1$ elemű $F \subset E$ esetén $G - F$ is merev. A maximális k értéket a gráf* élmerevségi indexének *nevezzük. Ezt a továbbiakban $R_e(G)$ jelöli.*

2.1.4. Definíció. *A $G = (V, E)$ gráf k-pontmerev, ha egyrészt G merev, másrészt bármely $k - 1$ elemű $U \subset V$ esetén $G - U$ is merev. A maximális k értéket a gráf* pontmerevségi indexének *nevezzük. Ezt a továbbiakban $R_v(G)$ jelöli.*

A következő megfigyelések a gráfbeli pontok minimális fokszámára, illetve feszített részgráfok merevségére vonatkoznak.

A) Ha $R_v(G) \geq k$, akkor tetszőleges $v \in V$ esetén $d(v) \geq k+1$.

B) Ha $R_e(G) \geq k$, akkor tetszőleges $v \in V$ esetén $d(v) \geq k+1$.

C) Legyen $G = (V, E)$ egy tetszőleges gráf. Bármely $E' \subseteq E$ esetén a $G' = (V, E')$ gráfra $R_e(G') \leq R_e(G)$, illetve $R_v(G') \leq R_v(G)$ teljesül. Másképpen fogalmazva R_e és R_v monoton növő függvények.

Teljes gráfok esetén egyszerűen meghatározható a pontmerevségi és az élmerevségi index is.

2.1.5. Állítás (Teljes gráfok merevségi indexe). *Legyen n tetszőleges pozitív egész szám, valamint $G = (V, E)$ egy n pontot tartalmazó gráf. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:*

1) $G = K_n$

2) $R_e(G) = n - 2$

3) $R_v(G) \geq n - 2$

4) $R_v(G) = n - 1$

Bizonyítás. Az állítás pontmerevséghez kapcsolódó pontjai nyilván igazak, hiszen egy csúcs elhagyásával K_n helyett az eggyel kisebb méretű K_{n-1} gráfot kapjuk. Az állítás élmerevségre vonatkozó részét indukcióval igazoljuk. Gyorsan ellenőrizhető, hogy $n = 3$ esetén $R_e(K_3) = 1$ teljesül. Tegyük fel, hogy $n = 3, 4, \ldots, n$ esetén az állítás igaz. K_{n+1}-ből $n-1$ élet elhagyva mindig marad egy K_n részgráf vagy pedig egy olyan n pontot tartalmazó G' részgráf, amelyre az indukciós feltevés teljesül, azaz $R_e(G') = n - 2$. A $G - G'$-beli csúcsra pedig $d(v) \geq 2$, így a Henneberg-konstrukció értelmében a pont hozzávétele tekinthető egy 1-kiterjesztésnek. Az állítások megfordítása triviálisan igaz. □

2.2. Összefüggőségi és merevségi indexek kapcsolata

Az előző szakasz végén egy speciális esetben már beláttuk $R_v(G)$ és $R_e(G)$ kapcsolatát is. Most az általános esetet tekintem át. Mindehhez a következő két lemmára lesz szükség.

2.2.1. Lemma. *[18] Legyen $|V| \geq 5$. Tegyük fel, hogy a $G = (V, E)$ gráf nem teljes és $R_v(G) = 2$. Ekkor $R_e(G) \geq 2$.*

Bizonyítás. Indirekt módon bizonyítunk. Tegyük fel, hogy a feltételek teljesülése mellett $R_e(G) \leq 1$. Ez azt jelenti, hogy létezik egy olyan $e = (v, w)$ él, amelyre a $G' := (V, E - e)$ már nem merev. Könnyen látható, hogy $d_G(v) \geq 3$ és $d_G(w) \geq 3$. Tekintsük a $G'' := G(V - v, E - E')$ gráfot, ahol $E' \subseteq E$, melyek egyik végpontja v. A feltevésünk szerint G'' merev gráf. Most vegyük hozzá G'' gráfhoz a v csúcsot és $E' - e$ élhalmazt. Ez a művelet egy 1-kiterjesztésnek, valamint esetlegesen néhány él hozzávételének felel meg, ami azonban továbbra is merev gráfot eredményez. Ez azt jelenti, hogy a kezdeti feltevésünk hamis és így $R_e(G) \geq 2$. □

2.2.2. Lemma. *[18] Legyen $k \geq 2$ és $G = (V, E)$ egy olyan nem teljes gráf, melyre $R_v(G) = k$. Ekkor bármely $M \subseteq E$ és $|M| = m < k$ esetén $R_v(G - M) \geq k - m$ teljesül.*

Bizonyítás. Indukciós módszert alkalmazunk. Legyen $e \in E$ tetszőleges. A $k = 2$ (és így $m = 1$) eset a 2.2.1 lemma segítségével egyszerűen adódik, hiszen $R_v(G) = 2$, így $R_e(G) \geq 2$ esetén $G' := G - e$ szükségképpen merev. Most lássuk az indukciós lépést. Legyen $k > 2$, valamint $W \subseteq V$ tetszőleges, melyre $|W| = k - 2$. Azt kell igazolni, hogy $R_v(G') \geq k - 1$, hiszen akkor az $m = 1$ eset alapján adódik a kívánt állítás. Két lehetőség van:

- Ha az e él legalább egyik végpontja W-ben van, akkor $G^* := G - W$ merev gráf.
- Ha W nem fogja le az e élet. Mivel $R_v(G) = k$, ezért $R_v(G^*) \geq 2$. Ekkor $G'' := G^* - e$ merev.

Mind G^*, mind G'' merev, így $R_v(G') \geq k - 1$. Ezzel készen vagyunk az indukciós lépés igazolásával. □

A 2.1.5 állítás alapján teljes gráfok esetében $R_v(G) = R_e(G) + 1$. Amennyiben $G \neq K_n$, úgy fordított irányú reláció mutatkozik.

2.2.3. Állítás (Merevségi indexek kapcsolata). *[18] Tegyük fel, hogy a G gráf nem teljes. Ekkor $R_v(G) \leq R_e(G)$.*

Bizonyítás. A 2.2.2 lemma segítségével fogunk bizonyítani. A $k = 1$ eset triviális. Legyen most $k > 1$. Adott tehát egy nem-teljes gráf, amelyre $R_v(G) = k$ teljesül. Legyen $M \subset E$ tetszőleges, melyre $|M| = k - 1$. Az előző állítás alapján

$R_v(G-M) \geq 1$, azaz $R_e(G-M) \geq 1$. De ekkor $R_e(G) \geq k$. □

Látni fogjuk, hogy nem csupán a pontmerevségi és élmerevségi indexek, hanem gráfok merevsége és összefüggősége is relációban állnak egymással.

2.2.4. Definíció. *Egy $G = (V, E)$ gráf k-összefüggő, ha $|V| \geq k+1$ és bármely legfeljebb $k-1$ elemű $U \subset V$ ponthalmaz elhagyása esetén is összefüggő marad. A továbbiakban $\kappa(G)$-vel jelölt* összefüggőségi index *az a maximális k érték, amelyre a G gráf k-összefüggő.*

2.2.5. Definíció. *Egy $G = (V, E)$ gráf k-élösszefüggő, ha bármely legfeljebb $k-1$ elemű $F \subset E$ élhalmaz elhagyása esetén is összefüggő marad. A továbbiakban $\lambda(G)$-vel jelölt* élösszefüggőségi index *az a maximális k érték, amelyre a G gráf k-élösszefüggő.*

Az összefüggőséi és élösszefüggőségi indexek kapcsolatát a következő állítás adja meg.

2.2.6. Állítás. *Tetszőleges $G = (V, E)$ gráf esetén $\kappa(G) \leq \lambda(G)$.*

Elsőként Lovász és Yemini fogalmaztak meg kapcsolatot gráfok pontösszefüggősége és élmerevsége között. Ennek egy erősebb változatát most bizonyítás nélkül közlöm.

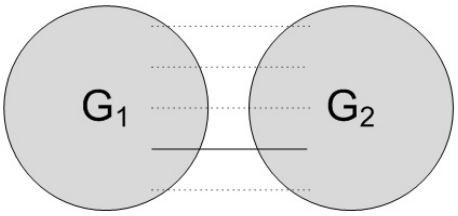
2.2.7. Tétel (Lovász-Yemini). *[11] Ha $\kappa(G) \geq 6$, akkor $R_e(G) \geq 4$.*

Joggal vetődik fel a kérdés, hogy milyen további kapcsolat létezhet az egyes tulajdonságok között. A következő állítások ezeket tárják fel.

2.2.8. Lemma. *[18] Legyen $G = (V, E)$ egy legalább négy pontot tartalmazó merev gráf. $R_e(G) \geq 2$ csak akkor teljesül, ha $\lambda(G) \geq 3$.*

Bizonyítás. Indirekt módon történik a bizonyítás. A feltételek teljesülése mellett $\lambda(G) = 1$ triviálisan kizárható, így tegyük fel, hogy $\lambda(G) = 2$. Ekkor léteznek olyan e és f élek, melyek elhagyásával a gráf már nem összefüggő. Amennyiben csak az e élet hagyjuk el, úgy a feltétel szerint G merev marad, azonban az iménti gondolatmenet alapján van két diszjunkt részgráfja, melyeket csupán egyetlen él köt össze. Ez a gráf azonban nem lehet merev. □

2.2.9. Állítás (Merevség és élösszefüggőség kapcsolata). *[18] Legyen G egy legalább négy pontot tartalmazó, összefüggő gráf. Ekkor $\lambda(G) \geq R_e(G) + 1$.*



2.1. ábra. $\lambda(G)$ és $R_e(G)$ kapcsolata

Bizonyítás. A 2.2.8 lemma általánosítható. Tegyük fel indirekt, hogy $R_e(G) = k$, de $\lambda(G) < k+1$. Feltehető, hogy $\lambda(G) = k$. Ekkor 2.1 ábra alapján $k-1$ él elhagyása után egy olyan $G' = G_1 \cup G_2 \cup \{e\}$ gráf keletkezik, amely nem lehet merev. □

2.2.10. Lemma. *[18] Legyen $G = (V, E)$ tetszőleges, de nem teljes gráf. $R_v(G) \geq 2$ csak akkor teljesül, ha $\kappa(G) \geq 3$.*

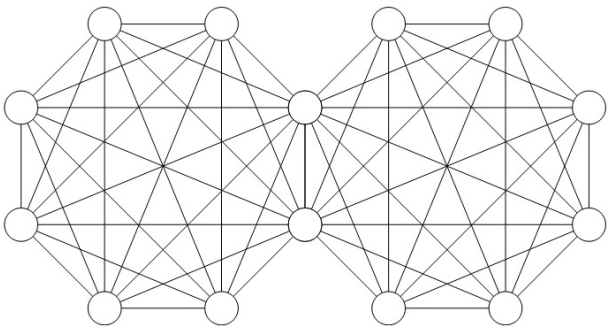
Bizonyítás. A 2.2.8 lemma bizonyítása szinte szóról szóra alkalmazható. Most is indirekt igazolunk. A feltételek teljesülése mellett $\kappa(G) = 1$ triviálisan kizárható, így tegyük fel, hogy $\kappa(G) = 2$. Ekkor léteznek olyan v és w csúcsok, melyek elhagyásával a gráf már nem összefüggő. Amennyiben csak a v csúcsot hagyjuk el, úgy a feltétel szerint G merev marad, azonban van két éldiszjunkt részgráfja, melyeknek csupán egyetlen közös csúcsa van. Ez a gráf azonban nem lehet merev. □

2.2.11. Állítás (Pontmerevség és összefüggőség kapcsolata). *[18] Legyen $G = (V, E)$ egy tetszőleges gráf. Ekkor $\kappa(G) \geq R_v(G) + 1$ pontosan akkor teljesül, ha a gráf nem teljes.*

Bizonyítás. A bizonyítás a 2.2.10 lemma általánosításával és a 2.2.9 állítás mintájára egyszerűen felírható. □

Összegezve azt kaptuk, hogy nem-teljes gráfok esetében $R_v(G) \leq R_e(G)$. Azt is tudjuk, hogy $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ minden esetben teljesül. Továbbá beláttuk, hogy $\kappa(G) > R_v(G)$ és $\lambda(G) > R_e(G)$. Nyitott kérdésként fogalmazza meg [18] a $\kappa(G)$ és $R_e(G)$ közötti esetleges relációt. Példával illusztrálható, hogy $\kappa(G)$ ismeretében nem adható felső korlát $R_e(G)$ értékére. Tekintsük ugyanis két teljes gráf (K_m és K_n) két ponton történő összeragasztását (2.2 ábra). Így $\kappa(G) = 2$, ellenben $R_e(G)$ csupán a gráfok méretétől függő tulajdonság. Pontosabban $R_e(G) = \min\{m, n\} - 2$. Alsó korlát azonban adható 2.2.3 állítás és 2.2.12 állítás alapján.

