Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Amőba típusú játékok

BSc szakdolgozat

Láng Éva Judit

Matematika BSc, Alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető:

Szőnyi Tamás, egyetemi tanár

Számítógéptudományi Tanszék

Budapest, 2011

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezető

A hagyományos játékelmélet felépítését Neumann János kezdte meg 1928-ban. Olyan játékokkal foglalkozott, ahol minden játékosnak stratégiája van, kifizetési mátrixszal megadhatók a lehetséges eredmények. A játékosok célja maximalizálni a kifizetéseket, ami a saját és az ellenfél választásától is függ. A Neumann tétel szerint kétszemélyes kombinatorikai játékban vagy valamelyik játékosnak van nyerő stratégiája, vagy mindkét játékosnak van biztonságos stratégiája.

Ezen eredményeket számos tudományág hasznosítja. Nagyon hasznos a közgazdaság és politika számára, de sajnos gyakorlati játékoknál, mint a hex vagy sakk nem használható. Ezekben a játékokban a játékos mindent tud, amit az ellenfele, és mindkettőnek saját optimális stratégiája van (nincs szükség kevert stratégiára)

A **játékosok száma szerint** egyszemélyes (pl. bűvös kocka), kétszemélyes (sakk), többszemélyes (pl. kártyajátékok) és személytelen játékokat különböztetünk meg. A személytelen játékban senki sem játszik, a játék maga játszódik saját szabályai szerint anélkül, hogy bárki is beleszólna. Ahhoz, hogy egy személytelen játék lejátszódjék általában számítógépet használunk, melynek képernyőjén figyelhetjük a játék folyását. Erre példa az életjáték.

A és B játékos sakkjátszmája: A gondolkozik; A lép; B gondolkozik; B lép; stb., amíg matt állás vagy döntetlen állás nem jön létre. Amíg a játékos gondolkozik a játék áll, a bábuk mozdulatlanok, ezt a helyzetet *állás*nak nevezzük.

Egy *lépés* állásból állásba való átmenet, amit mindig az egyik játékos határoz meg a játékszabályok szerint. Egy álláspár, azaz az eredeti és új állás segítségével tökéletesen leírható egy lépés. Azokat a játékokat, melyek állásból állásba átvivő lépések sorozatából állnak, **diszkrét játékoknak** nevezzük. Ezzel szemben például a tenisz vagy labdarúgás nem diszkrét, mert nincsenek állások és lépések. Ezen játékok **folytonos játékok**, elemzésük pedig komolyabb eszköztárat igényelne, és akkor sem adna feltétlenül használható tudást.

Azt a rögzített állást, ahonnan a játék indul *kezdőállás*nak nevezzük. *Végállás*, amelybe eljutva a játék tovább nem folytatódik.

Ha a sakkjátékban lépésről beszélünk, ezen a hagyomány szerint lépéspárt értünk, tehát A lépését együtt B rákövetkező lépésével. A sakkjátszma akár két lépés után is véget érhet mattal, és nem tarthat örökké, mivel a szabályok szerint befejeződik döntetlen eredménnyel, ha 50 lépés történik ütés vagy gyaloglépés nélkül. Tehát a sakk **véges játék** abban az értelemben, hogy minden játszma véges számú lépésből áll. Ez nem azon múlik, hogy csak véges számú állás van. Például a bűvös kocka állásainak száma véges, de tekergetése elvben vég nélkül folytatható.

A véges játék végén kiderül a játék eredménye. Két játékos esetén az egyik nyer és a másik veszít vagy a játék döntetlen. Egy játékos esetén nyerésről vagy vesztésről beszélhetünk. Mivel az eredményt mindig egy játékos éri el, így a személytelen játékoknak nincs eredménye.

A kombinatorikai játékok önálló elméletét Sprague és Grundy hozta létre a harmincas években. Az ötvenes évektől indult gyors fejlődésnek ez a terület. 1982-ben jelent meg Berlekamp, Conway és Guy monográfiája, a Winning Ways. Olyan játékokra alkalmazható, ahol a pozíciók több, egymástól független egyszerű játékra bonthatók.

A továbbiakban kétszemélyes kombinatorikai játékokkal foglalkozom a dolgozatban.

2. fejezet

Pozíciós játékok

Pozíciós játéknak nevezzük mindazon játékokat, ahol a nyerés feltétele valamely alakzat eléréséhez vagy elkerüléséhez kapcsolódik. Most olyan táblajátékokat vizsgálunk, amit az a játékos nyer, aki először kitölt egy nyerő mintát.

