Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi kar

Horváth Markó

Síkgráfok polikromatikus színezése

SZAKDOLGOZAT
Matematika BSc
Alkalmazott matematikus szakirány

TÉMAVEZETŐ:
Bérczi Kristóf
ELTE TTK
Operációkutatási Tanszék

2011

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék ezúton is köszönetet mondani témavezetőmnek, Bérczi Kristófnak, hogy mindig szakított rám időt, kérdéseimmel bátran fordulhattam hozzá, sok segédanyaggal és még több hasznos tanáccsal látott el.
Köszönettel tartozom még csoporttársaimnak, barátaimnak is, de legfőképpen családomnak, amiért támogatnak és segítik tanulmányaimat.

Bevezető

Szakdolgozatomban síkgráfok *polikromatikus színezésével* foglalkozunk. A lehető legtöbb színnel szeretnénk kiszínezni egy síkgráf csúcsait úgy, hogy minden lap csúcsai között feltűnjön minden szín. A legnagyobb számot, mellyel egy G síkgráfnak létezik polikromatikus színezése, a G síkgráf *polikromatikus számának* nevezzük, és $p(G)$-vel jelöljük. Bármely síkgráf polikromatikus számára nyilvánvaló felsőkorlát a legkisebb lapjának mérete, így $p(G)$-t ennek függvényében érdemes vizsgálnunk. Tekintsük azokat a síkgráfokat, melyek legkisebb lapja g méretű, és jelölje $p(g)$ ezen síkgráfok polikromatikus száma közül a legkisebbet. Utóbbi pontos értéke már $g = 5$ esetén sem ismert, de érdemes megemlíteni, hogy a $p(5) = 4$ egyenlőségből következne a *Négyszín-tétel*.

Mielőtt rátérnénk a polikromatikus színezése vizsgálatára, az 1. fejezetben ismertetjük Victor Klee *teremőr problémáját* és Chvátal klasszikus teremőr tételét [12, 14]. A második szakaszban síkgráfok levédési problémáját vizsgáljuk [2]. A polikromatikus színezéssel való kapcsolatról a 2. fejezetben teszünk majd említést.

A 2. fejezet öleli fel a dolgozat egyik fő témáját. Alon és társai [1] eredményeit bemutatva a síkgráfok polikromatikus számára adunk alsó és felső becslést a legkisebb lap méretének függvényében. Az alsó becsléshez kisebb kitérőket teszünk különböző algebrai, gráfelméleti problémák felé, a felső becslést pedig konstruktívan bizonyítjuk.

A második nagyobb témát a 3. fejezetben tárgyaljuk. A síkgráfok két speciális osztályának, az *általános felosztások* és a *téglalap-felosztások* polikromatikus színezéseivel foglalkozunk [3, 6], de említést teszünk a *guillotine-felosztásokról* is [8, 10]. A felosztások színezésekor kibővítjük a polikromatikus színezés definícióját, és igazoljuk, hogy minden téglalap-felosztásnak létezik *erősen polikromatikus 4-színezése*. Látni fogjuk, hogy van olyan általános felosztás melynek nincs g*yenge általános polikromatikus 4-színezése*, de minden általános felosztásnak létezik *gyenge általános polikromatikus 3- és 5-színezése*, illetve *erős általános 2- és 6-színezése*.

Az utolsó fejezetben a polikromatikus színezés bonyolultságát vizsgáljuk, melyben főként [1] néhány fontos eredményét mutatjuk be, de [6] idevonatkozó részeit is megemlítjük. Megmutatjuk, annak eldöntése, hogy egy síkgráf polikromatikusan k-színezhető-e, triviális a $k = 1$ esetben, $\mathcal{P}$-ben van a $k = 2$ esetben, és a $k = 3, 4$ esetekben a probléma $\mathcal{NP}$-teljes.

Fogalmak, jelölések

Egy gráfot *síkbarajzolhatónak* nevezünk, ha lerajzolható a síkba úgy, hogy élei nem metszik egymást. *Síkgráf* alatt egy síkbarajzolásával adott síkbarajzolható gráfot értünk. Egy síkgráfot *egyszerűnek* nevezünk, ha nem tartalmaz párhuzamos éleket és hurkot. Jelölje $V(G), E(G), F(G)$ rendre a G síkgráf csúcsainak, éleinek, lapjainak halmazát. Egy lap kerületén található csúcsot a lap csúcsának nevezzük, egy $f \in F(G)$ lap csúcsainak halmazát pedig V_f-el jelöljük. Egy lap *méretén* a csúcsai számát értjük.
A G gráf csúcsainak *k-színezésén* egy $\chi : V(G) \to \{1, \ldots, k\}$ függvényt értünk, és a színezést *jó k-színezésnek* nevezzük, ha nincs *monokromatikus él*, azaz minden $uv \in E(G)$ élre $\chi(u) \neq \chi(v)$. A *Négyszín-tétel* szerint minden síkgráfnak létezik jó 4-színezése. Hasonlóan, a G gráf éleinek *k-színezésén* egy $\xi : E(G) \to \{1, \ldots, k\}$ függvényt értünk, és a színezést *jó k-élszínezésnek* nevezzük, ha minden $u \in V(G)$ csúcsra és minden uv, uw élre $\chi(uv) \neq \chi(uw)$.
Egy G gráf v csúcsának *fokszámán* a v végpontú élek számát értjük, és $d_G(v)$-vel jelöljük. A $v \in V(G)$ csúcs fokszámát egyszerűen $d(v)$-vel is jelölhetjük, ha világos, hogy a G-beli fokáról van szó. A G gráf csúcsai fokszámának minimumát $\delta(G)$-vel, maximumát $\Delta(G)$-vel jelöljük. Irányított D gráf esetén a $v \in V(D)$ csúcsból ki-, illetve belépő élek számát $d^+(D)$-vel illetve $d^-(G)$-vel jelöljük.
Tekintsük a G gráf csúcsainak egy V' részhalmazát. $G[V']$-vel jelöljük G, V' által feszített részgráfját.
Tekintsük a G gráf csúcsainak egy X halmazát. Ekkor az $(X,\ V(G)\backslash X)$ halmazpárt G *vágásának* nevezzük, és egy uv élt *vágóélnek* mondunk, ha $u \in X$ és $v \in V(G)\backslash X$.
Egy gráfot *párosnak* nevezünk, ha csúcsai két osztályba sorolhatóak úgy, hogy az egy osztályon belüli csúcsok nincsenek éllel összekötve. Például egy tetszőleges gráf valamely vágása és a vágóélek páros gráfot adnak.

1. fejezet

Sokszögek és síkgráfok levédése

Az alábbi felvezető fejezetben megismerkedünk *Victor Klee* teremőr problémájával és belátjuk *Václav Chvátal* klasszikus teremőr tételét. Ezek után síkgráfok levédésével foglalkozunk, mely a polikromatikus színezéssel is kapcsolatban áll. Erről majd a 2. Fejezetben lesz szó.

A való életből származó *teremőr probléma* a következő. Egy képtár termeibe szeretnénk a lehető legkevesebb biztonsági őrt elhelyezni úgy, hogy együtt az egész képtárat belássák. A problémát közelítsük meg úgy, hogy a képtár alaprajza egy egyszerű sokszög, a biztonsági őrök pedig a sokszög pontjai. Azt mondjuk, hogy a P sokszög pontjainak egy S halmaza *levédi* P-t, ha minden $p \in P$ ponthoz létezik olyan $s \in S$ pont, hogy a $\overline{ps}$ szakasz teljes egészében P-ben helyezkedik el. A teremőr problémának számos változata van, a továbbiakban *Victor Klee* teremőr problémájával foglalkozunk.
Klee kérdése a következő volt: *Adott egy P egyszerű sokszög. Legkevesebb hány őrrel tudjuk levédeni P-t úgy, hogy az őröket kizárólag P csúcsaiba helyezhetjük el?*

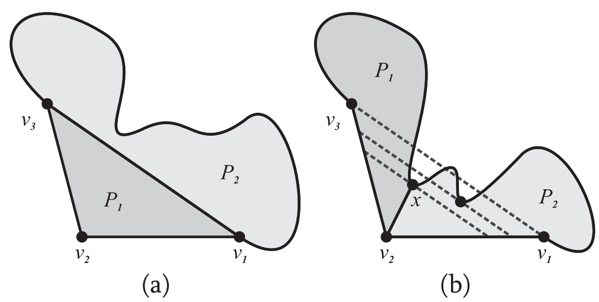
1.1. Chvátal teremőr tétele

Václav Chvátal 1975-ben megmutatta, hogy egy n csúcsú sokszög esetén $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ őr mindig elég, és néha szükséges is, ahhoz hogy levédjük a sokszöget. 1978-ban *Steve Fisk* [5] adott egy rövid bizonyítást Chvátal tételére. A bizonyításaik abban megegyeztek, hogy mindketten a sokszög háromszögelésével közelítették meg a problémát.

Egy egyszerű sokszög *háromszögelésén* azt értjük, hogy a szokszöget egymást nem metsző átlók behúzásával háromszögekre osztjuk.

1.1. Állítás. *Minden egyszerű sokszögnek létezik háromszögelése.*

Bizonyítás: Teljes indukciót alkalmazunk. Az állítás $n = 3$ csúcsú sokszögre nyilván teljesül. Tegyük fel, hogy $n \geq 4$, és n-nél kevesebb csúcsú sokszögre már beláttuk az állítást. Tekintsük az n csúcsú P sokszög egy konvex csúcsát (v_2), azaz egy olyan csúcsot, melyhez konvex belső szög tartozik. Legyenek v_1 és v_3 a v_2 szomszédai. Ha a $\overline{v_1v_3}$ átló benne van P-ben, akkor behúzásával P-t felbontottuk P_1 és P_2 egyszerű sokszögekre, melyeknek szükségképpen n-nél kevesebb csúcsuk van, tehát létezik háromszögelésük, és együtt P háromszögelését adják. Egy példa látható az 1.1 (a) ábrán.



1.1. ábra. Sokszögek háromszögelése: az első átló behúzása

Ha a $\overline{v_1v_3}$ átló nincs benne P-ben, akkor a $v_1v_2v_3$ zárt háromszög tartalmazza P legalább egy csúcsát, mely különbözik az előzőektől. Legyen ezek közül x az a csúcs, mely legtávolabb van $\overline{v_1v_3}$ egyenestől, azaz legközelebb van v_2-höz $\overline{v_1v_3}$ egyenes normálisa szerint. Ekkor a $\overline{v_2x}$ átló behúzásával ismét két egyszerű sokszögre osztottuk P-t, melyek csúcsszáma n-nél kisebb, tehát ismét megkaphatjuk P egy háromszögelését. Egy példa látható az 1.1 (b) ábrán. $\square$

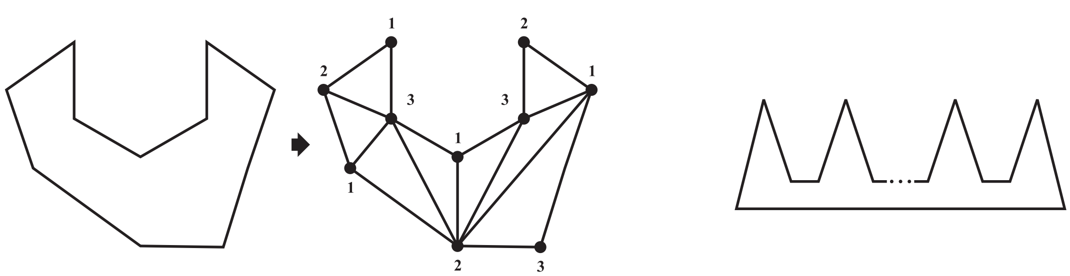
Egy háromszögelés minden háromszögében vegyünk fel egy pontot. Két pontot pontosan akkor kössünk össze, ha a nekik megfelelő háromszögeknek van közös oldaluk. Az így kapott gráfot a háromszögelés *duális gráfjának* nevezzük.