2.2.12. Állítás (Pontmerevség és összefüggőség kapcsolata). *Ha $\kappa(G) \geq k + 5$, akkor $R_v(G) \geq k$.*



2.2. ábra. $\kappa(G)$ és $R_e(G)$ függetlensége

Bizonyítás. Az állítás következménye a 2.2.7 tételnek. □

Az állítás következménye, hogy $R_e(G) \geq \kappa(G) - 5$.

2.2.13. Következmény. *A 2.2.11 állítást és a 2.2.12 állítást egybevetve a következő eredményre jutunk:*

$$\kappa(G) \geq k + 5 \Longrightarrow R_v(G) \geq k \Longrightarrow \kappa(G) \geq k + 1$$

Ha $k \to \infty$, akkor $\kappa(G) \approx R_v(G)$, azaz a közrefogás egyre hatékonyabb korlátokat biztosít $R_v(G)$ értékére.

2.3. A k-élmerev gráfosztály

A többszörös redundáns merevség témaköre alapvetően két nagy egységre bontható aszerint, hogy élek vagy pontok elhagyását tekintjük. Előbbi esetén k-élmerevségről beszélünk. A $k = 2, 3$ esetekben az alábbi állítások adnak pontos karakterizációt.

2.3.1. Definíció. *Egy $G = (V, E)$ gráfot erősen minimálisan k-élmerevnek nevezünk, ha nem létezik ugyanannyi ponton, de kevesebb élből álló k-élmerev gráf.*

2.3.2. Állítás. *Egy $G = (V, E)$ gráf pontosan akkor erősen minimális 2-élmerev gráf, ha az alábbi két tulajdonság teljesül:*

- *|E| = 2|V| - 2*
- *minden $X \subset V$ és $|X| \geq 2$ esetén $i_G(X) \leq 2|X| - 3$*

Szemléltetésként tekintsük a K_4 gráfot. Igazolható, hogy $R_e(K_4) = 2$. Gyorsan ellenőrizhető, hogy K_4 pontjainak bármely valódi részhalmazát kiválasztva teljesül

a 2.3.2 állításban szereplő két feltétel. A 3-szoros élmerevség esetében is hasonló állítás fogalmazható meg.

2.3.3. Állítás. *Egy $G = (V, E)$ gráf pontosan akkor erősen minimális 3-élmerev gráf, ha az alábbi tulajdonságok teljesülnek:*

- *$|E| = 2|V|$*
- *minden $X \subset V$ és $|X| < |V| - 1$ esetén $i_G(X) \leq 2|X| - 3$*
- *minden $X \subset V$ és $|X| = |V| - 1$ esetén $i_G(X) \leq 2|X| - 2$*

Ismert, hogy $k \geq 3$ esetén is megadható szükséges és elégséges feltétel, azonban annak ellenőrzésére jelenleg nem ismert gyors algoritmus.

2.4. A 2-pontmerev gráfosztály

A többszörös redundáns pontmerevség elméletében fontos szerepet játszanak a 2-pontmerev gráfok. Elsőként gráfok hatványait definiálom, majd ennek segítségével példát mutatok 2-pontmerev gráfokra.

2.4.1. Definíció (Gráfok hatványai). *Adott egy $G = (V, E)$ gráf. Minden olyan $e = (u, v) \notin E$ élet adjunk a gráfhoz, amelyhez létezik legfeljebb k élből álló G-beli út, amelynek egyik végpontja u, másik végpontja pedig v. Az így kapott gráfot a $G = (V, E)$ gráf* k-adik hatványának *nevezzük és G^k-val jelöljük.*

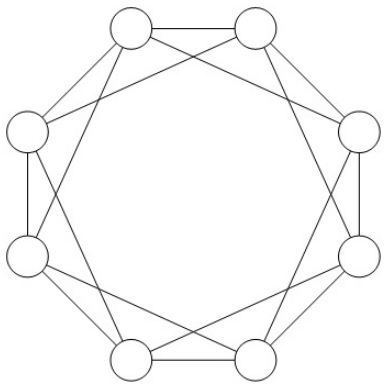
2.4.2. Következmény. *A definícióból adódik, hogy $G \subseteq G^2 \subseteq \ldots \subseteq G^k$.*

2.4.3. Állítás (Körök négyzetének pontmerevsége). *[18] Tekintsük egy C kör második hatványát. Ha $|C(V)| \geq 6$, akkor $R_v(C^2) = 2$.*

Bizonyítás. Rögtön látható, hogy bármely pont elhagyása után a gráf merev marad, tehát $R_v(C^2) \geq 2$. Másrészt tekintsünk két olyan u és v pontot, amelyekre $e = (u, v) \notin E(C^2)$. Ekkor összeszámolva a megmaradó csúcsok és élek számát rögtön adódik, hogy $R_v(C^2) \leq 2$. Így $R_v(C^2) = 2$. □

Csupán az érdekesség kedvéért megemlítek egy erősebb állítást is hatványgráfok merevségével kapcsolatosan.

2.4.4. Állítás (Körök hatványainak pontmerevsége). *[18] Legyen $k \geq 2$ és tekintsük a C^k gráfot. Ha $|C(V)| \geq 2k + 2$, akkor $k \leq R_v(C^k) \leq 2k - 2$ teljesül.*



2.3. ábra. A C_8 gráf második hatványa

Brigitte Servatius vizsgálta elsőként a 2-pontmerev gráfosztályt és nevezte annak tagjait *birigid* gráfoknak 1989-ben megjelent publikációjában [14]. Ismert, hogy egy merev gráf élszámára $|E| \geq 2|V| - 3$ teljesül. A következő állítás megmutatja, hogy 2-pontmerev gráfok esetében is adható hasonló alsó korlát.

2.4.5. Állítás (Alsó korlát az élszámra). *[16] Tegyük fel, hogy egy legalább öt pontból álló gráfra $R_v(G) = 2$ teljesül. Ekkor $|E| \geq 2|V| - 1$.*

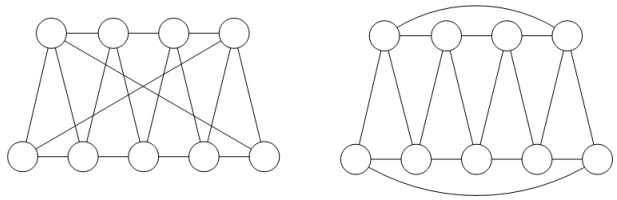
Bizonyítás. Mivel egy tetszőleges $v \in V$ csúcs elhagyása után a gráf merev marad, így szükségképpen $d(v) \geq 3$. K_4 azonban az egyetlen 3-reguláris merev gráf, mert $|V| > 4$ esetén a Laman-féle $|E| \geq 2|V| - 3$ feltétel sérül. Tehát létezik $v \in V$, amelyre $d(v) \geq 4$. A v csúcs elhagyásával keletkező gráfot jelölje G'. Mivel G' merev, ezért $|E'| \geq 2|V'| - 3$. Másrészt pedig $|E| \geq |E' + 3|$, illetve $|V| = |V'| + 1$. Mindezt összevetve kapjuk a kívánt állítást. □

Az élszámra vonatkozó alsó korlát ismeretében már értelmes az alábbi definíció.

2.4.6. Definíció. *Egy 2-pontmerev $G = (V, E)$ gráfot minimális tulajdonságúnak (vagy röviden minimálisnak) nevezünk, ha bármely $e \in E$ él elhagyásával kapott $G - \{e\}$ gráf már nem 2-pontmerev.*

A minimálisan 2-pontmerev gráfokat két részre oszthatjuk a következő definíció alapján.

2.4.7. Definíció. *Jelölje $\epsilon(n, k)$ azt a legkisebb értéket, ami egy n csúcsból álló k-pontmerev gráf élszámával megegyezhet. Segítségével most két újabb tulajdonságot definiálunk. Legyen $G = (V, E)$ minimális k-pontmerev gráf. Ha $|E| = \epsilon(|V|, k)$, akkor a gráfot erősen minimálisnak (2.4 ábra), ellenkező esetben pedig gyengén minimálisnak (2.5, 2.5 és 2.8 ábrák) hívjuk.*



2.4. ábra. Erősen minimális 2-pontmerev gráfok

Az erősen minimális 2-pontmerev gráfoknak jelenleg ismert a teljes karakterizációja. A következő állítás tartalma az eddig leírtakból már egyszerűen átgondolható.

2.4.8. Állítás (Erősen minimális gráfszerkezet). *[14] Legyen $|V| \geq 5$ és $G = (V, E)$ egy erősen minimális 2-pontmerev gráf. Ekkor G-nek pontosan kettő harmadfokú csúcsa van, míg a többi csúcs negyedfokú, így szükségképpen $|E| = 2|V| - 1$.*

A következő állítás hátterében matroid struktúra húzódik. Erről részletesebben a negyedik fejezetben lesz szó. Az állítás azonban kimondható ezen ismeretek nélkül is.

