

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

KÜLÖNBÖZŐ VÉGESELEM MÓDSZEREK
ÖSSZEHASONLÍTÁSA

Szakdolgozat

Írta: Csörgő Gábor

matematika BSc
alkalmazott matematikus szakirány

Témavezetők:

Dr. Simon Péter, egyetemi docens
Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Horváth Tamás, egyetemi tanársegéd
Matematika és Számítástudomány Tanszék
Széchenyi István Egyetem, Műszaki Tudományi Kar



Budapest, 2009

Tartalomjegyzék

1. Előszó	1
1.1. Differenciálegyenletekről	1
1.2. A dolgozat célja	1
1.3. Tartalmi áttekintés	2
1.4. Irodalmi áttekintés	2
2. Végeselemek egy dimenzióban	4
2.1. A gyenge megoldás	5
2.1.1. Homogén Dirichlet-peremfeltétel	5
2.1.2. Inhomogén Dirichlet-peremfeltétel	8
2.1.3. Homogén kevert-peremfeltétel	9
2.1.4. Inhomogén Neumann-peremfeltétel	9
2.1.5. Harmadfajú-peremfeltétel	11
2.2. Végeselemek	11
2.2.1. Diszkrétizáció	11
2.2.2. Elsőfokú kalapfüggvények	12
2.2.3. Magasabb fokú Lagrange-elemek	15
3. Végeselemek több dimenzióban	19
3.1. A magasabb dimenziós gyenge megoldás	21
3.1.1. Homogén Dirichlet-peremfeltétel	22
3.1.2. Kevert-peremfeltétel	23
3.1.3. Neumann-peremfeltétel	24
3.1.4. Harmadfajú-peremfeltétel	25
3.2. Két dimenziós végeselemek	25
3.2.1. A rács	26
3.2.2. Lineáris báziselemek	27
3.2.3. Másodfokú báziselemek	29
3.2.4. Harmadfokú báziselemek	31

3.2.5. Negyed és magasabb fokú báziselemek	32
3.3. Három és magasabb dimenziós végelemek	34
4. A h és p végelem módszer összehasonlító elemzése	35
4.1. Approximáció	35
4.2. Tesztek	36
4.2.1. Egy tizedfokú polinom	38
4.2.2. Egy szép trigonometrikus felület	39
4.2.3. Egy nagy oszcillációjú függvény	40
4.2.4. Egy majdnem ugrófüggvény	41
4.3. Értékelés	42
Köszönetnyilvánítás	43
Irodalomjegyzék	44

1. fejezet

Előszó

1.1. Differenciálegyenletekről

A parciális differenciálegyenletek (továbbiakban PDE) megoldása a mai alkalmazott analízis, sőt az egész alkalmazott matematika egyik legfontosabb témaköre a fizikai, kémiai, és biológiai alkalmazások szempontjából.

A XXI. században a környezetvédelmen, és a megújuló energiaforrásokon nagyon nagy hangsúly van. Egy ilyen megújuló energiaforrás például az úgynevezett üzemanyagcella (*Fuel Cell*), mely még fejlesztés alatt áll. Ennek az új technológiának köszönhetően akár 100%-os hatásfok is elérhető, károsanyag kibocsátás nélkül.

Az üzemanyagcella matematikai leírása időfüggő parabolikus parciális differenciálegyenlet-rendszerekkel történik. Az üzemanyagcella projektben a fenti egyenletek megoldásában az ELTE TTK Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék munkatársai is segédkeznek. Ehhez a kutatáshoz kapcsolódik a jelen szakdolgozat is.

1.2. A dolgozat célja

Az egyenletek megoldási módszereit két nagy csoportra bonthatjuk. Az egyik a klasszikus megoldások kiszámítása, melyek pontos megoldásokat adnak ugyan, de az alkalmazásokban a feladatok bonyolultsága miatt ezek nem használhatóak. Ezért van szükség a numerikus megoldási módszerekre, melyek ugyan csak közelítő megoldást adnak, de egy jó eljárás esetén nagyon pontos megoldást is kaphatunk olyan feladatokra is, melyek a klasszikus módszerekkel nem kezelhetőek.

Ezen szakdolgozat célja, hogy megismertesse az Olvasót az elliptikus parciális differenciálegyenletek numerikus megoldási módszereinek egyik legfontosabbjával, a végeelem módszer alapjaival, azok különböző változataival, a módszerek meg-

valósíthatóságával, számítógépre vihetőségével, és nem utolsó sorban a hatékonyságával, azaz mennyi számítás elvégzése esetén mekkora pontosságot tudunk elérni az egyes eljárásokkal. Ehhez kapcsolódóan saját teszteredményeket is prezentálunk.

Azonban, hogy ilyen eredményekhez juthassunk sok elméleti ismeret is szükséges. Bemutatjuk a PDE-k numerikus megoldásához vezető út főbb állomásait, sok-sok definíció, tétel, állítás, és megjegyzés segítségével betekintést nyújtunk a háttérben húzódó funkcionálanalízis elméletbe, azonban tesszük mindezt a teljesség igénye nélkül, hisz a teljes anyag jóval túlmutat ezen dolgozat keretein. Próbálunk rámutatni a legfőbb összefüggésekre, és nem elveszni az apró részletekben, ezért sok tétel bizonyítás nélkül szerepel, melynek oka csupán annyi, hogy az adott bizonyítás esetleg hosszadalmas, körülményes, vagy csak érdektelen az általunk tárgyalt anyag szempontjából. Az apróbb részletek iránt is érdeklődő Olvasónak tudjuk ajánlani az Irodalomjegyzékben szereplő köteteket.

1.3. Tartalmi áttekintés

A dolgozat tartalmilag három részből áll, melyek külön fejezetekben kapnak helyet. Az első blokk bemutatja a másodrendű közönséges differenciálegyenletekre vonatkozó végelem módszer részleteit, melyet aztán a második blokk kiterjeszt többdimenziós egyenletekre, melyek megoldásaira mi igazából kíváncsiak vagyunk.

A harmadik blokk valamelyest elkülönül az első kettőtől. Itt fogjuk elvégezni a dolgozat címében is szereplő különböző végelem módszerek összehasonlítását. A h és p végelem módszerek összehasonlítása lesz a célunk. Rögzített tartományon, rögzített két dimenziós elliptikus egyenleteket oldunk meg rögzített peremfeltételek mellett, és vizsgáljuk a megoldások pontosságát, attól függően, hogy melyik módszerrel dolgozunk majd. Ezen összehasonlítások során segítségünkre lesz a *COMSOL Multiphysics* nevű differenciálegyenlet megoldó programcsomag, mely a második blokkban bemutatott végelem módszert használja, és amelyet az Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék bocsátott rendelkezésünkre.

1.4. Irodalmi áttekintés

A feldolgozandó téma magyar nyelvű irodalma nagyon szűkös, elsősorban mérnöki szakkönyvek foglalkoznak végelem módszerekkel. A kifejezetten matematikai szempontból való tárgyalást talán csak Stoyan Gisbert és Takó Galina könyve, a három kötetes Numerikus Módszerek című sorozat ([7]) részesíti előnyben. Ezzel szemben a külföldi, főleg angol nyelvű irodalom rendkívül bőséges kínálatot biztosít,

közülük néhány kötet megtalálható az Irodalomjegyzékben. A dolgozat elsősorban *Pavel Šolín*-nak, a téma nagy szakértőjének köteteire ([9] és [10]), illetve a *Brenner-Scott* szerzőpáros könyvére ([12]) támaszkodik. Az előbbi [9]-es kötet részletesen tárgyalja mind az egy, mind a magasabb dimenziós egyenletekre vonatkozó végeselem módszereket, míg az utóbbi [12]-es elsősorban a kétdimenziós esetet vizsgálja, mellette sok funkcionálanalízis beli témával foglalkozik. Mi a kettőt szeretnénk ötvözni. Természetesen a nem kifejezetten ehhez a témához kapcsolódó irodalmakra is szükségünk lesz. Ezek listája szintén az Irodalomjegyzékben látható.

2. fejezet

Végeselemek egy dimenzióban

Bevezetesként kezdjük néhány jelöléssel, definícióval. Jelöljön $I \subset \mathbb{R}$ egy intervallumot. További definíciók a [8], vagy [6] kötetekben találhatóak.

2.0.1. Definíció. $L^p(I) = \{f : \int_I |f|^p < \infty, f \text{ Lebesgue-mérhető}\} \forall 1 \leq p < \infty$ -re.

2.0.2. Definíció. $L^\infty(I) = \{f : \inf\{\sup_{I \setminus N} |f| : \lambda(N) = 0\} < \infty\}$, ahol λ az egydimenziós Lebesgue-mérték.

2.0.3. Definíció. $C^n(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ n-szer folytonosan differenciálható}\}$, $n \in \mathbb{N}$. $n = 0$ esetben folytonos függvényekről beszélünk ($C^0 = C$).

Ezen fejezetben a következő alakú másodrendű differenciálegyenlet vizsgálata lesz a fő témánk:

$$-(p(x)u'(x))' + k(x)u(x) = f(x) \quad x \in (0, 1) \quad (2.1)$$

ahol $\exists m \in \mathbb{R}^+$, hogy $p(x) \geq m$, $k(x) \geq 0 \forall x \in (0, 1)$, és $p, k \in L^\infty(0, 1)$.

Azonban egyértelmű megoldásokat keresünk, így szükségünk van további feltételekre. Ezek lesznek a peremfeltételek. Négy peremfeltétel típussal fogunk foglalkozni a továbbiakban, melyek a következők:

- Dirichlet-peremfeltétel: $u(0) = a$, $u(1) = b$ rögzített $a, b \in \mathbb{R}$ esetén
- Kevert-peremfeltétel: $u'(0) = a$, $u(1) = b$ rögzített $a, b \in \mathbb{R}$ esetén
- Neumann-peremfeltétel: $-p(0)u'(0) = a$, $p(1)u'(1) = b$ rögzített $a, b \in \mathbb{R}$ esetén
- Harmadfajú-peremfeltétel: $-p(0)u'(0) + \sigma_0 u(0) = c_0$, $p(1)u'(1) + \sigma_1 u(1) = c_1$ rögzített $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$, $\sigma_0, \sigma_1 > 0$ esetén

Megjegyezzük, hogy ha $a = b = 0$, akkor homogén peremfeltételről beszélünk.

2.1. A gyenge megoldás

Kezdjük itt is néhány definícióval, és vezessük be a Hilbert-terek, illetve a gyenge megoldás fogalmát. Megjegyezzük, hogy az alábbiakban leírtak általánosíthatók komplex függvényekre is, de mi most csak a valós esettel foglalkozunk.

2.1.1. Definíció (Hilbert-tér). H vektortér pontosan akkor Hilbert-tér, ha értelmezett rajta egy $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ skalárszorzat, és a skalárszorzat által generált normával ($\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$) a tér teljes, azaz minden Cauchy-sorozat konvergens a normában.

2.1.1. Megjegyzés. Triviális, hogy a skalárszorzat által generált norma valóban norma.

2.1.2. Definíció. Legyen $H^1(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} : f, f' \in L^2(I)\}$, rajta a következő $\langle f, g \rangle_{H^1(I)} = \int_I (fg + f'g')$ skalárszorzattal $\forall f, g \in H^1(I)$.

2.1.2. Megjegyzés. Könnyen látható, hogy az előző definícióban szereplő tér Hilbert-tér, a skalárszorzat valóban skalárszorzat.

A fenti definícióban szereplő derivált disztribúciós értelemben értendő, erről és az alábbi állítás igazolásáról részletesebben a [4] kötetben olvashatunk.

2.1.1. Állítás. $H^1(I)$ tér elemei folytonosak.

2.1.3. Definíció. Legyen $H_0^1(I) = \{f : f \in H^1(I), f(a) = f(b) = 0\}$, ahol az $I = [a, b]$.

2.1.2. Állítás. A $H_0^1(I)$ tér teljes a $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1(I)}$ skalárszorzattal.

2.1.1. Homogén Dirichlet-peremfeltétel

Tekintsük tehát a kiindulási (2.1) egyenletünket először homogén Dirichlet-peremfeltétellel a $(0, 1)$ intervallumon:

$$\begin{aligned} -(pu')' + ku &= f \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

Legyen $u \in C^2(0, 1)$. Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát egy tetszőleges $v \in H_0^1(0, 1)$ függvénnyel, majd integráljunk 0-tól 1-ig. Ekkor a következő alakot kapjuk:

$$\int_0^1 (-(pu')' + ku)v = \int_0^1 fv \quad \forall v \in H_0^1(0, 1)$$

Alakítsuk át a bal oldalt parciális integrálás segítségével:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (-(pu')' + ku)v &= \int_0^1 -(pu')'v + \int_0^1 kuv = \underbrace{\left[-(pu')v \right]_0^1}_{=0, v(0)=v(1)=0} - \int_0^1 -pu'v' + \int_0^1 kuv = \\ &= \int_0^1 (pu'v' + kuv) = \int_0^1 fv \quad \forall v \in H_0^1(0, 1) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Vegyük észre, hogy a képlet értelmes $u \in H^1(0, 1)$ esetén is, és a peremfeltétel miatt $u \in H_0^1(0, 1)$ esetén is.

2.1.4. Definíció (Gyenge megoldás). Egy $u \in H_0^1(0, 1)$ függvény a peremértékfeladat gyenge megoldása, ha teljesül rá (2.2).

2.1.5. Definíció. $\langle u, v \rangle_{H_0^1(I)} := \int_I u'v'$, $\|u\|_{H_0^1(I)} := \sqrt{\int_I |u'|^2}$

2.1.3. Állítás. $\langle u, v \rangle_{H_0^1(I)}$ skalárszorzat, $\|u\|_{H_0^1(I)}$ norma $H_0^1(I)$ -ben.

2.1.1. Tétel (Poincare-Friedrichs-Sztyeklov-egyenlőtlenség).

$$\exists c > 0 : \int_a^b |u|^2 \leq c \int_a^b |u'|^2 \quad \forall u \in H_0^1(a, b)$$

2.1.4. Állítás. $\|\cdot\|_{H^1(I)} \cong \|\cdot\|_{H_0^1(I)}$ $H_0^1(I)$ -ben, azaz ekvivalens normák.

Bizonyítás: $\|u\|_{H_0^1}^2 = \int_a^b |u'|^2 \leq \|u\|_{H^1}^2 = \int_a^b |u'|^2 + |u|^2 \leq \underbrace{(1+c)}_{2.1.1 \text{ Tétel}} \int_a^b |u'|^2 =$

$(1+c)\|u\|_{H_0^1}^2 \quad \square$

Legyen p, k olyan, hogy $\exists m \in \mathbb{R}^+$, hogy $p \geq m$, $k \geq 0$. Vezessük be a következő skalárszorzatot: $[u, v] := \int_a^b (pu'v' + kuv)$, spec.: $p \equiv k \equiv 1 \Rightarrow [\cdot, \cdot] = \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1}$, és $p \equiv 1, k \equiv 0 \Rightarrow [\cdot, \cdot] = \langle \cdot, \cdot \rangle_{H_0^1}$.

2.1.5. Állítás. $[\cdot, \cdot]$ skalárszorzat H_0^1 -ben, és ekvivalens normát indukál a $\|\cdot\|_{H^1}$ normával.