1.2. Állítás. *Bármely egyszerű sokszög háromszögelésének duális gráfja egy fa.*

Bizonyítás: A duális gráf összefüggő a konstrukciója miatt. Tegyük fel indirekt, hogy létezik benne kör. Ez azt jelentené, hogy vagy van egy izolált pont P belsejében, vagy P "lyukas". Ezek egyike sem lehetséges, ugyanis P egyszerű. $\square$

1.1. Tétel (Chvátal). $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ *őr mindig elég, és néha szükséges is ahhoz, hogy egy n csúcsú egyszerű sokszöget levédjünk.*

Bizonyítás: Legyen adott egy P egyszerű sokszög. Háromszögeljük P-t ($n-3$ átló behúzásával). Legyen ez a háromszögelés T. Színezzük ki T tetszőleges háromszögének csúcsait különböző ($\{1,2,3\}$) színekkel. Ezután tekintsük az ezzel szomszédos háromszögeket. Ezeknek pontosan két csúcsuk színezett, ráadásul különböző színűek, ezért a színezetlen csúcsot színezzük ki a harmadik színnel. Mivel T duális gráfja fa, ezért minden lépésben olyan háromszöget színezünk, melynek pontosan két csúcsa színezett, és különböző színűek. Ezért ezt az eljárást folytatva megkapjuk T egy színezését, melynél bármely háromszög csúcsai különböző színűek. Válasszuk ki azt a színt, melyet a legkevesebbszer használtunk. Egyrészt ez a szám nyilvánvalóan legfeljebb $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$, másrészt ha az ilyen színű csúcsokba helyezzük el az őröket, akkor lefogják P-t, hiszen egy háromszög csúcsában lévő őr levédi a háromszöget, és minden háromszög valamelyik csúcsába helyeztünk őrt.

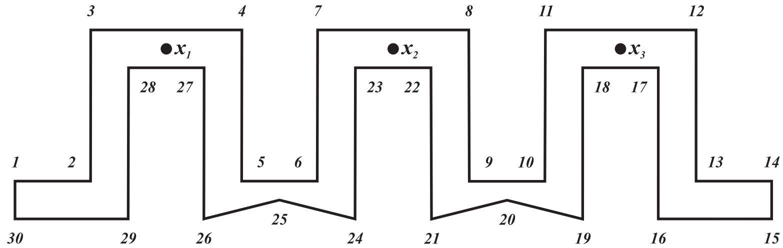


(a) (b)

1.2. ábra. (a) Egy sokszög háromszögelése és színezése; (b) A "fésű" sokszög

Az 1.2 (a) ábrán látható egy sokszög háromszögelése és színezése. A 1.2 (b) ábrán pedig egy $n = 3m$ csúcsú sokszög (m fogú fésű) látható melynek levédéséhez legalább m őr szükséges. $\square$

1.1. Megjegyzés. *Az* $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ *érték félrevezethető lehet, ha úgy gondoljuk, hogy a sokszög minden harmadik csúcsába egy őrt állítva levédhető a sokszög. Erre egy ellenpéldát láthatunk az 1.3 ábrán.*



1.3. ábra. Ha a sokszög minden harmadik csúcsába teszünk őrt, akkor az x_1, x_2, x_3 pontok valamelyike nem lesz védve.

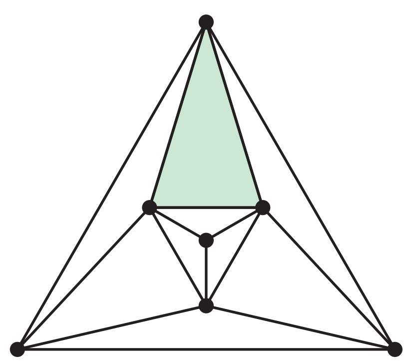
1.2. Megjegyzés. *Egy sokszöget ortogonálisnak nevezünk, ha szomszédos oldalai merőlegesek egymásra. Azért érdekes az ilyen sokszögeket vizsgálni, mert a valóságban az épületek általában ortogonálisak. Kahn, Klawe és Kleitman [9] bebizonyította, hogy egy n csúcsú ortogonális sokszög levédéséhez $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ őr mindig elég, és néha szükséges is. A bizonyítás alapötlete, hogy a sokszöget átlók behúzásával konvex négyszögekre bontjuk fel, majd az általános esethez hasonlóan (de most) 4-színezzük, és a legkevesebbszer használt színnel színezett csúcsokba helyezve az őröket levédjük a sokszöget.*

1.2. Síkgráfok levédése

A sokszögek levédéséhez hasonlóan vizsgálhatjuk 3-dimenziós felületek, síkgráfok levédését is. Bose és társai [2] háromszögelt felületek levédésvel foglalkoztak, ezen eredmények közül ismertetünk most néhányat. Először is vezessük be a háromszögelt felületet fogalmát. Háromszögelt felületnek nevezünk egy olyan soklapú felületet, melynek minden oldallapja egy háromszöglap. Legyenek T háromszögelt felület csúcsai $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ térbeli pontok, ahol v_i-t 3 koordinátájával (x_i, y_i, z_i) jellemezzük. Feltehető, hogy z_i minden i-re nemnegatív, tehát ha az $X - Y$ síkra mint tengerszintre gondolunk, a T felület egyetlen pontja sincs a tengerszint alatt. Tegyük fel, hogy a háromszögelt felületünk olyan, hogy minden függőleges (z tengellyel párhuzamos) egyenessel a metszete (ha metszik egymást) egyetlen pont. Ekkor minden v_i pontot merőlegesen levetítve az $X - Y$ síkra egy n csúcsú háromszögelt síkgráfot kapunk. A továbbiakban ezért síkgráfok levédésével foglalkozunk. Egy síkgráf v csúcsába helyezett őr azokat az lapokat védi le, melyeknek a v csúcsa. A külső lap levédésétől eltekinthetünk.

1.2. Tétel (Bose et al. [2]). $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ *őr mindig elég, és néha szükséges is ahhoz, hogy egy n csúcsú egyszerű síkgráfot levédjünk, ha az őröket kizárólag a csúcsokba helyezhetjük.*

A tételt most nem bizonyítjuk, de később, más formában mégis látni fogjuk. Az 1.4 ábrán látható 7 csúcsú S_1 síkgráfról megmutatható, hogy levédéséhez legalább 3 őr szükséges. S_2 síkgráfot készítsük el úgy S_1-ből, hogy S_1 egy példányát beágyazzuk S_1 színezett háromszögébe. Általában S_{k-1} egy példányát ágyazzuk be S_1 színezett háromszögébe. Ekkor belátható, hogy a $4k + 3$ csúcsú S_k síkgráf levédéséhez legalább $2k + 1$ őr szükséges, és ha ennyi őrrel levédjük, akkor legfeljebb 1 őr lehet a külső lapon.



1.4. ábra. Az S_1 gráf

2. fejezet

Síkgráfok polikromatikus száma

Tekintsük a G síkgráf egy $\chi : V(G) \to \{1, \dots, k\}$ k-színezését. Egy ilyen színezés esetén azt mondjuk, hogy egy $f \in F(G)$ lap *polikromatikusan színezett*, ha mind a k szín megtalálható f csúcsai között. A gráf színezését akkor mondjuk *polikromatikusnak*, ha minden lapja (beleértve a külsőt is) polikromatikusan színezett:

$$\forall\ f \in F(G)\ \forall\ i \in \{1, \dots, k\}\ \exists\ v \in V_f : \chi(v) = i.$$

G *polikromatikus számán* azt a legnagyobb k számot értjük, melyre létezik G-nek polikromatikus k-színezése. G polikromatikus számát $p(G)$-vel jelöljük. $p(G)$-re egy nyilvánvaló felsőkorlát G legkisebb lapjának mérete, így $p(G)$-t ez utóbbi függvényében érdemes vizsgálni. Jelölje $g(G)$ a G gráf lapjai közül a legkisebbnek a méretét. Vezessük be a következő jelölést: $p(g) := \min\{p(G) | G \text{ síkgráf}, g(G) = g\}$. A definíciókból azonnal következik, hogy tetszőleges G síkgráfra $p(g(G)) \leq p(G) \leq g(G)$.

Tegyük fel, hogy a G síkgráf tartalmaz hurkot valamely v csúcs körül. Legyen G_1 a hurkon belüli, G_2 a hurkon kívűli gráf (ezalatt mindkét esetben a v-t tartalmazó, de a hurkot nem tartalmazó gráfot értjük). Ekkor $p(G) = \min\{p(G_1), p(G_2)\}$ és $g(G) = \min\{g(G_1), g(G_2)\}$. Tehát $p(G)$ bármely alsó becslése hurkot nem tartalmazó G-re igaz hurkot tartalmazóra is. Továbbá bármely hurkot tartalmazó konstrukció a felső becslésre hurok nélkülivé tehető. A továbbiakban tehát kizárólag hurok nélküli síkgráfokat vizsgálunk.

A fejezetben alsó és felső becslést adunk $p(g)$-re, és megmutatjuk a polikromatikus színezés kapcsolatát a védelmi problémákkal és a Négyszín-tétellel.

2.1. Alsó és felső becslés $p(g)$-re

A következőkben alsó és felső becslést adunk $p(g)$-re. Az alsó becsléshez különböző algebrai, gráfelméleti tételeket fogunk felhasználni, a felső becslést pedig konstruktívan igazoljuk.

2.1. Tétel. *$p(1) = p(2) = 1$, $p(3) = p(4) = 2$, és $g \geq 3$ esetén*

$$\left\lfloor \frac{3g-5}{4} \right\rfloor \leq p(g) \leq \left\lfloor \frac{3g+1}{4} \right\rfloor.$$

2.1. Megjegyzés. *A $\left[\left\lfloor \frac{3g-5}{4} \right\rfloor, \ldots, \left\lfloor \frac{3g+1}{4} \right\rfloor\right]$ intervallum 2 vagy 3 egész számot tartalmaz, így a becslés $p(g)$ lehetséges értékeit 2 vagy 3 számra korlátozza. A pontos érték viszont már $g = 5$ esetén sem ismert.*

2.1.1. A 2.1 Tétel bizonyítása az $1 \leq g \leq 4$ esetre

2.1. Lemma. *$p(G) \geq 2$ minden olyan síkgráfra, melyre $g(G) \geq 3$.*

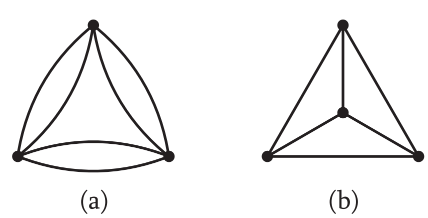
Bizonyítás: Tekintsük G egy háromszögelését. Az így kapott G' síkgráf minden belső lapja 3 méretű. Tekintsük G' csúcsainak jó 4-színezését ($\{1, 2, 3, 4\}$ színekkel) mely a *Négyszín-tétel* alapján létezik. Ekkor G' bármely belső lapján pontosan 3 szín tűnik fel. A jó színezés miatt a külső lapon is legalább két szín feltűnik, feltehetjük hogy ezek az 1-es és 2-es színek. Ezután a 3-as színnel színezett csúcsokat színezzük át 1-es színűre, a 4-es színnel színezett csúcsokat pedig színezzük át 2-es színűre. Így G' 2-színezett, és bármely lapján feltűnik mindkét szín, tehát G'-nek egy polikromatikus 2-színezését kaptuk. Ha a háromszögeléshez felvett éleket eltöröljük, akkor megkapjuk G polikromatikus 2-színezését is. □

Ezek után térjünk rá a 2.1 Tétel egyszerűbb eseteire. Nyilvánvaló, hogy minden síkgráf polikromatikusan 1-színezhető, így bármely $g(G) = g$ esetén $p(g) \geq 1$.

Ha $g(G) = 1$, akkor G-nek csupán egyetlen csúcsa van, így $p(1) \leq 1$.

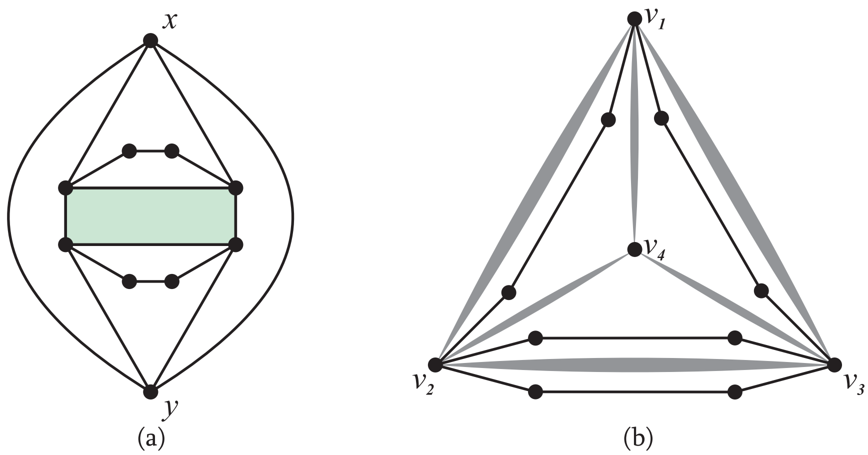
Ha $g(G) = 2$, akkor G vagy tartalmaz 2 hosszú kört, vagy 2 pontból áll. Az állítás igazolásához elég mutatni egy olyan G' gráfot, melyre $g(G') = 2$ és $p(G') = 1$, ugyanis ebből $p(2) \leq 1$ következik. Egy ilyen G' gráf látható a 2.1 (a) ábrán.