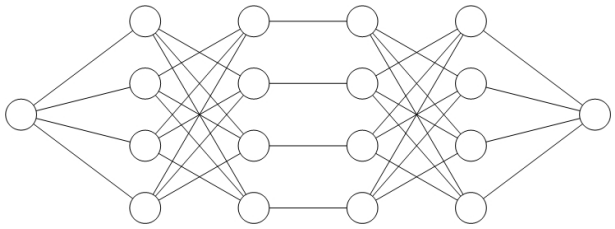
2.4.9. Állítás (Karakterizáció). *[14] Egy $G = (V, E)$ gráf akkor és csak akkor erősen minimális 2-pontmerev gráf, ha pontosan kettő harmadfokú csúcsa van és létezik az élhalmazának egy olyan $E = E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_k$ partíciója, amelyben bármely $1 \leq i \leq k$ esetén $E - E_i$ minimális redundánsan élmerev (azaz bármely élet elhagyva már nem redundánsan élmerev), valamint az alábbi két feltétel egyike is fennáll:*

- *E_1 és E_2 egy-egy háromágú csillag éleit alkotja a gráfban, míg a többi E_i egyetlen élből áll vagy*
- *E_1 két szomszédos középpontú, háromágú csillag uniója a gráfban, a többi E_i pedig egyetlen élből áll.*

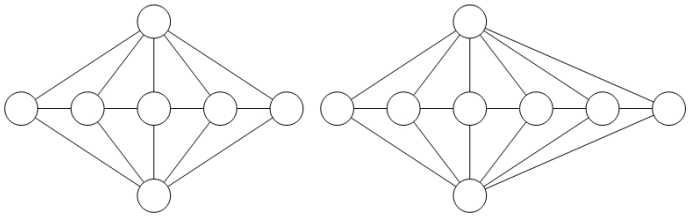
2.4.10. Definíció. *Egy $G = (V, E)$ gráf többletén az $|E| - (2|V| - 3)$ értéket értjük. A továbbiakban ezt a számot $exc(G)$ jelöli.*

Legyen $G = (V, E)$ egy minimális 2-pontmerev gráf. [14] veti fel a kérdést, hogy létezik-e felső korlát $exc(G)$ értékére vagy sem. Példával gyorsan kimutathatjuk (2.6 ábra), hogy $exc(G)$ értéke tetszőlegesen nagy lehet.

Legyen $G = (V, E)$ egy minimális 2-pontmerev gráf, azaz $R_v(G) = 2$. Minden $e \in E$ élhez rendelünk egy $V_e \in V$ ponthalmazt. Egy $v \in V$ csúcs pontosan akkor eleme a V_e halmaznak, ha az e él és a v csúcs elhagyásával kapott G' gráf nem merev.



2.5. ábra. Példa gyengén minimális 2-pontmerev gráfra



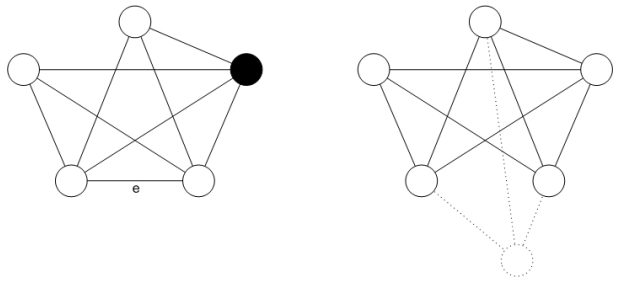
2.6. ábra. Gyengén minimális 2-pontmerev gráfok növekvő többlettel

A gráf minimalitása miatt a V_e halmazok egyike sem üres, tagjait e-re nézve lényeges pontoknak hívjuk.

Merev gráfok konstrukciója ismert a Henneberg-tétel segítségével. Servatius [14] hasonló előállítási tételt adott a 2-merev gráfosztály tagjaira. Ennek ismertetését néhány fogalom bevezetésével kezdem. Legyen T egy olyan csillag-gráf, amelynek négy pontja van. Az elsőfokú csúcsokat jelölje a, b és c. Tetszőleges $G = (V, E)$ gráf esetén $G+T$ az a gráf, amely G-ből és T-ből keletkezik olymódon, hogy a két gráfot T elsőfokú pontjai mentén összeragasztjuk.

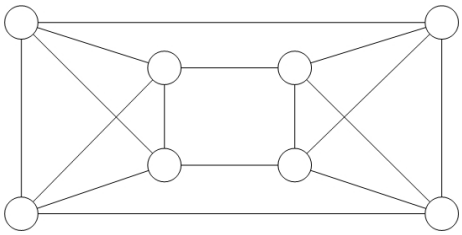
2.4.11. Állítás (Konstrukció). *[14] Legyen $G = (V, E)$ egy egyszerű gráf, melyre $R_v(G) \geq 2$ és $exc(G) = 2$ teljesül. Legyen T az imént definiált csillag-gráf. Ekkor a következő állítások igazak:*

- $R_v(G + T) \geq 2$
- *$G + T$ pontosan akkor minimális 2-pontmerev gráf, ha nem létezik olyan V_e halmaz, amelyik tartalmazza az $\{a, b, c\}$ ponhármas mindegyikét*
- *ha $G + T$ nem minimális 2-pontmerev gráf, akkor létezik egy olyan $e \in E$ éle a gráfnak, amelyre $R_v(G + T - e) \leq 2$ és $exc(G + T - e) = 2$*
- *mindig választható olyan $\{a, b, c\} \subset V(G)$ ponthármas, amelyre $R_e(G-T) = 0$, azaz a $G - T$ gráf nem merev.*



2.7. ábra. Erősen minimális 2-pontmerev gráfok konstrukciója

2.4.12. Állítás (Konstrukció - fordított irány). *[14] Legyen $G = (V, E)$ egy legalább öt pontot tartalmazó gráf, amelyre $R_v(G) \geq 2$ és $exc(G) = 2$. Legyen $v \in V$ olyan pont, amelyre $d(v) = 3$. Jelölje T azt a háromágú csillagot, amelynek középpontja v, valamint T elsőfokú pontjait jelölje x, y és z. Ekkor létezik egy olyan $e \notin E$ él, amelynek végpontjai az $\{x, y, z\}$ halmazba esnek és $R_v(G - T + e) \geq 2$ (2.7 ábra).*



2.8. ábra. Újabb példa gyengén minimális 2-pontmerev gráfra

Ebben az alfejezetben bemutattam a 2-pontmerevség karakterizációját, néhány jellegzetes példát, illetve egy előállítási tételt.

2.5. A 3-pontmerev gráfosztály

A 3-pontmerev gráfok karakterizációjával kapcsolatosan jelenleg kevés információ ismert, de az élszámra vonatkozó alsó becslést megadhatjuk. Az úgynevezett 'size independence property' (azaz a minimális élszám a pontok kétszerese és egy konstans érték összege) tulajdonság $k = 3$ esetén még teljesül, de $k > 3$ esetén már nem.

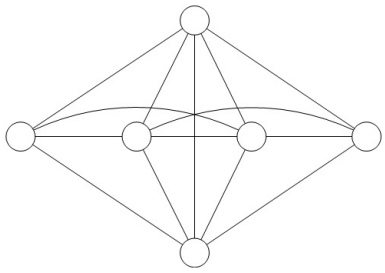
2.5.1. Állítás (Általános alsó korlát az élszámra). *[13] Legyen $R_v(G) \geq k$. Ekkor $|E| \geq \lceil \frac{k+1}{2}|V| \rceil + c(k)$, ahol $c(k)$ egy csupán k-tól függő, de $|V|$-tól független egész érték. Amennyiben $k \geq 3$, úgy minden erősen minimális tulajdonságú k-pontmerev gráfra $|E| = \lceil \frac{k+1}{2}|V| \rceil + c(k)$ és $c(k) \geq 0$.*

2.5.2. Állítás (Alsó korlát az élszámra). *[13] Legyen $R_v(G) \geq 3$ és $|V| \geq 6$. Ekkor $|E| \geq 2|V| + 2$.*

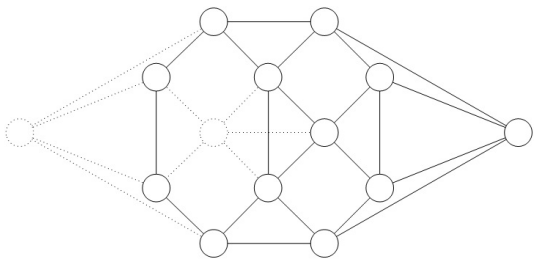
Bizonyítás. A szerzők [13]-ban bizonyítják, hogy nem létezhet olyan $G = (V, E)$ gráf, amelyre $R_v(G) \geq 3$ teljesül és $|E| \leq 2|V| + 1$. Ezután a 2.5.1 állítás és a 2.9 ábra együttesen igazolja az élszámra vonatkozó alsó korlát helyességét. □

A következő állítás egy részleges karakterizációt ad számunkra. Hosszas számolással igazolható [13], én csupán bizonyítás nélkül említem meg.

2.5.3. Állítás (Erősen minimális gráfszerkezet). *[13] Tetszőleges $|V| \geq 6$ esetén létezik $G = (V, E)$ erősen minimális 3-pontmerev gráf, amelyre $|E| = 2|V| + 2$ teljesül. Minden ilyen gráfnak négy ötödfokú pontja van, melyek egy K_4 részgráfot alkotnak, míg a többi pont foka szükségképpen négy. A feltétel szükséges, de nem elégséges.*



2.9. ábra. Erősen minimális 3-pontmerev gráf hat ponton



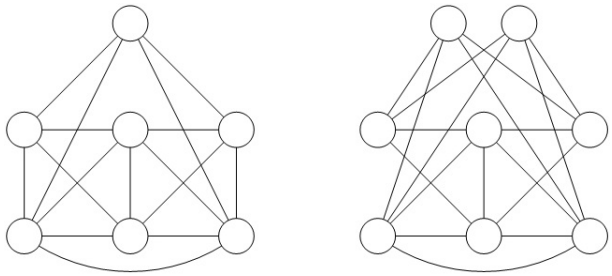
2.10. ábra. Megfelelő élszám mellett mégsem 3-pontmerev gráf

Korábban több előállítási tételt is leírtam. Merev gráfokat a Henneberg-konstrukcióval, 2-pontmerev gráfokat a Servatius-konstrukcióval építettünk fel. A 3-pontmerev gráfok esetében is megadható egy ilyen eljárás, amelyhez szükség van a következő lemmára is.

2.5.4. Lemma. *[13] Legyen $G = (V, E)$ egy erősen minimális 3-pontmerev gráf. Ekkor létezik két nem-szomszédos negyedfokú csúcsa (a és c), amelyek szomszédosak két ötödfokú csúccsal (b és d).*

2.5.5. Definíció. *Használjuk 2.5.4 jelölését. A '4-5 X-Replacement' művelet a következőket jelenti. Egyrészt hagyjuk el az (a, c) és (b, d) éleket, másrészt vegyünk a gráfhoz egy új e pontot és kössük össze az imént említett négy csúccsal.*

2.5.6. Állítás (Konstrukció). *[13] Legyen $G = (V, E)$ egy erősen minimális 3-pontmerev gráf. A '4-5 X-Replacement' műveletet alkalmazva egy erősen minimális 3-pontmerev G' gráfot kapunk $|V| + 1$ ponton.*



2.11. ábra. Erősen minimális 3-pontmerev gráfok hét és nyolc ponton

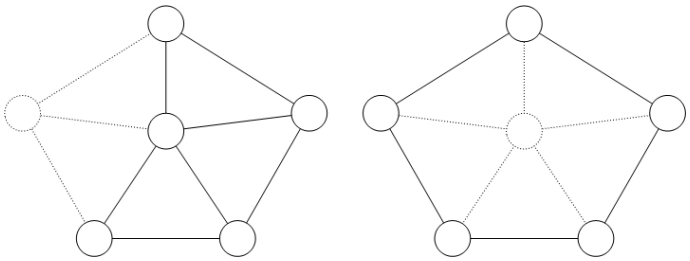
A 2.5.6 állítás alapján ismert egy előállítási eljárás, valamint az élszámra is adható egy éles alsó korlát, de a 3-pontmerev gráfok teljes karakterizációja továbbra is nyitott kérdés. Szintén nem ismert jelenleg $k \geq 4$ esetén a gráfok k-pontmerevségére vonatkozó szükséges és elégséges feltétel.