- Minimalom (Tic-Tac-Toe)

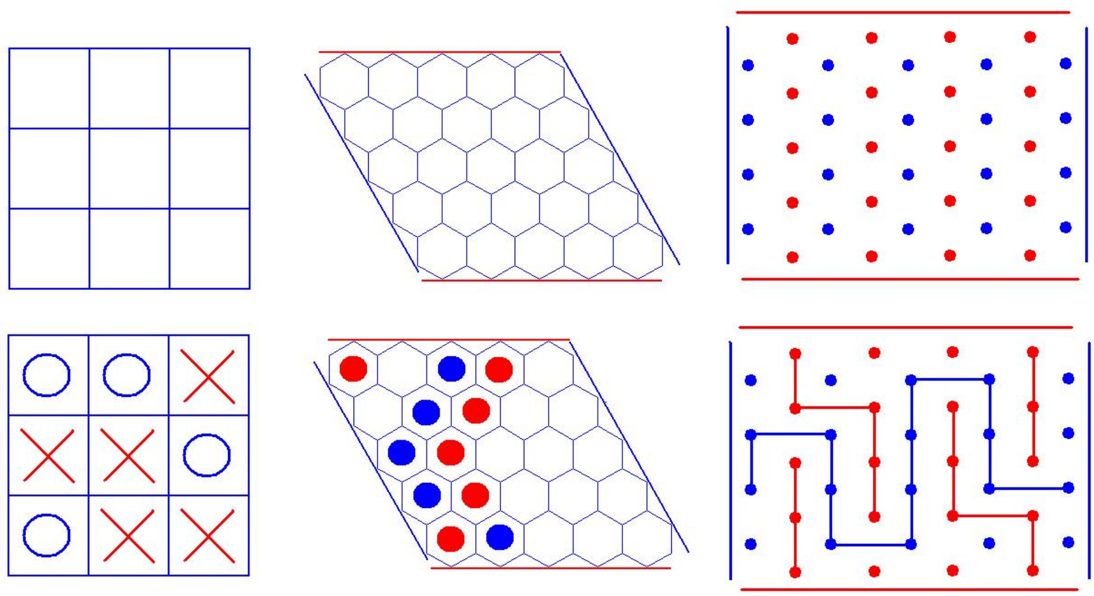
  A tábla egy négyzet, ami $3 \times 3 = 9$ egyenlő részre van osztva. A kezdő játékos a 9 kis négyzet egyikébe (piros) keresztet tesz, az ellenfél pedig egy másik négyzetbe (kék) kört rajzol. Ezt addig csinálják felváltva, amíg egyikük nyerő ponthármast (3 egyforma jel egy sorban, oszlopban vagy átlón, ilyenből pontosan 8 db van) foglal el, vagy elfogynak a szabad négyzetek (döntetlen).

- Hex

  Itt a táblát szabályos hatszögek alkotják, a pontos méret megegyezés kérdése, de szokásosan 11×11-es táblán játszunk. A játékosok felváltva helyezik le korongjaikat a hatszögekbe, a kezdő játékos korongjai pirosak, a második korongjai kékek. A játék célja: kezdőnek piros korongokból álló láncot foglalni el a tábla alsó szélétől a felsőig, másodiknak kék korongokból álló láncot foglalni el a bal széltől jobb szélig. Amelyik játékos ezt a célt eléri, nyer. Hatszögek helyett a táblán ugyanilyen elrendezésben mélyedések is lehetnek, amelyekbe a játékosok felváltva piros és kék golyókat helyeznek el.

- Négyzetes hex (Bridge-it, Gale-bridzs)

A tábla egy $(n+1) \times n$-es piros és egy $n \times (n+1)$-es kék rács összefűzéséből áll. A kezdő összekapcsol két szomszédos mezőt a piros rácson, második ugyanezt teszi a kék rácson. Két lépés nem keresztezheti egymást. Kezdő akkor nyer, ha piros lánccal összekapcsolja a tábla tetejét és alját, második pedig ha kék lánccal kapcsolja össze a tábla bal szélét a jobb szélével. Mivel a láncok nem keresztezhetik egymást, mindig van győztes. Ezt a játékot D. Gale találta fel.



2.1. ábra. A játékok táblái és egy döntetlen Tic-Tac-Toe játékra, piros győzelme hex és kék játékos nyerő állása a bridge-it játékban

2.1. Stratégialopás

A stratégia szó görög eredetű, jelentése hadvezetési mód.

Definíció 2.1.1 *Az A játékos nyerő stratégiája olyan s stratégia amelyre teljesül a következő: bármelyik lehetséges stratégiáját alkalmazza is B, ha A az s stratégiát alkalmazza, akkor a játszmában A nyer.*

Állítás 2.1.1 *Tic-Tac-Toe típusú játékoknál az első játékos legalább döntetlent ér el.*

Bizonyítás: [1] Indirekt tegyük fel, hogy második játékosnak nyerő stratégiája van, ebből következik, hogy elsőnek is lenne nyerő stratégiája. Ha az első lépést véletlenszerűen választja, akkor úgy tekintheti magát, mint a második játékos. Ha a stratégia szerint olyan mezőt kell választania, ami még szabad, akkor lép. Ha olyan mezőt kellene elfoglalnia, amit korábban elfoglalt, akkor véletlenszerűen választ egy mezőt. Egy extra lépés csak előnyt jelenthet, tehát működik a nyerő stratégia. Ha viszont elsőnek és másodiknak is lenne nyerő stratégiája, és mindketten a nyerő stratégia szerint játszanának, a játéknak két győztese lenne. Így a második játékos nem nyerhet, tehát az első játékosnak legalább döntetlen stratégiája van.