A 2.1 Lemma alapján $g(G) \geq 3$ esetén $p(G) \geq 2$. Másrészt tekintsük a K_4 egy síkbarajzolását (2.1 (b) ábra), melyre egyszerűen meggondolható, hogy $p(K_4) = 2$. Ebből $p(3) = 2$.



2.1. ábra. (a) G' gráf: $g(G') = 2$, $p(G') = 1$; (b) K_4: $g(K_4) = 3$, $p(K_4) = 2$

A $g = 4$ esethez tekintsük a következő konstrukciót. Induljunk ki a 2.2 (a) ábrán látható G_B^4 *bázisgráfból*, majd készítsük el a 2.2 (b) ábrán látható G gráfot, ahol a satírozott $v_i v_j$ élek a bázisgráf egy-egy példányát jelölik úgy, hogy a v_i, v_j csúcsok, az x, y csúcsoknak felelnek meg. Ha G-nek létezik polikromatikus 3-színezése, akkor egy ilyen színezés esetén a G-beli bázisgráfok is polikromatikusan színezettek, kivéve a külső lapjukat, hiszen azok nem lapjai G-nek. Nyilvánvaló, hogy G_B^4 bármely polikromatikus 3-színezése esetén - melyben tehát a külső lap polikromatikus színezését nem követeljük meg - az x és y pontok különböző színűek, ugyanis ellenkező esetben a gráf színezett lapja nem lenne polikromatikus. Ekkor az előbb leírtak miatt v_1, v_2, v_3, v_4 csúcsok színe páronként különböző. Másrészről G részgráfként tartalmaz v_1, v_2, v_3, v_4 csúcsú K_4-t, melyről tudjuk, hogy nem jól 3-színezhető. Ebből az ellentmondásból $p(G) < 3$, és így $p(4) = 2$. □



2.2. ábra. (a) G_B^4 bázisgráf, (b) G gráf

2.1.2. Lapok csúcsfedése

2.2. Lemma. *Legyen G egy síkgráf, $\emptyset \neq F' \subseteq F(G)$, $\emptyset \neq V' \subseteq V(G)$, és $i(V', F')$ jelölje F' és V' közti fedések számát, azaz azon (v, f) párok számát, melyekre $v \in V'$, $f \in F'$, és v csúcsa f-nek. Ekkor $i(V', F') \leq 2|F'| + 2|V'| - 3$.*

Bizonyítás: Konstruáljunk egy H szomszédsági gráfot a V'-beli csúcsok és az F'-beli lapok között a következők szerint. $V(H) = F' \cup V'$, és fv pontosan akkor él H-ban, ha $f \in F'$, $v \in V'$ és G-ben v csúcsa az f lapnak. Könnyen látszik, hogy H egyszerű, páros síkgráf. Sőt, $i(V', F') = |E(H)|$.

H-ra mint egyszerű, háromszögmentes síkgráfra felírva az Euler-formulát az alábbi egyenlőtlenséget kapjuk: $|E(H)| \leq 2V(H) - 4$ feltéve, hogy H-nak legalább 3 csúcsa van. Ebből azt kapjuk, hogy $i(V', F') \leq 2(|V'| + |F'|) - 4$. Másrészt, ha H-nak csupán két csúcsa, és egy éle van, akkor $i(V', F') = 1 = 2(|V'| + |F'|) - 3$, így adódik a bizonyítandó becslés. □

2.3. Lemma. *Legyen $A \in \{0,1\}^{m\times n}$ egy mátrix. A következő 2 állítás ekvivalens:*

(i) Létezik olyan $C \in \{0,1\}^{m\times n}$ mátrix , hogy $C \leq A$ (azaz $c_{ij} \leq a_{ij}$ $\forall i \in \{1,\dots,m\}$, $\forall j \in \{1,\dots,n\}$), és C minden sora legalább q darab 1-est, és minden oszlopa legfeljebb r darab 1-est tartalmaz.

(ii) $\forall M \subseteq \{1,\dots,m\}$, $\forall N \subseteq \{1,\dots,n\}$-re: $\sum_{i\in M, j\in\{1,\dots,n\}\setminus N} a_{ij} \geq q|M| - r|N|$.

Bizonyítás (vázlat): Definiáljunk egy folyamot az $s, t, u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n$ csúcsokon a következők szerint. Kössük össze az s forrást az u_i pontokkal, és legyen az élek kapacitása q. Kössük össze az u_i pontokat a v_j pontokkal és az $u_i v_j$ él kapacitása legyen $a_{i,j}$. Végül kössük össze a v_j pontokat a t nyelővel, az élek kapacitása pedig legyen r.
Ha (i) teljesül, akkor feltehetjük, hogy a C mátrix olyan, hogy minden sora pontosan q darab 1-est tartalmaz. Így pontosan akkor létezik mq értékű (maximális) folyam, ha (i) teljesül. Másrészt megmutatható, hogy a folyam minden vágása legalább mq méretű akkor és csak akkor, ha (ii) teljesül. Ezekből az *MFMC* tétel alapján következik a lemma állítása. □

2.4. Lemma. *Legyen G síkgráf, $g(G) = g$. Ekkor minden $f \in F(G)$ lapnak ki tudjuk választani $g-2$ darab csúcsát úgy, hogy egyik csúcsot sem választottuk 2-nél több laphoz.*

Bizonyítás: Legyen $A = (a_{f,v})_{f\in F, v\in V} \in \{0,1\}^{|F|\times|V|}$ a G gráf lapjai és csúcsai közötti szomszédsági mátrix, azaz $a_{f,v} = 1$ pontosan akkor, ha v csúcsa f-nek. Azt akarjuk megmutatni, hogy létezik olyan $C \in \{0,1\}^{|F|\times|V|}$ mátrix, hogy $C \leq A$, továbbá C minden oszlopa legalább $g-2$ darab 1-est, és minden oszlopa legfeljebb 2 darab 1-est tartalmaz. Ugyanis ekkor egy $f \in F(G)$ laphoz rendeljük azokat a v csúcsokat, melyekre $c_{f,v} = 1$. A C-re vonatkozó feltételek biztosítják, hogy így a lemmának megfelelő választást adtunk.
A bizonyításhoz a 2.3 Lemmát használjuk fel, tehát azt fogjuk megmutatni, hogy minden $F' \subseteq F(G)$ és minden $V' \subseteq V(G)$ halmazra $\displaystyle\sum_{f\in F', v\in V\setminus V'} a_{f,v} \geq (g-2)|F'| - 2|V'|$. Legelőször bontsuk két részre a szummát:

$$\sum_{f\in F', v\in V\setminus V'} a_{f,v} = \sum_{f\in F', v\in V} a_{f,v} - \sum_{f\in F', v\in V'} a_{f,v}$$

Az első szummának $g|F'|$ egy triviális alsó becslése, a második szumma felső becslése pedig a 2.2 Lemmából jön: $\sum_{f\in F', v\in V'} a_{f,v} \leq i(V', F') \leq 2|F'| + 2|V'| - 3 \leq 2|F'| + 2|V'|$. Így:

$$\sum_{f\in F', v\in V\setminus V'} a_{f,v} \geq g|F'| - 2|F'| - 2|V'| = (g-2)|F'| - 2|V'|.$$

□

2.1.3. Polikromatikus élszínezés

A polikromatikus csúcsszínezéshez hasonlóan a polikromatikus élszínezést is definiálhatjuk. G gráf éleinek $\xi : E(G) \to \{1, \dots, k\}$ színezését polikromatikusnak nevezzük, ha minden $v \in V(G)$ csúcs polikromatikus, azaz minden $v \in V(G)$ csúcsra mind a k szín előfordul a v végpontú éleken:

$$\forall\, v \in V(G)\ \forall\, i \in \{1, \dots, k\}\ \exists\, uv \in E(G) : \xi(uv) = i.$$

A polikromatikus csúcsszínezésnél a legkisebb lap mérete volt egy triviális felsőkorlát. Az élszínezésnél nyilvánvaló, hogy egy G gráf, melynek a legkisebb fokszáma d, nem színezhető d-nél több színnel polikromatikusan. Az él-polikromatikus számra nem fogunk a továbbiakban becsléseket adni, csupán azt fogjuk belátni, hogy minden G multi-gráfnak, melynek legkisebb fokszáma legalább d, létezik polikromatikus él-színezése $\left\lfloor \frac{3d+1}{4} \right\rfloor$ színnel. Ehhez 3 lemmát használunk fel, melyeket röviden be is bizonyítunk.

2.5. Lemma. *Legyen p egy pozitív egész szám. Bármely G páros multi-gráf élei kiszínezhetőek p színnel úgy, hogy minden v csúcsra a v-ből kiinduló, azonos színű élek száma minden színre lényegében ugyanannyi, azaz bármely két színre ez a szám legfeljebb eggyel tér el, tehát vagy $\left\lfloor \frac{d(v)}{p} \right\rfloor$, vagy $\left\lceil \frac{d(v)}{p} \right\rceil$.*

Bizonyítás: Első lépésben vágjuk szét G csúcsait - ha szükséges - úgy, hogy minden csúcs foka legfeljebb p legyen. Ezt a következő eljárás segítségével tegyük meg: vegyünk egy v csúcsot G-ben. Ha a v csúcs foka d nagyobb mint p, akkor v helyett k darab új csúcsot veszünk: $v_1, \dots v_k$, ahol $k = \left\lceil \frac{d}{p} \right\rceil$. Ezeket v leszármazottjainak nevezzük. A v csúcs, G-beli $vu_1, \dots, vu_d$ éleivel a következőt csináljuk az új gráfban: minden $i = 1, \dots, k$-ra, $(i-1)p < j \le \min\{d, ip\}$ esetén húzzuk be a $v_i u_j$ élt. Az eljárás befejeztével az új gráf páros marad, és minden csúcsának legfeljebb p a foka. Kőnig tétele szerint ennek a gráfnak létezik jó p-élszínezése. Színezzük ki így a gráfot, majd egyesítsük újra a csúcsok leszármazottjait, így visszakaptuk az eredeti gráfunkat, és annak kívánt színezését. □

2.6. Lemma. *Minden G multi-gráf tartalmaz olyan B páros feszítő részgráfot, hogy minden $v \in V(G)$ csúcsra $d_B(v) \ge \left\lceil \frac{d_G(v)}{2} \right\rceil$.*

Bizonyítás: Tekintsük G-nek egy olyan vágását, mely a lehető legtöbb vágóélt tartalmazza. Legyen B az a páros gráf, mely G csúcsaiból és a vágóélekből áll. Tegyük fel, hogy ekkor létezik olyan v csúcs, melyre $d_B(v) < \left\lceil \frac{d_G(v)}{2} \right\rceil$. Ekkor azonban v-t áttéve az élvágás másik osztályába G-nek több vágóélt tartalmazó élvágását kapjuk, mely ellent mond a feltevésünknek. □

2.7. Lemma. *Bármely G multi-gráf éleinek létezik olyan irányítása, mely esetén $d^+(v) \geq \left\lfloor \frac{d(v)}{2} \right\rfloor$.*

Bizonyítás: Feltehetjük, hogy G összefüggő, egyébként komponensenként láthatjuk be az állítást. Ha G minden foka páros, akkor egy Euler-kör mentén irányítsuk meg az éleket. Tegyük fel ezután, hogy G-nek léteznek páratlan fokú csúcsai. Ekkor adjunk hozzá G-hez egy új u csúcsot. G összes páratlan fokú csúcsát - melyekből nyilvánvalóan páros sok van - kössük össze u-val. Az így kapott G' gráf minden foka páros. Az előbb látott módon egy Euler-kör mentén irányítsuk meg G' éleit, majd az eljárás végén töröljük ki a felvett u csúcsot. Így G éleinek egy kívánt irányítását kapjuk, hiszen a páros fokú v csúcsokra $d^+(v) = \frac{d(v)}{2}$, a páratlan fokú v csúcsokra $d^+(v) = \frac{d(v)+1}{2}$ vagy $d^+(v) = \frac{d(v)-1}{2}$. $\square$

2.2. Tétel. *Minden G multi-gráfnak, melynek legkisebb fokszáma d, létezik polikromatikus élszínezése $\left\lfloor \frac{3d+1}{4} \right\rfloor$ színnel.*

Bizonyítás: Megadjuk G éleinek egy színezését úgy, hogy minden csúcs polikromatikus legyen. A 2.6 Lemma alapján G-nek van olyan B feszítő páros részgráfja, hogy $\delta(B) \geq \left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil$. Jelölje B két osztályát B_1 és B_2. Legyen a 2.5 Lemma szerint ξ a B gráf éleinek színezése $p = \left\lfloor \frac{3d+1}{4} \right\rfloor$ színnel.
Ha egy v csúcsra $d_B(v) \geq p$, akkor v polikromatikus, hiszen a belőle kiinduló élek között mind a p szín feltűnik legalább $\left\lfloor \frac{d_B(v)}{p} \right\rfloor \geq 1$ élen.
Tekintsünk egy olyan v csúcsot, melyre $d_B(v) < p$. Ekkor létezik olyan szín, mely nem tűnik fel a v-ből kiinduló színezett élek egyikén sem, így a ξ színezés tulajdonsága alapján bármely szín legfeljebb egyszer tűnik fel a v-ből induló éleken, tehát a v végpontú színezett élek színe páronként különböző. Színezzük ki G eddig még nem színezett életi a következők szerint. Először a 2.7 Lemma alapján írányítsuk meg $G[B_1]$ és $G[B_2]$ éleit, így minden $v \in B_i \subset V(G)$ csúcsra $d^+_{G[B_i]}(v) \geq \left\lfloor \frac{d - d_B(v)}{2} \right\rfloor$ $(i = 1, 2)$. A v-ből induló nem színezett élek mindegyike B_i-beli. A v kezdőpontú irányított éleket színezzük olyan színekkel, melyek nem tűnnek fel a v-ből induló B-beli éleken. Így bármely $v \in V(G)$ csúcsra a belőle kiinduló, különböző színű élek száma: $\min\left\{d_B(v) + \left\lfloor \frac{d - d_B(v)}{2} \right\rfloor, p\right\} = p$, ugyanis $d_B(v) + \left\lfloor \frac{d - d_B(v)}{2} \right\rfloor \geq \left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{d - d_B(v)}{2} \right\rfloor \geq \left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3d+1}{4} \right\rfloor = p$. $\square$

2.1.4. Az alsó becslés igazolása

Az előző szakaszokban kapott eredmények segítségével fogjuk megmutatni, hogy $\left\lfloor \frac{3g-5}{4} \right\rfloor \leq p(g)$ minden $g \geq 5$ esetén.