2.6. Statisztikai redundáns merevség

A következő alfejezetben gráfok statisztikai merevségéről lesz szó, amely néhány gyakorlati alkalmazás során válhat hasznossá. A fogalom bevezetéséhez tekintsük tetszőleges $n \geq 4$ esetén a W_n kerék-gráfot. Nyilvánvaló, hogy $R_e(W_n) = 2$. A középpont elhagyásával a gráf merevsége megszűnik, azaz $R_v(W_n) = 1$. Észrevehetjük azonban, hogy bármely másik csúcs elhagyásával kapott W'_n továbbra is merev. Éppen ezt érzékelteti a következő definíció.

2.6.1. Definíció. *Adott egy $G = (V, E)$ gráf és legyen $1 \leq i \leq |V| - 3$ tetszőleges egész szám. A gráfból $\binom{|V|}{i}$ különböző módon hagyhatunk el i pontot. Ezek közül a merev gráfok számát jelölje r_i. A G gráf* statisztikai pontmerevségi indexe

$$R_{v^*}(G) := \max_{1 \leq i \leq |V|-3} \left\{ (i+1) \frac{r_i}{\binom{|V|}{i}} \right\}$$



2.12. ábra. A kerék-gráf pontmerevsége

Alkalmazzuk mindezt a W_n gráfra. Amennyiben két véletlenszerűen kiválasztott pontot hagyunk el, úgy a merevség fennmaradásának valószínűsége $\frac{n-1}{\binom{n}{2}}$. A gráf akkor marad merev, ha a kör két szomszédos pontját választjuk ki. Összességében elmondható, hogy $i = 2, .., n-3$ esetén $\frac{n-1}{\binom{n}{i}}$ valószínűséggel marad a gráf merev.

2.6.2. Állítás (A kerék-gráf statisztikai pontmerevsége). *Minden $n \geq 4$ esetén $1 < R_{v^*}(W_n) < 2$ teljesül.*

Bizonyítás. $1 < R_{v^*}(W_n)$ triviálisan igaz. Definíció alapján

$$R_{v^*}(W_n) = \max_{1 \leq i \leq n-3} \left\{ \frac{n-1}{\binom{n}{i}} (i+1) \right\}$$

Így azt kell csupán igazolni, hogy

$$(n-1)(i+1)i!(n-i)! < 2n!)$$

azaz egyszerűbb alakban

$$(i+1)!(n-i)!(n-1) < 2n! \tag{2.1}$$

teljesül. Az egyenlőtlenség mindkét oldalán hagyjuk el azokat a tényezőket, amelyek értéke 1. Így mindkét oldalon éppen egy n tényezőből álló szorzat marad. Egyrészt ezek mindegyike pozitív. Másrészt vegyük észre, hogy a két oldal párokba rendezhető oly módon, hogy a jobb oldalhoz tartozó tényező egyetlen esetben sem kisebb. Tehát a kívánt egyenlőtlenség teljesül. □

Példa. Tekintsük a W_5 gráfot. Ekkor

$$R_{v^*}(W_n) = \max\{2\frac{4}{5}, 3\frac{4}{10}, 0, 0\} = \frac{8}{5}$$

2.6.3. Állítás (A statisztikai pontmerevségi index határai). *Ha egy G gráfra $R_v(G) = k$ teljesül, akkor $R_{v^*}(G) \geq k$, azonban felső korlát $R_v(G)$ függvényében nem adható.*

Bizonyítás. Az állítás első fele triviálisan igaz. Az esetleges felső korlát létezésének cáfolásához tekintsünk a már említett $G = (V, E)$ gráfot (2.2 ábra) $2n$ ponton. Ekkor $R_v(G) = 2$. Számolással könnyen belátható, hogy tetszőleges i érték esetén megadható olyan n, amelyre $p_i \geq \frac{1}{2}$ teljesül. Ennek következtében $n \to \infty$ esetén $R_v^*(G) \to \infty$ $\square$

A statisztikai redundáns merevség jellemzése egyelőre egy kevesebbet kutatott témakör, de a gyakorlati felhasználás szempontjából mindenképpen releváns jelentőséggel bír.

3. fejezet

Globálisan merev gráfok

A szenzorhálózatokról szóló bevezető példa már utalt arra, hogy egyes gyakorlati alkalmazások során nem csupán az adott gráf merevsége, hanem realizációjának egyértelműsége is fontos kérdésként merülhet fel. A most következő fejezetben részletesen bemutatom a témakörrel kapcsolatos, kétdimenziós esetre vonatkozó fontosabb eredményeket.

3.1. Alapfogalmak és megfigyelések

A globális merevség definiálásához szükség lesz az 1.1.4 definícióban bevezetett fogalmakra.

3.1.1. Definíció (Szerkezetek globális merevsége). *Egy (G, p) realizáció globálisan merev, ha bármely azzal ekvivalens (G, q) realizáció esetén (G, p) és (G, q) kongruensek.*

Tekintsük egy adott $G = (V, E)$ gráf két globálisan merev realizációját. A 3.1.1 definíció alapján a két szerkezet átvihető egymásba kizárólag eltolás, forgatás és tükrözés segítségével.

Láttuk korábban, hogy egy $G = (V, E)$ gráf merevsége mikor független annak realizációjától. Globális merevség esetére is hasonló kijelentést tehetünk.

3.1.2. Állítás (Egyértelműség). *[1] A globális merevség generikus helyzetű szerkezetek esetében csak az adott gráftól függő tulajdonság, annak realizációjától azonban már független.*

Ennek fényében már értelmet nyer a következő definíció.

3.1.3. Definíció (Gráfok globális merevsége). *Egy $G = (V, E)$ gráfot globálisan merevnek nevezünk a síkban, ha létezik olyan generikus realizációja, amely globálisan merev.*

Megjegyzem, hogy az 1.2 ábrán látható negyedik gráf globálisan merev. A definíció alapján teljesül az az elvárt tulajdonság, hogy minden $G = (V, E)$ globálisan merev gráfra $R_e(G) \geq 1$ fennáll.

3.1.4. Definíció (Globális k-élmerevség). *A $G = (V, E)$ gráf* globálisan k-élmerev*, ha egyrészt G globálisan merev, másrészt bármely $k - 1$ elemű $F \subset E$ esetén $G - F$ is globálisan merev. A maximális k értéket a gráf* globális élmerevségi indexének *nevezzük. Ezt a továbbiakban $R_{ge}(G)$ jelöli.*

3.1.5. Definíció (Globális k-pontmerevség). *A $G = (V, E)$ gráf* globálisan k-pontmerev*, ha egyrészt G globálisan merev, másrészt bármely $k - 1$ elemű $U \subset V$ esetén $G - U$ is globálisan merev. A maximális k értéket a gráf* globális pontmerevségi indexének *nevezzük. Ezt a továbbiakban $R_{gv}(G)$ jelöli.*

3.2. Kapcsolatok egyéb gráfosztályokkal

Az előző fejezetben kiderült, hogy gráfok merevségi és összefüggőségi indexei erős kapcsolatban állnak egymással. Érdemes megvizsgálni, hogyan viszonyulnak ezek a jellemzők a globális merevséghez. Elsőként a legerősebb tételt mondom ki. Bizonyítását összetettsége miatt jelen dolgozatban nem részletezem.

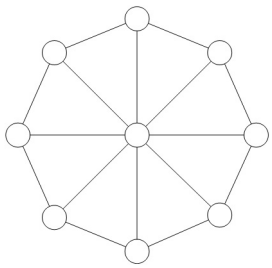
3.2.1. Tétel (Karakterizáció). *[4] Egy G gráf akkor és csak akkor globálisan merev a síkban ($R_{ge}(G) \geq 1$), ha $G = K_3$ vagy a gráf 3-összefüggő ($\kappa(G) \geq 3$) és redundánsan élmerev ($R_e(G) \geq 2$).*

A tételből a következő három kisebb állítás is azonnal adódik.

3.2.2. Állítás (Pontmerevség és globális merevség). *Ha $R_v(G) \geq 2$, akkor $R_{ge}(G) \geq 1$.*

Bizonyítás. Elsőként tekintsük azt az esetet, amikor $|V| = 4$. Mivel a feltevés szerint $R_v(G) \geq 2$, ezért $G = K_4$ és $R_{ge}(K_4) = 1$. Most legyen $|V| \geq 5$ és $R_v(G) \geq 2$. Ekkor egyrészt 2.2.11 állítás következtében $\kappa(G) \geq 3$, másrészt pedig 2.2.3 állítás következtében $R_e(G) \geq 2$. Így 3.2.1 tétel alapján $R_{ge}(G) \geq 1$ is fennáll. □

A megfordítás nem igaz. A 3.1 ábra szemléletes példát is szolgáltat erre, hiszen a középső pont elhagyása után a gráf már nem merev.

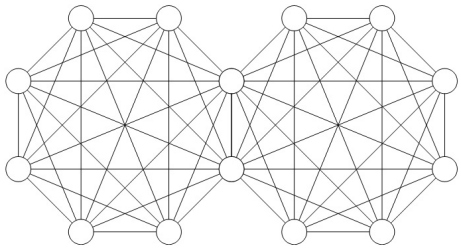


3.1. ábra. Példa nem redundánsan pontmerev, de globálisan merev gráfra

3.2.3. Állítás (Élmerevség és globális merevség). *Ha* $R_{ge}(G) \geq 1$, *akkor* $R_e(G) \geq 2$.

Bizonyítás. Egyszerű következménye a 3.2.1 tételnek.

Az állítás megfordítása ezúttal sem igaz. Szemléletes példát ad erre a 3.2 ábra.

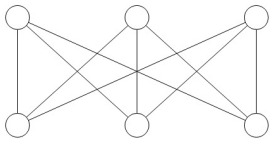


3.2. ábra. Példa redundánsan élmerev, de nem globálisan merev gráfra

3.2.4. Állítás (Összefüggőség és globális merevség). *[2] Ha* $R_{ge}(G) \geq 1$, *akkor* $\kappa(G) \geq 3$.

Bizonyítás. Egyszerű következménye a 3.2.1 tételnek.

A 3.3 ábrán látható $K_{3,3}$ gráf megfelelő példa arra, hogy ez az állítás sem megfordítható, hiszen már az élszáma alapján sem lehet redundánsan élmerev, így pedig globálisan merev sem.



3.3. ábra. Példa 3-összefüggő, de nem globálisan merev gráfra

3.3. Hatszoros vegyes-összefüggőség

Egy kis kitérő következik bizonyítások nélkül. Bevezetem a vegyes-összefüggőség fogalmát, amely [5] alapján néhány esetben tanusítványként szolgálhat gráfok globális merevségének igazolásához.

3.3.1. Definíció (Vegyes vágás). *Legyen $G = (V, E)$ tetszőleges gráf. Egy (U, D) párt a gráf vegyes vágásának nevezünk, ha $U \subseteq V$, $D \subseteq E$, valamint a $G' = G - U - D$ gráf nem összefüggő.*

3.3.2. Definíció (Vegyes-összefüggőség). *Azt mondjuk, hogy a $G = (V, E)$ gráf hatszorosan vegyes-összefüggő gráf, ha annak tetszőleges (U, D) vegyes-vágására $2|U| + |D| \geq 6$ teljesül.*

Igazolható, hogy egy ilyen gráf bizonyos részgráfja szükségképpen merev.