Bizonyítás: Triviális, hogy skalárszorzat. $[u, u] = \int_a^b (p|u'|^2 + k|u|^2) \leq$

$$\leq \underbrace{(b-a) \max\{\sup |p|, \sup |k|\}}_{\text{konstans}} \underbrace{\int_a^b (|u'|^2 + |u|^2)}_{\|u\|_{H^1}^2}, \text{ illetve } \|u\|_{H^1}^2 = \int_a^b (|u'|^2 + |u|^2) \stackrel{2.1.1 \text{ Tétel}}{\leq}$$

$$\leq (1+c) \int_a^b |u'|^2 \stackrel{p \geq m, k \geq 0}{\leq} \frac{1+c}{m} \underbrace{\int_a^b (p|u'|^2 + k|u|^2)}_{[u, u]} \quad \square$$

2.1.1. Következmény. H_0^1 teljes a $[\cdot, \cdot]$ skalárszorzattal is.

2.1.2. Tétel (Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz-egyenlőtlenség). *Tetszőleges H Hilbert-tér, és rajta értelmezett $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skalárszorzat esetén igaz a következő, továbbiakban CBS egyenlőtlenség: $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ minden $x, y \in H$ esetén.*

2.1.3. Tétel (Riesz-féle reprezentációs tétel). *Legyen H egy Hilbert-tér a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skalárszorzattal. Ekkor tetszőleges $A : H \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos lineáris funkcionálhoz egyértelműen létezik egy $y \in H$, hogy $Ax = \langle x, y \rangle$ minden $x \in H$ -ra.*

Itt megjegyezzük, hogy van ahol a *Riesz-reprezentációs tétel* helyett a bilineáris formákra megfogalmazott *Lax-Milgram-tételt* használják, de a két tétel jelen esetben ekvivalens.

2.1.4. Tétel (Gyenge megoldás egzisztenciája, és unicitása). *Legyenek a $p, k \in L^\infty(I)$ függvények olyanok, hogy $\exists m \in \mathbb{R}^+$, hogy $p(x) \geq m, k(x) \geq 0$, Lebesgue majdnem minden $x \in I$. Ekkor bármely $f \in L^2(I)$ esetén létezik egyértelmű gyenge megoldása a peremérték feladatnak.*

Bizonyítás: Tekintsük a $(H_0^1(I), [\cdot, \cdot])$ Hilbert-teret. Legyen $A : H_0^1(I) \rightarrow \mathbb{R}$, hogy $Av := \int_a^b f v$. Ez pedig nyilván lineáris, és korlátos, ugyanis $|Av|^2 = \left| \int_a^b f v \right|^2 \stackrel{CBS}{\leq}$

$$\leq \int_a^b |f|^2 \int_a^b |v|^2 \leq \underbrace{(b-a) \max\{|f|^2\}}_c \int_a^b |v|^2 \leq c \int_a^b (|v|^2 + |v'|^2) = c \|v\|_{H^1(I)}^2, \text{ és}$$

$\|\cdot\|_{H^1(I)} \cong \|\cdot\|_{H_0^1(I)}$, azaz A folytonos $H_0^1(I)$ -ben. Az előző 2.1.3 Tétel szerint ekkor $\exists! u \in H_0^1(I) : [v, u] = Av, \forall v \in H_0^1(I)$, azaz $\int_a^b (p v' u' + k v u) = \int_a^b f v, \forall v \in H_0^1(I)$. \square

2.1.2. Következmény. Az (2.1) egyenletünknek homogén Dirichlet-peremfeltétel mellett létezik egyértelmű megoldása.

A 2.1.4 Tétel szerint tehát létezik gyenge megoldás, de megjegyezzük, hogy ha létezik klasszikus megoldás, akkor az természetesen gyenge megoldás is.

2.1.2. Inhomogén Dirichlet-peremfeltétel

Tekintsük ezúttal a kiindulási (2.1) egyenletünket, de most inhomogén Dirichlet-peremfeltétellel a $(0, 1)$ intervallumon:

$$\begin{aligned} -(pu')' + ku &= f \\ u(0) &= a \\ u(1) &= b \end{aligned}$$

Ezt a változatot visszavezetjük az előző részben tárgyalt homogén esetre. Tekintsük a következő felbontást: $u := u_0 + w$, ahol u_0 tetszőleges olyan függvény, mely elég sima, és $u_0(0) = a$ és $u_0(1) = b$. Ekkor $w(0) = w(1) = 0$. Nézzük meg mit kapunk. Vegyük a szokásos (2.1) alapegyenletünket, és az előző változathoz hasonlóan szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát egy tetszőleges $v \in H_0^1(0, 1)$ függvénnyel, integráljunk 0-tól 1-ig, alakítsuk át, majd helyettesítsük u helyére a fenti $u_0 + w$ -t:

$$[u, v] = Av \Rightarrow [u_0 + w, v] = [u_0, v] + [w, v] = Av \quad \forall v \in H_0^1(0, 1)$$

ebből pedig:

$$[w, v] = Av - [u_0, v] \quad \forall v \in H_0^1(0, 1)$$

Ekkor visszakapjuk a homogén problémát, hiszen $w \in H_0^1(0, 1)$ megoldást keresünk, és fent pont úgy csináltuk, hogy $w(0) = w(1) = 0$ legyen. Annyit kell még meggondolni, hogy az $\tilde{A}v := Av - [u_0, v]$ operátor folytonos, és lineáris. Ez nagyon könnyen belátható, hisz A is folytonos, lineáris, és egy valós skalárszorzat pedig szintén folytonos, és lineáris mindkét változójában.

Ám ne feledkezzünk meg arról, hogy u_0 -t kvázi tetszőlegesen választhattuk. Nem lehet-e az, hogy az u megoldás függ u_0 választásától?

2.1.6. Állítás. A megoldás független u_0 választásától.

Bizonyítás: Legyen u_1, u_2 olyan, hogy $u_1(0) = u_2(0) = a$, és $u_1(1) = u_2(1) = b$, azaz „potenciális u_0 -ak”. Egyik, és másik u_i -re megoldva a feladatot, legyenek a megoldások rendre w_1 , és w_2 . Ekkor igaz, hogy $[w_i, v] = Av - [u_i, v] \quad \forall v \in H_0^1(0, 1)$, és $i = 1, 2$ -re. Vonjuk ki a két egyenletet egymásból. Ekkor a következő adódik: $[w_1, v] - [w_2, v] = -[u_1, v] + [u_2, v] \Rightarrow [w_1 - w_2, v] = [u_2 - u_1, v] \quad \forall v \in H_0^1(0, 1)$ -re, amiből $w_1 - w_2 = u_2 - u_1 \Rightarrow u_1 + w_1 = u_2 + w_2$. \square

Azt kaptuk tehát, hogy az inhomogén probléma visszavezethető a homogénra.

2.1.3. Homogén kevert-peremfeltétel

Tekintsük most a kiindulási (2.1) egyenletünket, de ezúttal kevert homogén peremfeltétellel a $(0, 1)$ intervallumon:

$$\begin{aligned} -(pu')' + ku &= f \\ u'(0) &= 0 \\ u(1) &= 0 \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy szokás a 0-ban tett peremfeltételt természetes peremfeltételnek nevezni (általában a deriváltra vonatkozólag), míg a függvényértékre vonatkozó feltételt lényeges peremfeltételnek hívni.

Tekintsük a következő függvényteret: $H_*^1(0, 1) := \{f : f \in H^1(0, 1), f(1) = 0\}$

2.1.7. Állítás. $H_*^1(0, 1)$ -ben továbbra is igaz a 2.1.1 tétel, azaz a Poincare-Friedrich-Sztyeklov-egyenlőtlenség.

Most vegyük a szokásos (2.1) alapegyenletünket, és a korábbiakhoz hasonlóan szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát egy tetszőleges $v \in H_*^1(0, 1)$ függvénnyel, integráljunk 0-tól 1-ig, és parciális integrálással alakítsuk át:

$$\begin{aligned} \int_0^1 -(pu')'v + \int_0^1 kuv &= \underbrace{\left[-(pu')v \right]_0^1}_{=0, \text{ mert } u'(0)=v(1)=0} - \int_0^1 -pu'v' + \int_0^1 kuv = \\ &= \int_0^1 (pu'v' + kuv) = \int_0^1 fv \Rightarrow [u, v] = Av \quad \forall v \in H_*^1(0, 1) \end{aligned}$$

Hasonlóan, mint a homogén peremfeltételes fejezetben: belátható, hogy $[\dots]$ skalárszorzat, A korlátos lineáris funkcionál, csak ezúttal $H_*^1(0, 1)$ -ben, és ugyanúgy létezik egyértelmű $u \in H_*^1(0, 1)$ gyenge megoldás.

2.1.4. Inhomogén Neumann-peremfeltétel

Tekintsük a kiindulási (2.1) egyenletünket most inhomogén Neumann-peremfeltétellel a $(0, 1)$ intervallumon:

$$\begin{aligned} -(pu')' + ku &= f \\ -p(0)u'(0) &= a \\ p(1)u'(1) &= b \end{aligned}$$

ahol feltesszük, hogy $k > 0$, mert egyébként a megoldás csak konstans erejéig lenne egyértelmű.

Legyen $v \in H^1(0, 1)$ -beli. Szorzunk v -vel, és integrálunk:

$$\begin{aligned} \int_0^1 -(pu')'v + \int_0^1 kuv &= \left[-(pu')v \right]_0^1 - \int_0^1 -pu'v' + \int_0^1 kuv = \\ &= -p(1)u'(1)v(1) + p(0)u'(0)v(0) + \int_0^1 (pu'v' + kuv) = \\ &= -bv(1) - av(0) + \int_0^1 (pu'v' + kuv) = \int_0^1 fv \Rightarrow [u, v] = \underbrace{Av + av(0) + bv(1)}_{\tilde{A}v} \end{aligned}$$

és ez igaz $\forall v \in H^1(0, 1)$ -re.

Az, hogy a fenti feladatnak létezik egyértelmű $u \in H^1(0, 1)$ megoldása, az ekvivalens azzal, hogy $[\cdot, \cdot]$ skalárszorzat $H^1(0, 1)$ -ben, melyet már korábbról tudunk, és $\tilde{A}v = Av + av(0) + bv(1)$ folytonos, lineáris funkcionál, ugyanis ha ezek teljesülnek, akkor a Riesz-reprezentációs tételből ugyanúgy következik a megoldás létezése, és egyértelműsége, mint a homogén Dirichlet esetben.

Vezessünk be egy jelölést. Legyen $\delta_x f$ az a funkcionál, mely egy valós f függvényhez hozzárendeli az x -beli helyettesítési értékét, nyilván ahol ennek van értelme (ezt a deltát szokták Dirac-delta funkcionálnak hívni). Az új jelöléssel azt kapjuk, hogy $\tilde{A}v = Av + a\delta_0 v + b\delta_1 v = (A + a\delta_0 + b\delta_1)(v)$, ahol A egy folytonos lineáris funkcionál volt. Kell, hogy \tilde{A} is az.

Lássuk be, hogy például δ_0 korlátos $H^1(0, 1)$ -ben: $\delta_0 v = v(0) = v(x) - \int_0^x v'(y) dy$. Vegyük az egyenlet abszolút értékét, és emeljük négyzetre:

$$\begin{aligned} |v(0)|^2 &\leq |v(x)|^2 + 2|v(x)| \left| \int_0^x v'(y) dy \right| + \left| \int_0^x v'(y) dy \right|^2 \leq 2|v(x)|^2 + 2 \left| \int_0^x v'(y) dy \right|^2 \leq \\ &\leq 2|v(x)|^2 + 2 \int_0^x 1^2 dy \int_0^x |v'(y)|^2 dy \leq 2|v(x)|^2 + 2 \int_0^1 1^2 dy \int_0^1 |v'(y)|^2 dy \end{aligned}$$

Most integráljuk az egyenlőtlenség mindkét oldalát x szerint 0-tól 1-ig:

$$\begin{aligned} \int_0^1 |v(0)|^2 dx &\leq 2 \int_0^1 |v(x)|^2 dx + 2 \int_0^1 \int_0^1 |v'(y)|^2 dy dx \\ |\delta_0 v|^2 = |v(0)|^2 &\leq 2 \int_0^1 |v(x)|^2 dx + 2 \int_0^1 |v'(y)|^2 dy = 2\|v\|_{H^1(0,1)}^2 \end{aligned}$$

ami épp azt jelenti, hogy δ_0 korlátos, tehát folytonos is. Hogy δ_0 lineáris, az könnyen meggondolható. Folytonos lineáris funkcionálok lineáris kombinációja is az, így \tilde{A} is folytonos, lineáris funkcionál.

Kaptuk tehát, hogy az inhomogén Neumann peremfeltételes feladatnak is létezik egyértelmű megoldása.

2.1.5. Harmadfajú-peremfeltétel

Vegyük megint a kiindulási (2.1) egyenletünket most harmadfajú peremfeltétellel a $(0, 1)$ intervallumon:

$$\begin{aligned} -(pu')' + ku &= f \\ -p(0)u'(0) + \sigma_0 u(0) &= c_0 \\ p(1)u'(1) + \sigma_1 u(1) &= c_1 \end{aligned}$$

Tekintünk egy $v \in H^1(0, 1)$ függvényt, és a korábbiakhoz hasonlóan megszorozzuk vele az egyenletet, és integrálunk:

$$\begin{aligned} \int_0^1 -(pu')'v + \int_0^1 kuv &= \left[-(pu')v \right]_0^1 - \int_0^1 -pu'v' + \int_0^1 kuv = \\ &= \underbrace{-p(1)u'(1)v(1)}_{-c_1 + \sigma_1 u(1)} + \underbrace{p(0)u'(0)v(0)}_{-c_0 + \sigma_0 u(0)} + \int_0^1 (pu'v' + kuv) = \int_0^1 fv \quad \forall v \in H^1(0, 1) \\ &\quad \underbrace{-c_1 \delta_1 v + \sigma_1 \delta_1 u \delta_1 v}_{-c_1 \delta_1 v + \sigma_1 \delta_1 u \delta_1 v} \quad \underbrace{-c_0 \delta_0 v + \sigma_0 \delta_0 u \delta_0 v}_{-c_0 \delta_0 v + \sigma_0 \delta_0 u \delta_0 v} \end{aligned}$$

A δ_x továbbra is a fentebb bevezetett Dirac-delta. Rendezzük át az egyenletet:

$$\underbrace{\int_0^1 (pu'v' + kuv) + \sigma_0 \delta_0 u \delta_0 v + \sigma_1 \delta_1 u \delta_1 v}_{[u, v]_*} = \underbrace{\int_0^1 fv + c_0 \delta_0 v + c_1 \delta_1 v}_{\tilde{A}v} \quad \forall v \in H^1(0, 1)$$

Belátható, hogy $[\cdot, \cdot]_*$ skalárszorzat, \tilde{A} folytonos lineáris funkcionál a $H^1(0, 1)$ -ben, így a korábbiakhoz hasonlóan létezik a feladatnak egy $u \in H^1(0, 1)$ egyértelmű megoldása.

2.2. Végelemek

Az előzőekben megvizsgáltuk az (2.1) alapegyenletünket elméleti szempontból, láttuk, hogy létezik a gyenge megoldás, azonban az elsődleges célunk a megoldás megadása, vagy legalábbis numerikus közelítése.

2.2.1. Diszkretizáció

Eddigiekben tehát volt egy H Hilbert-terünk, és azon dolgoztunk. Azonban ez a H tér legtöbbször végtelen dimenziós, viszont a gyakorlatban csak véges dimenziós terek kezelhetők. Főleg amikor számítógépet szeretnénk használni egy-egy probléma megoldásához, akkor van szükség a feladat diszkretizálására.

Legyen továbbra is H végtelen dimenziós tér, és legyen $V_h \subset H$ véges dimenziós altér. Keresünk egy $u_h \in V_h$ -t, hogy

$$[u_h, v_h] = Av_h \quad \forall v_h \in V_h \quad (2.3)$$

ahol $[\cdot, \cdot]$, és A itt az eredeti skalárszorzat és operátor V_h -ra való leszűkítettje.

2.2.1. Tétel. *A (2.3) diszkrét problémának létezik egyértelmű megoldása.*

A bizonyítás megtalálható a [12] kötetben.