Bizonyítás: Legyen G olyan síkgráf, melyre $g(G) = g$. A 2.4 Lemma alapján minden $f \in F(G)$ lapnak ki tudjuk választani $g-2$ csúcsát úgy, hogy G semelyik csúcsát sem választottuk kettőnél több laphoz.

Egy H multi-gráfot fogunk elkészíteni a következők szerint. Vegyünk fel két új x és y csúcsot és legyen $V(H) = F(G) \cup \{x, y\}$. Minden $v \in V(G)$ csúcsnak megfeleltetünk egy H-beli élt, melyet v-*él*nek hívunk.

(i) Ha v-t két különböző, f_1 és f_2 laphoz választottuk, akkor a v-él legyen $f_1 f_2$.

(ii) Ha v-t csak az f laphoz választottuk, akkor a v-él legyen fx.

(iii) Ha v-t egyetlen laphoz sem választottuk, akkor a v-él legyen xy.

Kössük össze az x és y csúcsokat $g-2$ darab éllel, így H egy hurokmentes multigráf, és bármely csúcsának foka legalább $g-2$. A 2.2 Tétel miatt kiszínezhetjük H éleit $p = \left\lfloor \frac{3(g-2)+1}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3g-5}{4} \right\rfloor$ színnel úgy, hogy minden $f \in V(H)$ csúcs polikromatikus legyen.

Ezután színezzük G csúcsait úgy, hogy minden $v \in V(G)$ csúcsra azt a színt választjuk, amilyen színű a v-él. Nyilvánvaló, hogy minden $f \in F(G)$ lap polikromatikus. Ezzel G-nek egy polikromatikus színezését adtuk $\left\lfloor \frac{3g-5}{4} \right\rfloor$ színnel. $\square$

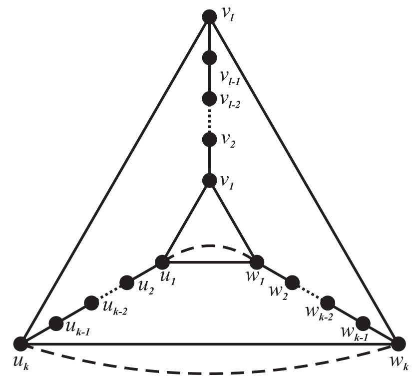
2.1.5. A felső becslés igazolása

A bizonyítás során tetszőleges $3 \leq g$ egészre konstruálni fogunk egy G_g gráfot, melyre $g(G_g) = g$ és $p(G_g) \leq \left\lfloor \frac{3g+1}{4} \right\rfloor$, ezzel igazolva a felső becslést.

Bizonyítás: Legyen $3 \leq g$ egész. Legyen páros g esetén $k = l = \frac{g}{2}$, páratlan g esetén $k = \frac{g+1}{2}, l = \frac{g-1}{2}$. Készítsük el a 2.3 ábrán látható G_g gráfot. A kis háromszög (u_1, v_1, w_1) belsejében és a nagy háromszög (u_k, v_l, w_k) külsejében is vegyünk fel $g-2$ darab csúcsot és kössük össze úgy, hogy egy-egy g hosszú kört kapjunk. Ezt ábrán szaggatott vonallal jelöljük. Ezzel $g(G_g) = g$. Az $u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots v_l, w_1, \ldots w_k$ csúcsok mindegyike pontosan két olyan laphoz tartozik, mely nem tartalmaz szaggatott élt. Ezért G_g bármely polikromatikus színezése esetén minden színnel legalább 2-t színeztünk az $u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots v_l, w_1, \ldots w_k$ csúcsok közül. Így

$$2p(G_g) \leq 2k + l = \begin{cases} \frac{3g}{2} & \text{ha } g \text{ páros} \\ \frac{3g+1}{2} & \text{ha } g \text{ páratlan} \end{cases}$$

melyből $p(G_g) \leq \left\lfloor \frac{3g+1}{4} \right\rfloor$. $\square$



2.3. ábra. G_g gráf: $g(G_g) = g$, $p(G_g) \leq \left\lfloor \frac{3g+1}{4} \right\rfloor$

2.2. Kapcsolat a védelmi problémákkal

Az 1. fejezetben többek között síkgráfok levédésével foglalkoztunk az őröket a csúcsokba állítva. Tekinsük egy tetszőleges G síkgráf egy polikromatikus színezését, és válasszuk ki az egyik színt. Mivel a színezés polikromatikus, ezért minden lapon van olyan csúcs, melyet a kiválasztott színnel színeztünk. Tehát ezekbe a csúcsokba állítva az őröket levédjük G-t. Ennek alapján igaz a következő tétel.

2.3. Tétel. *Bármely G síkgráf levédhető* $\frac{n}{\left\lfloor \frac{3g-5}{4} \right\rfloor} \leq \frac{4n}{3g-8}$ *őrrel, ahol* $g = g(G)$ *és* $n = |V(G)|$.

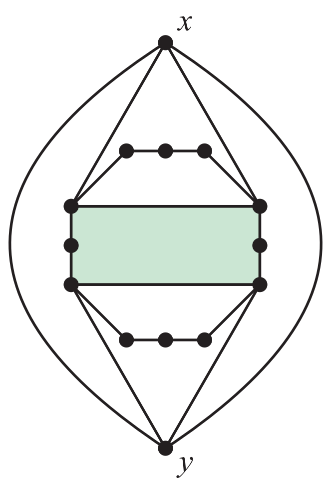
Az 1. fejezetben megmutattuk, hogy bármely n csúcsú síkgráf, melynek nincs 1 és 2 méretű lapja, levédhető $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ őrrel (1.2 Tétel). Ez egyszerű következménye a 2.1 lemmának.

2.3. Kapcsolat a Négyszín-tétellel

2.4. Tétel (Négyszín-tétel). *Minden síkgráf jól 4-színezhető.*

A négyszín-sejtést *Francis Gutrhie* fogalmazta meg. Eszerint bármely térkép kiszínezhető 4 színnel úgy, hogy a szomszédos tartományok különböző színűek. Ezt könnyen átfogalmazhatjuk síkgráfokra, ha a tartományokat tekintjük a síkgráf csúcsainak, és két csúcs között pontosan akkor megy él, ha a nekik megfelelő két tartomány szomszédos. Az első bizonyítást *Kenneth Appel*, *Wolfgang Haken* és *John Koch* adták 1976-ban. Bizonyításukban síkgráfokból álló *elkerülhetetlen halmazokat* vizsgáltak. Egy elkerülhetetlen halmaz olyan, hogy egy tetszőleges síkgráf háromszögelése részgráfként tartalmaz legalább egyet a halmazbeli síkgráfok közül. A bizonyítás további részét számítógéppel ellenőrizték, mely körülbelül 1200 órát vett igénybe, és a publikáció végleges változata 741 oldalból áll. 20 évvel később *Neil Robertson*, *Paul Seymour*, *Daniel Sanders* és *Robin Thomas* továbbfejlesztették a bizonyítást. A lehetséges esetek számát 638-ra redukálták, és egy $O(n^2)$-es gráf-színező algoritmust haszálva 24 óra alatt futtaták le azokat. A végleges publikáció 43 oldal terjedelmű lett. 2005-ben *Georges Gonthier* a Coq tétel bizonyító rendszerben ellenőrizte a Négyszín-tételt. Számítógépet mellőző bizonyítást azóta sem ismerünk.

Ebben a fejezetben láttuk, hogy $2 \leq p(5) \leq 4$. Most megmutatjuk, hogy a $p(5) = 4$ egyenlőségből következne a Négyszín-tétel. A gondolatmenet hasonló lesz ahhoz, mint amikor megmutattuk, hogy $p(4) < 3$. Tekintsük a 2.4 ábrán szereplő G_B^5 bázisgráfot. A külső

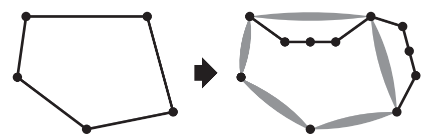


2.4. ábra. G_B^5 bázisgráf

lap polikromatikus színezésétől eltekintve G_B^5 bármely polikromatikus 4-színezése esetén az x és y csúcsok különböző színűek lesznek, különben a gráf színezett lapja nem lenne polikromatikus.

Tekintsünk egy tetszőleges G síkgráfot, és minden $uv \in V(G)$ élt helyettesítsünk G_B^5 egy példányával úgy, hogy az u illetve v csúcsokba az x illetve y csúcsok kerüljenek. Ezután G minden f lapjának belsejében vegyünk még fel 3 pontot, melyeket f valamely szomszédos 2 csúcsával körbekötünk. Egy példa látható a 2.5 ábrán. Az így kapott G' gráf bármely lapja legalább 5 méretű.

Ha $p(5) = 4$, akkor G'-nek létezik polikromatikus 4-színezése, és egy ilyen színezés esetén minden G'-beli bázisgráf (a külső lapjuktól eltekintve) polikromatikusan 4-színezett lesz, ezért a G'-beli bázisgráfok x és y csúcsai különböző színűek. Azaz ha G minden csúcsát



2.5. ábra. G' konstrukciója. A megvastagított élek G_B^5 egy-egy példányát jelölik.

olyan színűre színezzük, mint a megfelelő G'-beli csúcs színe, akkor G egyik éle sem lesz monokromatikus, tehát G egy jó színezését kapjuk (legfeljebb) 4 színnel.

2.4. Összefoglalás, nyitott kérdések

Ebben a fejezetben megmutattuk, hogy $p(1) = p(2) = 1$, $p(3) = p(4) = 2$, és $g \geq 3$ esetén

$$\left\lfloor \frac{3g-5}{4} \right\rfloor \leq p(g) \leq \left\lfloor \frac{3g+1}{4} \right\rfloor.$$

2.1. Nyitott kérdés. *Határozzuk meg $p(g)$ pontos értékét minden pozitív egész g-re.*

A $g = 5$ az első nyitott eset, ahol egyelőre annyit tudunk, hogy $2 \leq p(5) \leq 4$.
Legyen $p'(g) := \min\{p(G)|G$ **egyszerű** síkgráf, $g(G) = g\}$.

2.2. Nyitott kérdés. *Milyen g értékekre áll fent a $p(g) = p'(g)$ egyenlőség?*

Ismeretes, hogy egy konvex poliéder reprezentálható egy 3-összefüggő egyszerű síkgráffal. Megmutatható az is, hogy egy 3-összefüggő egyszerű síkgráf realizálható egy konvex poliéderként. Ezért a 3-összefüggő egyszerű síkgráfokat szokás *poliéder gráfoknak* nevezni.
Legyen $p''(g) := \min\{p(G)|G$ **poliéder gráf**, $g(G) = g\}$. Mivel egy konvex poliéder bármely lapja legalább 3 oldalú, és bármely konvex poliédernek létezik olyan lapja, mely legfeljebb 5 oldalú, ezért $p''(g)$ kizárólag a $g = 3, 4, 5$ értekekre értelmes.