3.3.3. Állítás (Merev részgráfok). *[5] Legyen $G = (V, E)$ egy hatszorosan vegyes-összefüggő gráf, valamint $F \subseteq E$ tetszőleges, de legfeljebb három élből álló halmaz. Ekkor $G - F$ merev.*

Ennél többet is mondhatunk, amennyiben a gráfnak csupán egyetlen élét hagyjuk el. Ekkor a 3.3.2 definíció és a 3.2.1 tétel alapján a következő állítás is igaz.

3.3.4. Állítás (Redundánsan globálisan merev gráfok). *[5] Legyen $G = (V, E)$ hatszorosan vegyes-összefüggő gráf. Ekkor $R_{ge}(G) \geq 2$, azaz a gráf bármely élét elhagyva is globálisan merev gráfunk marad.*

A továbbiakban hivatkozni fogok arra a speciális esetre, amikor $\kappa(G) \geq 6$, ezért ezt most külön megfogalmazom.

3.3.5. Következmény. *[4] Legyen $G = (V, E)$ egy hatszorosan összefüggő gráf, azaz $\kappa(G) \geq 6$. Ekkor G globálisan 3-élmerev gráf, azaz $R_{ge}(G) \geq 3$.*

3.4. Minimalitás és redundancia

Egy globálisan merev szerkezet élszámára a következő alsó korlát adható.

3.4.1. Állítás (Minimális élszám). *[9] Legyen G egy globálisan merev gráf, melyre $|V| \geq 4$. Ekkor $|E| \geq 2|V| - 2$ teljesül.*

Az előző alfejezet végén már említésre került a redundánsan globálisan élmerev gráfok osztálya. A korábbiakhoz hasonlóan ismét bevezetem az erős, illetve gyenge minimalitás fogalmát.

3.4.2. Definíció (Minimalitás). *Egy globálisan k-pontmerev $G = (V, E)$ gráfot minimális tulajdonságúnak (vagy röviden minimálisnak) nevezünk, ha bármely $e \in E$ él elhagyásával kapott $G - \{e\}$ gráf már nem globálisan k-pontmerev.*

3.4.3. Definíció (Erős és gyenge minimalitás). *Jelölje $\epsilon(n, k)$ azt a legkisebb értéket, ami egy n csúcsból álló globálisan k-pontmerev gráf élszámával megegyezhet. Segítségével ismét két újabb tulajdonságot definiálunk. Legyen $G = (V, E)$ minimális globálisan k-pontmerev gráf. Ha $|E| = \epsilon(|V|, k)$, akkor a gráfot erősen minimálisnak, ellenkező esetben pedig gyengén minimálisnak hívjuk.*

Most megemlítek egy állítást, amellyel hasznos korlátot adhatunk a globálisan k-pontmerev gráfok élszámára. A meglehetősen összett bizonyítást nem részletezem.

3.4.4. Állítás (Élszám alsó becslése). *[12] Erősen minimális globálisan k-pontmerev gráfok élszámára $|E| \geq \lceil \frac{k+2}{2}|V| \rceil + c(k)$ mindig teljesül, ahol $c(k)$ egy $|V|$-tól független egész, illetve $c(k) \geq 0$ is fennáll, ha $|E| = \lceil \frac{k+2}{2}|V| \rceil + c(k)$.*

A következő két állítás alapján $R_{gv}(G)$ értéke jól becsülhető $\kappa(G)$ ismeretében. Sőt, amennyiben $k \to \infty$, akkor $R_{gv}(G) \approx \kappa(G)$.

3.4.5. Állítás (Globális pontmerevségi index és pontmerevségi index). *Tegyük fel, hogy $R_{gv}(G) \geq k$. Ekkor $\kappa(G) \geq k + 2$. Ebből fakadóan tetszőleges $v \in V$ esetén $d(v) \geq k + 2$, valamint $|V| \geq k + 3$.*

Bizonyítás. Az állítás első része egyszerűen visszavezethető a 3.2.4 állításra, míg második fele triviálisan teljesül. □

3.4.6. Állítás (Globális pontmerevségi index és pontmerevségi index). *Tegyük fel, hogy egy G gráfra $\kappa(G) \geq k + 5$. Ekkor G globálisan k-pontmerev, azaz $R_{gv}(G) \geq k$.*

Bizonyítás. Legyen $U \subset V$ olyan, amelyre $|U| = k - 1$ teljesül. A feltevés szerint $\kappa(G) \geq k + 5$, így $\kappa(G') \geq (k + 5) - (k - 1) = 6$, ahol $G' = G - U$. A 3.3.5 állítás alapján $R_{gv}(G') \geq 1$, azaz $R_{gv}(G) \geq k$. □

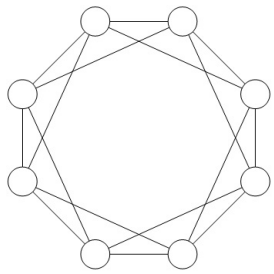
3.5. Globálisan 2-pontmerev gráfok

A $k = 2$ és 3 esetekben a globális k-pontmerevség jellemzésével többen is foglalkoztak, elért eredményeiket a következő két alfejezetben ismertetem.

3.5.1. Állítás (Tulajdonságok). *[15] Legyen $G = (V, E)$ egy legalább öt pontból álló erősen minimális globálisan 2-pontmerev gráf. Ekkor*

- $|E| = 2|V|$
- *minden csúcs fokszáma 4*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy a $G = (V, E)$ gráf legalább öt pontból áll és minimális globálisan 2-pontmerev, de $|E| < 2|V|$. A gráfnak biztosan van egy $v \in V$ csúcsa, amelyre $d(v) \geq 4$. Tekintsük a $G' = (V - \{v\}, E')$ gráfot. G'-nek $|V'|$ csúcsa és legfeljebb $2|V'| - 3$ éle van, azaz nem redundánsan merev. A 3.2.1 állítás értelmében G' nem lehet globálisan merev gráf, ami ellentmond a feltevésünknek. A 3.4 ábra olyan globálisan 2-pontmerev gráfra ad példát, amelynek élszámára teljesül a $|E| = 2|V|$ feltétel. Ezzel az állítás első felét beláttuk. Az állítás másik felének igazolásához tegyük fel, hogy van egy legfeljebb harmadfokú v csúcs is. Ha $d(v) \leq 2$, akkor a gráf nem globálisan merev. Ha $d(v) = 3$, akkor töröljük a gráfból a harmadfokú csúcs egyik szomszédját. Mivel így $d(v) = 2$, az új gráf nem lehet globálisan merev. Tehát minden fokszám legalább négy, de mivel az élszám kétszerese a pontszámnak, így szükségképpen minden $u \in V$ esetén $d(u) = 4$. □



3.4. ábra. Példa erősen minimális globálisan 2-pontmerev gráfra

3.5.2. Tétel (Karakterizáció). *[15] Egy $G = (V, E)$ gráf akkor és csak akkor erősen minimális globálisan 2-pontmerev gráf, ha az alábbiak teljesülnek:*

i) $|E| = 2|V|$

ii) G 4-szeresen összefüggő

iii) G redundánsan erősen minimális 2-pontmerev gráf, azaz bármely élét elhagyva erősen minimális 2-pontmerev gráfot kapunk.

Bizonyítás. Elsőként azt mutatom meg, hogy a feltételek elégségesek. Könnyen belátható i) és ii) alapján, hogy a gráf szükségképpen 4-reguláris. Legyen $v \in V$ egy tetszőleges pontja. Bármely $e = (u, v) \in E$ élre iii) következtében $R_v(G - \{e\}) \geq 2$. Legyen $f = (v, w) \in E$ tetszőleges, amelyre $f \neq e$. Ekkor az e és f élek elhagyása után $d(v) = 2, azaz R_v(G - \{e, f\}) \leq 1$. Azonban egyrészt iii) miatt $R_e(G - \{v\}) \geq 2$, másrészt ii) miatt $\kappa(G - \{v\}) \geq 3$. Tehát $G - \{v\}$ gráf globálisan merev. Mivel a v csúcs választása tetszőleges volt, ezért $R_{gv}(G) \geq 2$.

Adódik, hogy az i) és ii) feltételek szükségesek. A fennmaradó rész indirekt igazolható. Tegyük fel, hogy létezik olyan $e \in E$, amelyre $R_v(G - \{e\}) \leq 1$. Ekkor azonban létezik olyan $v \in V$, amelyre $R_e(G - \{e\} - \{v\}) = 0$. Ennek belátásához két esetet kell átgondolni: az e él lefogja a v csúcsot vagy sem. Mindkét eset azonnal ellentmondásra vezet, mivel a feltevés szerint $R_{gv}(G) \geq 2$. □

A tétel megadta a gráfosztály karakterizációját. Az erős, illetve gyenge minimalitás kapcsán megemlítek két olyan kérdést, amelyet [15] vetett fel.

A) Vajon erősen minimális globálisan 2-pontmerev gráfok esetén is megadható a Henneberg-konstrukcióhoz, illetve a Servatius-konstrukcióhoz hasonló tétel, amellyel a gráfosztály minden tagja előállítható?

B) Létezik gyengén minimális globálisan 2-pontmerev gráf?

Az első kérdésre jelenleg sem ismert a válasz, a második kapcsán azonban Kaszanitzky Viktória igazolta a létezést a $K_{4,n-4}$ gráf ($k \geq 9$) segítségével.

3.6. Globálisan 3-pontmerev gráfok

Elsőként ismét a minimális élszám kérdését vizsgálom meg. Kiindulhatunk a 3.4.4 állításból, amely szerint $|E| = \lceil \frac{k+2}{2}|V| \rceil + c(k)$. Hamarosan látni fogjuk, hogy $c(k)$ értéke $k \leq 3$ teljesülése mellett független k-tól. Igazolható azonban [12], hogy $k \geq 4$ esetén ez már nem teljesül.

3.6.1. Állítás (Tulajdonságok, PPT-ről + [12]). *Legyen $G = (V, E)$ egy legalább hat pontból álló erősen minimális globálisan 3-pontmerev gráf. Ekkor*

- $|E| = \lceil \frac{5}{2}|V| \rceil$

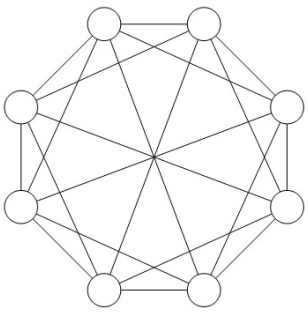
- *minden csúcs fokszáma 5*

Bizonyítás. Az állítás első fele következik a 3.4.4 állításból annak fényében, hogy a fejezet során előállítunk olyan globálisan 3-pontmerev gráfokat tetszőleges $|V| \geq 6$ esetben, amelyekre $c(k) = 0$ teljesül. Ennek értelmében minden ilyen gráf átlagos fokszáma 5. Mivel azonban 3.4.5 állítás alapján tetszőleges $v \in V$ esetén $d(v) \geq 5$, ezért a gráf szükségképpen 5-reguláris. □

3.6.2. Állítás (Példa PPT-ről). *Jelölje C^3 egy n pontból álló kör harmadik hatványát. Ekkor $R_{gv}(C^3) \geq 3$. Általánosan is elmondható, hogy bármely $k \leq n-2$ esetén $R_{gv}(C^k) \geq k$.*

Most egy előállítási algoritmus következik, amely teljessé teszi a 3.6.1 állítás bizonyítását.