Állítás 2.1.2 *A hex és bridge-it játékokban a kezdő játékos nyer.*

Bizonyítás: Könnyen belátható, hogy egyik játék sem lehet döntetlen, így a kezdő játékos nyer. □

A három korábban említett játékban van pár különbség. A Tic-tac-toe játékban bárhogy léphet mindkét játékos és a nyerő halmazok is megegyeznek. A hex játékban mindketten tetszőlegesen léphetnek, de különböző nyerő halmazuk van. Ezzel szemben a Bridge-it játékban különböznek a lépések és a nyerő halmazok is.

2.2. Általánosított tic-tac-toe játékok

Legyen X véges halmaz a játék táblája. A nyerő halmazok X bizonyos részhalmazai, $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$, $A_i \subseteq X$. A két játékos felváltva választ egy olyan elemet X-ből, ami még szabad. Az nyer, aki először foglal el teljes nyerő halmazt. Az ilyen játékok egy speciális esete a minimalom.

- Tic-Toc-Tac-Toe

  Ez a minimalom 3-dimenziós változata, a tábla $4 \times 4 \times 4$-es kocka. A nyerő halmazok a sorok, oszlopok, lap és testátlók (összesen 76 db van).

- Amőba (5-in-a-row)

  Itt a tábla végtelen négyzetrács, de a gyakorlatban lehet 19×19-es go tábla vagy füzetlap. A nyerő halmazok 5 szomszédos függőleges, vízszintes vagy átlós mezőből állnak.

- k-amőba (k-in-a-row)

  A tábla ugyanaz, mint az amőba esetén, de a nyeréshez k szomszédos jel kell.

Tétel 2.2.1 *Legyen X véges és $\mathcal{F}$ egy tetszőleges részhalmaza X-nek. Ekkor a kezdő játékos legalább döntetlent ér el az általánosított tic-tac-toe-ban az $(X, \mathcal{F})$-en.*

A legalább döntetlen stratégiát megtalálni nehéz feladat. A kezdő játékos stratégiája valójában egy f függvény, értelmezési tartománya X részsorozatainak halmaza. A következő lépés $f(x_1, y_1, \ldots, x_{i-1}, y_{i-1})$ mindig X egy eleme, de különbözik a korábban kiválasztottaktól, azaz $x_1, y_1, \ldots, x_{i-1}, y_{i-1}$ elemektől. E stratégia szerint játszva f meghatározza a kezdő játékos minden lépését a következőképpen: tegyük fel, hogy a játékosok felváltva választották az $x_1, y_1, \ldots, x_{i-1}, y_{i-1}$ elemeket ilyen sorrendben. Így a kezdő játékos i-edik lépése $x_i = f(x_1, y_1, \ldots, x_{i-1}, y_{i-1})$. Legyen $|X| = N$, akkor a lehetséges stratégiák száma

$$2^{2^N} \quad \text{és} \quad N^{N^N}$$

között van, így egy játék elemzéséhez szükséges számítás kétszeresen exponenciális függvénye a táblaméretnek.

Még a kis táblajátékok is olyan bonyolultak, hogy elképzelhető, hogy a létező döntetlen vagy nyerő stratégiát nem fogjuk megtalálni. Oren Patashnik volt az első, aki megtalálta a kezdő játékos nyerő stratégiáját a 3 dimenziós $4 \times 4 \times 4$ tic-tac-toe (tic-toc-tac-toe) játék esetén. Az 1977-es program 1500 óra számítási időt igényelt, és a nyerő stratégia 2929 lépést tartalmazott.

Sajnos a stratégialopás nem konstruktív, csak annyit tudunk, hogy létezik nyerő stratégia, de semmit nem segít a megtalálásban. Például nem ismerünk konkrét nyerő stratégiát a hex játékra.

2.2.1. Néhány eredmény a k-amőba játékra

A stratégialopás segítségével beláttuk, hogy a második játékosnak nem lehet nyerő stratégiája (kihasználtuk a játék szimmetrikusságát). Így az a kérdés, hogy kezdő nyer vagy második döntetlent tud elérni. A 4-amőba játékban könnyen belátható, hogy a kezdő játékosnak nyerő stratégiája van. Az 5-amőbáról ezt nem tudjuk, így felmerül a kérdés, hogy van-e olyan n, hogy az n-amőbában a második játékosnak döntetlen stratégiája van?

Állítás 2.2.1 *$n \geq 12$ esetén az n-amőbában a második játékosnak döntetlen stratégiája van.*

A bizonyításhoz szükségünk van a következő állításokra:

Állítás 2.2.2 *Tekintsük azt az 1-dimenziós játékot, ahol a két játékos felváltva foglal le egész számokat a számegyenesen (ugyanazt a számot kétszer nem vehetik ki). A kezdő játékos akkor nyer, ha számai között valamikor előfordul 3 db egymásutáni. Ha ez soha nem sikerül, akkor a második nyer. Ebben a játékban másodiknak van nyerő stratégiája.*

Bizonyítás: [1] Megadjuk második nyerő stratégiáját: ha kezdő utoljára l-et vette ki, akkor:

1. ha $(l-1)$ még nincs elfoglalva, akkor második kiveszi $(l-1)$-et;
2. ha $(l-1)$ már el van foglalva, de $(l+1)$ még nincs, akkor második kiveszi $(l+1)$-et;
3. ha $(l-1)$ és $(l+1)$ is el vannak foglalva, akkor második tetszőlegesen választhat.