2.3. Nyitott kérdés. *Határozzuk meg $p''(g)$ pontos értékét* $(g = 3, 4, 5)$.

3. fejezet

Felosztások polikromatikus színezése

Ebben fejezetben a síkgráfok két speciális osztályának színezésével foglalkozunk. *Téglalap-felosztásnak* nevezzük egy téglalap felosztását véges sok, egymást nem fedő téglalapokra úgy, hogy semelyik négy sem találkozik közös csúcsban. Ha egy felosztásnál megengedjük azt, hogy négy téglalap egy csúcsban találkozzon, akkor *általános felosztásról* beszélünk. Egy felosztás *rendjén* a felosztásban szereplő téglalapok számát értjük, beleértve az eredeti téglalapot mint külső tartományt. Legyen $S(t)$ az $\mathcal{F}$ felosztás t téglalapjának 4 sarkát tartalmazó halmaz. (Tehát egy felosztásbeli téglalapnak pontosan 4 sarka van, de lehetnek még egyéb csúcsok a kerületén.) A t_1 és t_2 téglalapok *szomszédosak* $\mathcal{F}$-ben, ha $S(t_1) \cap S(t_2) \neq \emptyset$, és ekkor egy $u \in S(t_1) \cap S(t_2)$ csúcsot t_1 és t_2 *közös sarkának* nevezünk. Tehát a $\mathcal{T}$ felosztás egy téglalap-felosztás, ha minden $t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathcal{T}$ esetén $S(t_1) \cap S(t_2) \cap S(t_3) \cap S(t_4) = \emptyset$. Megjegyezzük, hogy ez már bármely 3 téglalap esetén is teljesül. Az is nyilvánvaló, hogy egy téglalap-felosztás esetében minden csúcs pontosan két felosztásbeli téglalap közös sarka (beleértve az eredeti t^* téglalapot is).

Egy felosztásra tekinthetünk úgy is, mint egy síkgráf, melynek csúcsai a téglalapok sarkai, élei pedig ezen téglalapok oldalainak azon szegmensei, melyek a csúcsokat kötik össze. A felosztások színezését úgy értelmezzük, mintha a síkgráf csúcsait színeznénk. Érdemes előre kiemelni, hogy a felosztások polikromatikus színezésekor **nem követeljük meg, hogy a külső lap polikromatikus legyen**. Ezért vezessük be a következő jelölést. Ha egy $\mathcal{F}$ felosztás téglalapjairól úgy beszélünk, hogy a külső t^* tartományt is beleértjük, akkor a felosztást $\mathcal{F}^*$-al jelöljük.

3.1. Téglalap-felosztások polikromatikus színezései

3.1.1. Erősen polikromatikus 4-színezés

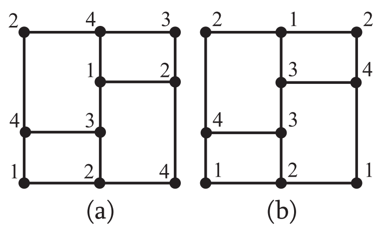
Egy $\mathcal{T}$ téglalap-felosztás *erősen polikromatikus 4-színezésén* a felosztás olyan $\chi : V(\mathcal{T}) \to \{1,2,3,4\}$ 4-színezését értjük, melynél minden téglalapnak mind a 4 szín előfordul a sarkaiban:

$$\forall t \in \mathcal{T}\ \forall i \in \{1,2,3,4\}\ \exists u \in S(t) : \chi(u) = i.$$

Ismét kihangsúlyozzuk, hogy a külső lap polikromatikusságát nem követeljük meg.

3.1. Tétel. *Minden téglalap-felosztásnak létezik polikromatikus 4-színezése.*

3.2. Tétel. *Minden téglalap-felosztásnak létezik erősen polikromatikus 4-színezése.*



3.1. ábra. Egy téglalap-felosztás polikromatikus (a), és erősen polikromatikus színezése (b)

A 3.2 Tételnek egyértelmű következménye a 3.1 Tétel, így a továbbiakban az utóbbi bizonyításával foglalkozunk. Ehhez tegyünk egy kis kitérőt az r-gráfok felé.

Egy r-reguláris G multigráfot *r-gráfnak* nevezünk, ha páros számú csúcsa van, és G minden vágása, mely $V(G)$-t két páratlan számosságú halmazra osztja, legalább r vágóélt tartalmaz.

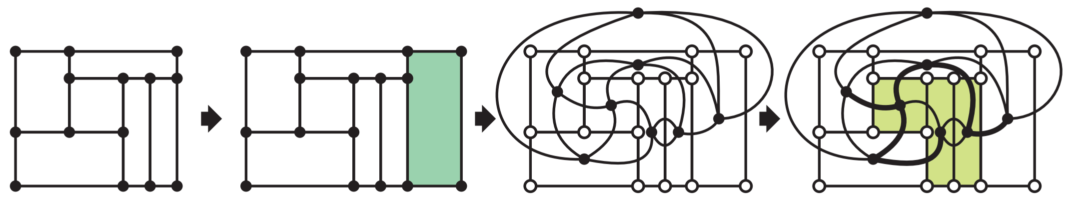
A 3.2 Tétel bizonyítása során felhasználjuk *Bertrand Guenin* alábbi eredményét, melyet most bizonyítás nélkül közlünk.

3.3. Tétel (Guenin, [7]). *Minden síkbarajzolható 4-gráfnak létezik jó 4-élszínezése.*

Folytassuk tehát a 3.2 Tétel bizonyításával:

Bizonyítás: Legyen $\mathcal{T}$ egy téglalap-felosztás. Feltehetjük, hogy $\mathcal{T}$ rendje páros, különben kiegészíthetjük páros rendűvé a 3.2 (a,b) ábrán látható módon. Konstruáljunk egy G gráfot a következők szerint. Minden $\mathcal{T}^*$-beli téglalapnak feleltessünk meg egy csúcsot G-ben. G-ben a t_1 és t_2 téglalapoknak megfelelő csúcsokat pontosan annyi éllel kössük össze, ahány közös sarka van t_1-nek és t_2-nek $\mathcal{T}^*$-ban. Tehát G minden csúcsa egy $\mathcal{T}^*$-beli téglalapnak, és G minden éle egy $\mathcal{T}$-beli csúcsnak felel meg. A 3.2 (b,c) ábrán láthatunk egy példát, melyen a téglalap-felosztást és a G gráfot együtt ábrázoljuk.

Nyilvánvaló, hogy a kapott G multigráf egy 4-reguláris síkgráf, páros számú csúccsal. Azt fogjuk belátni, hogy G egy 4-gráf. Ehhez már csak azt kell megmutatni, hogy G minden vágása legalább 4 vágóélt tartalmaz.



3.2. ábra. (a,b) Egy téglalap-felosztás páros rendűvé egészítése; (c) A megkonstruált G gráf; (d) G vágása

Legyen $(X, V(G)\setminus X)$ a G egy vágása. Legyen C a $G[X]$ maximális összefüggő komponense. C a $\mathcal{T}$ felosztásban téglalapok egyesítésének felel meg, amely egy ortogonális P sokszög. A 3.2 (d) ábrán X a színezett téglalapoknak megfeleltett csúcshalmaz (mely most egyben a C is), a vágóéleket pedig megvastagítottuk.
Egy ortogonális sokszög csúcsát nevezzük *konvex*nek, ha a hozzátartozó szög $\frac{\pi}{2}$. Nyilvánvaló, hogy P kerületén legalább 4 konvex csúcs van. Tekintsük G egy olyan e élét, amely P egy konvex csúcsának felel meg. Ekkor az e él nem mehet két P-beli téglalapot reprezentáló (azaz két C-beli) csúcs között. Ugyanis két P-beli téglalapot reprezenátló csúcs között pontosan akkor megy él G-ben, ha a téglalapoknak létezik közös sarkuk, de a közös sarok nem lehet konvex csúcs P-ben. Másrészt az e él nem mehet két X-beli csúcs között sem, C maximalitás miatt. Tehát a P konvex csúcsának megfeleltetett e él vágóél, így a vágás legalább 4 vágóélt tartalmaz, tehát G 4-gráf. Tekintsük G egy jó 4-élszínezését, amely a 3.3 Tétel szerint létezik. Ezután a $\mathcal{T}$ téglalap-felosztás minden csúcsát színezzük olyan színre, amilyen a neki megfeleltetett G-beli él színe. G konstrukciója miatt ez $\mathcal{T}$-nek egy erősen polikromatikus 4-színezése. $\square$

3.1. Megjegyzés. *A bizonyításban szereplő konstrukciónál kihasználtuk azt, hogy egy téglalap-felosztás csúcsa pontosan két téglalap közös sarka, ezért az általános felosztásoknál nem tudunk ilyen gráfot készíteni. Másrészt a következő szakaszban megmutatjuk, hogy van olyan általános felosztás, melynek nincs polikromatikus 4-színezése.*

3.2. Megjegyzés. *A bizonyítás során a külső tartomány is erősen polikromatikus 4-színezett lett. Ez azt jeleneti, hogy ha az eredeti téglalap-felosztásunk páros rendű volt, akkor 4 színnel megszínezhető erősen polikromatikusan úgy, hogy a külső tartomány sarkaiban is mind a 4 szín feltűnjön. A páratlan rendű téglalap-felosztásokat a 3.2 (a,b) ábrának megfelelően páros rendűvé egészíthetjük, de ha a színezés után eltöröljük a felvett téglalapot, akkor az eredeti téglalap-felosztás külső lapja nem lesz erősen polikromatikus.*

3.1.2. Guillotine-felosztások

A guillotine-felosztás a téglalap-felosztások egy speciális családja. Egy *guillotine-felosztást* rekurzív módon kaphatunk meg a következőképpen, véges sok lépést végrehajtva.

(i) **Kiindulás:** Egy téglalap. (Minden téglalap guillotine-felosztás)

(ii) **Egy lépés:** A guillotine-felosztás egy téglalapját valamely oldalával párhuzamos egyenessel két téglalapra vágjuk.

3.4. Tétel (Horev, Katz, Krakovski, Löffler, [8]). *Minden guillotine-felosztásnak létezik erősen polikromatikus 4-színezése, mely $O(n)$ idő alatt megtalálható, ahol n a felosztás rendje.*

3.5. Tétel (Keszegh, [10]). *Minden n-dimenziós guillotine-felosztásnak létezik erősen polikromatikus 2^n-színezése.*

A 3.4 Tétel első fele azonnal következik a 3.2 Tételből. A tétel eredeti bizonyításában [8] a szerzők kihasználták a guillotine-felosztások rekurzív felépítését. A felosztást egy bináris fában tárolva (az elágazások a vágásoknak felelnek meg) a bizonyításból egy $O(n)$-es algoritmus adható erősen polikromatikus 4-színezés megtalálására. Az n-dimenziós esettel *Keszegh Balázs* foglalkozott, ő bizonyította a 3.5 Tételt.

3.2. Általános felosztások polikromatikus színezései

Az általános felosztások színezésekor kibővítjük a polikromatikus színezés fogalmát.
Egy $\mathcal{A}$ általános felosztás *gyenge általános polikromatikus k-színezésén*, olyan $\vartheta : V(\mathcal{A}) \to \{1, \ldots, k\}$ színezést értünk, melyre

(i) $k \leq 4$ esetén: minden $t \in \mathcal{A}$ téglalap csúcsai között mind a k szín feltűnik.

(ii) $k \geq 4$ esetén: minden $t \in \mathcal{A}$ téglalap csúcsai között legalább 4 szín feltűnik.

Egy $\mathcal{A}$ általános felosztás *erős általános polikromatikus k-színezésén*, olyan $\theta : V(\mathcal{A}) \to \{1, \ldots, k\}$ színezést értünk, melyre

(i) $k \leq 4$ esetén: minden $t \in \mathcal{A}$ téglalap sarkai között mind a k szín feltűnik.

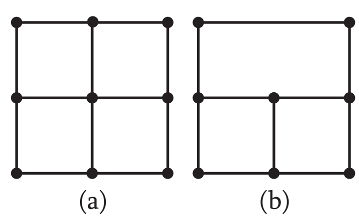
(ii) $k \geq 4$ esetén: minden $t \in \mathcal{A}$ téglalap sarkai között 4 szín feltűnik.