3.6.3. Definíció. *Legyen C_{2n} a (v_1, v_2), (v_2, v_3), .., (v_{2n}, v_1) élekből álló kör $2n$ ponton. Tekintsük a C_{2n}^2 gráfot, azaz a C_{2n} gráf négyzetét. Ezután adjuk a gráfhoz a (v_1, v_{n+1}), (v_2, v_{n+2}), .., (v_n, v_{2n}) éleket. Az így kapott gráfot a továbbiakban R_{2n} jelöli.*



3.5. ábra. A globálisan 3-pontmerev R_{2n} gráf ($n = 4$)

3.6.4. Lemma. *[12] Tetszőleges $n \geq 3$ esetén $\kappa(R_{2n}) = 5$.*

A következő állítást a szerzők is csupán bizonyítás nélkül említik annak bonyolultságára és terjedelmére hivatkozva.

3.6.5. Állítás (Példa páros pontszám esetén). *[18] Tetszőleges $n \geq 3$ esetén $R_{gv}(R_{2n}) \geq 3$.*

3.6.6. Definíció (2-kiterjesztés). *Tekintsük a C_{2n} gráfot, ahol $n \geq 3$ tetszőleges. A gráf 2-kiterjesztése a következő lépések sorozatából áll:*

1) Válasszuk ki a kör négy egymást követő pontját (s_3, s_1, s_2 és s_4)

2) Jelölje az s_1 ponttal szemközti csúcsot s_{n+1}

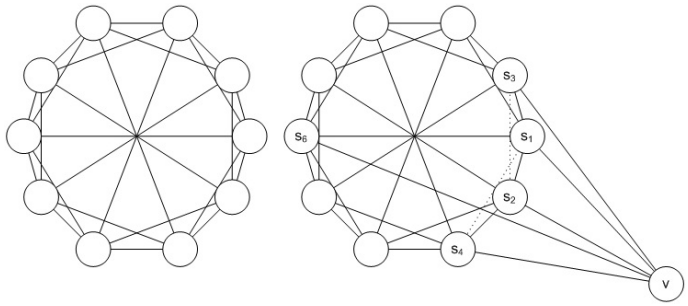
3) Adjunk a gráfhoz egy v csúcsot, majd kössük össze az 1) és 2) lépésekben kiemelt öt ponttal

4) Végül töröljük a gráfból az (s_1, s_4) és (s_2, s_3) éleket

3.6.7. Állítás (Példa páratlan pontszám esetén). *[12] Tetszőleges $n \geq 3$ esetén $R_{gv}(R_{2n+1}) \geq 3$, ahol R_{2n+1} az R_{2n} gráf 2-kiterjesztése.*

A bizonyítás nehéz, de az könnyen ellenőrizhető, hogy a C_{2n}-ből 2-kiterjesztéssel előálló gráfok teljesítik a 3.6.1-ben megfogalmazott minimális élszámra vonatkozó feltételt, hiszen

$$|E(R_{2n+1})| = |E(R_{2n})| + 3 = \frac{5}{2}(2n) + 3 = \frac{5}{2}(2n+1) + \frac{1}{2}$$



3.6. ábra. Erősen minimális globálisan 3-pontmerev gráfok konstrukciója

Összességében elmondható, hogy a globálisan 3-pontmerev gráfosztály teljes karakterizációja jelenleg még nyitott probléma. Ellenben létezik egy olyan konstruktív algoritmus, amely tetszőleges (de legalább hat) ponton előállítja az osztály egy minimális élszámmal rendelkező tagját.

4. fejezet

Matroidelméleti megközelítés

Ebben a fejezetben elsőként a merevség hátterében húzódó absztrakt struktúrát és az azzal kapcsolatos alapfogalmakat, valamint elnevezéseket mutatom be.

4.1. Matroidok

A matroidok fogalmát Hassler Whitney amerikai matematikus vezetette be 1935-ben elsősorban a lineáris függetlenség jellemző tulajdonságainak absztrakt módon történő megfogására.

4.1.1. Definíció (Matroid). *[17] Legyen adott egy S véges halmaz, illetve S részhalmazainak egy $\mathcal{F}$ rendszere. Az $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, S)$ pár matroidot alkot, ha az alábbi három feltételt teljesíti:*

- $\emptyset \in \mathcal{F}$
- $X \subseteq Y \in F$ *esetén* $X \in \mathcal{F}$ *(leszálló tulajdonság)*
- *tetszőleges* $X \subseteq S$ *részhalmaz esetén az* $\mathcal{F}$*-nek* X*-ben fekvő és* X*-ben legbővebb tagjai azonos elemszámúak*

Érdemes megjegyezni, hogy a fenti definícióval ekvivalens megfogalmazást kapunk, ha az első feltételt az alábbi alakban adjuk meg: $\mathcal{F} \neq \emptyset$.

4.1.2. Definíció (Függetlenek). *Az $\mathcal{F}$ tagjait a matroid függetlenjeinek, míg a többi részhalmazt függőnek hívjuk.*

4.1.3. Definíció (Rang). *Az utolsó feltételben megfogalmazott maximális elemszámot az X halmaz rangjának nevezzük. A matroid rangján az S alaphalmaz rangját értjük, melyet $r(\mathcal{M})$ jelöl.*

4.1.4. Definíció (Bázis). *A maximális elemszámú független halmazokat bázisoknak nevezzük. A bázisok halmazát $\mathcal{M}(B)$ jelöli.*

4.1.5. Definíció (Kör). *A minimális elemszámú függő halmazokat a matroid köreinek nevezzük. A körök halmazát $\mathcal{M}(C)$ jelöli.*

A merevségi matroid fogalmának bevezetése előtt röviden ismertetek néhány egyszerű példát matroidokra.

A) Mátrix-matroid: tekintsünk egy test feletti A mátrixot, amelynek oszlopai legyenek S elemei. Egy $X \subseteq S$ halmaz pontosan akkor független, ha a mátrix megfelelő oszlopai lineárisan függetlenek.

B) Grafikus matroid: tekintsünk egy $G = (V, E)$ gráfot. Ezúttal S elemeit a gráf élei szolgáltatják. Egy $X \subseteq S$ halmaz pontosan akkor független, ha nem tartalmaz kört.

C) Uniform matroid: tekintsünk egy S halmazt és egy $1 \leq k \leq |S|$ egész számot. Egy $X \subseteq S$ halmaz pontosan akkor független, ha $|X| \leq k$ teljesül.

4.2. A merevségi matroid

Egy matroidot több módon is megadhatunk: a független halmazokkal, a bázisaival vagy éppen rangfüggvényének segítségével. A merevségi matroidot most a függetlenjeinek felírásával definiálom.

4.2.1. Definíció (Független részgráfok). *Adott $G = (V, E)$ gráfnak tekintsük egy $H = (U, F)$ részgráfját. Azt mondjuk, hogy F független G-ben, ha minden $X \subseteq V(H)$ és $|X| \geq 2$ esetén*

$$i_H(X) \leq 2|X| - 3$$

teljesül, ahol $i_H(X)$ az X által feszített élek számát jelöli. Az üreshalmazt definiáljuk függetlennek.

4.2.2. Definíció (Merevségi matroid). *[4] A 4.2.1 definíció segítségével egy $\mathcal{M} = (E, \mathcal{I})$ matroidot kapunk a $G = (V, E)$ gráf élhalmazán, amelynek függetlenjei éppen az*

$$\mathcal{I} = \{F \subseteq E : F \text{ független } G\text{-ben}\}$$

halmaz elemei. Az $\mathcal{M}(G) = (E, \mathcal{I})$ matroidot a $G = (V, E)$ gráf merevségi matroidjának nevezzük.

4.2.3. Következmény. *Egy $G = (V, E)$ gráf pontosan akkor merev, ha $r(\mathcal{M}(G)) = 2|V| - 3$ teljesül.*

Valóban, számolással gyorsan ellenőrizhető, hogy például az 1.2 ábrán látható négy pontból álló gráfok esetében $r(\mathcal{M}(K_4)) = 5$, valamint tetszőleges $e, f \in E(K_4)$ és $e \neq f$ esetén $r(\mathcal{M}(K_4 - e)) = 5$, azonban $r(\mathcal{M}(K_4 - \{e, f\})) = 4$.

4.2.4. Következmény. *Tudjuk, hogy egy $G = (V, E)$ gráf pontosan akkor minimálisan merev, ha merev és $|E| = 2|V| - 3$ teljesül. Ez azt jelenti, hogy a minimálisan merev részgráfok éppen az $\mathcal{M}(G)$ matroid bázisait alkotják.*

4.3. $\mathcal{M}(G)$ komponensei

Hamarosan látni fogjuk, hogy egy $G = (V, E)$ gráf merevségi matroidjának szerkezete mind a gráf élmerevségéről, mind pedig annak globális merevségéről árulkodik.

4.3.1. Definíció ($\mathcal{M}$–összefüggőség). *Adott $\mathcal{M}(G) = (E, \mathcal{I})$ matroid élhalmazán definiáljuk a következő relációt. Azt mondjuk, hogy $e, f \in E$ azonos ekvivalenciaosztályba tartoznak, ha $e = f$ vagy létezik $\mathcal{C} \in \mathcal{M}(C)$, amelyre $e \in \mathcal{C}$ és $f \in \mathcal{C}$ is teljesül. A $G = (V, E)$ gráfot $\mathcal{M}$–összefüggőnek nevezzük, ha $\mathcal{M}(G)$ összefüggő, azaz élhalmaza csupán egyetlen osztályból áll. Amennyiben ez nem teljesül, akkor az egyes ekvivalenciasztályok alapján $\mathcal{M}$–komponenseket kapunk, amelyek a gráf egyes részgráfjainak felelnek meg.*

4.3.2. Állítás ($\mathcal{M}(G)$ és $R_e(G)$ kapcsolata). *[4] Ha $G = (V, E)$ nem tartalmaz izolált pontot, valamint a 4.3.1 definíció értelmében $\mathcal{M}(G)$–összefüggő, akkor $R_e(G) \geq 2$ teljesül.*

Bizonyítás. $\mathcal{M}(G)$ összefüggősége miatt tetszőleges $e \in E$ él rajta van $\mathcal{M}(G)$ egy körén. Ez azonban éppen azt jelenti, hogy a gráf az e él elhagyása után is merev marad. □

Hamarosan látni fogjuk, hogy a most következő definíció segítségünkre lesz az állítás megfordításában.