Indirekt bizonyítjuk, hogy ez nyerő stratégia. Tegyük fel, hogy Kezdő valamikor elfoglalta az $l, (l+1), (l+2)$ számokat. Időrendben először nem vehette ki sem $(l+1)$-et, sem pedig $(l+2)$-t, hiszen mindkettő bal oldali szomszédja benne van az $\{l, l+1, l+2\}$ halmazban, így a fenti stratégia szerint második ezt rögtön elfoglalta volna. Így Kezdő időrendben először l-t vette ki. Kezdőnek másodszor tehát $(l+1)$-et vagy $(l+2)$-t kellett kivennie. De mindkét eset lehetetlen, mert ha $(l+1)$-et vette volna ki másodszor, úgy a stratégia alapján második rögtön utána elfoglalta volna $(l+2)$-t, ha pedig $(l+2)$-t vette volna ki másodszor úgy második rögtön utána $(l+1)$-et foglalta volna el. Ellentmondásra jutottunk, tehát feltevésünk helytelen volt. $\square$

Állítás 2.2.3 *A négyzetrács négyzeteibe elhelyezhetjük úgy a V (vízszintes), F (függőleges), FÁ (főátló), MÁ (mellékátló) betűket, hogy bármelyik vízszintes, függőleges* *vagy átló irányú négy szomszédos négyzetből álló szakaszon lesz olyan négyzet, melybe a szakasz irányának rövidítését írtuk.*

A kívánt megbetűzést úgy végezhetjük el, hogy kijelölünk a négyzetrácson egy 4×4*-es darabot s ezt megbetűzzük az ábra szerinti módon, majd pedig ezt periodikusan kiterjesztjük az egész négyzetrácsra. Ezt úgy értjük, hogyha egy négyzet már meg van betűzve, akkor vízszintes és függőleges irányba eső negyedik szomszédai kapják ugyanazt a betűt.*

F	*MÁ*	*F*	*V*
V	*FÁ*	*MÁ*	*FÁ*
MÁ	*F*	*V*	*F*
FÁ	*MÁ*	*FÁ*	*V*

Ezek után az állítás bizonyítása:

Bizonyítás: [1] A 2.2.2 állítás akkor is igaz, ha a játék nem egy, hanem akárhány diszjunkt egyenesen folyik. Ugyanis, ha második minden egyenesen szimultán módon a második állítás bizonyításában megadott nyerő stratégiát játssza, akkor kezdő egyik egyenesen sem tud elfoglalni három szomszédos rácspontot. A 2.2.3 állítás arra szolgált, hogy a négyzetrácsot diszjunkt egyenesek összegére bontsuk. Ez így történik: induljunk ki egy a 2.2.3 állítás szerint létező megbetűzésből. Definiáljuk a V egyenes fogalmát: vegyünk fel a négyzetrácson egy vízszintes egyenest, s tekintsük csak azokat a mezőit, melyekbe a fenti megbetűzéskor a V jelet írtuk. Ezek a mezők az egyenesen általában nem lesznek szomszédosak, de ennek ellenére ezekre is természetes módon definiálhatjuk a szomszédosság fogalmát úgy, hogy ez mező szomszédai azok, amelyek az egyenesen valamelyik irányban hozzá a legközelebb fekszenek. Összegezve: V egyenesnek nevezzük egy vízszintes egyenes V-vel megjelölt mezőit a most megadott lineáris elrendezéssel együtt. Teljesen analóg módon definiáljuk az F, FÁ, MÁ egyenes fogalmát. A 2.2.3 állítás szerint így a négyzetrácsot felbonthatjuk páronként diszjunkt V, F, FÁ, MÁ egyenesek összegére.

Ezek után nézzük második döntetlen stratégiáját $n \geq 12$ esetén:

Második minden X egyenesen (X=V vagy F vagy FÁ vagy MÁ) szimultán módon a 2.2.2 állításbeli nyerő stratégiát játsza. Ezzel a stratégiával el tudja érni, hogy minden X egyenesen bármely 3 szomszédos négyzet egyike az övé legyen (l. 2.2.2 állítás).

Viszont egy X irányú egyenes (X=V vagy F vagy FÁ vagy MÁ) négy szomszédos négyzetéből legalább az egyik a megfelelő X egyeneshez tartozik (l. 2.2.3 állítás). Így 12 szomszédos mezőbe legalább 3 X egyenesen szomszédos mező esik, így ezek egyikét a fenti stratégia értelmében második kivette. Tehát ez döntetlen stratégia. □

Általánosítsuk tovább az amőbát. Nevezzük $(k, l) - n$-amőbának azt a változatot, ahol kezdő egyszerre k db, második pedig egyszerre l db mezőt foglal el a négyzetrácson (tehát az $(1, 1) - n$-amőba ugyanaz, mint az n-amőba)

Állítás 2.2.4 *A 2.2.2-beli játékot általánosítsuk! Minden lépésben Kezdő több számot foglalhat el, de legfeljebb k-t, Másodiknak pedig mindig annyi számot kell választania, amennyit Kezdő előzőleg kivett. Kezdő pontosan akkor nyer, ha számai között van n darab egymás utáni. Ha ez soha sem sikerül, akkor Második nyer. Ebben a játékban $n = k + 2$ esetén Másodiknak van nyerő stratégiája.*

Bizonyítás: Megadjuk Második nyerő stratégiáját. Ha Kezdő utoljára az $l_1, l_2, \ldots, l_p$ $(p \leq k)$ számokat vette ki, akkor Második a $t_1, t_2, \ldots, t_p$ számokat veszi ki, ahol a t_i-kre a következő szabályok teljesülnek:

1. ha $l_i - 1$ még nincs elfoglalva, akkor t_i legyen $l_i - 1$;
2. ha $l_i - 1$ már el van foglalva, de $l_i + 1$ még nincsen, úgy t_i legyen $l_i + 1$;
3. ha $l_i - 1$ és $l_i + 1$ egyaránt foglaltak, akkor t_i tetszőleges lehet.