2.2.1. Állítás. *Az u_h az u legjobb közelítése a V_h térre nézve a $[\cdot, \cdot]$ skalárszorzatban.*

Bizonyítás: Legyen $v_h \in V_h$ tetszőleges. Ekkor $[u - u_h, v_h] = [u, v_h] - [u_h, v_h] = 0$, ugyanis $[u, v_h] = Av_h$ minden $v_h \in V_h \subset H$ -ra, hisz u megoldás, és $[u_h, v_h] = Av_h$ (2.3) miatt.

Kaptuk tehát, hogy $u - u_h \perp V_h$ a $[\cdot, \cdot]$ skalárszorzattal. Kell még, hogy legjobb közelítés. Vezessünk be a következő jelölést: $\|u\|_* := \sqrt{[u, u]}$ generált norma. Ekkor $\|u - v_h\|_*^2 = \|\underbrace{u - u_h}_{\perp V_h} + \underbrace{u_h - v_h}_{\in V_h}\|_*^2 = \|u - u_h\|_*^2 + \|u_h - v_h\|_*^2 \geq \|u - u_h\|_*^2$. Tehát valóban legjobb közelítése u -nak az u_h V_h -ban. \square

2.2.1. Lemma (Céa-lemma). *Legyen H Hilbert-tér, $V_h \subset H$ véges dimenziós. Ekkor u_h kvázioptimális közelítése az u -nak a H -beli norma szerint is, azaz létezik c konstans, hogy*

$$\|u - u_h\| \leq c \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|$$

ahol $\|\cdot\|$ a H -beli norma.

A fenti állításról, és következményeiről bővebben a [12] könyvben olvashatunk.

2.2.2. Elsőfokú kalapfüggvények

Megvan tehát a megoldás, hogy hogyan tudjuk kezelni a végtelen dimenziós problémát. Vesszünk egy véges dimenziós alteret, ott megoldjuk, és a kapott megoldás a lehető legjobb lesz, abból az altérből.

Már csak néhány megválaszolatlan kérdés maradt. Hogyan válasszuk meg a V_h teret, és hogyan kapjuk meg az u_h közelítő megoldást. Ezekre adunk most választ.

Legyen $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = 1$ egy felosztása $I = [0, 1]$ -nek, valamely $N \in \mathbb{N}$ -re. Az ilyenkor már megszokott jelöléssel legyen $h_i = x_i - x_{i-1}$

minden $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ -re. Ha $h_i = h$ minden i -re, akkor egyenletes, más szóval ekvidisztáns felosztásról beszélünk.

Tekintsük a szokásos (2.1) alapegyenletünket először homogén Dirichlet peremfeltétellel. Vezessük be a felosztáshoz tartozó elsőfokú ϕ_i kalapfüggvényeket (minden $i \in \{1, 2, \dots, N-1\}$):

$$\phi_i(x) := \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

A ϕ_i függvény tehát olyan, hogy csak az $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ intervallumon nem 0 az értéke, $[x_{i-1}, x_i]$ -n és $[x_i, x_{i+1}]$ -n lineáris (erre utal a címben is említett elsőfokú jelző), az osztópontokban pedig rendre 0, 1, és 0 (lásd 14. oldal 2.1. ábra).

Itt megjegyezzük, hogy ezek a kalapfüggvények valamilyen értelemben általánosításai a *Schauder*-féle függvényeknek, melyek a *Haar*-függvények integrálfüggvényei. Ezek a függvények sok szép tulajdonsággal rendelkeznek, melyekről részletesebben a [8] könyvben olvashatunk.

Most $H_0^1(0, 1)$ -beli megoldást keresünk. Nyilván mindegyik $\phi_i \in H_0^1(0, 1)$ -nek. Legyen $V_h := \langle \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N-1} \rangle$, azaz a ϕ_i -k által generált altér. Triviális, hogy $V_h \subset H_0^1(0, 1)$.

Maradt még az, hogy előállítsuk az u_h megoldást. Mivel $u_h \in V_h$, V_h definíciója alapján $u_h(x) = \sum_{i=1}^{N-1} c_i \phi_i(x)$ alakban keresendő. A feladat így a c_i együtthatók meghatározására redukálódott. Mivel V_h generált altér, $[\cdot, \cdot]$ és A lineáris, azért elég azt ellenőrizni, hogy $[u_h, \phi_j] = A(\phi_j)$ minden $j \in \{1, 2, \dots, N-1\}$ -re, amiből már következik, hogy u_h a keresett megoldás.

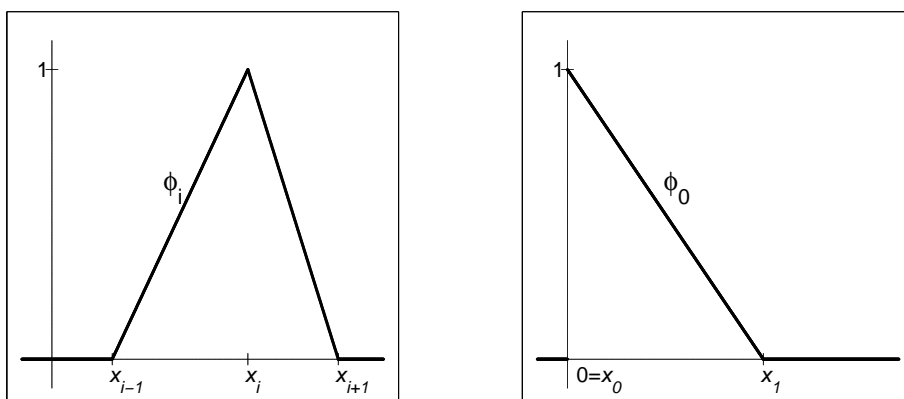
Kell tehát: $[u_h, \phi_j] = [\sum_{i=1}^{N-1} c_i \phi_i, \phi_j] = \sum_{i=1}^{N-1} c_i [\phi_i, \phi_j] = A(\phi_j)$ minden j -re, amiből egy lineáris egyenletrendszer adódik a c_i együtthatókra. Érdekes megjegyezni, hogy ha tekintjük azt a $D \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$ mátrixot, melynek (i, j) -edik eleme $D(i, j) := [\phi_i, \phi_j]$, akkor ez a mátrix tridiagonális, ugyanis könnyen meggondolható, hogy $[\phi_i, \phi_j] = 0$, ha $|i - j| > 1$. Bevezetve a $c := (c_1, \dots, c_{N-1})^T$ és $F := (A(\phi_1), \dots, A(\phi_{N-1}))^T$ jelöléseket, az egyenletrendszer felírható $Dc = F$ alakban. A bilineáris forma (skalárszorzat) pozitív definitéséből pedig következik, hogy a D mátrix is pozitív definit, így D és F ismeretében a tridiagonális egyenletrendszer megoldható lineáris időben ($O(N)$). Általában olyan bázist választunk, hogy a D mátrix elemei könnyen számolhatók, viszont F elemeit legtöbbször csak numerikus integrálás segítségével tudjuk megkapni, ami tovább növeli a számításigényt, és esetleg a hibát is, de például a *Newton-Cotes*, a *Gauss*, vagy más, összetettebb kvadratura formulával elég jó eredmény kapható.

Itt megjegyezzük még, hogy a ϕ_i bázisfüggvények rendszeréből a *Gram-Schmidt* féle ortogonalizációs eljárás segítségével készíthető egy ϕ'_i ortonormált bázis, és akkor az egyenletrendszer D' mátrixa diagonális, de ennek elkészítése műveletigényesebb, mint az eredeti feladat megoldása.

Vegyük az (2.1) alapegyenletünket, de most inhomogén Neumann peremfeltétellel. Ekkor bevezetünk még egy ϕ_0 kalapfüggvényt, amit szoktak fél kalapfüggvénynek is nevezni:

$$\phi_0(x) := \begin{cases} \frac{x_1-x}{x_1} & x \in [x_0, x_1] \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Ez a függvény is hasonló a többihez, de ez csak az $[x_0, x_1]$ -en nem nulla, ott pedig lineáris. Ennek mintájára definiálható ϕ_N is.



2.1. ábra. Elsőfokú ϕ_i , és ϕ_0 kalapfüggvények

Ekkor $V_h := \langle \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_N \rangle$, $u_h(x)$ -t $\sum_{i=0}^N c_i \phi_i(x)$ alakban keressük, és kell, hogy $[u_h, \phi_j] = [\sum_{i=0}^N c_i \phi_i, \phi_j] = \sum_{i=0}^N c_i [\phi_i, \phi_j] = A(\phi_j)$ minden $j \in \{0, 1, \dots, N\}$ -re. Előbbi jelöléshez hasonlóan $D(i, j) := [\phi_i, \phi_j]$ ($i, j \in \{0, 1, \dots, N\}$), $c := (c_0, \dots, c_N)^T$ és $F := (A(\phi_0), \dots, A(\phi_N))^T$, ahol D itt is tridiagonális, és a $Dc = F$ egyenletrendszerre jutunk, mely ugyanúgy megoldható $O(N)$ időben, mint az előbb.

Harmadfajú peremfeltétel esetén is a fentiekhez hasonlóan járhatunk el.

Kaptuk tehát, hogy egy rögzített felosztás esetén a fent leírtak szerint megválasztott V_h téren hogyan kapható meg a közelítő megoldás. Azonban felmerülhet a

kérdés, hogy vajon, ha pontosabb megoldást szeretnénk, azt milyen változtatással tudjuk elérni. Ezekre is választ adunk az alábbiakban.

2.2.2. Tétel. *Legyen u a keresett gyenge megoldás, u_h a közelítő megoldás a megfelelő V_h térben. Jelölje h a felosztás finomságát, és tegyük fel, hogy létezik u'' . Ekkor létezik C konstans, hogy $\|u - u_h\|_{H_0^1(0,1)} \leq Ch\|u''\|_{L^2(0,1)}$.*

A tétel szerint tehát, ha növeljük a felosztás finomságát, azaz az osztópontok számát, akkor elsőrendű konvergenciát kapunk, de ez a becslés a Nitsche-trükk (vagy Nitsche-fogás) segítségével javítható.

2.2.3. Tétel. *Létezik K konstans, hogy $\|u - u_h\|_{H_0^1(0,1)} \leq Kh^2\|u''\|_{L^2(0,1)}$.*

A fenti tételekről bővebben a [12] és [9] kötetekben, illetve a [2] jegyzetben olvashatunk.

Azt kaptuk tehát, hogy minél pontosabb megoldást szeretnénk, annál jobban kell növelni a felosztás finomságát, de akkor nő vele a műveletigény is. Feltehető a kérdés, hogy vajon más módon nem javítható a pontosság? A válasz: de.

2.2.3. Magasabb fokú Lagrange-elemek

Az ötlet a következő. Ne lineáris függvényeket, hanem magasabb fokú polinomokat használjunk. Ehhez a következőket tesszük. Legyen továbbra is egy felosztása a $I = [0, 1]$ -nek a $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = 1$, és $h_i = x_i - x_{i-1}$.

Először másodfokú bázist készítünk. Ehhez bevezetünk újabb osztópontokat. Minden $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumba tegyünk le még egy pontot, legyen ez mondjuk $y_i^{(1)}$. Általában az egyszerűség kedvéért a felezőpontot szokás választani. Később majd meglátjuk miért van szükség a felső indexre is. Mostantól két fajta kalapfüggvényünk lesz, melyek továbbra is a felosztástól függnek majd. A ϕ_i olyan másodfokú polinom, hogy az $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ -en kívül nulla, $[x_{i-1}, x_i]$ -n $\phi_i(x_{i-1}) = \phi_i(y_i^{(1)}) = 0$, $\phi_i(x_i) = 1$, és $[x_i, x_{i+1}]$ -en az előző „tükröképe”, és ez megy $i \in \{1, \dots, N-1\}$ -re. Ha a peremfeltétel épp megkívánja, itt is bevezethető a ϕ_0 fél kalapfüggvény, mely x_0 -ban 1, míg y_1 -ben és x_1 -ben 0. Ezeket szokta az angol szakirodalom *vertex function*-nek hívni. A másik típusú függvényeink az úgynevezett *bubble function*ok lesznek, melyeket $\psi_i^{(1)}$ -el jelölünk. Ezek csak egy intervallumhoz tartoznak majd, $[x_{i-1}, x_i]$ -n kívül nulla, a két végpontban szintén, és $\psi_i^{(1)}(y_i^{(1)}) = 1$. Ezek a polinomok előállíthatók a Lagrange-féle interpoláció segítségével.

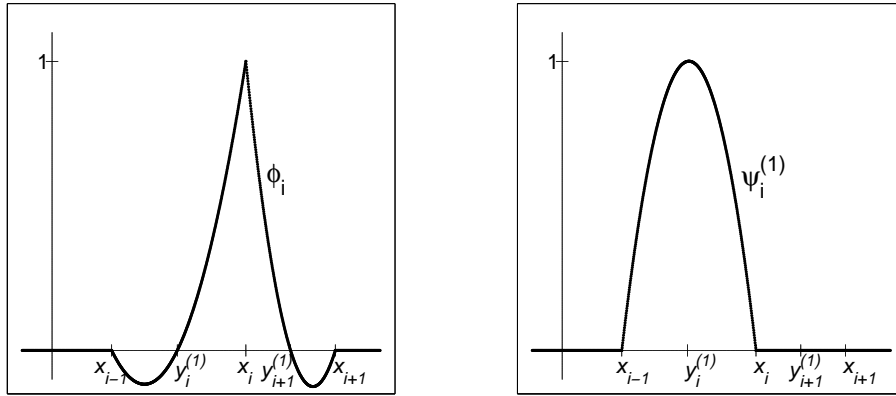
2.2.4. Tétel (Lagrange-féle interpoláció). Legyen általában $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$ az $[a, b]$ intervallum egy felosztása. Adottak még (x_k, y_k) párok ($k \in \{0, 1, \dots, N\}$). Az a legfeljebb N -edfokú $L_N(x)$ polinomot, mely az $[a, b]$ -n értelmezett, és $L_N(x_k) = y_k$ minden k -ra, az a következő alakban írható:

$$L_N(x) = \sum_{k=0}^N y_k \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_N)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_N)}$$

A tétel segítségével elő tudjuk állítani kalapfüggvényeinket. ϕ_i -hez a $(x_{i-1}, 0)$, $(y_i, 0)$, $(x_i, 1)$ illetve $(x_i, 1)$, $(y_{i+1}, 0)$, $(x_{i+1}, 0)$, $\psi_i^{(1)}$ -hez pedig a $(x_{i-1}, 0)$, $(y_i, 1)$, $(x_i, 0)$ párok tartoznak. Ekkor azt kapjuk, hogy minden $i \in \{1, \dots, N-1\}$ -re:

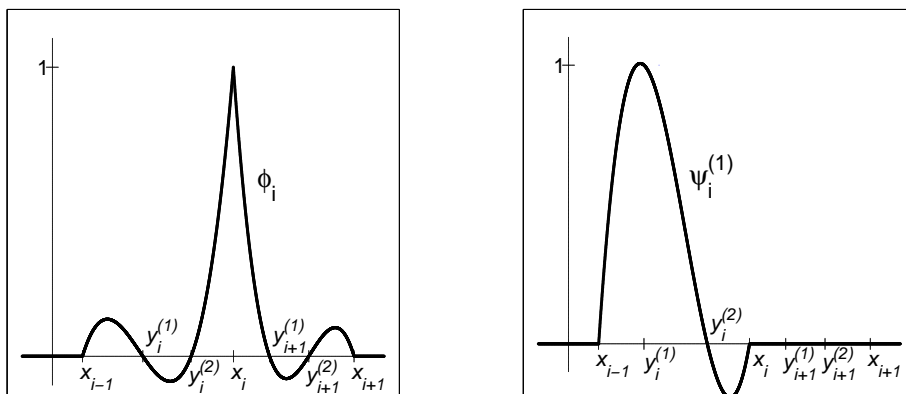
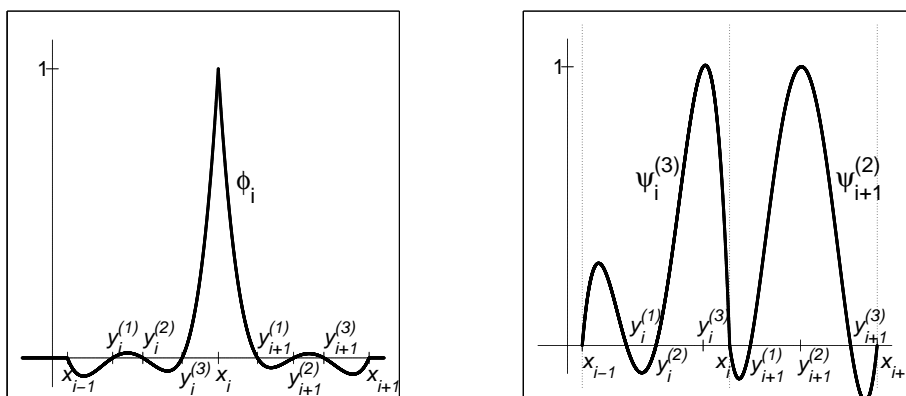
$$\phi_i(x) := \begin{cases} \frac{(x-x_{i-1})(x-y_i^{(1)})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-y_i^{(1)})} & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{(x-y_{i+1}^{(1)})(x-x_{i+1})}{(x_i-y_{i+1}^{(1)})(x_i-x_{i+1})} & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Az $[x_0, x_1]$ -en $\phi_0(x) := \frac{(x-y_1^{(1)})(x-x_1)}{(x_0-y_1^{(1)})(x_0-x_1)}$, máshol 0, míg $\psi_i^{(1)}(x) := \frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{(y_i^{(1)}-x_{i-1})(y_i^{(1)}-x_i)}$ minden $x \in [x_{i-1}, x_i]$, különben 0.