4.3.3. Definíció (Majdnem 3–összefüggőség). *Egy $G = (V, E)$ gráfot nevezzünk majdnem 3–összefüggőnek, ha a gráf nem 3-szorosan összefüggő ugyan, de egyetlen e él hozzávételével már 3–összefüggővé tehető, azaz létezik olyan $e = (u, v)$ él, amelyre $K_v(G + e) = 3$ teljesül. Jelölje ezt a tulajdonságot a továbbiakban $\kappa_v(G) = 3^-$.*

4.3.4. Állítás ($\mathcal{M}(G)$ és $R_e(G)$ kapcsolata). *[4] Tegyük fel, hogy egy adott $G = (V, E)$ gráfra $K_v(G) = 3^-$ és $R_e(G) \geq 2$ teljesül. Ekkor a gráf szükségképpen $\mathcal{M}$-összefüggő.*

Bizonyítás. Indirekt módon igazoljuk az állítást. Tegyük fel, hogy a $G = (V, E)$ gráf nem $\mathcal{M}$-összefüggő és jelölje $H_1, \ldots, H_q$ a különböző $\mathcal{M}$–komponenseket ($q \geq 2$). Jelölje X_i a kizárólag H_i által lefogott csúcsok halmazát, azaz

$$X_i := V(H_i) - \bigcup_{i \neq j} V(H_j)$$

Ennek elemszáma legyen x_i. Hasonlóképpen legyen Y_i azon pontok halmaza, amelyeket másik komponenshez tartozó él is lefog. Így tehát $Y_i := V(H_i) - X_i$, elemszámát jelölje y_i. Legyen x_i és y_i összege n_i, amely éppen H_i csúcsainak számát adja meg. Ezt átgondolva az alábbi egyenlőtlenség adódik:

$$\sum_{i=1}^{q} y_i \geq 2|\bigcup_{i=1}^{q} Y_i|$$

Mivel a feltevésünk szerint G redundánsan merev gráf, így minden éle eleme a merevségi matroid egyik körének és minden kör - és így minden komponens - élszáma legalább négy. Azt is tudjuk, hogy a gráf közel 3-összefüggő, ezért tetszőleges i esetén $y_i \geq 2$, valamint minimálisan három komponens létezésekor pedig $y_i \geq 3$. Jelölje most $\mathcal{M}(H_i)$ egy bázisát B_i. Ekkor

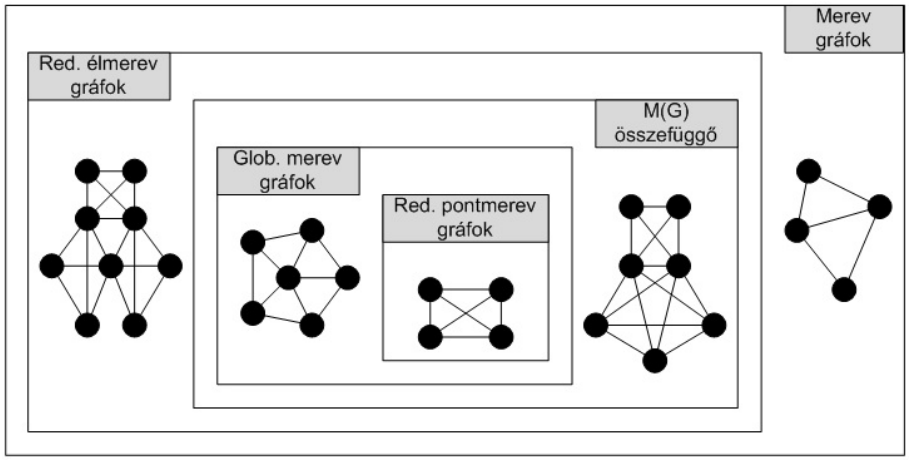
$$|\bigcup_{i=1}^{q} B_i| = \sum_{i=1}^{q} |B_i| = \sum_{i=1}^{q} (2n_i - 3) = 2\sum_{i=1}^{q} n_i - 3q \geq \left(2\sum_{i=1}^{q} x_i + \sum_{i=1}^{q} y_i\right) + \sum_{i=1}^{q} y_i - 3q =$$

$$= 2|V| + 3q - 2 - 3q = 2|V| - 2$$

Így azonban ellentmondásra jutottunk, hiszen $r(\mathcal{M}(G)) = 2|V| - 3$, azaz a fenti bázisok uniója egy kört alkotna a matroidban. □

4.3.5. Következmény ($\mathcal{M}(G)$ és globális merevség kapcsolata). *Legyen $G = (V, E)$ egy globálisan merev gráf. Ekkor a 3.2.1 állítás alapján $\kappa(G) \geq 3$ és $R_e(G) \geq 2$, tehát a gráf $\mathcal{M}$–összefüggő.*

4.3.6. Következmény ($\mathcal{M}(G)$ és $R_v(G)$ kapcsolata). *Legyen $G = (V, E)$ egy olyan gráf, amelyre $R_v(G) \geq 2$ teljesül. Ekkor a 2.2.3 állítás alapján $R_e(G) \geq 2$, illetve a 2.2.10 lemma alapján $\kappa(G) \geq 3$ teljesül. Így 4.3.4 állítás következtében a gráf $\mathcal{M}$–összefüggő.*



4.1. ábra. A tárgyalt gráfosztályok közötti kapcsolatok $|V| \geq 4$ feltétel mellett

A 4.3.6 megfigyelés jelen tudásunk mellett már egyszerű következményként adódott, de korábban [14] egy közvetlen bizonyítással is igazolta az összefüggést.

A következő állítás tulajdonképpen a 2.4.9 állítás átfogalmazása az $\mathcal{M}$–összefüggőség fogalmának felhasználásával.

4.3.7. Állítás ($\mathcal{M}(G)$ és $R_v(G) \geq 2$ kapcsolata). *[14] Legyen $G = (V, E)$ egy n pontból álló gráf, melynek élszáma $2n-1$. Ekkor $R_v(G) \geq 2$ pontosan akkor teljesül, ha létezik a gráf élhalmazának egy olyan $E = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_k$ partíciója, amelyben bármely $1 \leq i \leq k$ esetén $E - E_i$ kört alkot $\mathcal{M}(G)$-ben, valamint az alábbi két feltétel egyike is fennáll:*

- *E_1 és E_2 egy-egy háromágú csillag éleit alkotja a gráfban, míg a többi E_i csupán egyetlen élet tartalmaz*
- *E_1 két egymással szomszédos középpontú, háromágú csillag uniója a gráfban, a többi E_i pedig csupán egyetlen élet tartalmaz*

4.4. A merevségi matroid egyértelműsége

Matroidok esetén is értelemezhetjük a többszörös összefüggőség fogalmát az alábbi definíció alapján.

4.4.1. Definíció. *Legyen k egy tetszőleges pozitív egész szám, valamint $\mathcal{M}(G) = (E, \mathcal{I})$ egy matroid, melynek rangfüggvényét jelölje r. Azt mondjuk, hogy az E halmaz egy (X, Y) partíciója* függőleges k-szeparáció, *ha az alábbi két feltételt teljesíti:*

1) $\min\Big\{r(X), r(Y)\Big\} \geq k$

2) $r(X) + r(Y) \leq r(E) + k - 1$

4.4.2. Definíció. *Egy* $\mathcal{M}(G) = (E, \mathcal{I})$ *matroid* függőleges összefüggőségi indexe *az a legkisebb* j *egész szám, amelyre létezik a matroidnak függőleges* j*-szeparációja. Ezt az értéket a továbbiakban* $\kappa(\mathcal{M})$ *jelöli. Amennyiben* $\mathcal{M}$ *nem szeparálható, úgy legyen* $\kappa(\mathcal{M}) = r(E)$.

A következő állítás értelmében egy hétszeresen összefüggő gráfot már egyértelműen meghatároz a merevségi matroidja.

4.4.3. Állítás. *[8] Legyenek* $G = (V, E)$ *és* $H = (U, F)$ *olyan gráfok, amelyekre* $\mathcal{M}(G)$ *és* $\mathcal{M}(H)$ *izomorf egymással. Ha* $\kappa(G) \geq 7$*, akkor* G *is izomorf* H*-val.*

Teljes gráfok esetében $\mathcal{M}(G)$ függőleges összefüggőségi indexe egyszerűen számolható az alábbi állítás alapján.

4.4.4. Állítás. *[8] Legyen* $n \geq 4$ *és tekintsük a* K_n *teljes gráfot. Ekkor* $\kappa(\mathcal{M}(K_n)) = n - 2$.

A következő állítás alapján $\kappa(G)$ ismeretében $\mathcal{M}(G)$ függőleges összefüggőségi indexe számolható.

4.4.5. Állítás. *[8] Legyen* $k \geq 6$ *és tekintsünk egy* $G = (V, E)$ *gráfot, amelyre* $\kappa(G) = k$ *teljesül. Ekkor* $\kappa(\mathcal{M}(G)) = k - 2$.

4.5. Gráfok poligonja

A most következő szakaszban azt mutatom meg, hogy bizonyos szerkezetű gráfok esetében az $\mathcal{M}$-összefüggőség és a merevség kérdése egyszerűbben eldönthető. Ehhez elsőként a poligonok fogalmát vezetem be.

4.5.1. Definíció (Poligon). *Legyen* $G = (V, E)$ *2-szeresen összefüggő gráf,* $c \geq 3$ *egész szám, valamint* $X_1, X_2, \ldots, X_c$ *a* V *ponthalmaznak olyan ciklikus (azaz* $X_1 = X_c$*) részhalmazai, melyekre teljesülnek az alábbiak:*

a) $|X_i \cap X_j| = 1$*, ha* $|i - j| = 1$

b) $|X_i \cap X_j| = 0$*, ha* $|i - j| \geq 2$

c) $\{E(X_1, \ldots, E(X_c)\}$ *az* E *élhalmaz egy partíciója*

Ekkor $(X_1, .., X_c)$ a gráf c méretű poligonja.

4.5.2. Állítás (Merevség és poligonok). *[4] Tegyük fel, hogy a $G = (V, E)$ gráfnak van c méretű poligonja. Ekkor*

a) G nem $\mathcal{M}$-összefüggő

b) ha $c \geq 4$, akkor G nem merev

Bizonyítás. Legyen $(X_1, \ldots, X_c)$ a gráf poligonja, valamint $E_i := E(X_i)$. Könnyen láthatóan igaz az alábbi egyenlőtlenség-sorozat:

$$r(E) \leq \sum_{i=1}^{c} r(E_i) \leq \sum_{i=1}^{c} (2|X_i| - 3) = 2|V| + 2c - 3c = 2|V| - c$$

Mivel definíció szerint $c \geq 3$, ezért $r(E) \leq 2|V| - 3$. Először a második állításunkat látjuk be. Tegyük fel, hogy $c \geq 4$. Így $r(E) \leq 2|V| - 4$, ami éppen azt jelenti, hogy a gráf nem merev.

Az első állítást indirekt módon igazoljuk. Tegyük fel, hogy a gráf $\mathcal{M}$-összefüggő. Így persze merev is és $c = 3$ szükségképpen teljesül. Ez azt jelenti, hogy a fenti egyenlőtlenség-sorozat mindenütt egyenlőséggel teljesül, azaz $r(E) = \sum r(E_i)$. Feltevésünk szerint a gráf $\mathcal{M}$-összefüggő, azaz bármely két éle rajta van a matroid egy körén. Mivel $r(E)$ a matroid rangja, így különböző X_i-kből választott éleket nem tartalmazhat a matroid semelyik köre sem. Ellentmondásra jutottunk, mert hamis volt az indirekt feltevésünk, miszerint a gráf $\mathcal{M}$-összefüggő. □

4.5.3. Következmény. *Legyen $c = 3$. Tegyük fel, hogy egy $G = (V, E)$ gráfnak létezik c méretű poligonja. Ekkor $R_v(G) \leq 1$ teljesül.*

4.6. Gráfok szeparálása

Végezetül azt fogom megvizsgálni, hogy egy gráf szeparálhatósága milyen kapcsolatban áll annak merevségi jellemzőivel. Észrevehető, hogy amennyiben G_1 és G_2 $\mathcal{M}$–össszefüggő gráfok, akkor azok 2–összege is $\mathcal{M}$–összefüggő. Ezt a gondolatmenetet folytatva további hasznos állításokhoz juthatunk.