Indirekt bizonyíthatjuk, hogy ez a stratégia jó.

Állítás 2.2.5 *Ha $n \geq 4k+8$, akkor a $(k, k)-n$-amőbában másodiknak van döntetlen stratégiája.*

Bizonyítás: [1] Az 2.2.1 bizonyításában látott módon bontsuk fel a négyzetrácsot diszjunkt V, F, F, M egyenesek összegére. Második döntetlen stratégiája a következő: Második játsza mindegyik X ($X = V$ vagy F vagy F vagy M) egyenesen külön-külön, szimultán módon a 2.2.4-beli nyerő stratégiát. Ezzel Második el tudja érni, hogy bármelyik X egyenesen fekvő bármely $k + 2$ szomszédos négyzet egyike az övé legyen. Viszont a 2.2.3 szerint egy X irányú egyenes négy szomszédos négyzetéből legalább az egyik a megfelelő X egyeneshez tartozik, így $4(k+2) = 4k+8$ szomszédos mezőbe legalább $k+2$ X egyenesen szomszédos mező esik, így ezek egyikét a stratégia szerint Második kivette. Ebből következik, hogy $n \geq 4k+8$ esetén ez a stratégia Másodiknak döntetlent biztosít. □

Állítás 2.2.6 *$k > l$ esetén a $(k, l) - n$-amőbában kezdő minden n-re el tud foglalni n szomszédos mezőt.*

Bizonyítás: [1] Vegyünk fel egymástól függetlenül k^{n-1} darab n hosszúságú vízszintes szakaszt. Az első k^{n-2} lépés során Második legfeljebb $l \cdot k^{n-2}$ szakaszba tud belenyúlni, viszont Kezdő az első k^{n-2} lépése során bele tud nyúlni minden, Második által érintetlenül hagyott szakaszba (ezalatt $k \cdot k^{n-2} = k^{n-1}$ mezőt foglalhat el). Ezért lesz legalább $(k-l)k^{n-2} \geq k^{n-2}$ olyan szakasz, melyek mindegyikéből Kezdő már legalább egyet elfoglalt, de Második még nem tudott belenyúlni. Ebből a k^{n-2} szakaszból a következő k^{n-3} lépés után marad legalább k^{n-3} olyan, melyek mindegyikéből Kezdő már legalább kettőt lefoglalt, de Második továbbra sem nyúlhatott bele. Végül marad $k^0 = 1$ darab olyan szakasz, melyből Kezdő már legalább $(n-1)$-et lefoglalt, de Második még egyet sem. Viszont most megint Kezdő lép, s lefoglalhatja ennek a szakasznak esetleges utolsó szabad négyzetét, amivel a bizonyítás kész. □

A 2.2.6 Állítás azért nem bizonyítja, hogy Kezdő nyer, mert közben Második elfoglalhat nyerő n-est. Abban az esetben, ha $k > 2l$, Kezdő l lépéssel védekezhet, Második legfeljebb l db "kitüntetett" szakaszba tud belenyúlni (ez ugyanazzal az l lépéssel megtörtén(het)ik), így minden lépéssel $(k-l)$ új "kitüntetett" szakaszba tud Kezdő belépni. Ezt úgy értjük, hogy ha Második elrontott néhány kitüntetett szakaszt, akkor azokat Kezdő pótolhatja, vagyis az i. lépéspár után legalább $(k-2l)i$ olyan "kitüntetett" szakasz lesz, amelybe csak Kezdő tett jelet. Azt kaptuk tehát, hogy $k > 2l$ esetén tetszőleges n-re Kezdőnek nyerő stratégiája van.

Legyen D a defenzív stratégiát folytató játékos (ld. 2.2.2 Állítás), T a másik; „d”, illetve „t” jeleket pakoljanak. Tehát miután T tett, D sorra veszi az újonnan tett t-ket, és a felosztásnak megfelelő egy dimenziós részjátékban „alá” tesz, ha tud; ha az foglalt, fölé; ha az is foglalt, akkor bárhová. Ez utóbbi szituációra mondjuk azt, hogy a lerakott jel „körbe van zárva” az alatta, illetve fölötte levő elemek által.