2.2. ábra. Másodfokú ϕ_i , és $\psi_i^{(1)}$ kalapfüggvények

Általánosan egy m -edfokú bázis a fentiekhez hasonlóan készül. Minden $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumot felosztunk m részre az $y_i^{(1)}, y_i^{(2)}, \dots, y_i^{(m-1)}$ pontokkal. ϕ_i olyan lesz, hogy az $y_i^{(j)}, y_{i+1}^{(j)}, x_{i-1}$, és x_{i+1} pontokban 0, $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ -n kívül szintén, és x_i -ben 1. $\psi_i^{(j)}$ pedig olyan, hogy $y_i^{(j)}$ -ben 1, a többi $y_i^{(k)}$ -ban és $[x_{i-1}, x_i]$ végpontjaiban, illetve az intervallumon kívül is 0. Ezt meg tudjuk csinálni a 2.2.4 Tételben szereplő képlet segítségével. Néhány példa magasabb fokú végelemekre:

2.3. ábra. Néhány harmadfokú ϕ_i , és $\psi_i^{(j)}$ kalapfüggvény2.4. ábra. Néhány negyedfokú ϕ_i , és $\psi_i^{(j)}$ kalapfüggvény

Megvannak tehát a bázispolinomjaink, legyen $V_h := \langle \phi_i, \psi_j^{(k)} \rangle_{i,j,k}$ generált altér (minden $i = 1, \dots, N - 1, j = 1, \dots, N, k = 1, 2, \dots, m - 1$). Keressük u_h -t a báziselemek lineáris kombinációjaként. Az adódó lineáris egyenletrendszer $Dc = F$ alakban írható, ahol D pozitív definit sávós mártix, ahol a sávok száma $3 + 2(m - 1)$. D és F ismeretében az egyenletrendszer megoldható akár sima *Gauss elimináció*-val is (ennek műveletigénye $O(N^2)$), de érdekesebb itt is valamilyen numerikus módszert alkalmazni. A lineáris egyenletrendszer megoldó numerikus algoritmusok tárháza elég széles. *LU*-felbontás, különböző iterációs módszerek, vagy akár a konjugált gradiens módszer is rendelkezésünkre áll. Ezekről a numerikus módszerekről bővebben a [7] és [1] kötetekben olvashatunk.

Érdemes itt megjegyezni, hogy nem csak *Lagrange* polinomok választhatók bázis elemeknek. Számos lehetőség van más bázis választására, alkalmazhatók például *Hermite* polinomok, csak hogy egyet említsünk.

Egy kérdés merülhet még fel. Vajon melyik módszer hatékonyabb, melyikkel kapunk pontosabb megoldást. Azzal, hogy növeljük a felosztás finomságát, vagy pedig magasabb fokú bázist készítünk. Az előbbi technikát szokás *h*-végeelem módszernek nevezni, míg az utóbbit *p*-végeelem módszernek. Látható, hogy mindkét eljárás használata esetén az elvégzendő lépésszám polinomiális marad, tehát elméletileg mindkét módszer jó.

Erre a kérdésre azonban most nem adjuk meg a választ, hanem a következő fejezetben tárgyalt többdimenziós egyenletek esetén szintén bevezetjük a *h* és *p* végeelem módszert, melyek összehasonlítását részletesen elvégezzük az utolsó részben.

3. fejezet

Végeselemek több dimenzióban

Célunk ebben a fejezetben, hogy az előző részben tárgyalt végeelem módszert általánosítsuk a többváltozós esetre, de részleteiben csak a két dimenziós problémát elemezzük, ugyanis szeretnénk szemléletes, könnyen érthető bemutatást adni.

A parciális differenciálegyenletek három nagy csoportra oszthatók, mi ezek közül csak egyet, az elliptikus egyenletekkel, és az arra vonatkozó végeelem módszerrel foglalkozunk. Ehhez azonban szükség lesz néhány többváltozós analízis beli fogalomra, tételre, így ezek bevezetésével és kimondásával kezdjük.

Legyen $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Jelölje $\partial_i u$ az u i -edik változó szerinti parciális deriváltját, $\text{grad}(u) = \nabla u = (\partial_1 u, \partial_2 u, \dots, \partial_n u) \in \mathbb{R}^n$ az u gradiensvektorát, ν az u -hoz tartozó kifelé mutató normálist, $\text{div}(u) = \partial_1 u + \partial_2 u + \dots + \partial_n u$ az u divergenciáját, és $\Delta u = \partial_1^2 u + \partial_2^2 u + \dots + \partial_n^2 u$ az u Laplace-át.

3.0.2. Állítás. $\text{div}(\nabla u) = \Delta u$

3.0.5. Tétel (Gauss-Osztrogradszkij tétel). *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány pereme szakaszonként folytonosan differenciálható, $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható. Ekkor*

$$\int_{\Omega} \text{div}(u) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \langle u, \nu \rangle_{\mathbb{R}^n} dS$$

3.0.6. Tétel (1. Green tétel). *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $p \in C^1(\overline{\Omega})$, $k \in C(\overline{\Omega})$, $u \in C^2(\overline{\Omega})$, és $v \in C^1(\overline{\Omega})$. Ekkor*

$$\int_{\Omega} (-\text{div}(p\nabla u) + ku)v d\Omega = \int_{\Omega} (p\langle \nabla u, \nabla v \rangle_{\mathbb{R}^n} + kuv) d\Omega - \int_{\partial\Omega} p(\partial_{\nu} u)v dS$$

Itt megjegyezzük, hogy mind a *Gauss-Osztrogradskij*, mind a *Green* tétel a *Poincare-Stokes* tétel egy-egy speciális esete, mely a differenciálformák elméletének témakörébe tartozik, és melyről részletesen a [3] kötetben olvashatunk.

Ebben a fejezetben másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletekkel foglalkozunk. Tekintsük a következő általános alakú egyenletet:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_i \partial_j u + \sum_{i=1}^n b_i \partial_i u + ku = f$$

ahol u kétszer folytonosan differenciálható, amiből $\partial_{ij}u = \partial_{ji}u$, tehát feltehető, hogy $a_{ij} = a_{ji} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Ekkor tekintsük minden $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ -re a következő valós szimmetrikus mátrixot:

$$A(x) := \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

Jelölje n_+, n_-, n_0 az $A(x)$ mátrix pozitív, negatív, és nulla sajátértékeinek számát multiplicitással, rögzített x -re. Ekkor $n_+ + n_- + n_0 = n$. A fenti lineáris egyenletet egy $x \in \Omega$ pontban elliptikusnak nevezzük, ha $n_+ = n$, vagy $n_- = n$, hiperbolikusnak, ha $n_+ = n-1$ és $n_- = 1$, vagy $n_+ = 1$ és $n_- = n-1$, és parabolikusnak, ha $n_0 = 1$, és $n_+ = n-1$, vagy $n_- = n-1$. Mi csak minden $x \in \Omega$ -ra elliptikus típusú egyenletekkel fogunk foglalkozni. Speciálisan, ha állandó együtthatós egyenletet veszünk, akkor az nyilván az egész Ω -n ugyanolyan típusú. Az állandó együtthatós elliptikus egyenletek a következő kanonikus alakra hozhatók:

$$\sum_{i=1}^n \partial_i^2 u + ku = \Delta u + ku = f$$

Ennél mi mégis kicsit általánosabb alakú egyenletet fogunk vizsgálni. Legyen a továbbiakban $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, és tekintsük a következő alapegyenletet:

$$-\operatorname{div}(p(x)\nabla u(x)) + k(x)u(x) = f(x) \quad x \in \Omega \quad (3.1)$$

ahol $\exists m \in \mathbb{R}_+$, hogy $p(x) \geq m$, $k(x) \geq 0 \forall x \in \Omega$, és $p, k \in L^\infty(\Omega)$. $p \equiv 1$ esetén visszkapjuk a fenti $\Delta u + ku = f$ alakú egyenlet (-1) -szeresét. Meg kell még mutatni, hogy ez az egyenlet minden $x \in \Omega$ -ra elliptikus:

$$-\operatorname{div}(p\nabla u) + ku = -\sum_{i=1}^n \partial_i(p\partial_i u) + ku = -\sum_{i=1}^n p\partial_i^2 u - \sum_{i=1}^n \partial_i p \partial_i u + ku = f$$

amiből $A(x) = -p(x)I$, ahol I az n dimenziós identitásmátrix. Mivel p mindenütt pozitív, így A minden sajátértéke negatív, azaz $n_- = n$, vagyis az egyenlet elliptikus.

A (3.1) alapfeladatunk megoldásának egyértelműségéhez itt is szükségünk van peremfeltételekre. Ezek négy fajtáját vizsgáljuk:

- Dirichlet-peremfeltétel: $u|_{\partial\Omega} = a$
- Kevert-peremfeltétel: $u|_{\Gamma_1} = a$, $p\partial_\nu u|_{\Gamma_2} = b$, ahol $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega$, és $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$
- Neumann-peremfeltétel: $p\partial_\nu u|_{\partial\Omega} = b$
- Harmadfajú-peremfeltétel: $p\partial_\nu u|_{\partial\Omega} + \sigma(u|_{\partial\Omega}) = c$, ahol $\exists \sigma_0 \in \mathbb{R}^+$, hogy $\sigma \geq \sigma_0$

ahol a, b, c Ω peremén értelmezett adott függvények. Megjegyezzük, hogy azonosan 0 jobb oldalak esetén a peremfeltételt homogénnek nevezzük.

3.1. A magasabb dimenziós gyenge megoldás

Az egydimenziós esethez hasonlóan itt is értelmezzük a (3.1) alapegyenletünk gyenge megoldását. Ehhez szükségünk van a magasabb dimenziós Szoboljev terekre.

3.1.1. Definíció. Legyen $H^1(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f, \partial_1 f, \partial_2 f, \dots, \partial_n f \in L^2(\Omega)\}$ Hilbert-tér, rajta a $\langle f, g \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} fg + \langle \nabla f, \nabla g \rangle_{\mathbb{R}^n} d\Omega$ skalárszorzattal $\forall f, g \in H^1(\Omega)$.

A definícióban szereplő parciális deriváltak disztribúciós értelemben vett deriváltak, melyről bővebben a [4] könyvben olvashatunk.

3.1.1. Megjegyzés. Megmutatható, hogy a fenti definícióban szereplő skalárszorzat valóban skalárszorzat, és az általa generált $\|f\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |f|^2 + \|\nabla u\|_{\mathbb{R}^n}^2 d\Omega$ normával $H^1(\Omega)$ teljes.

3.1.1. Állítás. $H^1(\Omega)$ tér elemei nem feltétlenül folytonosak.

3.1.2. Definíció. Legyen $H_0^1(\Omega) = \{f : f \in H^1(\Omega), f|_{\partial\Omega} = 0\}$.

A függvény megszorítása a peremre a nyom operátorral történik, melynek használatába részletesen a [4] kötet ad betekintést.

3.1.3. Definíció. $\langle f, g \rangle_{H_0^1(\Omega)} := \int_{\Omega} \langle \nabla f, \nabla g \rangle_{\mathbb{R}^n} d\Omega$, $\|f\|_{H_0^1(\Omega)}^2 := \sqrt{\int_{\Omega} \|\nabla u\|_{\mathbb{R}^n}^2 d\Omega}$

3.1.1. Tétel (Poincare-Friedrichs-Sztyeklov-egyenlőtlenség általános alak).

Legyen Ω korlátos tartomány, ekkor létezik $c > 0$, hogy

$$\int_{\Omega} |u|^2 d\Omega \leq c \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 d\Omega \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

3.1.1. Következmény. $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)} \cong \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ $H_0^1(\Omega)$ -n, azaz ekvivalensek az altéren.

3.1.2. Tétel (Nyom-tétel). Legyen Ω korlátos tartomány, $\partial\Omega$ szakaszonként folytonosan differenciálható. Ekkor létezik $c > 0$, hogy minden $f \in C^1(\overline{\Omega})$ -ra

$$\int_{\partial\Omega} |f|^2 dS \leq c \|f\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

3.1.3. Tétel (Friedrichs-egyenlőtlenség).

$$\exists c > 0 : \int_{\Omega} |u|^2 d\Omega \leq c \left(\int_{\partial\Omega} |u|^2 dS + \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 d\Omega \right) \quad \forall u \in H^1(\Omega)$$

3.1.1. Homogén Dirichlet-peremfeltétel

Tekintsük a kiindulási (3.1) alapegyenletünket homogén Dirichlet-peremfeltétellel az Ω -n:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(p\nabla u) + ku &= f \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned}$$

Az előző fejezetben látott trükköt alkalmazva vegyünk egy tetszőleges $v \in H_0^1(\Omega)$ függvényt, szorozzuk meg vele az egyenletet, majd integráljunk Ω -n:

$$\int_{\Omega} (-\operatorname{div}(p\nabla u) + ku)v d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega$$

Ezt alakítsuk át a 3.0.6 tétel (1. Green-tétel) segítségével:

$$\int_{\Omega} (-\operatorname{div}(p\nabla u) + ku)v d\Omega = \int_{\Omega} (p\langle \nabla u, \nabla v \rangle_{\mathbb{R}^n} + kuv) d\Omega - \underbrace{\int_{\partial\Omega} p v \partial_{\nu} u dS}_{=0, \text{ mert } v|_{\partial\Omega}=0}$$

Így kaptuk, hogy:

$$\underbrace{\int_{\Omega} (p\langle \nabla u, \nabla v \rangle_{\mathbb{R}^n} + kuv) d\Omega}_{[u,v]} = \underbrace{\int_{\Omega} f v d\Omega}_{Av} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

3.1.4. Definíció. Egy $u \in H_0^1(\Omega)$ függvény a homogén Dirichlet-feladat gyenge megoldása, ha $[u, v] = Av$ minden $v \in H_0^1(\Omega)$ -re.

3.1.2. Állítás. $[\cdot, \cdot]$ skalárszorzat $H_0^1(\Omega)$ -en, és ekvivalens normát indukál $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ normával.