4.6.1. Definíció (Szeparáció). *A $G = (V, E)$ gráf k-szeparációjának nevezünk egy (G_1, G_2) párt, ha az alábbiak teljesülnek:*

- *G_1 és G_2 éldiszjunkt részgráfjai G-nek*
- *$|V(G_1)| \geq k + 1$ és $|V(G_2)| \geq k + 1$*

- $G = G_1 \cup G_2$
- $|V(G_1) \cap V(G_2)| = k$

4.6.2. Definíció (Szeparátor). *Ha (G_1, G_2) egy k-szeparációja G-nek, akkor a $V(G_1) \cap V(G_2)$ ponthalmazt a gráf k-szeparátorának nevezzük.*

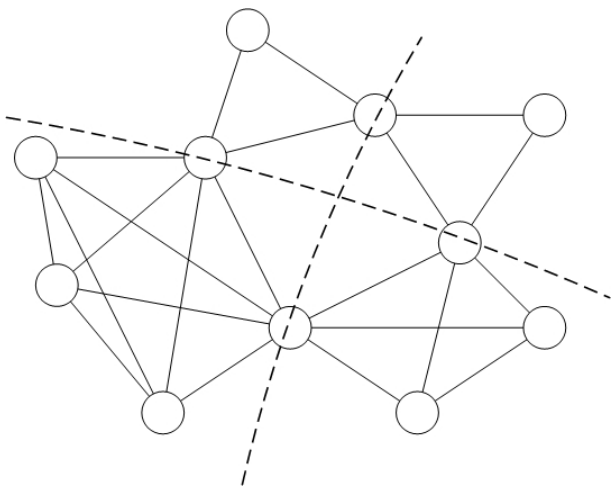
Gráfok k-összefüggőségét a szeparáció fogalmának segítségével is megfogalmazhatjuk, ami ekvivalens a már jól ismert definícióval.

4.6.3. Definíció (Összefüggőség). *Egy $G = (V, E)$ gráfot k-összefüggőnek hívunk, ha $|V| \geq k + 1$ és nem létezik olyan j-szeparációja a gráfnak, amelyre $0 \leq j \leq k - 1$ teljesül.*

Az új fogalmak felhasználásával elsőként az alfejezet elején említett gondolatmenet megfordítását mutatom meg.

4.6.4. Állítás (Szeparációk M-összefüggősége). *[4] Legyen (G_1, G_2) egy 2-szeparációja a $G = (V, E)$ gráfnak. Ha a G gráf $\mathcal{M}$-összefüggő, akkor G_1 és G_2 is $\mathcal{M}$-összefüggő.*

A 4.2 ábrán látható gráf nem merev. A következőkben mutatok egy gyorsan ellenőrizhető bizonyítékot, amelynek segítségével ezt igazolni lehet.



4.2. ábra. Egy síkbeli gráf keresztező 2-szeparátorai

4.6.5. Definíció (Keresztező 2-szeparátorok). *Legyen $\{x_1, x_2\}$ és $\{y_1, y_2\}$ két különböző 2-szeparátora a kétszeresen összefüggő $G = (V, E)$ gráfnak. Azt mondjuk, hogy $\{x_1, x_2\}$ keresztezi $\{y_1, y_2\}$-t, ha x_1 és x_2 különböző komponenseibe esik a $G -$*

$\{y_1, y_2\}$ gráfnak. Könnyen látható, hogy amennyiben $\{x_1, x_2\}$ keresztezi $\{y_1, y_2\}$-t, akkor $\{y_1, y_2\}$ is keresztezi $\{x_1, x_2\}$-t. Ennek alapján okkal mondhatjuk, hogy a fenti esetben $\{x_1, x_2\}$ és $\{y_1, y_2\}$ keresztezik egymást.

4.6.6. Állítás (Merev gráfok 2-szeparátorai). *[4] Legyen $G = (V, E)$ egy merev gráf. Ekkor $\kappa(G) \geq 2$, de a gráfnak nem léteznek $\{x_1, x_2\}$ és $\{y_1, y_2\}$ keresztező 2-szeparátorai.*

Bizonyítás. Az állítás rövid átgondolás után következik a 4.5.2 állításból, hiszen a keresztező 2-szeparátorok a gráfban éppen egy olyan poligon létezését vonják maguk után, amelynek mérete négy. □

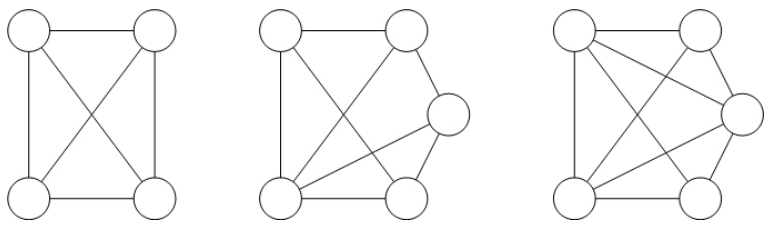
Az eddig leírtakból már kiolvasható az $\mathcal{M}$–összefüggő gráfok karakterizációs tétele is.

4.6.7. Tétel ($\mathcal{M}$–összefüggőség karakterizációja). *[4] Tetszőleges $G = (V, E)$ gráf pontosan akkor $\mathcal{M}$-összefüggő, ha $\kappa(G) \geq 2$, a gráfnak nincs poligonja, valamint minden (G_1, G_2) 2-szeparáció esetén mind G_1, mind G_2 redundánsan merev részgráf.*

Korábban már láthattunk konstrukciós tételeket bizonyos gráfosztályok esetében. Most bizonyítás nélkül következik két állítás, amelyek segítségével egy $\mathcal{M}$–összefüggő $G = (V, E)$ gráfból állíthatunk elő szintén $\mathcal{M}$–összefüggő $G' = (V + v, E')$ gráfot.

4.6.8. Állítás ($\mathcal{M}$-összefüggőség megmaradása). *[4] Legyen $G = (V, E)$ egy $\mathcal{M}$-összefüggő gráf, $u \in V$, $v \in V$, valamint $e = (u, v) \notin G$. Ekkor $G' = G + e$ is $\mathcal{M}$-összefüggő.*

4.6.9. Állítás ($\mathcal{M}$-összefüggőség megmaradása). *[4] Legyen $G = (V, E)$ egy $\mathcal{M}$-összefüggő gráf. Ekkor a Henneberg-féle konstrukció tetszőleges 1-kiterjesztésével keletkező $G' = (V', E')$ gráf is $\mathcal{M}$-összefüggő.*



4.3. ábra. $\mathcal{M}$–összefüggő gráfok konstrukciója K_4-ből

A fejezet során kiderült, hogy egy gráf merevségi tulajdonságai szoros kapcsolatban állnak a hozzá tartozó merevségi matroid szerkezetével. Ismert egyrészt azon

gráfosztály karakterizációja, amelynek merevségi matroidja összefüggő, másrészt olyan konstrukciós tételek, amelyek segítségével az osztály tagjait előállíthatjuk. Mindezen felül a 4.1 ábra a korábban tárgyalt gráfosztályokkal fennálló tartalmazási relációkat példák segítségével ábrázolja.

Függelék

A merev gráfok elméletének intenzív fejlődésével egyre több részosztály alakult ki, azonban a különböző szerzők jelölésrendszere egyelőre meglehetősen eltérő. Jelen szakdolgozat az alábbiakat használja.

Jelölés	Gráfosztály
$R_e(G)$	A $G = (V, E)$ gráf élmerevségi indexe
$R_v(G)$	A $G = (V, E)$ gráf pontmerevségi indexe
$R_{ge}(G)$	A $G = (V, E)$ gráf globális élmerevségi indexe
$R_{gv}(G)$	A $G = (V, E)$ gráf globális pontmerevségi indexe
$R_v^*(G)$	A $G = (V, E)$ gráf statisztikai redundáns pontmerevsége

4.1. táblázat. Jelölésrendszer

Irodalomjegyzék

[1] S. J. Gortler, A. D. Healy, D. P. Thurston: Characterizing generic global rigidity. American Journal of Mathematics, vol. 132, no. 4, pp. 897-939, (2010)

[2] B. Hendrickson: Conditions for unique graph realizations. SIAM J. Comput. 21 (1), (1992), pp. 65-84.

[3] L. Henneberg: Die Grapische Statik der starren Systeme, Leipzig, (1911)

[4] B. Jackson, T. Jordán: Connected rigidity matroids and unique realizations of graphs. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 94, (2005) pp. 1-29.

[5] B. Jackson, T. Jordán: A sufficient connectivity condition for generic rigidity in the plane. Discrete Applied Mathematics, 157(8), 1965-1968; (2009)

[6] B. Jackson, B. Servatius, H. Servatius: The 2-dimensional rigidity of certain families of graphs. Journal of Graph Theory 54(2): 154-166 (2007)

[7] T. Jordán: On the existence of k edge-disjoint 2-connected spanning subgraphs. Journal of Combinatorial Theory, Series B, Vol. 95, (2005), pp. 257-262.

[8] T. Jordán, V. E. Kaszanitzky: Highly connected rigidity matroids have unique underlying graphs. Egerváry Research Group, Budapest, TR-2010-07, www.cs.elte.hu/egres, (2010)

[9] T. Jordán, Z. Szabadka: Operations preserving the global rigidity of graphs and frameworks in the plane, Computational Geometry, 42(6-7), (2009), pp. 511-521.

[10] G. Laman: On graphs and rigidity of plane skeletal structures. J. Engineering Math. 4, (1970), pp. 331-340.

[11] L. Lovász, Y. Yemini: On generic rigidity in the plane, SIAM J. Algebraic Discrete Methods 3, 91-98; (1982)

[12] S. A. Motevallian, C. Yu, B. D. O. Anderson: Robustness of the Loss of Multiple Nodes in the Localizability of Sensor Networks. In 18th World Congress of the International Federation of Automatic Control, (IFAC 2011), pages 7836-7841, Milan, Italy, 2011.

[13] S. A. Motevallian, Ch. Yu, B. D. O. Anderson: Multi-Agent Rigid Formations: A Study of Robustness to the Loss of Multiple agents. In Proc IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference, (CDC-ECC 2011), pages 3602-3607, Orlando, FL, 2011.

[14] B. Servatius: Birigidity in the plane. SIAM J. Discrete Math. 2 (4), (1989), pp. 582-589.

[15] T. H. Summers, C. Yu, B. D. O. Anderson: Robustness to agent loss in vehicle formations and sensor networks. In Proc. 47th IEEE Conference on Decision and Control, CDC 2008, pages 1193-1199, Cancun, Mexico, December 2008.

[16] T. H. Summers, Ch. Yu, B. D. O. Anderson: Addressing agent loss in vehicle formations and sensor networks. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 19 (15): pp. 1673-1696, (2009)

[17] H. Whitney: On the Abstract Properties of Linear Independence. Amer. J. Math. 57, (1935), pp. 509-533.

[18] Ch. Yu, B. D. O. Anderson: Development of redundant rigidity theory for formation control. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 19 (13): pp. 1427-1446, September (2009)

[19] Ch. Yu, S. Dasgupta, B. D. O. Anderson: Network Localizability with Link or Node Losses. In Proc IEEE Conference on Decision and Control, (CDC 2010), pages 402-407, Atlanta, GA, December 2010.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani Jordán Tibornak az érdekes témafelvetésért, a szakmai tanácsokért és rendszeres útmutatásért, valamint köszönöm azt a türelmet és bíztatást, amelyet a szakdolgozatom elkészítéséhez tőle kaptam.

Továbbá hálás vagyok mindazoknak, akik egyetemi éveim során segítettek és támogattak.