Megjegyzés 2.2.1 *egy legalább 2 hosszú, egybefüggő (valamely 1 dimenziós részjátékban értve) t-sorozat alján és tetején is van d.*

Bizonyítás: A sorozat két szélső elemének elhelyezése után a D stratégia szerint így lesz.□

Lemma 2.2.1 *Tegyük fel, hogy egy egy dimenziós részjátékban (tfh függőleges) egy nem t-telített C oszlopban van t nem legalul. Ekkor a játék során kerül d a C oszlopba.*

Bizonyítás: Vegyük azt a pillanatot, amikor T lépése után a fenti szituáció előállt. Feltehető, hogy jelenleg nincs d C-ben. Vegyük C-ben a legfölső t-t (ami nem C legalján van) és az az alatti egybefüggő, t-kkel kitöltött O oszlopot. Ha O-nak nem C legalsó eleme az alja, akkor O legalsó eleme alá kerülő d C-ben lesz; ha viszont igen, akkor O legalább kettő hosszú, továbbá O teteje nem lehet C teteje (mert akkor C tele lenne t-kkel, de nincs), így az O legfölső eleme fölé kerülő d lesz C-ben.□

Következmény 2.2.1 *Ha egy C oszlop tele van t-vel, akkor C háromféle állapotban lehetett a játék során: (i) üres; (ii) egyetlen t van a legalján; (iii) telítve van t-kkel.*

Bizonyítás: A fentiektől különböző esetben C nem lenne telített, de lenne benne t nem legalul, így a 2.2.1 Lemma miatt kerülne bele d.□

Ebből azonnal következik, hogy D ténykedése során nem keletkezhet semelyik egy dimenziós részjátékban $k+2$ hosszú egybefüggő vonala T-nek (ahol T egyszerre k jelet tesz le). Ugyanis ha keletkezne, a vonal telítődését megelőzően abban legalább két t-nek lennie kellett, ami a 2.2.1 Következmény miatt nem lehetséges állapot.

Most vegyük azt a játékot, amikor az első játékos (A) k, a második (B) l jelet tesz és $k > l$. Legyen A stratégiája az, hogy az előre kiválasztott, rengeteg, egymástól távoli n (elfoglalandó mennyiség) hosszú oszlopokat foglalja el sorra; ha B beletesz egy kiválasztott oszlopba, minden oszlopra az első beletett jelet színezze pirosra és ne törődjön vele; a nem piros jelek ellen folytasson defenzív stratégiát; illetve, ha egy piros jel egy egydimenziós játékban egy b körbezárásában részt vesz, akkor A a körbezárt elemnél tetszőlegesen felhasználható jelét használja a piros jel elleni védekezésre a defenzív stratégia szerint (mintha az most került volna a pályára). A stratégiát követve A-nak minden lépésben legalább $k - l$ jele lesz a kijelölt n-esek telítésére.

Megjegyzés 2.2.2 *egy legalább 3 hosszú, egybefüggő (valamely 1 dimenziós részjátékban értve) b-sorozat mindkét szélére kerül a az új stratégia szerint is.*

Bizonyítás: Ha a sorozat valamely széle nem piros, világos a defenzív lépésből, hogy a kerül mellé. Ha mondjuk az alsó vége piros, akkor fölötte legalább két b van, melyeket egyszerre kellett B-nek letennie (ha az egyik hiányozna, a helyére a kerülne). Ekkor a közvetlenül piros feletti elem közbezárt, tehát a piros alá a kerül. $\square$

Állítás 2.2.7 *A-nak fenti stratégiája mellett B nem tud létrehozni semelyik egydimenziós játékban egybefüggő $l + 4$-es vonalat.*

Bizonyítás: Mivel a nem piros jelek ellen végig a defenzív stratégiát folytattuk, nem piros b-kből nem keletkezhet $l + 2$-es oszlop (lásd fent). Tehát egy b-telített $l + 4$-es C oszlopban kell legyen pontosan egy piros jel valahol belül. (Több nem lehet, mert a piros jelek egymástól messze vannak, miként a kijelölt n-esek is.) A piros jel egy $h_1 \geq 1$ magas C_1 fölső és egy $h_2 \geq 1$ magas C_2 alsó részre vágja C-t ($h_1 + h_2 = l + 3$). Sőt egyik h_i sem lehet egy, különben a másik egy $l + 2$-es b-telített oszlop lenne. A játék során C_1 és C_2 is telítődnek, tehát a 2.2.1 Következmény szerint három állapotuk lehetett a C telítése előtti pillanatban: üres, tele, csak legalul. A telítés előtti pillanatban legalább 4 darab b van már C-ben, és benne kell legyen a piros jel is (különben pl C_2-ben legalább két b lenne, így b-telített lenne, és emiatt a piros b helyére a kerülne).

Mivel legalább négy b van C-ben, ha C_1 üres, akkor C_2 telített és $h_2 \geq 3$. Ekkor viszont C_2 és a piros egy legalább 4 hosszú b-telített sorozat lenne, aminek a tetejére kerülne a (2.2.2), ami C_1-be esne. Hasonlóképpen C_2 sem lehet üres.

C_1-ben nem lehet csak legalul egy b, mert annak elhelyezése után fölé kerülne egy a az A játékos defenzív lépése szerint, tehát C_1 telített. Emiatt C_2 nem lehet telített, tehát csak legalul van benne egy b, így a piros alatti mező üres. Ekkor viszont C_1 és a piros egy legalább 3 hosszú b-sorozat ($h_1 \geq 2$), tehát alá kerülne egy a. $\square$

Ezek szerint B nem tud létrehozni a rendes (nem egy dimenziós, „széthúzott”) játékban $4(l+3)+3 = 4l+15$-nél hosszabb sorozatot (különben volna benne legalább $l+4$ hosszú egy dimenziós, „széthúzott” sorozat). Tehát $k > l$, $n \geq 4(l+4)$ esetén az A játékosnak van nyerő stratégiája.