3.3. Megjegyzés. *Nyilvánvaló, hogy $k \leq 4$ esetén a definíciók megegyeznek a régi polikromatikus illetve erősen polikromatikus színezés definíciójával.*

3.4. Megjegyzés. *Világos, hogy $k \geq 4$ esetén egy gyenge (ill. erős) általános polikromatikus k-színezés egyben egy gyenge (ill. erős) általános polikromatikus $(k+1)$-színezés is (hiszen további színeket is megengedhetünk, melyeket nem használunk). Hasonlóan triviális, hogy $k \leq 4$ esetén minden gyenge (ill. erős) általános polikromatikus k-színezés implikál egy gyenge (ill. erős) általános polikromatikus $(k-1)$-színezést (például úgy, hogy két színt összeolvasztunk). Elegendő tehát olyan gyenge és erős k-színezéseket találnunk, hogy k a lehető legközelebb legyen 4-hez.*

3.2.1. Gyenge általános polikromatikus 4-színezés

3.6. Tétel. *Létezik olyan általános felosztás, melynek nem létezik gyenge általános polikromatikus 4-színezése.*



3.3. ábra. (a) a $\mathcal{G}$ 3×3-s négyzetrács felosztás; (b) a $\mathcal{H}$ felosztás

A 3.6 Tétel bizonyításához tekintsük először a 3.3 ábrán látható $\mathcal{G}$ (3×3-as négyzetrács) és $\mathcal{H}$ általános felosztásokat, melyek egy négyzet felosztásával keletkeztek. A $\mathcal{G}$ illetve $\mathcal{H}$ felosztások (bal, felső, jobb, alsó) *szélén*, azoknak a csúcsoknak a halmazát értjük, melyek az eredeti négyzet (bal, felső, jobb, alsó) oldalán fekszenek. Az alábbi 3 állítás triviális:

3.1. Állítás. *Ha $\mathcal{G}$ egy gyenge általános polikromatikus 4-színezésénél 3 szín feltűnik a bal (felső) szélen, akkor ugyanez a 3 szín feltűnik a jobb (alsó) szélen is.*

3.2. Állítás. *$\mathcal{G}$ semelyik gyenge általános polikromatikus 4-színezésénél nem fordulhat elő, hogy ha valamely 3 szín feltűnik a bal (jobb) szélen, akkor ugyanez a 3 szín feltűnik az alsó (felső) szélen is.*

3.3. Állítás. *$\mathcal{H}$ bármely gyenge általános polikromatikus 4-színezésénél 3 szín feltűnik a bal vagy a jobb szélén.*

Konstruáljunk egy $\mathcal{Q}$ felosztást a következőképpen: induljunk ki a 7×7-es négyzetrácsból, majd a középső 4 négyzetet egyesítsük. Ezután az imént egyesített négyzet oldalával szomszédos négyzeteket is egyesítsük a 3.4 (a) ábrán látható módon. Legyenek $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3, \mathcal{G}_4$ rendre a $\mathcal{Q}$ bal felső, jobb felső, bal alsó, jobb alsó sarkánál található 3×3-s négyzetrács felosztások.

3.1. Lemma. *A $\mathcal{Q}$ felosztás bármely gyenge általános polikromatikus 4-színezésénél 3 szín feltűnik a $\mathcal{G}_1$ felső szélén, vagy a $\mathcal{G}_2$ felső szélén.*

Bizonyítás: Tegyük fel indirekt, hogy sem $\mathcal{G}_1$, sem $\mathcal{G}_2$ felső szélén nem tűnik fel 3 szín. A 3.1 Állítás alapján ekkor sem $\mathcal{G}_1$, sem $\mathcal{G}_2$ alsó szélén nem tűnik fel 3 szín. A 3.3 Állítás alapján $\mathcal{G}_3$ és $\mathcal{G}_4$ felső szélén is feltűnik 3 szín, ugyanis $\mathcal{G}_3$ és $\mathcal{G}_4$ között a $\mathcal{H}$ egy elforgatottja van. Végül a 3.2 Állítás miatt sem $\mathcal{G}_3$ jobb szélén, sem $\mathcal{G}_4$ bal szélén nem tűnik fel 3 szín, ezzel azonban ellentmondásra jutottunk a 3.3 Állítással. □

3.1.1. Következmény. *Ha a $\mathcal{Q}$-nak létezik gyenge általános polikromatikus 4-színezése, akkor a 3.1 Lemma és a 3.2 Állítás miatt két eset fordulhat elő. Óramutató járásával megegyezően haladva:*

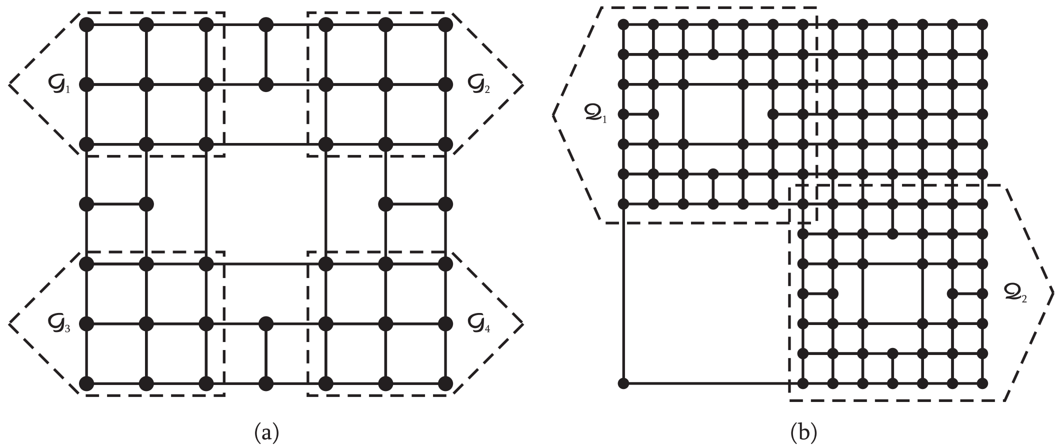
(i) $\mathcal{Q}$ minden szélének első 3 csúcsa 3 színnel színezett, utolsó 3 csúcsa 2 színnel színezett.

(ii) $\mathcal{Q}$ minden szélének első 3 csúcsa 2 színnel színezett, utolsó 3 csúcsa 3 színnel színezett.

Definiáljunk most egy $\mathcal{C}$ felosztást: vegyünk egy 3×3-as négyzetrácsot, majd a bal felső és jobb alsó négyzetébe ágyazzuk be $\mathcal{Q}$ egy-egy példányát ($\mathcal{Q}_1$ és $\mathcal{Q}_2$), a jobb felső négyzetébe pedig egy 7×7-es négyzetrácsot a 3.4 (b) ábrának megfelelően.

Megmutatjuk, hogy a $\mathcal{C}$ felosztásnak nem létezik gyenge általános polikromatikus 4-színezése, ezzel belátva a 3.6 Tételt.

Bizonyítás: Tegyük fel indirekt, hogy $\mathcal{C}$-nek létezik ilyen színezése. A 3.1 Lemmát alkalmazva $\mathcal{Q}_1$-re és $\mathcal{Q}_2$-re: $\mathcal{C}$-ben a 7×7-es négyzetrács bal és alsó szélén is található 3 egymást követő csúcs, melyek páronként különböző színűre vannak festve mégpedig úgy, hogy azok a széleknek első 3, vagy utolsó 3 csúcsai. A 3.1 Állítás miatt a 7×7-es négyzetrácsban található olyan 3×3-as négyzetrács, melynek jobb és alsó szélén is 3 szín feltűnik, ez azonban ellentmond a 3.2 Állításnak. □



3.4. ábra. (a) A $\mathcal{Q}$ felosztás; (b) A $\mathcal{C}$ felosztás

3.2.2. Gyenge általános polikromatikus 3- és 5-színezés

A következő 2 szakasz bizonyításaiban mohó algoritmusokat fogunk megadni. A bizonyításokhoz először is helyezzük el a felosztásokat a derékszögű koordináta-rendszerben úgy, hogy a téglalapok oldalai párhuzamosak legyenek a tengelyekkel. Így egy felosztás csúcsait a koordinátáikkal azonosíthatjuk. A mohó algorimusokhoz definiáljuk a felosztások csúcsainak *színezési sorrendjét*: a koordinátákat olyan sorrendben tekintsük, hogy azokat először az y koordináta szerint a legnagyobbtól a legkisebbig, majd ezen belül az x koordináta szerint a legkisebbtől a legnagyobbig rendezzük. Azaz balról-jobbra, fentről-le. Például az egység négyzet csúcsainak színezési sorrendje: $(0,1),(1,1),(0,0),(1,0)$. Nyilvánaló, hogy ha ebben a sorrendben színezzük a csúcsokat, akkor minden felosztásbeli téglalapnak a jobb alsó sarkát fogjuk utoljára színezni.

3.7. Tétel. *Minden általános felosztásnak létezik gyenge általános polikromatikus 3-színezése.*

Bizonyítás: Tekintsünk egy $\mathcal{A}$ felosztást. $\mathcal{A}$-ban minden v csúcsnak legfeljebb egy olyan szomszédja van, melynek az x koordinátája kisebb az övénél, és legfeljebb egy olyan szomszédja van, melynek y koordinátája nagyobb az övénél. Tekintsük $\mathcal{A}$ csúcsainak színezési sorrendjét. A mohó algoritmus során a csúcsokat ebben a sorrendben fogjuk színezni 3 színnel, úgy hogy a kiszínezett v csúcs színe különbözzön az említett, legfeljebb 2 szomszédos csúcs színétől. Legyen az éppen színezendő csúcs v. Az algoritmus egy általános lépése:

(i) Ha v-nek még nincs színezett szomszédja (azaz v az $\mathcal{A}$ bal felső sarka), akkor v-t tetszőleges színnel színezzük ki.

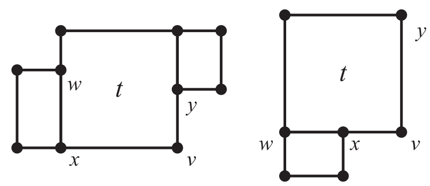
(ii) Ha v-nek idáig egyetlen szomszédját (w) színeztük ki, akkor v-t színezzük ki tetszőleges, w színétől különböző színre.

(iii) Ha v-nek idáig két színezett szomszédja van (x és y), akkor ez a három csúcs egy $t \in \mathcal{A}$ téglalap határán van, melynek v a jobb alsó sarka.

(a) Ha x és y különböző színűre vannak színezve, akkor v-t színezzük a harmadik színnel.

(b) Tegyük fel, hogy x és y azonos színűre vannak színezve. Mivel v a t utolsó színezendő csúcsa, így x-nek t-ben már van egy színezett w szomszédja, és a kezdeti feltevésünk szerint x színe különbözik w színétől. A 3.5 ábrán két példa látható x, y, v, w helyzetére. Ezért v-t az x és w színeitől eltérő színnel színezve, t határán feltűnik mind a 3 szín.

A leírt algoritmus során minden $t \in \mathcal{A}$ téglalap polikromatikusan 3-színezett lesz, így megadtuk az $\mathcal{A}$ felosztás egy gyenge általános polikromatikus 3-színezését. $\square$



3.5. ábra. Két példa az éppen színezendő v csúcs és az x, y, w csúcsok helyzetére.

3.8. Tétel. *Minden általános felosztásnak létezik gyenge általános polikromatikus 5-színezése.*

Bizonyítás: Tekintsünk egy $\mathcal{A}$ felosztást. A következő algoritmussal megadjuk $\mathcal{A}$-nak egy 5-színezését, melynél a csúcsokat a színezési sorrendben színezzük. Legyen v az éppen színezendő csúcs. Legyen (ha létezik) x a v azon szomszédja, melynek x koordinátája kisebb az övénél, és legyen (ha létezik) y a v azon szomszédja, melynek y koordinátája nagyobb az övénél. Tehát x a v bal oldali szomszédja, y a v felső szomszédja. Továbbá legyenek (ha léteznek) B_v illetve J_v azon $\mathcal{A}$-beli téglalapok, melyeknek v a bal alsó illetve a jobb alsó sarka, és legyen w az y, v-től eltérő szomszédja B_v-ben. A 3.6 ábrán látható két példa ezek elhelyezkedésére. Az éppen színezendő v csúcsnak az alábbi feltételekkel válasszunk színt:

(i) v színe különbözzön x színétől

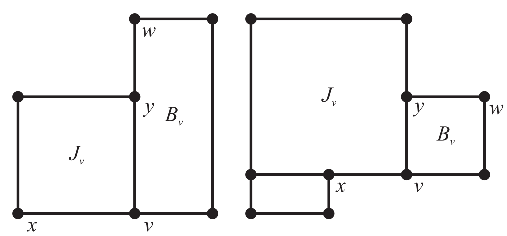
(ii) v színe különbözzön y színétől

(iii) v színe különbözzön w színétől

(iv) v színe különbözzön a $J_v - \{v\}$-n használt (legalább) 3 színtől

A (ii) és (iii) feltétel biztosítja azt, hogy B_v (ha létezik) csúcsain legalább 3 szín feltűnjön. Ha J_v létezik, akkor van olyan v' csúcs, hogy $J_v = B_{v'}$, ráadásul v' megelőzi v-t a színezési sorrendben, tehát $J_v - \{v\}$ legalább 3-színezett. Ezzel látjuk, hogy a (iv) feltételünk is értelmes.