Bizonyítás: Egyrészt az egyik irányból $[u, u] = \int_{\Omega} p \|\nabla u\|_{\mathbb{R}^n}^2 + k|u|^2 d\Omega \leq \underbrace{\lambda(\Omega) \max\{\sup|p|, \sup|k|\}}_{c_1} \int_{\Omega} \|\nabla u\|_{\mathbb{R}^n}^2 + |u|^2 d\Omega \leq c_1 \|u\|_{H^1(\Omega)}^2$, ahol λ most a két dimenziós Lebesgue mérték. A másik irányból $\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \|\nabla u\|_{\mathbb{R}^n}^2 + |u|^2 d\Omega \stackrel{3.1.1 \text{ Tétel}}{\leq} (1+c) \int_{\Omega} \|\nabla u\|_{\mathbb{R}^n}^2 d\Omega \stackrel{p \geq m, k \geq 0}{\leq} \frac{1+c}{m} \int_{\Omega} p \|\nabla u\|_{\mathbb{R}^n}^2 + k|u|^2 d\Omega = c_2 [u, u]$. Tehát valóban ekvivalensek. \square

Tehát $[\cdot, \cdot]$ valóban skalárszorzat. Az A folytonos lineáris funkcionál, ugyanis igaz, hogy $|Av|^2 = \left| \int_{\Omega} f v d\Omega \right|^2 \stackrel{CBS}{\leq} \int_{\Omega} |f|^2 d\Omega \int_{\Omega} |v|^2 d\Omega \leq \underbrace{\lambda(\Omega) \max\{|f|^2\}}_{c_3} \int_{\Omega} |v|^2 d\Omega \leq c_3 \int_{\Omega} \|\nabla v\|_{\mathbb{R}^n}^2 + |v|^2 d\Omega = c_3 \|v\|_{H^1(\Omega)}^2$ (itt is érvényes a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz-egyenlőtlenség). Tehát azt alkalmazható a *Riesz-reperzentációs tétel*, amiből a $[u, v] = Av$ egyenletnek egyértelműen létezik egy $u \in H_0^1(\Omega)$ megoldása.

3.1.2. Kevert-peremfeltétel

Tekintsük az (3.1) alapegyenletünk olyan peremfeltételek mellett, hogy Ω határát felbontjuk két diszjunk halmazra, az egyikén homogén Dirichlet, a másikon Neumann-peremfeltételt veszünk:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(p\nabla u) + ku &= f \\ u|_{\Gamma_1} &= 0 \\ p\partial_\nu u|_{\Gamma_2} &= b \end{aligned}$$

ahol $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega$, és $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, és feltesszük, hogy Γ_1 egydimenziós Lebesgue mértéke nem 0. Tekintsük ekkor a következő függvényteret:

$$H_{\Gamma_1}^1 := \{f : f \in H^1(\Omega), f|_{\Gamma_1} = 0\}.$$

3.1.3. Állítás. $H_{\Gamma_1}^1$ -ben továbbra is igaz a 3.1.1 tétel, azaz a *Poincare-Friedrich-Sztyeklov egyenlőtlenség*.

Alkalmazzuk a szokásos eljárást, azaz szorozzuk meg az alapegyenletünket egy tetszőleges $v \in H_{\Gamma_1}^1$ függvénnyel, integráljunk Ω -n, majd alkalmazzuk a *Green*-tételt:

$$\int_{\Omega} (-\operatorname{div}(p\nabla u) + ku)v d\Omega = \int_{\Omega} (p\langle \nabla u, \nabla v \rangle_{\mathbb{R}^n} + kuv) d\Omega - \int_{\partial\Omega} pv\partial_{\nu}u dS = \int_{\Omega} fvd\Omega$$

és ez igaz minden $v \in H_{\Gamma_1}^1$ -re. A $p(\partial_{\nu}u)|_{\Gamma_2} = b$ peremfeltételt, azt, hogy $v = 0$ a Γ_1 -en, és $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega$ tulajdonságot felhasználva a következő egyenlethez jutunk:

$$\underbrace{\int_{\Omega} (p\langle \nabla u, \nabla v \rangle_{\mathbb{R}^n} + kuv) d\Omega}_{[u,v]} = \underbrace{\int_{\Omega} fvd\Omega + \int_{\Gamma_2} bvdS}_{\tilde{A}v} \quad \forall v \in H_{\Gamma_1}^1(\Omega)$$

\tilde{A} folytonos, lineáris funkcionál, ugyanis $|\tilde{A}v|^2 \leq 2|\int_{\Omega} fvd\Omega|^2 + 2|\int_{\Gamma_2} bvdS|^2 \stackrel{CBS}{\leq}$
 $\leq 2(\int_{\Omega} |f|^2 d\Omega \int_{\Omega} |v|^2 d\Omega + \int_{\Gamma_2} |b|^2 dS \int_{\Gamma_2} |v|^2 dS) \leq c_1 \int_{\Omega} |v|^2 d\Omega + c_2 \int_{\Gamma_2} |v|^2 dS \stackrel{3.1.2 \text{ Tétel}}{\leq}$
 $\leq (c_1 + c_2) \|v\|_{H^1(\Omega)}^2$ így itt is alkalmazható a *Riesz*-reprezentációs tétel, mely biztosítja nekünk az egyértelmű megoldás létezését.

3.1.3. Neumann-peremfeltétel

Vegyük most az alapegyenletünket tisztán Neumann-peremfeltétellel, és tegyük fel, hogy $k > 0$, különben a megoldásunk csak konstans erejéig lenne egyértelmű:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(p\nabla u) + ku &= f \\ p\partial_{\nu}u|_{\partial\Omega} &= b \end{aligned}$$

Szorozzuk egy tetszőleges $v \in H^1(\Omega)$ függvénnyel, integráljunk Ω -n, majd az előző esethez hasonlóan alakítsuk át a kapott egyenletet a *Green*-tétel, és a peremfeltétel segítségével. Akkor a következő alakot kapjuk:

$$\underbrace{\int_{\Omega} (p\langle \nabla u, \nabla v \rangle_{\mathbb{R}^n} + kuv) d\Omega}_{[u,v]} = \underbrace{\int_{\Omega} fvd\Omega + \int_{\partial\Omega} bvdS}_{\tilde{A}v} \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

Itt $[.,.]$ továbbra is skalárszorzat, \tilde{A} folytonos lineáris funkcionál (mint az előző esetben) így alkalmazható a *Riesz*-tétel.

3.1.4. Harmadfajú-peremfeltétel

Végezetül nézzük meg meg harmadfajú peremfeltétellel a feladatunk:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(p\nabla u) + ku &= f \\ p\partial_\nu u|_{\partial\Omega} + \sigma(u|_{\partial\Omega}) &= c \end{aligned}$$

ahol $\exists \sigma_0 \in \mathbb{R}^+$, hogy $\sigma \geq \sigma_0$. Vegyünk egy $v \in H^1(\Omega)$ függvényt, szorozzunk, integráljunk, és használjuk a *Green-tételt*:

$$\int_{\Omega} (-\operatorname{div}(p\nabla u) + ku)v d\Omega = \int_{\Omega} (p\langle \nabla u, \nabla v \rangle_{\mathbb{R}^n} + kuv) d\Omega - \int_{\partial\Omega} \underbrace{p\partial_\nu u}_{c-\sigma u} v dS = \int_{\Omega} f v d\Omega$$

Átrendezve:

$$\underbrace{\int_{\Omega} (p\langle \nabla u, \nabla v \rangle_{\mathbb{R}^n} + kuv) d\Omega + \int_{\partial\Omega} \sigma uv dS}_{[u,v]_*} = \underbrace{\int_{\Omega} f v d\Omega + \int_{\partial\Omega} cv dS}_{\tilde{A}v}$$

\tilde{A} az előzőekhez hasonlóan folytonos, és lineáris. Kell, hogy $[\cdot, \cdot]_*$ skalárszorzat. Ehhez elég, hogy $\exists c_1, c_2$, hogy $\int_{\partial\Omega} \sigma |u|^2 dS \leq c_1 \|u\|_{H^1(\Omega)}^2$, és $\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq c_2 \int_{\partial\Omega} \sigma |u|^2 dS$ teljesül. Az előbbi a 3.1.2 Tétel (*Nyom-tétel*), míg utóbbi a 3.1.3 Tétel (*Friedrichs-egyenlőtlenség*) segítségével könnyen belátható, így a *Riesz-tétellel* együtt kész vagyunk.

3.2. Két dimenziós végelemek

Most már tudjuk, hogy különböző peremfeltételek mellett létezik egyértelmű megoldás, így van értelme azok keresésének. Hasonlóan az egydimenzióhoz, itt is vesszük az éppen aktuális H Hilbert tér egy véges dimenziós V_h alterét, és keressük azt az $u_h \in V_h$ -t, hogy $[u_h, v_h] = Av_h \quad \forall v_h \in V_h$. Itt pontosan ugyanaz mondható el, mint az előző fejezet *Diszkrétizáció* című alpontjában, ugyanis ott is pont ugyanezt csináljuk, és sehol nem használtuk, hogy egydimenziós a feladatunk. Az ottani eredményeket felhasználva tudjuk, hogy u_h az u megoldás legjobb közelítése V_h -ban.

Mint már korábban megjegyeztük, részletesen a kétdimenziós feladat megoldását mutatjuk meg, ennek ismeretében pedig már viszonylag könnyen elkészíthető a magasabb dimenziós egyenletek megoldása is. További feltételt teszünk az egyszerűség kedvéért, miszerint $\Omega := (0, 1)^2$, ugyanis argumentum és függvénytranszformációk segítségével egy, az egységnégyzettel homeomorf tartományon kitézött feladat redukálható az egységnégyzeten vett megoldás keresésére.

3.2.1. A rács

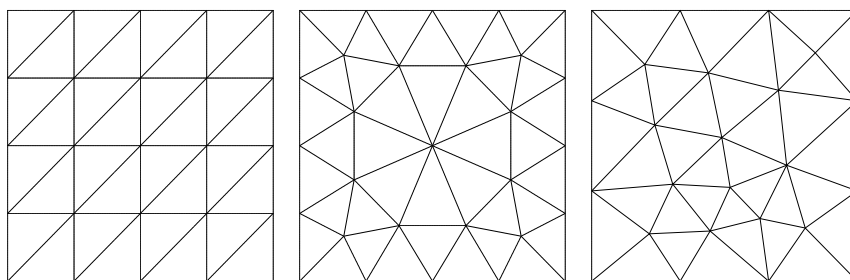
A megoldás menete röviden a következő. Tekintjük az egységnégyzetet, melyet felbontunk diszjunkt poligonokra. Ezután, a már kész (rögzített) rácshoz készítünk polinomokat, és ezen polinomok által generált véges dimenziós alteret választjuk V_h -nak.

Azonban fontos kérdés a rács szerkezete. Tulajdonképpen bármilyen sokszögeket használhatnánk, mégis a legelterjedtebb a háromszögrács, azaz csupa háromszögre bontása a tartománynak (jelen esetben az egységnégyzetnek). Ennek oka a következő. A végeselem eljárások a sokszögek csúcspontjaiban számolnak ki értékeket, a poligonok belsejében csak a csúcspontokban számolt értékektől függő megoldást adnak. Ebből következik, ha van egy olyan rácunk, amiben van nagyobb oldalszámú sokszög, akkor ha az egyenletünk valódi u megoldása ennek a poligonnak a belsejében „csúnyán” viselkedik, akkor ott nagyon nagy hibát is kaphatunk.

Ebből látható, hogy a háromszögekre bontás a legjobb abból a szempontból, hogy itt vannak a belső pontok a legközelebb a rácspontokhoz.

A továbbiakban csak reguláris háromszög ráccsal foglalkozunk, azaz olyannal, amelyben nincs olyan háromszög, amelynek egy csúcsa egy másik háromszög oldalának belső pontja. Lehet irreguláris rácsot is használni, de akkor jóval bonyolultabb az eljárás.

Egyébként a fentiek ellenére vannak, akik például négyszögrácsot használnak, erről bővebben az Irodalomjegyzékben szereplő kötetek némelyikében lehet olvasni, mi a továbbiakban ezzel sem foglalkozunk.



3.1. ábra. Egy szabályos, egy kevésbé szabályos, és egy szabálytalan rács

Építsünk háromszögrácsot. Két lehetőségünk van, ami a megvalósítás szempontjából lehet érdekes. Ha arra törekszünk, hogy a rácspontjaink a lehető legegyen-

letesebben helyezkedjenek el, akkor majdnem szabályos, de mindenképp hegyesszögű háromszögekre bontjuk a tartományunkat. Ekkor viszont az továbbiakban részletezett eljárás leprogramozása nehézkes lehet. A másik lehetőség, hogy a leprogramozásnak kedvezően valamilyen értelemben szabályos rácsot készítünk. Ezt jelen esetben legkönnyebben derékszögű háromszögekkel tudjuk megcsinálni. Viszont a végeelem eljárásoknak vannak olyan tulajdonságai, melyek csak hegyesszögű háromszögekre bizonyítottak.

3.2.2. Lineáris báziselemek

Kezdetnek készítsünk egy háromszögrácsot, és számozzuk meg a rácspontokat valamilyen logika szerint.

Az eljárásunk a következő. Definiálunk a rács minden pontjához egy-egy függvényt, melyeket a szakirodalom szóhasználatát követve *piramis* függvénynek, vagy csak piramisoknak nevezzük majd. Ezek a következőképp néznek ki. Vesszünk egy rögzített pontot, mely nincs a peremen (legyen ez a számozás szerint mondjuk az i -edik), és tekintjük a pontban összefutó háromszögeket (legyen ezek száma n_i). Az összes n_i háromszög felett készítsünk külön-külön egy is felületet. Egy háromszögön ez a felület jelen esetben legyen lineáris, az i -edik rácsponthoz 1, a háromszög másik két csúcsában 0 az értéke, illetve az adott háromszögön kívül azonosan 0. Ha tekintjük az n_i darab kis felület összegét, akkor egy olyan felületet kapunk, mely mindenütt folytonos, és az i -edik pontban az értéke 1. Legyen az a felület $\phi_i(x, y)$. Ezt hívja az angol szakirodalom *vertex function*-nek.

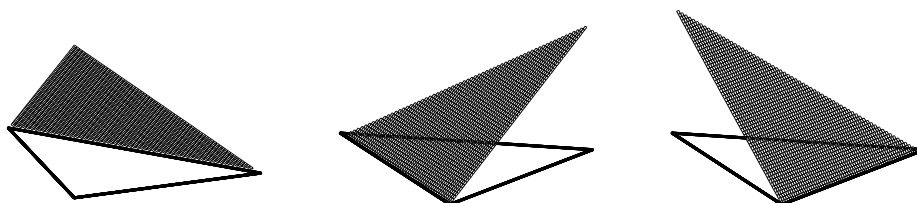
Amennyiben olyan peremfeltételünk van az éppen aktuális feladathoz, mely mellett a megoldás a peremen lehet nem nulla is, akkor szükségünk van még úgynevezett fél piramis függvényekre is. Ezeket a peremen levő rácsponthoz definiáljuk pont úgy, mint az előbb. Egy j -edik ponthoz vesszük a j -ben összefutó háromszögeket, mindre megcsináljuk a kis lineáris felületet, mely a j -edik pontban 1, a másik két csúcsban, illetve a háromszögön kívül 0. Ezek összege kiadja a ponthoz tartozó fél piramis függvényt, melyet szintén $\phi_j(x, y)$ -nal fogunk jelölni. Ha a peremfeltétel miatt a megoldás a peremen 0 kell legyen, akkor ezeket azonosan 0 függvénynek definiálhatjuk.

Itt megjegyezzük, hogy ez szép általánosítása az egydimenziós egyenleteknél megismert félkalap, és kalapfüggvényeknek.