Fogalmazzuk meg az amőba játék legáltalánosabb formáját, minden geometriai vonás nélkül. Legyen adva X alaphalmaz ("játéktér") és X n-elemű részhalmazainak rendszere ("nyerő konfigurációk"), amit $\mathcal{F}_n$ jelöljön. Nevezzük $\mathcal{F}_n$-amőbának azt a kétszemélyes játékot, ahol a két játékos felváltva foglal el egy-egy X-beli pontot, és az nyer, akinek először sikerül teljesen lefednie egy $\mathcal{F}_n$-beli halmazt.

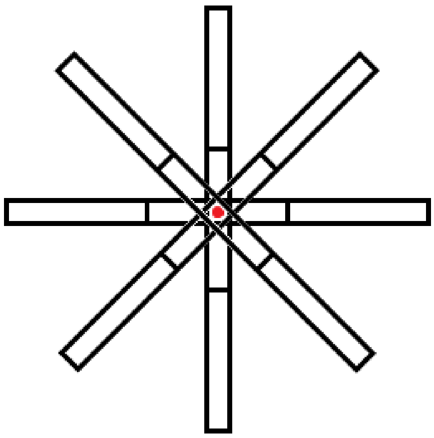
Jelölje H halmaz elemeinek számát $|H|$, és $d(\mathcal{F}_n)$ jelentse $\mathcal{F}_n$ maximális fokszámát, azaz X minden pontja legfeljebb $d(\mathcal{F}_n)$ darab $\mathcal{F}_n$-beli halmaz tartalmaz. A továbbiakban az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $\mathcal{F}_n$ véges.

Állítás 2.2.8 *Ha $d(\mathcal{F}_n) \leq \frac{n}{2}$, akkor az $\mathcal{F}_n$-amőbában Másodiknak van döntetlen stratégiája.*

Jegyezzük meg, hogy a 2.2.8. Állításból is következtethetünk az n-amőba esetére. Ehhez legyen $\mathcal{F}_n$ azon nyerő konfigurációk halmaza, amelyek minden irányban egyszeresen fedik a mezőket (2.2. Ábra). Ekkor $d(\mathcal{F}_n) = 4$, mert minden mezőt egy-egy V, F, FÁ, MÁ irányú konfiguráció fed, így 2.2.8 miatt $n = 8$-ra Másodiknak döntetlen stratégiája van. Ez az eredeti játékra azt jelenti, hogy 15 mezőt már nem foglalhat el Kezdő (ehhez egy $\mathcal{F}_n$-belit teljesen el kellene foglalni).

Ennek a gondolatmenetnek az az előnye, hogy tetszőleges dimenzióra általánosítható. k dimenzióban minden mező foka 2^k lesz, így $n = 2^{k+2} - 1$ esetén kapjuk, hogy Másodiknak van döntetlen stratégiája.

Állítás 2.2.9 (Erdős-Selfridge) *Ha $|\mathcal{F}_n| < 2^{n-1}$, akkor az $\mathcal{F}_n$ amőbában Másodiknak döntetlen stratégiája van. Másrészt minden n-re létezik olyan $\mathcal{F}_n^*$ n-esekből álló 2^{n-1}-elemű halmazrendszer, melyre az $\mathcal{F}_n^*$-amőbában Kezdőnek van nyerő stratégiája.*



2.2. ábra. Nyerő konfigurációk

2.3. Mikor nyer a kezdő játékos?

Definíció 2.3.1 *$\mathcal{F}$ kromatikus száma: a legkisebb olyan r egész, amire X elemei kiszínezhetőek r színnel úgy, hogy egyik $A \in \mathcal{F}$ sem egyszínű.*

Nézzünk egy elég általános elégséges feltételt a kezdő játékos nyerésére. Ha $\mathcal{F}$ kromatikus száma ≥ 3, akkor a döntetlen lehetetlen, így stratégialopás miatt a kezdő játékosnak nyerő stratégiája van.

Tétel 2.3.1 *Legyen X véges és az $\mathcal{F}$ (nyerő halmazok családja) kromatikus száma legalább 3. Ekkor a kezdő játékosnak nyerő stratégiája van az általánosított tic-tac-toe játékban $(X, \mathcal{F})$-en.*

Megjegyezzük, hogy nehéz ellenőrizni az $(X, \mathcal{F})$ kromatikus számára előírt feltételt, hisz X mind a $2^{|X|}$ 2-színezését ellenőriznünk kell. De a nyerő stratégia megtalálása még nehezebb, több, mint 2^{2^N} stratégiát kell elemeznünk.

2.4. Ramsey tételkör

A Ramsey tételkör olyan $\mathcal{F}$-ekkel foglalkozik, melyek kromatikus száma ≥ 3.