Mivel minden $t \in \mathcal{A}$ téglalapra létezik olyan v csúcs, hogy $t = J_v$, így a fenti feltételekkel az algoritmus a csúcsoknak olyan színezését adja meg, hogy minden $\mathcal{A}$-beli téglalap legalább négy színnel színezett lesz. Továbbá az éppen színezendő csúcs színére a feltételek legfeljebb 4 színt tiltanak meg, így 5 szín mindenképpen elegendő a felosztás színezéséhez. □



3.6. ábra. Két példa az éppen színezendő v csúcs és az x, y, w csúcsok helyzetére.

3.5. Megjegyzés. *A 3.7 és 3.8 Tétel bizonyításában adott polikromatikus színezések jó színezések is. Ezt a 3.7 tételben a (iii), a 3.8 Tételben pedig az (i) és (ii) feltételek biztosítják.*

3.2.3. Erős általános polikromatikus 2- és 6-színezés

3.9. Tétel. *Minden általános felosztásnak létezik erős általános polikromatikus 2-színezése.*

Bizonyítás: Tekintsünk egy $\mathcal{A}$ felosztást és csúcsainak a színezési sorrendjét. Ismét ebben a sorrenben fogjuk megszínezni a csúcsokat, de most csak 2 színnel. Legyen az éppen színezendő csúcs v:

(i) Ha v semelyik $\mathcal{A}$-beli téglalapnak sem a jobb alsó sarka, akkor v-t színezzük tetszőleges színre.

(ii) Ha v valamely $t \in \mathcal{A}$ téglalap jobb alsó sarka, akkor t másik három sarka már színezett.

  (a) Ha t színezett sarkain mind a 2 szín feltűnik, akkor v-t tetszőleges színnel színezhetjük.

  (b) Ha t színezett sarkai azonos színűre vannak színezve, akkor v-t színezzük az ettől eltérő színnel.

□

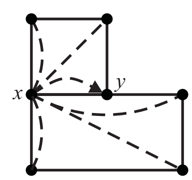
A 3.11 Tétel bizonyításához tegyünk egy kis kitérőt a gráfok listás színezése felé. Legyen G egy gráf, és minden $v \in V(G)$ csúcsra legyen adott a színek egy $L(v)$ halmaza (lista), melyekkel a v csúcsot színezhetjük. G csúcsainak *listás színezésén* a csúcsok olyan színezését értjük, melynél minden v csúcs színe benne van az $L(v)$ listában. A gráf *k-lista színezhető*, ha a csúcsokra tetszőleges k hosszú listát megadva létezik olyan listás színezés mely a gráf jó színezését adja.

3.10. Tétel (Erdős, Rubin, Taylor, [4]). *A páros hosszú körök 2-lista színezhetőek.*

3.11. Tétel. *Minden általános felosztásnak létezik erős általános polikromatikus 6-színezése.*

Bizonyítás: Tekintsünk egy $\mathcal{A}$ felosztást. Legyen G egy gráf $\mathcal{A}$ csúcsain, melyben x és y között pontosan akkor megy él, ha x és y ugyanannak az $\mathcal{A}$-beli téglalapnak sarkai. A következőkben belátjuk, hogy G-nek létezik jó 6-színezése, ugyanis G egy ilyen színezése az $\mathcal{A}$ felosztás egy erős általános polikromatikus 6-színezését adja meg. Először G azon csúcsait színezzük ki, melyekben 4 téglalap találkozott. Ezeket a színezési sorrendben színezzük ki úgy, hogy az éppen színezendő v csúcsra tetszőleges olyan színt használhatunk, mely nem tűnik fel v színezett szomszédai között (*megengedett szín*). Mivel egy éppen színezendő csúcsnak legfeljebb 4 színezett szomszédja van, így 6 szín biztosan elegendő lesz a jó színezéshez.

Az ilyen csúcsok színezése után legyen az algoritmus a következő. Jelölje W a még ki nem színezett csúcsok halmazát. Egy W-beli csúcs olyan, hogy legfeljebb két $\mathcal{A}$-beli téglalap sarka, azaz a W-beli csúcsok fokszáma legfeljebb 6. Jelöle W^6 azon W-beli csúcsok halmazát, melyek fokszáma G-ben pontosan 6, így egy $x \in W^6$ csúcs $\mathcal{A}$-ban pontoson 2 téglalap sarka, és ezeknek nincsen másik közös sarkuk. Emiatt x-nek G-ben van két szomszédja, melyek egy $\mathcal{A}$-beli téglalap ugyanazon oldalán helyekednek el. Legyen y, az x-hez közelebbi ezek közül. Minden ilyen (x, y) csúcspárra írányítsuk meg az xy élt G-ben x-től y-ig. Erre egy példa látható a 3.7 ábrán. Nyilvánvaló, hogy az xy élek egyikét sem irányítjuk meg visszafelé, tehát a W^6-beli csúcsok kifoka pontosan 1.



3.7. ábra. Az xy él irányítása

Ezek után először azokat a W^6-beli csúcsokat színezzük, melyek befoka 0. Legyen x egy ilyen csúcs. Az x kifoka 1, ezért van színezetlen szomszédja, ami az jelenti, hogy van olyan szín amivel x-t színezve nem romlik el a színezésünk. Színezzük ki x-t egy ilyen megengedett színnel, majd vegyük ki W^6-ból. Ismételjük ezt a lépést addig, amíg W^6-ban nem marad 0 kifokú csúcs. Ezek után minden W^6-beli csúcs kifoka és befoka is egyaránt 1. Így egyrészt minden W^6-beli csúcsnak van 2 színezetlen szomszédja, tehát minden csúcsnak van egy legalább 2 elemű listája a megengedett színekkel, másrészt a W^6-beli csúcsok gráfja irányított körökre bomlik fel.

Tekintsünk egy ilyen irányított kört. Világos, hogy a körben a vízszintes és függőleges élek felváltva követik egymást, így az ilyen körök páros hosszúak. A páros hosszú körök 2-lista színezhetőek, így meg tudjuk adni ezek egy jó színezését. Színezzük ennek megfelelően W^6

csúcsait. Ezek után már csak a $W - W^6$ csúcsok színezetlenek. Ezek fokszáma azonban legfeljebb 5, tehát minden ilyen csúcs színezésére létezik megengedett szín. $\square$

3.3. Összefoglalás, nyitott kérdések

Az általános felosztások esetében megmutattuk, hogy mind a gyenge általános, mind az erős általános polikromatikus k-színezés esetében elegendő a 4-hez minél közelebbi k értékeket vizsgálni. Megjegyeztük, hogy $k \leq 4$ esetben ezek a színezések megegyeznek a téglalap-felosztásoknál definiált polikromatikus és erősen polikromatikus k-színezésekkel, és igazoltuk, hogy minden téglalap-felosztásnak létezik erősen polikromatikus 4-színezése. Láttuk, hogy létezik olyan általános felosztás, melynek nem létezik gyenge általános polikromatikus 4-színezése, de bármely általános felosztásnak létezik gyenge általános polikromatikus 3-, illetve 5-színezése. Erős általános polikromatikus színezés esetén a 2 illetve 6 értékekre igazoltuk ezeket.

A gyenge általános polikromatikus 3-, és 5-színezéskre adott mohó algoritmusok nem adnak minden esetben erős polikromatikus színezést, így az alábbi két kérdés egyelőre még nyitott.

3.1. Nyitott kérdés. *Minden általános felosztásnak létezik erős általános polikromatikus 3-színezése?*

3.2. Nyitott kérdés. *Minden általános felosztásnak létezik erős általános polikromatikus 5-színezése?*

4. fejezet

A polikromatikus színezés bonyolultsága

A mostani fejezetben a polikromatikus színezés bonyolultságát vizsgáljuk. Polinomális idő alatt ellenőrizhető, hogy egy k-színezés polikromatikus-e, így annak eldöntése, hogy egy síkgráf polikromatikusan k-színezhető-e, $\mathcal{NP}$-beli. A $k = 1$ eset triviális, hiszen minden síkgráf polikromatikusan 1-színezhető, azaz minden inputra *igen* választ kapunk. A fejezet további részében a $k = 2, 3, 4$ esetekre térünk ki. Az $\mathcal{NP}$-nehézség bizonyítása során polinomiális visszavezetjük a feladatainkat már ismert $\mathcal{NP}$-nehéz problémákra.

4.1. A polikromatikus 2-színezés bonyolultsága

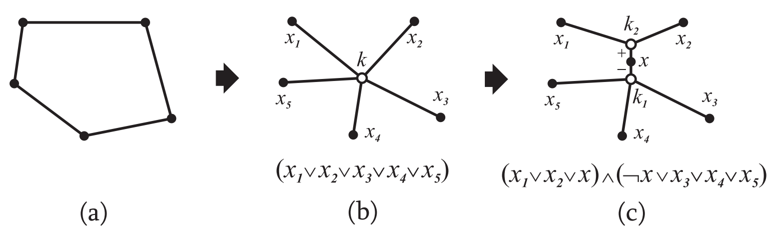
A 3-SAT azon kielégíthető CNF-formulák nyelve, melyeknél minden klóz legfeljebb 3 elemű. Ha egy $\varphi \in$ 3-SAT CNF-formula kielégíthető úgy, hogy egyik klózon belül sem igaz minden literál, akkor azt mondjuk, hogy $\varphi \in$ NAE-3-SAT (Not All Equal 3-SAT). Egy CNF-formulát síkbelinek nevezünk, ha a literál-klóz incidenciagráfja síkbarajzolható lesz, ha benne a negálatlan literálokat körbekötjük, és változóknak megfelelő negált és nagálatlan literálokat összekötjük. A NAE-3-SAT-beli síkbeli CNF-formulák nyelvét PLANAR-NAE-3-SAT-tal jelöljük. Az alábbi tételt *Bernard Moret* bizonyította.

4.1. Tétel (Moret, [11]). *PLANAR-NAE-3-SAT* $\in \mathcal{P}$.

Nevezzünk egy CNF-formulát *síkbeli**-nak, ha a literál-klóz incidenciagráfja síkbarajzolható. A NAE-SAT-beli síkbeli CNF-formulák nyelvét PLANAR*-NAE-SAT-tal jelöljük. A 4.1 Tétel bizonyításában szereplő visszavezetés síkbeli* CNF-formulákra is működik, ezért igaz, hogy PLANAR*-NAE-3-SAT $\in \mathcal{P}$.

4.2. Tétel. *Létezik polinomiális algoritmus annak eldöntésére, hogy egy adott síkgráf polikromatikusan 2-színezhető-e.*

Bizonyítás (vázlat): Azt fogjuk kihasználni, hogy egy síkgráf csúcsainak 2-színezése pontosan akkor polikromatikus, ha egyik lap sem monokromatikus. Tekintsünk egy G síkgráfot. Konstruáljunk G-hez egy φ_G síkbeli* CNF-formulát a következőképpen. Vegyünk fel G minden csúcsához egy változót, és az egy lapon lévő csúcsok változói alkossák a klózokat. A 4.1 (a,b) ábrán láthatunk egy példát, ahol a CNF-formula literál-klóz incidenciagráfját is ábrázoljuk. Ha G polikromatikusan 2-színezhető, akkor tekintsük egy ilyen színezését.



4.1. ábra. G, φ_G, φ'_G

Az egyik színnel színezett csúcsok változói legyen igazak, a másik színnel színezett csúcsok változói legyenek hamisak. Ezzel φ_G minden klózán belül lesz igaz és hamis változó is, tehát $\varphi_G \in$ PLANAR*-NAE-SAT. Másrészt, ha $\varphi_G \in$ PLANAR*-NAE-SAT, akkor színezzük ki az egyik színnel azokat a csúcsokat, melyeknek a változójuk igaz, a többi csúcsot pedig színezzük a másik színnel. Ezzel G polikromatikus 2-színezését kapjuk. Így annak eldöntése, hogy G síkgráf polikromatikusan 2-színezhető-e ekvivalens annak eldöntésével, hogy φ_G síkbeli* CNF-formula PLANAR*-NEA-SAT-beli-e.