Világos, hogy a piramis függvények előállításához csak meg kell csinálnunk a kis háromszögek felett a síkokat (lineáris polinomokat), majd ezeket össze kell adni. Ezeket a polinomokat kétféle képpen lehet elkészíteni. Az egyik lehetőség, hogy

készítünk egy úgynevezett referencia háromszöget, legyen ez mondjuk a $(0, 0)$, $(1, 0)$, és $(0, 1)$ csúcspontok által meghatározott háromszög. Itt elkészítjük polinomokat, majd egy-egy affin lineáris transzformáció segítségével a kapott felületet „beletranszformáljuk” az egyes háromszögekbe.

Készítsük el a polinomokat a referencia háromszögön. Számozzuk meg a háromszög csúcsait. Legyen az 1. a $(0, 0)$, a 2. a $(1, 0)$, a 3. a $(0, 1)$. Vegyük például az 1. csúcshoz tartozó polinomot. Ehhez úgy készítjük a polinomot, hogy vesszük a háromszög azon oldalegyenesének egyenletét, melyen az a két pont fekszik, melyeknél a polinom 0 kell legyen. Ez jelen esetben az $y = -x + 1$ egyenlet. Ezt egyszerűen 0-ra rendezzük: $1 - x - y = 0$. Legyen ezek után $\phi^{(1)}(x, y) = 1 - x - y$, ha (x, y) benne van a háromszögben, különben legyen 0. Nyilvánvaló, hogy $\phi^{(1)}(x, y)$ azon az egyenesen végig 0. Most éppen szerencsénk van, és az 1. csúcsban, azaz a $(0, 0)$ -ban 1-et vesz fel. Ha nem annyit venne, akkor egy konstans szorzóval normálhatnánk. Hasonló gondolatmenettel kapjuk a $\phi^{(2)}(x, y) = x$, és $\phi^{(3)}(x, y) = y$ függvényeket. Ezek után már csak annyi dolgunk van, hogy a rács minden háromszögébe eltranszformáljuk azt a három polinomot, majd ezekből összerakosgassuk a piramisokat. Itt láthatók a referenciaháromszög feletti lineáris polinomok:



3.2. ábra. Elsőfokú $\phi^{(1)}$, $\phi^{(2)}$, és $\phi^{(3)}$ bázisfüggvények

A másik lehetőség, hogy a fent leírtakhoz hasonlóan, minden háromszögön egyenként megcsináljuk minden csúcshoz a polinomokat úgy, hogy vesszük azon oldalegyenes egyenletét, melyen 0 kell legyen a polinom, ezt 0-ra rendezzük, és ez lesz a ponthoz tartozó sík. Szükség esetén normálni kell egy konstans szorzóval, hogy a megfelelő csúcsban a függvényérték 1 legyen, majd ezekből rakjuk össze a piramisokat.

Megvannak tehát a piramisaink (melyek között ott vannak a fél piramisok is, ha nincs rájuk szükség akkor azonosan 0-ként). Legyen $V_h := \langle \phi_i \rangle_i$ generált altér,

ahol i fut 1-től a rácspontok számáig. Megvan tehát a véges dimenziós alterünk, nincs más hátra, mint u_h előállítása. Mivel $u_h \in V_h$, ezért $u_h = \sum_i c_i \phi_i$ alakban keresendő. Mivel V_h generált altér, és $[\cdot, \cdot]$ és A lineáris, azért elég megmutatni, hogy $[u_h, \phi_j] = A(\phi_j)$ minden j -re, ugyanis ebből már következik, hogy u_h a keresett megoldás.

Kell tehát: $[u_h, \phi_j] = [\sum_i c_i \phi_i, \phi_j] = \sum_i c_i [\phi_i, \phi_j] = A(\phi_j)$ minden j -re. Ekkor c_i -kre egy lineáris egyenletrendszer adódik, ami megoldható, így megvan az u_h közelítő megoldásunk. Itt megjegyezzük, hogy ha az i és j sorszámú pontok nem szomszédosak a rácson, azaz nincs olyan háromszög, melynek i és j is csúcsa, akkor $[\phi_i, \phi_j] = 0$, vagyis az egyenletrendszer mátrixa egy elég ritka mátrix lesz.

Akár a skaláris szorzatok, akár az egyenletrendszer másik oldala, az $A(\phi_k^{(l)})$ alakú kifejezések kiszámítása a kiindulási egyenlettől függően nehézkes lehet, általában szükség van valamilyen numerikus integrálásra.

3.2.3. Másodfokú báziselemek

Az egydimenzióhoz hasonlóan, nem csak lineáris, hanem magasabb fokú bázist is készíthetünk, melytől azt várjuk, hogy jobb közelítést kapunk majd a gyenge megoldásunkra. Az egydimenziótól eltérően itt lényeges különbség van a másod és harmadfokú bázis elkészítése között, így mindkettőt részletezzük.

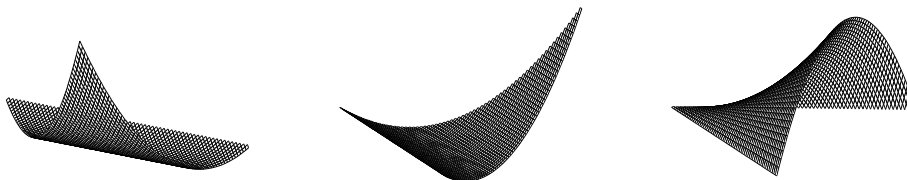
Kezdésnek vegyünk egy rácsot. Könnyen meggondolható, hogy ha egy háromszög felett akarunk egy másodfokú polinomot értelmezni, akkor három pont nem elég, vagyis nem tudunk három pontra egyértelműen illeszteni egy pontosan másodfokú polinomot. Ezért vegyük a háromszögek oldalainak felezőpontjait, és egy háromszög felett keressük azt a másodfokú polinomot, mely mind a három oldalfelező pontban, illetve két csúcsban 0, és a harmadik csúcsban 1 az értéke, illetve a háromszögön kívül azonosan 0. Ilyen függvényt elő tudunk állítani, mind a három csúcshoz. Ha ezek a polinomok megvannak, akkor az előző lineáris esethez hasonlóan minden csúcshoz el tudjuk készíteni a hozzá tartozó $\phi_i(x, y)$ *vertex function*-t, ugyanis vesszük az i -edik csúcsban összefutó háromszögek felett definiált polinomok közül azokat, melyek éppen az i -ben veszik fel az 1 értéket, majd ezeket szépen összerakjuk. Az így kapott ϕ_i továbbra is folytonos lesz. Ha nem lenne folytonos, akkor csak a rács élei felett szakadhatna, a két másodfokú polinom illesztésénél. Azonban ha tekintjük azt a síkot, mely átmegy ezen az élen, és párhuzamos a z tengellyel, akkor hogy a ϕ_i ezen él felett nem folytonos, az ekvivalens azzal, hogy adott a síkon három pont, és illeszthető rájuk két különböző parabola. Viszont amikor egydimenzióban másodfokú bázisokat készítettünk, akkor ott ugyanezt csináltunk, pontokra illesztettünk, és ott

láttuk, hogy három ponthoz pontosan egy parabola létezik.

Viszont ha már vannak plussz pontjaink akkor csinálhatunk több bázisfüggvényt. Ugyanis ha veszünk egy háromszöget, akkor ott úgy is készíthetünk másfokú függvényt, hogy a függvény a három csúcspan és két felezőpontban 0, és a harmadik felezőpontban egy az érték. Ha ezeket a függvényeket is elkészítjük, akkor két éllel szomszédos háromszögben vehetjük azt a két polinomot, mely a közös oldal felezőpontjában 1, és ezeket összeillesztve kapunk egy függvényt, mely folytonos (ugyanazon gondolatmenet alapján, mint előbb), és a két háromszögen kívül 0, a közös oldal felezőpontjában pedig 1. Ezt hívjuk *edge function*-nek. Ha megszámozzuk a háromszögeket is, és minden háromszögen belül készítünk egy lokális számozást az oldalfelező pontokhoz, akkor $\psi_j^{(k)}$ jelöli azt a függvényt, amely azon két háromszög közös oldalának felezőpontjához tartozók, melyek közül a kisebb sorszámú a j -edik, és ennek a k -edik felezőpontja. Ezeket a polinomokat a lineáris esethez hasonlóan elkészíthetjük vagy direktben minden háromszögre, vagy pedig ismét a referencia háromszögen dolgozunk. Mi az utóbbit tesszük.

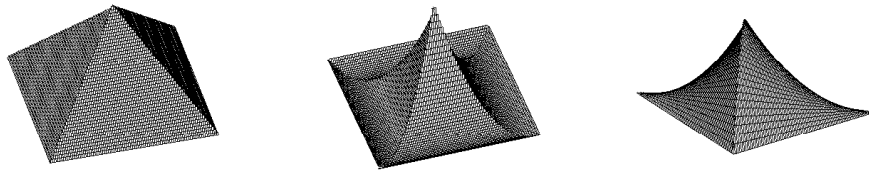
Legyen a referencia háromszög továbbiakban is a $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$. Megvannak tehát a csúcspontjaink, és vesszük még az oldalfelező pontokat: $(\frac{1}{2}, 0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(0, \frac{1}{2})$, és számozzuk meg őket ebben a sorrendben.

A polinomok előállítására a következő képpen történik. Veszünk egy pontot (oldalfelezőt, vagy csúcspot), itt lesz a függvényünk 1. Veszünk két olyan egyenest, melyeken az összes pont rajta van, amelyiken 0 kell legyen a polinomunk (de az nincs amelyiken 1). Ezek egyenleteit 0-ra rendezzük, majd összeszorozzuk, és normáljuk, hogy az adott pontban 1 legyen. Ekkor a következő polinomokat kapjuk: $\phi^{(1)}(x, y) = 2(1 - x - y)(\frac{1}{2} - x - y)$, $\phi^{(2)}(x, y) = 2x(x - \frac{1}{2})$, $\phi^{(3)}(x, y) = 2y(y - \frac{1}{2})$, $\psi^{(1)}(x, y) = 4x(1 - x - y)$, $\psi^{(2)}(x, y) = 4xy$, $\psi^{(3)}(x, y) = 4y(1 - x - y)$, ahol $\phi^{(i)}$ az i -edik csúcshoz, $\psi^{(j)}$ a j -edik oldalfelezőhöz tartozó polinom. Itt látható néhány közülük:



3.3. ábra. Másodfokú $\phi^{(1)}$, $\phi^{(2)}$, és $\psi^{(1)}$ bázisfüggvények

Ezek után elkészítjük affin lineáris transzformáció segítségével a ϕ_i , és $\psi_j^{(k)}$ függvényeket (hasonlóan az elsőfokú esethez itt is előállíthatjuk ezen függvények félváltozatait a peremen, ha szükség van rá). Legyen $V_h = \langle \phi_i, \psi_j^{(k)} \rangle_{i,j,k}$. Ekkor pont úgy, mint a lineáris esetben, u_h -t a báziselemek lineáris kombinációjaként keressük, és ugyanúgy adódik az együtthatókra egy lineáris egyenletrendszer, amit megoldunk, és megkapjuk u_h -t.



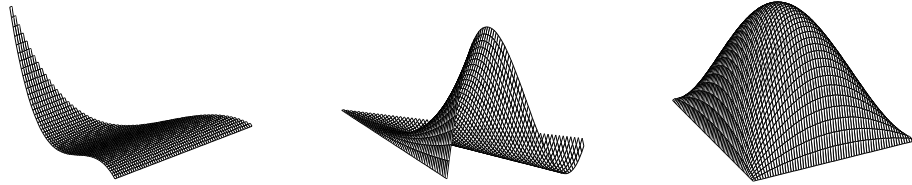
3.4. ábra. Példa egy első és két másodfokú piramisfüggvényre

3.2.4. Harmadfokú báziselemek

Itt is kiindulunk egy rácsból, és elkészítjük a referencia háromszögon a jelen esetben harmadfokú polinomjainkat. Csinálunk három függvényt a csúcsokhoz ($\phi^{(l)}$), melyekből összerakjuk a ϕ_i vertex function-öket (ezek is folytonosak lesznek, ugyanúgy mint az előbb). Minden oldalnak vesszük a harmadolópontjait, és készítünk hozzájuk hat függvényt ($\psi^{(l)}$), melyekből össze tudjuk állítani az oldal harmadoló pontokhoz tartozó edge function-öket (a harmadoló pontok számozása kezdődjön az $(\frac{1}{3}, 0)$ -val, és onnan pozitív irányban körbejárva a háromszöget). Ezen kívül veszünk még egy pontot a háromszög belsejében (itt most az $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ pontot, lentebb részletezzük, hogy mikor melyiket választjuk), és ehhez készítünk egy $\zeta^{(1)}$ függvényt. Itt továbbra is minden függvény olyan tulajdonságú, hogy a háromszögon kívül 0, a háromszögben pedig minden pontban (csúcsban, élharmadolóban, belső pontban) 0, kivéve azt, amelyikhez tartozik, mert ott az értéke 1. Ennek a $\zeta^{(1)}$ -nek minden j -edik háromszög esetén megfelel egy $\zeta_j^{(1)}(x, y)$, mely a háromszög belső pontjában 1, a többi harmadoló és csúcspontban pedig 0.

Ugyanúgy készítjük a polinomokat, mint a másodfokú esetben. Veszünk most három olyan egyenest, melyekre mindegyik pont illeszkedik, amelyiken 0 értéket akarunk garantálni (de azt nem amelyiken 1-et), az egyenleteiket 0-ra rendezzük,

összeszorozzuk, és egy konstans szorzóval normáljuk. Ekkor kapjuk a következő polinomokat: $\phi^{(1)}(x, y) = \frac{9}{2}(1-x-y)(\frac{2}{3}-x-y)(\frac{1}{3}-x-y)$, $\phi^{(2)}(x, y) = \frac{9}{2}x(x-\frac{1}{3})(x-\frac{2}{3})$, $\phi^{(3)}(x, y) = \frac{9}{2}y(y-\frac{1}{3})(y-\frac{2}{3})$, $\psi^{(1)}(x, y) = \frac{27}{2}x(1-x-y)(\frac{2}{3}-x-y)$, $\psi^{(2)}(x, y) = \frac{27}{2}x(x-\frac{1}{3})(1-x-y)$, $\psi^{(3)}(x, y) = \frac{27}{2}xy(x-\frac{1}{3})$, $\psi^{(4)}(x, y) = \frac{27}{2}xy(y-\frac{1}{3})$, $\psi^{(5)}(x, y) = \frac{27}{2}y(y-\frac{1}{3})(1-x-y)$, $\psi^{(6)}(x, y) = \frac{27}{2}y(1-x-y)(\frac{2}{3}-x-y)$, $\zeta^{(1)}(x, y) = 27xy(1-x-y)$. Néhány közülük:



3.5. ábra. Harmadfokú $\phi^{(3)}$, $\psi^{(1)}$, és $\zeta^{(1)}$ bázisfüggvények

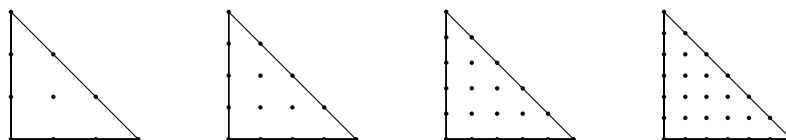
Ha ezeket megcsináltuk, akkor a szokásos transzformációval elkészítjük a $\phi_i, \psi_j^{(k)}$, és $\zeta_j^{(1)}$ függvényeket. Ekkor legyen $V_h = \langle \phi_i, \psi_j^{(k)}, \zeta_j^{(1)} \rangle_{i,j,k}$ generált altér. Ezen az altéren keressük u_h -t, melynek együtthatóira a korábbiakhoz hasonlóan egy egyenletrendszer adódik, melyet megoldva megkapjuk u_h -t.

3.2.5. Negyed és magasabb fokú báziselemek

A magasabb fokú bázis készítéséhez már csak egyetlen dolgot kell tisztázni, a többi mind analóg módon megcsinálható a harmadfokú eset mintájára. Ugyanis veszünk a háromszögben pontokat, és minden ponthoz készítünk egy olyan polinomot, mely az adott pontban 1, a többiben 0, illetve a háromszögön kívül 0-nak definiáljuk. Ezek a pontok a következők. A három csúcspont, melyekhez elkészítjük a ϕ -ket, m -edfokú bázis készítése esetén $3(m-1)$ darab oldal m -edelő pont, melyekhez megcsináljuk a ψ -ket. Majd ezekből összerakosgatjuk a *vertex* és *edge function*-öket.

A tisztázandó kérdés a belső pontok, és a hozzájuk tartozó *bubble function*. A belső pontokat mindig úgy kell elhelyezni, hogy az oldal m -edelő pontokkal és a csúcsokkal együtt olyan helyzetben legyenek, hogy rájuk tudjunk illeszteni m darab egyenest úgy, hogy pontosan egy pont kivételével mindegyik illeszkedjen rájuk, és ezt az összes pontra meg tudjuk csinálni.

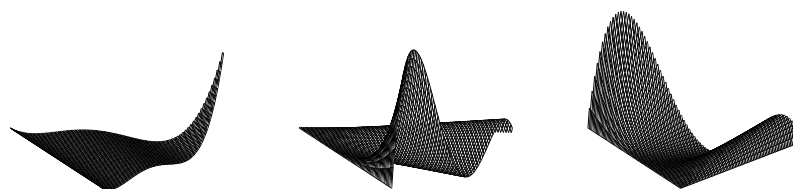
Vegyük észre, hogy negyedfokú bázis esetén jók lesznek a $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ pontok, ötödfokú esetén pedig a $(\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$, $(\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$, $(\frac{3}{5}, \frac{1}{5})$, $(\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$, $(\frac{2}{5}, \frac{2}{5})$, $(\frac{1}{5}, \frac{3}{5})$ pontok. Látható, hogy az ötödfokúban a belső pontok pont úgy helyezkednek el, mint a másodfokúban az összes pont. Meggondolható, hogy inentől rekurzívan el tudunk készíteni tetszőleges m -edfokú bázist, ugyanis a belső pontokat ugyanolyan elrendezésben kell elhelyezni, mint az $(m-3)$ -adfokú esetben az összes pontot, csupán ami az $(m-3)$ -adfokú esetben a $(0,0)$ pont volt, az az m -edfokú esetben az $(\frac{1}{m}, \frac{1}{m})$ pont, mint belső pont, ami pedig $(1,0)$, az az m -edfokúban $(\frac{m-2}{m}, \frac{1}{m})$, a $(0,1)$ pedig $(\frac{1}{m}, \frac{m-2}{m})$.



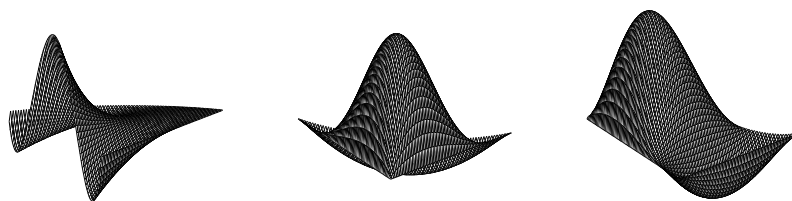
3.6. ábra. Bázispontok n -edfokú polinomok készítéséhez $n=3,4,5,6$ -ra

A teljesség kedvéért kitérünk még egy mondatban a *bubble function*-ok számozására. Kezdjük a számozást a legkülső „bubble háromszögön” hasonlóan a korábbiakhoz, azaz $(\frac{1}{m}, \frac{1}{m})$ -en kezdünk, és pozitív irányban bejárjuk a háromszöget. Ezek után lépünk egy háromszöggel beljebb, és így tovább.

Vegyük észre, hogy m -edfokú bázis esetén a oldal m -edelő pontok, csúcspontok, és belső pontok száma összesen $\binom{m+2}{2}$. Íme néhány negyedfokú bázisfüggvény:



3.7. ábra. Negyedfokú $\phi^{(2)}$, $\psi^{(1)}$, és $\psi^{(6)}$ bázisfüggvények

3.8. ábra. Negyedfokú $\psi^{(8)}$, $\zeta^{(1)}$, és $\zeta^{(3)}$ bázisfüggvények

Tehát m -edfokú bázis készítése esetén elkészítjük a belső pontokat, majd a $\phi^{(l)}$, $\psi^{(j)}$, és $\zeta^{(i)}$ függvényeket. Ezekből transzformáció segítségével megcsináljuk a ϕ_i , $\psi_j^{(k)}$, és $\zeta_j^{(l)}$ függvényeket. Ezek után legyen $V_h = \langle \phi_i, \psi_i^{(k)}, \zeta_j^{(l)} \rangle_{i,j,k,l}$ generált altér. Ezen az altéren keressük u_h -t, melynek együtthatói az adódó egyenletrendszerből számolhatóak.

3.3. Három és magasabb dimenziós végelemek

A teljesség kedvéért szólunk pár szót arról, hogy több mint két változós függvényekre vonatkozó elliptikus egyenletek esetén mit tehetünk.

A kétdimenziós megoldásmenetre támaszkodva először készítünk egy rácsot. Általában egy $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ felett szeretnénk megoldani az egyenletünket (mint korábban, itt is választhatjuk Ω -t az n dimenziós egységkockának). Az Ω -t felbontjuk n dimenziós szimplexekre. Készítünk hozzájuk n változós polinomokat, ezekből építünk n dimenziós piramisokat, majd keressük az u_h megoldást a piramisok lineáris kombinációjaként. A piramisokat alkotó polinomokat elkészítetjük egy referencia-szimplexten, melyről transzformációval vihetjük őket a megfelelő szimplexekbe.

Általában azonban nem szokás n változós függvényekre vonatkozó egyenletek megoldását keresni, ugyanis nagyon számításigényes lehet, és a megoldás is nehezen értékelhető. Például háromváltozós függvények gráfjának megjelenítése is már problémás.

Ezért van az, hogy elsősorban egy és kétdimenziós feladatokat oldunk meg ezzel a végelem módszerrel. Például a *COMSOL* nevű professzionális differenciálegyenlet megoldó programcsomag (melyről a továbbiakban még gazdagon lesz szó) is csak maximum háromdimenziós egyenletek kezelésére alkalmas. Ez is mutathatja a dolog nehézségét.

4. fejezet

A h és p végeelem módszer összehasonlító elemzése

Elkészítettük tehát az elliptikus parciális differenciálegyenletek végeelemes megoldási módszereit. Már csak annyi van hátra, hogy megmutassuk, ezek a módszerek tényleg jók. Ezt két szempontból is megközelítjük. Egyrészt foglalkozunk elméleti szempontból a probléma approximációjával, másrészt különböző példákon keresztül szemléltetjük is állításaink helyességét.

4.1. Approximáció

Általában egy megoldandó feladat esetén minket elsősorban a megoldási módszer érdekel, és ugyan érezhető, hogy a végeelem eljárások „jók lesznek”, a rend kedvéért mégis ejtünk pár szót a módszer approximációjáról. Ehhez szükségünk van az alábbiakra.

4.1.1. Definíció. $H^m(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) : \partial^\alpha u \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m\}$ Hilbert-tér a $\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega \partial^\alpha u \cdot \partial^\alpha v d\Omega$ skalárszorzattal.

A skalárszorzat által generált norma: $\|u\|_{H^m(\Omega)}^2 = \langle u, u \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |\partial^\alpha u|^2 d\Omega$. A fentiekről részletesebben a [4] könyvben olvashatunk. Az approximációs tételek alapjául szolgál az alábbi állítás.

4.1.1. Tétel (Bramble-Hilbert lemma). *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ vagy 3) tartomány, melynek határa Lipschitz-folytonos, továbbá $k \in \mathbb{N}$, $\Phi \in H^{k+1}(\Omega)^*$ folytonos lineáris funkcionál olyan, mely eltűnik a lefeljebb k -adfokú polinomok \mathcal{P}_k alterén. Ekkor*

$$|\Phi u| \leq \|\Phi\|_{H^{k+1}(\Omega)^*} \sum_{|\alpha|=k+1} \int_\Omega |\partial^\alpha u|^2 d\Omega.$$

Ezen alaptételnek számtalan alkalmazása van, de mi most csak a számunkra szükséges változattal foglalkozunk. A tétel segítségével belátható az alábbi állítás (bővebben [12] és [2]).

4.1.1. Állítás (Polinomiális approximáció hibája). *Legyenek $0 \leq m \leq k + 1$ egész számok, és $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ vagy 3) tartomány, melynek határa Lipschitz-folytonos, továbbá $P \in B(H^{k+1}(\Omega), H^m(\Omega))$ egy folytonos lineáris operátor, melyre $Pu = u \ \forall u \in \mathcal{P}_k$, azaz polinomőrző. Ekkor létezik $c \geq 0$, hogy*

$$\|u - Pu\|_{H^m(\Omega)}^2 \leq c \sum_{|\alpha|=k+1} \int_{\Omega} |\partial^\alpha u|^2 d\Omega.$$

Sok állítás kimondható mind a rács finomságának, mind pedig a polinomok fokszámának növelése esetén. Belátható például, hogy ha $\frac{h}{\varrho_h} \leq K$ nem teljesül valamilyen $K \in \mathbb{R}^+$ számra, ahol h a felosztás aktuális finomsága, míg ϱ_h egy rögzített rácsbeli háromszög beírható körének sugara, akkor a konvergencia nem feltétlenül áll fenn. Nyilván ez érezhető is, hogyha valamilyen értelemben extrém rácsot készítünk, akkor gondok lehetnek. Azonban, mint korábban említettük, ha például hegyesszögű, közel egyenlő szárú háromszögekből készítünk rácsot, akkor ott viszonylag egyenletesen lesznek a pontok, így a finomságot növelve jó megoldást várunk. Itt megjegyezzük, hogy sajnos csak két dimenzióban van olyan szerencsénk, hogy például az egységnégyzetet fel tudjuk bontani hegyesszögű háromszögekre. Három dimenzióban nem ismert az egységkocka hegyesszögű szimplexekre való felbontása.

Amennyiben azonban teljesül, hogy a felosztás finomsága és a beírható körök hányadosa korlátos ha $h \rightarrow 0$, akkor van konvergencia, és belátható, hogy ez a konvergencia első rendű. Az első fejezetben szereplő Céa-lemma, és a Nitsche trükk segítségével bizonyíthatók magassabb konvergencia rendek is.

Az alábbi példákban megnézzük, hogy milyen rendű konvergencia sejthető az adatokból. Egyébként általánosan h^p rendű konvergencia bizonyítható, ahol h a felosztás finomsága, p pedig a bázispolinomok fokszáma. Ezek részletei megtalálhatóak a [2], [9], és [12] kötetekben.

4.2. Tesztek

A sok állítás, tétel, definíció, és magyarázat után elérkeztünk a valódi feladatmegoldáshoz. A végeelem módszerek hatékonyságát négy példán keresztül fogjuk megmutatni.

Minden példában a következők szerint járunk el. Veszünk egy kétváltozós u függvényt, majd tekintjük azt az elliptikus egyenletet (Dirichlet-peremfeltétellel),

melynek pontosan ez a megoldása. Lerögzítjük az $\Omega = [0, 1]^2$ tartományt, ezen keressük majd az $u_{h,p}$ közelítő megoldást a végeelem módszerek segítségével (ahol h a felosztás finomságát, míg p a bázispolinomok fokszámát jelöli). Ezt pedig összehasonlítjuk az u valódi megoldással.

A szakirodalom leggyakrabban az úgynevezett relatív hibával méri a megoldás pontosságát: $\frac{\|u - u_{h,p}\|_{H^1(\Omega)}}{\|u\|_{H^1(\Omega)}} \cdot 100\%$.

Természetesen sokféle hibadefiníciót lehet megadni, attól függően, hogy milyen értelemben akarjuk kiértékelni a valódi és a numerikus megoldás különbségét, azonban engedve a szokásoknak, mi is ilyen formában mérjük majd a pontosságot:

$$E = \frac{\|u - u_{h,p}\|_{H^1(\Omega)}}{\|u\|_{H^1(\Omega)}} \cdot 100\% = \sqrt{\left(\frac{\int_{\Omega} |u - u_{h,p}|^2 + \|\nabla(u - u_{h,p})\|_{\mathbb{R}^n}^2 d\Omega}{\int_{\Omega} |u|^2 + \|\nabla u\|_{\mathbb{R}^n}^2 d\Omega} \right)} \cdot 100\%$$

Tehát vesszük az $\Omega = [0, 1]^2$ tartományt. Szükségünk van egy rácsra is. Legyen $N \in \mathbb{N}$, és $h = 1/2^N$. Bonstuk a $[0, 1]^2$ -et ($h \times h$)-s kis négyzetekre, majd húzzuk be az $x = y$ egyenessel párhuzamos átlóikat. Ekkor kapunk egy háromszögrácsot (az előző fejezet, A rács című alpontjában található ábrán az első típusút, (3.1. ábra)).

Különböző N -ekre, és p -re elkészítjük az $u_{h,p}$ megoldást, és kiszámítjuk a hibát, majd levonjuk az eredményekből a tanulságot.

Az egyenletek megoldásához a *COMSOL Multiphysics* nevű differenciálegyenlet megoldó programcsomagot használjuk, melyet az Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék bocsátott rendelkezésünkre. A *COMSOL*-ban be van építve az előző fejezetben leírt végeelem módszer, nekünk csak a tartományt, a rácsot, a bázispolinomok fokszámát, az egyenletet, és a peremfeltételeket kell beállítanunk, a program mindent elvégez helyettünk. Elkészíti a bázisfüggvényeket, előállítja az egyenletrendszert minden tagjával együtt, numerikus integrálással elkészíti a jobb oldalakat, majd egy rendkívül hatékony módszerrel, az *UMFPACK*-kel megoldja az egyenletrendszert, és végül kirajzolja az elkészített megoldást. Egy számunkra nagyon fontos funkciója is van még a programnak. Mind az általa elkészített megoldásfüggvényt, mind tetszőleges más függvényt, mind az előbbieket tetszőleges differenciálással kapott függvényeit, képes integrálni az alaptartományon, azaz kiszámítható vele az E hibaérték.

A *COMSOL*-nak rengeteg kiegészítő csomagja van mindenféle alkalmazási terület számára, azonban nekünk bőven elegendő az alapmodul tárháza is. Ezen belül is a *PDE Modes/Classical PDEs/Helmholtz Equation* alpontba épített eszközöket használjuk majd.

Első ütemben megadjuk a tartományt (jelen esetben a $[0, 1]^2$ -et), elkészítjük a nekünk megfelelő rácsot, megadjuk az egyenletet, és a peremfeltételeket, majd megoldjuk vele az egyenletet. Ezek után pedig a tartományon integráljuk mind a valódi u és a program által előállított $u_{h,p}$ megoldások különbségeinek négyzetét, mind az $u - u_{h,p}$ gradienseinek hossz négyzetét. Ezeket segítségével kiszámítjuk az E hibát. Itt megjegyezzük, hogy a programban beállított alapérték szerint negyedrendű numerikus integrálással jutunk a hiba összetevőihöz.

Legyen a továbbiakban a $p \equiv 1$, és $k \equiv 1$ választással adódó alapegyenletünk:

$$-\Delta u + u = f$$

ahol f -et úgy kapjuk, hogy egyszerűen behelyettesítjük az aktuális u függvényünket az egyenletbe, a Dirichlet-peremfeltétel pedig úgy adódik, hogy megszorítjuk az u -t a peremre. Ekkor megvan a megoldandó egyenlet a peremfeltétellel, így kereshetjük az „ismereten” u megoldásfüggvényt.