Ezt követően tekintsük φ_G egy $n > 3$ méretű k klózját. A k klózot bontsuk kétfelé. Egy új x literál felvételével k-t egy 3 és egy $n-1$ méretű k_1, k_2 klózra cseréljük a 4.1 (b,c) ábrának megfelelően. Az x literál k_1-ben negálatlanul, k_2-ben negálva szerepeljen. Ezt az eljárást folytassuk addig, míg minden klóz legfeljebb 3 méretű lesz, így egy φ'_G síkbeli* CNF-formulát kapunk. Másrészt ha $\varphi_G \in$ PLANAR*-NAE-SAT, akkor $\varphi'_G \in$ PLANAR*-NAE-3-SAT. Ugyanis amikor egy klózt kétfelé bontunk az egyik új klózban biztosan lesz igaz változó, a másikban pedig ha nincs, akkor a felvett literált választhatjuk úgy, hogy az igaz legyen. Sőt, ha $\varphi'_G \in$ PLANAR*-NAE-3-SAT, akkor $\varphi_G \in$ PLANAR*-NAE-SAT. Hiszen ha egyesítjük a szétbontott klózokat nem fordulhat elő, hogy minden változó logikai értéke egyforma legyen, mert a megfelelő x és $\neg x$ változók logikai értéke különböző. Így annak eldöntése, hogy φ_G PLANAR*-NAE-beli-e ekvivalens annak eldöntésével, hogy φ'_G PLANAR*-NAE-3-SAT-beli-e.

Összegezve: annak eldöntése, hogy G polikromatikusan 2-színezhető-e ekvivalens annak eldöntésével, hogy φ'_G PLANAR*-NAE-3-SAT-beli-e, melyről tudjuk, hogy $\mathcal{P}$-ben van. □

4.2. A polikromatikus 3-színezés bonyolultsága

Egyszerű síkgráf jó 3-színezhetőségét fogjuk polinomálisan visszavezetni a polikromatikus 3-színezhetőségére. Ehhez az alábbi tételt fogjuk felhasználni.

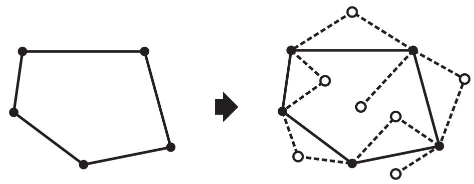
4.3. Tétel (Stockmeyer, [13]). *Annak eldöntése, hogy egy egyszerű síkgráf jól 3-színezhető-e, $\mathcal{NP}$-nehéz.*

4.4. Tétel. *Annak eldöntése, hogy egy egyszerű síkgráf polikromatikusan 3-színezhető-e, $\mathcal{NP}$-teljes.*

Bizonyítás: Már csak azt kell belátnunk, hogy a feladat $\mathcal{NP}$-nehéz. Legyen adott egy G egyszerű síkgráf. Polinomiális idő alatt konstruálunk egy G' egyszerű síkgráfot úgy, hogy G' pontosan akkor jól 3-színezhető, ha G polikromatikusan 3-színezhető.

Minden $uv \in E(G)$ élhez vegyünk fel egy y_{uv} csúcsot valamely olyan lap belsejében, melynek uv határa, majd kössük össze u-val és v-vel. Ekkor minden $E(G)$-beli él egy háromszögnek oldala. Ezután minden $f \in F(G)$ lapnak válasszuk ki egy x csúcsát, majd vegyünk fel egy x_f csúcsot f belsejében és kössük össze x-el. Egy példa látható a 4.2 ábrán. Az így kapott G' gráf egyszerű síkgráf.

Tekintsük (ha létezik) G egy jó 3-színezését. Ekkor egyik $uv \in E(G)$ él sem monokromatikus, így G'-ben az y_{uv} csúcsot az u és v színeitől eltérő harmadik színnel színezve minden három méretű lap polikromatikus lesz. Egy $f \in F(G)$ lapot pedig az x_f csúcs színezésével tehetünk polikromatikussá. Ezzel megadtuk G' egy polikromatikus 3-színezését. Másrészt tekintsük (ha létezik) G' egy polikromatikus 3-színezését. Ekkor természetesen G' minden három méretű lapja is polikromatikus, ebből adódóan egyik $uv \in E(G)$ él sem monokromatikus, tehát G jó színezését kaptuk (esetleg 2 színnel). Tehát G pontosan akkor jól 3-színezhető,



4.2. ábra. G' konstrukciója

ha G' polikromatikusan 3-színezhető. $\square$

4.3. A polikromatikus 4-színezés bonyolultsága

A $k = 4$ esethez két problémát fogalmazunk meg, mégpedig kétszeresen összefüggű gráfokra. Ennek az egyik oka az, hogy egy síkgráf akkor és csak akkor polikromatikusan k-színezhető, ha minden kétszeresen összefüggő komponense is az. Ráadásul mélységi kereséssel a maximális, kétszeresen összefüggő komponens polinomiális idő alatt megtalálható. Másrészt egy kétszeresen összefüggő síkgráf minden lapja egy kör, és ez megkönnyíti vizsgálatainkat. Legyen L néhány pozitív egész számot tartalmazó halmaz. Tekintsük a következő 2 problémát:

L-PLANE-PROPER-k-COLORABILITY:
Adott: G kétszeresen összefüggő síkgráf, ahol G bármely lapjának mérete L-beli.
Kérdés: Létezik-e G csúcsainak jó k-színezése?
L-PLANE-POLY-k-COLORABILITY:
Adott: G kétszeresen összefüggő síkgráf, ahol G bármely lapjának mérete L-beli.
Kérdés: Létezik-e G csúcsainak polikromatikus k-színezése?

4.5. Tétel (Alon et al. [1]). *L-PLANE-PROPER-3-COLORABILITY...*

(i) ... $\mathcal{P}$-ben van, ha $L = \{2, 3\}$.

(ii) ... triviális, ha L kizárólag páros számokat tartalmaz.

(iii) ... $\mathcal{NP}$-teljes, ha $\{3, s\} \subseteq L$, ahol $s \geq 4$.

(iv) ... $\mathcal{NP}$-teljes, ha $\{4, t\} \subseteq L$, ahol $t \geq 5$ páratlan.

4.6. Tétel (Alon et al. [1]). *L-PLANE-POLY-3-COLORABILITY...*

(i) ... $\mathcal{P}$-ben van, ha $L = \{2, 3, \}$.

(ii) ... triviális, ha L kizárólag páros számokat tartalmaz.

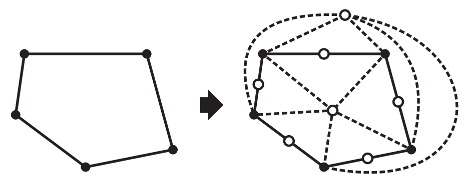
(iii) ... $\mathcal{NP}$-teljes, ha $\{3, s\} \subseteq L$, ahol $s \geq 4$.

(iv) ... $\mathcal{NP}$-teljes, ha $\{4, t\} \subseteq L$, ahol $t \geq 5$ páratlan.

(v) ... triviális, ha $L \subseteq \{6, \ldots\}$.

4.7. Tétel. *Annak eldöntése, hogy egy egyszerű síkgráf polikromatikusan 4-színezhető-e, $\mathcal{NP}$-teljes.*

Bizonyítás: Most is csak azt kell belátnunk, hogy a feladat $\mathcal{NP}$-nehéz. Legyen G egyszerű síkgráf. Minden $uv \in E(G)$ élhez vegyünk fel egy x_{uv} csúcsot, és az uv élt helyettesítsük az $u - x_{uv} - v$ úttal. Ezután minden $f \in F(G)$ lap belsejében vegyünk fel egy v_f csúcsot és kössük össze f csúcsaival. Az így kapott G' gráf egyszerű síkgráf és minden lapjának mérete pontosan 4. Egy példa látható a 4.3 ábrán. Megmutatjuk, hogy G pontosan akkor



4.3. ábra. G' konstrukciója

jól 3-színezhető, ha G' polikromatikusan 4-színezhető.

Tekintsük (ha létezik) G egy χ jó 3-színezését az $\{1, 2, 3\}$ színekkel. Ezt a χ színezést egészítjük ki G' színezésévé a következőképpen. Minden v_f $(f \in F(G))$ csúcsot színezzük ki a 4-es színnel. Mivel χ jó 3-színezés, ezért egyik $e \in E(G)$ él sem monokromatikus, így x_{uv}-t $(uv \in E(G))$ a $\chi(u), \chi(v), 4$ színektől eltérő negyedik színnel színezve, minden $f \in F(G')$ lap polikromatikusan 4-színezett lesz.

A másik irányhoz tekintsük (ha létezik) G' egy χ' polikromatikus 4-színezését. Legyen v_f valamely f laphoz felvett csúcs. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\chi'(v_f) = 4$. Ekkor minden olyan $uv \in E(G)$ élre, mely f-et határolja az u, x_{uv}, v csúcsok az 1, 2, 3 színekkel vannak színezve, így minden v_g csúcsra, melyet valamely f-el szomszédos $g \in F(G)$ laphoz vettünk fel $\chi'(v_g) = 4$. Ezt a gondolatmenetet ”lapról-lapra lépve” megismételhetjük, és mivel G' duális gráfja összefüggő, így minden $f' \in F(G)$-re $\chi'(v_{f'}) = 4$, és minden más $w \in G'$ csúcsra $\chi'(w) \neq 4$. Tehát ha χ'-t leszűkítjük G-re (χ), akkor G egy 3-színezését kapjuk. Másrészt χ' polikromatikus 4-színezés, ezért minden uv élre, mely valamely $f \in F(G)$ lap határa, az u, v, x_{uv}, f_v csúcsok különböző színűek, azaz $\chi(u) \neq \chi(v)$. Így χ jó 3-színezése G-nek. $\square$

4.4. Egyéb eredmények, nyitott kérdések

Az előző fejezetben megmutattuk, hogy nem minden általános felosztásnak létezik gyenge általános polikromatikus 4-színezése. A következő tétel igazolható.

4.8. Tétel (Gerbner et al. [6]). *Annak eldöntése, hogy egy általános felosztásnak létezik-e gyenge általános polikromatikus 4-színezése, $\mathcal{NP}$-teljes.*

A 4.3 szakaszban definiáltuk az L-PLANE-POLY-3-COLORABILITY problémát. Az egyetlen eset amit egyelőre nem tudtunk lefedni a 4.6 Tételben, amikor L legkisebb eleme 5. Ha fennállna, hogy $p(5) \geq 3$, akkor az alábbi probléma triviális lenne.

4.1. Nyitott kérdés. *Mi a bonyolultsága az $\{5, \ldots\}$-PLANE-POLY-3-COLORABILITY problémának?*

A 4.1, 4.2, 4.3 szakaszokban a polikromatikus k-színezés bonyolultságát vizsgáltuk a $k = 1, 2, 3, 4$ esetekben.

4.2. Nyitott kérdés. *A PLANE-POLY-k-COLORABILITY probléma $\mathcal{NP}$-teljes minden rögzített $k \geq 5$-re?*

Irodalomjegyzék

[1] N. Alon, R. Berke, K. Buchin, M. Buchin, P. Csorba, S. Shannigrahi, B. Speckmann, P. Zumstein: *Polychromatic Colorings of Plane Graphs*, Discrete & Computational Geometry (2009) pp. 421-442

[2] P. Bose, T. Shermer, G. Toussaint, B. Zhu: *Guarding Polyhedral Terrains*, Comput. Geom. (1997) pp. 173-185

[3] D. Dimitrov, E. Horev, R. Krakovski: *Polychromatic colorings of rectangular partitions*, Discrete Mathematics (2009) pp. 2957-2960

[4] P. Erdős, A. L. Rubin, H. Taylor: *Choosability in graphs*, Congr. Numer. 26 (1979) pp. 125-157

[5] S. Fisk: *A short proof of Chvátal's watchman theorem*, J. Comb. Theory, Ser. B (1978)

[6] D. Gerbner, B. Keszegh, N. Lemons, C. Palmer, D. Pálvölgyi, B. Patkós: *Polychromatic colorings of arbitrary rectangular partitions*, Discrete Mathematics (2010) pp. 21-30

[7] B. Guenin: *Packing t-joins and edge coloring in planar graphs*, Manuscript

[8] E. Horev, M. J. Katz, R. Krakovski, M. Löffler: *Polychromatic 4-coloring of guillotine subdivisions*, Inf. Process. Lett. (2009) pp. 690-694

[9] J. Kahn, M. Klawe, D. Kleitman: *Traditional galleries require fewer watchmen*, SIAM J. Algebraic and Discrete Methods 4 (1983) pp. 194-206

[10] B. Keszegh: *Polychromatic Colorings of n-dimensional Guillotine-Partitions*, COCOON (2008) pp. 110-118

[11] B.M.E. Moret: *Planar NAE3SAT is in P*, SIGACT News 19(2) (1988) pp. 51-54

[12] J. O'Rourke: *Art Gallery Theorems and Algorithms*, Oxford University Press (1987)

[13] L. Stockmeyer: *Planar 3-colorability is polynomial complete*, SIGACT News 5(3) (1973) pp. 19-25

[14] J. Urrutia: *Art Gallery and Illumination Problems*, Handbook of Computational Geometry (2000) pp. 973-1027