4.2.1. Egy tizedfokú polinom

Első példaként tekintsük a következő tizedfokú polinomot:

$$u(x, y) = 12345(x - 0.1)^3(x - 0.9)(x - 0.95)(y - 0.2)(y - 0.05)(y - 0.8)(y - 0.85)^2.$$

Ez a példa azért lehet érdekes, mert a felület szép, így azt várjuk, hogy jól tudjuk majd közelíteni, továbbá mivel polinom bázist használhatunk érdekes lehet, hogy egy magasabb fokú polinom mennyire jól közelíthető alacsonyabb fokúakkal.

A megfelelő egyenlet megoldása után az alábbi eredményekre jutunk:

Hiba	$h = 1/2$	$h = 1/4$	$h = 1/8$	$h = 1/16$	$h = 1/32$	$h = 1/64$	$h = 1/128$	$h = 1/256$
$p = 1$	90.370	91.452	60.735	32.795	16.726	8.405	4.208	2.105
$p = 2$	76.959	44.061	14.321	3.847	0.981	0.247	0.062	NA
$p = 3$	35.972	10.321	1.651	0.218	0.027	$3.39 \cdot 10^{-3}$	$4.21 \cdot 10^{-4}$	NA
$p = 4$	16.048	2.343	0.209	0.014	$8.93 \cdot 10^{-4}$	$5.57 \cdot 10^{-5}$	NA	NA
$p = 5$	6.523	0.589	0.024	$7.85 \cdot 10^{-4}$	$2.48 \cdot 10^{-5}$	$7.75 \cdot 10^{-7}$	NA	NA

A táblázatban értelemszerűen a p a bázispolinomok fokszáma, míg a h a fentebb leírt rács finomságához tartozó értéket jelöli. Az NA tartalmú cellák jelentése, hogy *Nincs Adat*-unk, ugyanis a számítógép, melyen a teszteket végeztük, nem tudta akkora értékekre elkészíteni a megoldást.

Nyilvánvaló, hogy nagyon durva rácson alacsonyabb polinom fokszám esetén tulajdonképpen semmitmondóak az adatok.

Nagyon szépen látszik, hogy a $p = 1$ sorban a harmadik cellától egy rácsfelezéssel a hiba is feleződik, így szépen mutatja a h -ban elsőrendű konvergenciát. A $p = 2$

és $p = 3$ sorokban szintén hasonló látható, csak ott egy rácsfelezéssel nem a felére, hanem a negyedére, illetve nyolcadára csökken a hiba, így ez is alátámasztja a h -ban másod-, és harmadrendű konvergenciát.

A $p = 4$ és $p = 5$ sorokban már nem látszik ez a tendencia, melynek háttérében a rengeteg numerikus számítás hibája állhat. Azonban a táblázatból jól látható, hogy érdemes magasabb fokú polinomokat használni. A számításigény összehasonlítását pedig azok a cellák illusztrálják a legjobban, melyekbe az *NA* bejegyzés szerepel, ugyanis ezekből következik, hogy például a $p = 1$ és $h = 1/256$ eset számításigénye nagyságrendileg ugyanakkora, mint a $p = 5$ és $h = 1/64$ esetén, azonban az utóbbi lényegesen jobb eredményt mutat.

Ebből látszik, amit egyébként sejteni is lehetett, hogy nem érdemes csak fokszámot, vagy a finomságot növelni, ugyanis a kettő együttes növelése jóval hatékonyabbnak bizonyul, csak meg kell találnunk, hogy melyiket milyen mértékben növeljük, hogy ne fussunk bele a számítógép számára is kiszámíthatatlan feladatokba.

4.2.2. Egy szép trigonometrikus felület

A második példaként tekintsük az alábbi trigonometrikus függvényt:

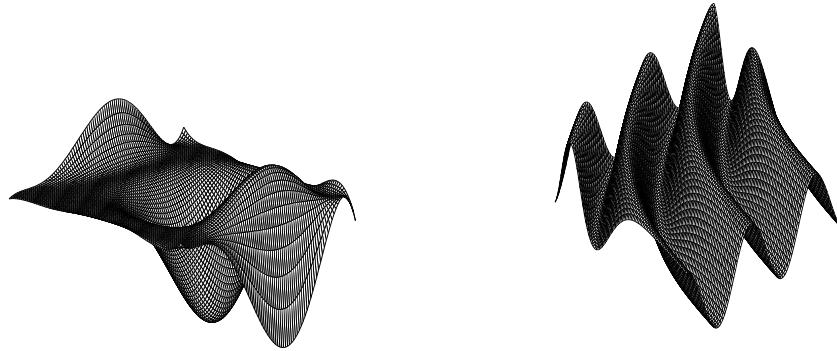
$$u(x, y) = \cos(\pi(5x - 3y^3)).$$

Ez még mindig egy szép felület, ahogyan az előbb is volt, a különbség annyi, hogy mivel polinomokkal próbáljuk majd közelíteni, itt mindig kell lennie hibának, hiszen a függvény nem írható fel polinomok véges összegeként. Lássuk mit kaptunk:

Hiba	$h = 1/2$	$h = 1/4$	$h = 1/8$	$h = 1/16$	$h = 1/32$	$h = 1/64$	$h = 1/128$	$h = 1/256$
$p = 1$	110.716	91.247	56.353	29.867	15.159	7.608	3.808	1.904
$p = 2$	99.074	50.687	16.325	4.434	1.135	0.285	0.071	NA
$p = 3$	77.419	21.155	3.509	0.473	0.061	$7.53 \cdot 10^{-3}$	$9.43 \cdot 10^{-4}$	NA
$p = 4$	37.025	4.653	0.357	0.024	$1.49 \cdot 10^{-3}$	$9.36 \cdot 10^{-5}$	NA	NA
$p = 5$	18.499	1.666	0.081	$2.97 \cdot 10^{-3}$	$9.58 \cdot 10^{-5}$	$3.02 \cdot 10^{-6}$	NA	NA

Itt, ahogy vártuk ez előzőek után, ha eltekintünk az első két oszloptól, akkor a $p = 1, 2, 3$ sorokban szintén megmutatkozik a feleződés, negyedelődés, és nyolcadolódás, azaz a p -edrendű konvergencia. Itt is a $p = 4$ és $p = 5$ sorokban kicsit gyengébben konvergál, hasonlóak mondhatók el, mint az első példánál, és itt is $p = 5$, $h = 1/64$ esetben kapjuk magasan a legjobb megoldást.

Ahhoz, hogy jobban elemezhető legyen az első két példa táblázata, íme itt a két függvény grafikonja:



4.1. ábra. Az első és második próbafüggvény

4.2.3. Egy nagy oszcillációjú függvény

Ebben a példában egy olyan függvényt tekintünk, mely elég erősen oszcillál az egész tartományon. Ez a függvény a következő:

$$u(x, y) = \sin(14\pi x)(\cos(17\pi y))^2$$

Tekintsük is a kapott értékek táblázatát:

Hiba	$h = 1/2$	$h = 1/4$	$h = 1/8$	$h = 1/16$	$h = 1/32$	$h = 1/64$	$h = 1/128$	$h = 1/256$
$p = 1$	98.064	489.849	252.971	98.597	77.196	47.866	25.491	12.954
$p = 2$	204.101	229.575	199.119	79.289	37.118	11.453	3.062	NA
$p = 3$	971.097	259.664	170.422	56.49	13.2	1.901	0.243	NA
$p = 4$	699.956	454.62	106.081	24.044	2.338	0.163	NA	NA
$p = 5$	271.896	222.406	65.18	12.353	0.623	0.022	NA	NA

Jól látható, hogy itt már sokkal kevésbé jók a közelítések, ami várható is volt. A hatalmas hibák nyilván abból adódtak, hogy a megoldás megpróbálja követni a grafikont, viszont emiatt máshol nagyon távol kerül. Az első három oszlop értékei tulajdonképpen semmit nem mondanak, viszont az ötödik, de inkább a hatodik oszloptól kezdve ismét felfedezhetőek a korábban látott tendenciák, vagyis, hogy $p = 1$ -re feleződik, $p = 2$ -re negyedelődik a hiba. Ez a táblázat akkor lenne igazán érdekes, ha rendelkezésünkre állna még legalább három oszloponyi adat. Azonban, hogy mi áll a háttérben, arra így is következtethetünk.

Ha megnézzük az u függvényt, akkor láthatjuk, hogy mind x , mind y irányban a \sin illetve \cos függvények nagyjából nyolc periódust tesznek meg az egységnyezeten. Azaz $h = 1/8$ esettől kezdve durván azt mondhatjuk, hogy a 8×8 kis négyzet mindegyikén közelítenünk kell egy teljes periódusú trigonometrikus felületet.

Mint korábban már említettük, ha a rácsunk olyan, hogy egy háromszög belsejében oszcilláció van, azt az eljárás nem tudja jól lekövetni, esetleg nagyon magas fokú polinommal, mert ekkor a *bubble function*-ök segíthetnek.

Végeredményben tehát azt kaptuk, hogy ha elég finom rácsról indulunk, akkor ugyanazon konvergenciák igazak, mint az előbbieken.

4.2.4. Egy majdnem ugrófüggvény

Utolsó példaként tekintsük az alábbi felületet:

$$u(x, y) = \arctan(100(x^2 + y^2 - 0.7))$$

Ez a függvény szinte egy ugrófüggvény, annyi különbséggel, hogy folytonos, és az ugrásnál a meredeksége nagyon nagy. Lássuk az eredményeket:

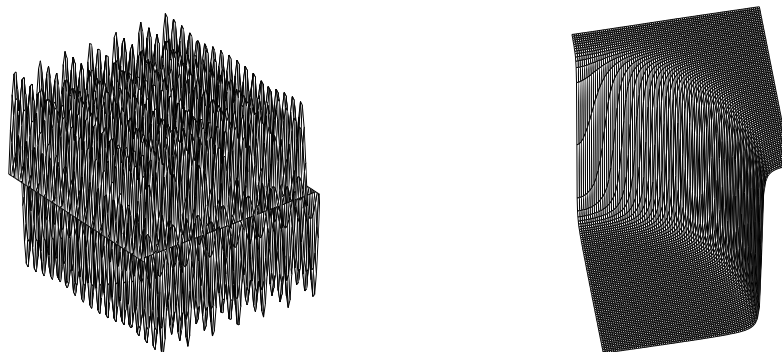
Hiba	$h = 1/2$	$h = 1/4$	$h = 1/8$	$h = 1/16$	$h = 1/32$	$h = 1/64$	$h = 1/128$	$h = 1/256$
$p = 1$	42.033	142.616	542.829	141.414	84.187	52.754	31.989	17.497
$p = 2$	382.108	281.222	186.822	156.402	60.603	25.725	8.942	NA
$p = 3$	1040.374	547.307	226.608	92.895	36.882	9.224	1.964	NA
$p = 4$	209.688	82.861	190.953	134.089	29.396	5.802	NA	NA
$p = 5$	339.278	425.335	99.806	63.339	15.716	2.697	NA	NA

Hasonlóan az előző példához, az első három oszlop semmitmondó a hatalmas hibák miatt. Ami érdekes, hogy magasabb polinom fokszámra nagyobb a hiba, mint mondjuk elsőfokra. Ennek magyarázata, hogy egy magasabb fokú polinom jobban hozzá tud simulni ahhoz a nagyon meredek felületrészhez, viszont a felület egy picit arrébb hirtelen szinte konstanssá válik, míg a polinom azzal a nagy meredekséggel megy tovább.

Jól látható tehát, hogy finomítani kell a felosztást. Azonban ha egy finomabb felosztásról indulunk, akkor sem teljesül a feleződés, negyedelődés, stb. Csökken a hiba, csak nem olyan nagy mértékben. Nyilván a konvergencia itt is megvan, csak az a bizonyos konstans, ami a konvergenciabecslésekben lenni szokott nagyobb, mint az előzőekben.

De kétségtelen, hogy még ilyen extrém függvényre is jól működik az eljárás, a *COMSOL* megfelelő számítógépen jól meg tudja közelíteni a valódi megoldást, és valószínű, hogy $p = 5$ és $h = 1/128$ választással már kevesebb, mint 0.2%-os relatív hibát kaptunk volna.

A jobb érthetőség kedvéért, íme a két problémásabb példafüggvény:



4.2. ábra. A harmadik és negyedik próbafüggvény

4.3. Értékelés

A négy teszt elvégzése után, az eljárás sajátosságait ismerve a következő észrevételek tehetőek.

A végeelem eljárás egy jó eljárás. Megfelelő számítógép mellett a *COMSOL* segítségével bármilyen feladat megoldható. Azonban, amikor egy függvényt keresünk, jó ha tudjuk, hogy legalább nagyvonalakban milyen tulajdonságokkal rendelkezik. Például gyorsan oszcilláló, vagy nagyon nagy meredekségű, így tudjuk, mire számíthatunk. Nyilván, ha növeljük a felosztás finomságát, és a polinomok fokszámát, akkor (egy idő után) egyre közelebb kerülünk a megoldáshoz.

Ha például (ahogy általában) nem ismerjük a keresett felület kinézetét, akkor érdemes rögzíteni vagy a felosztást, vagy a polinomfokszámot, és a másik értéket lépésről lépésre növelve megnézni a megoldásainkat, és ha az egymás után következőek nagyon különbözőek, akkor valószínű, hogy még messze járunk a keresett függvénytől. Megjegyezzük, hogy ez esetleg becsapó lehet, mivel az egymás után következő függvények közel vannak egymáshoz, az nem azt jelenti, hogy a valódi megoldáshoz is közel vannak, de a gyakorlatban általában ez szokott működni.

Végsősoron a példák is alátámasztják, hogy viszonylag szép, alkalmazott problémákból adódó elliptikus egyenletek megoldhatók ezzel az eljárással.

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék ezúton is köszönetet mondani témavezetőimnek, Simon Péternek, aki mindig szakított rám időt, és sok hasznos tanáccsal látott el, és Horváth Tamásnak, aki sok segítséget nyújtott mind az anyag egyes részleteinek jobb megértésében, mind a *COMSOL* használatában.

Végezetül köszönöm elsősorban az ELTE TTK és IK oktatóinak, középiskolai osztályfőnökömnek, és matematika tanáromnak, Vass Ivánnak, továbbá családomnak, barátaimnak, és mindenkinek, aki hozzájárult tanulmányaim sikerességéhez.

Irodalomjegyzék

- [1] Gergó Lajos: *Numerikus módszerek*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2000
- [2] Horváth Tamás: *Végeselem módszer alapjai*, elektronikus jegyzet, Budapest, 2009
- [3] Pál Jenő - Schipp Ferenc - Simon Péter: *Analízis II.*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1998
- [4] Simon László - Baderko E. A.: *Másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1983
- [5] Simon L. Péter - Tóth János: *Differenciálegyenletek: Bevezetés az elméletbe és az alkalmazásokba*, Typotex Kiadó, Budapest, 2005
- [6] Simon Péter: *Analízis V.*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 1996
- [7] Stoyan Gisbert - Takó Galina: *Numerikus Módszerek 1-3.*, Typotex Kiadó, Budapest, 1993, 1995, 1997
- [8] Szőkefalvi-Nagy Béla: *Valós függvények és függvénysorok*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1977
- [9] Pavel Šolín: *Partial Differential Equations and the Finite Element Method*, Wiley-Interscience, New Jersey, 2006
- [10] Pavel Šolín - Karel Segeth - Ivo Doležel: *Higher-Order Finite Element Methods*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2004
- [11] Pavel Šolín - Jakub Červený - Ivo Doležel: Arbitrary-level hanging nodes and automatic adaptivity in the *hp*-FEM, *Math. Comput. Simul.* **77** 117 - 132, (2008)
- [12] Susanne C. Brenner - L. Ridgway Scott: *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Springer, New York, 2002