- Ramsey játék

  Ha S egy halmaz jelölje $[S]^k$ S pontosan $k \geq 2$ elemű részhalmazait. Azonosítsuk az n természetes számot az őt megelőzők halmazával, így $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Tehát $[n]^2$ tekinthető n csúcsú teljes gráfnak, azaz K_n-nek. Legyen $2 \leq n < N$. A játék táblája $[N]^2 = K_N$, a két játékos felváltva foglal el éleket ebből a gráfból, az a játékos nyer, aki elfoglalja az n csúcsú teljes részgráf minden élét.

  Jelölés: $R(N, n) = R_2(N, n)$

- Van der Waerden játék

  Ezt a játékot az $X = \{0, 1, \ldots, N-1\}$ táblán játszák és a nyerő halmazok X n tagú számtani sorozatai.

  Jelölés: $W(N, n)$

- Hales-Jewett játék

  A tic-tac-toe többdimenziós általánosítása. Két játékos felváltva teszi a jeleit egy d-dimenziós $n \times n \times \ldots \times n = n^d$ kocka mezőibe. Az nyer, akinek n jele van egy sorban.

  $$X = \{a = (a_1, a_2, \ldots, a_d) : 0 \leq a_j < n, 1 \leq j \leq d\}$$

  $HJ(d, n)$ nyerő halmazai az X tábla következő n-elemű sorozatai

  $$(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(n)})$$

  Minden j-re a j-edik kordinátákból képzett $a_j^{(1)}, a_j^{(2)}, \ldots, a_j^{(n)}$ sorozat vagy szigorúan nő 0-tól (n-1)-ig, vagy szigorúan csökken $(n-1)$-től 0-ig vagy konstans.

  A jól ismert Ramsey, Van der Waerden és Hales-Jewett tételek azt állítják, hogy minden egész n-re van egy véges küszöbszám $r_k(n)$, $w(n)$ és $h(n)$ annak megfelelően, hogy a nyerő halmazok családjának kromatikus száma legalább 3 a Ramsey, Van der Waerden és Hales-Jewett játékok esetén ha $N = r_k(n)$, $N = w(n)$ és $d = h(n)$. Így a Tétel 2.3.1 szerint a kezdő játékosnak nyerő stratégiája van ezekben a játékokban. Sajnos ez a tétel elég gyenge, mivel az eddig ismert küszöbszámok hatalmasak. A Ramsey tétel esetén az alsó és felső határ közelebb van egymáshoz:

$$2^{n/2} < r_2(n) < 4^n$$

$$2^{n^2/6} < r_3(n) < 2^{2^{4n}}$$

tetszőleges $k \geq 3$ esetén:

$$exp_{k-2}(c_k \cdot n) < r_k(n) < exp_{k-1}(c'_k \cdot n),$$

ahol c_k és c'_k csak k-tól függ.

2.5. Párosítási stratégiák

A legjobb módszer a győzelem vagy döntetlen garantálására, ha a táblát független párokra tudjuk osztani. Így ha az egyik játékos egy pár egyik tagját elfoglalja, a másik el tudja foglalni a másikat. A hexszel ellentétben, ahol nem ismerünk explicit nyerő stratégiát, a bridge-it esetén több ilyen is ismert. Az elsőt Oliver Gross találta, ami meglepően egyszerű párosítási stratégia.

Könnyen látható, hogy az egyszerű tic-tac-toe játékban, azaz $HJ(2,3)$-ban a második játékos döntetlent tud elérni. Ha a tábla 4×4-es és a cél 4 jelet tenni egy sorba (azaz $HJ(2,4)$), akkor a második játékos megint döntetlent tud elérni. Ugyanez áll fenn a $HJ(2,n), n = 5,6,7,8,\ldots$ típusú Hales-Jewett játékokra. Az $n = 5$ és 6 esetekre adunk egyszerű bizonyítást a következő párosítási stratégiával[2]: amikor a kezdő játékos elfoglal egy számozott mezőt, a második játékos elfoglalja a másik azonos számút.

$$n = 5: \quad \begin{bmatrix} 2 & 10 & 5 & 5 & 1 \\ 6 & 9 & 12 & 8 & 9 \\ 6 & 11 & * & 11 & 4 \\ 7 & 10 & 12 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

Ha a kezdő játékos a $*$-gal jelölt mezőt foglalja el, akkor a második tetszése szerint választhat, ha pedig az a mező, amit el kellene foglalnia már foglalt, akkor akárhogy léphet.

$$n = 6: \quad \begin{bmatrix} 1 & 13 & 2 & 13 & 3 & 12 \\ 6 & 14 & 5 & 14 & 4 & 12 \\ 7 & 8 & 15 & 9 & 10 & 15 \\ 16 & 3 & 11 & 1 & 16 & 2 \\ 17 & 4 & 11 & 6 & 17 & 5 \\ 7 & 8 & 18 & 9 & 10 & 18 \end{bmatrix}$$

Ez a számozás elegáns bizonyítást ad arra, hogy a megszorítás nélküli 9-amőba játék (a tábla egy végtelen négyzetrács, a cél 9 jelet tenni egy sorba merőlegesen vagy átlósan) döntetlen. Fedjük le a végtelen táblát az előbbi 6×6-os mátrix másolataival. A második játékos döntetlent tud elérni, ha minden lépésben a legközelebbi azonos számú mezőt választja, mint a korábbi játékban. Könnyen belátható, hogy a kezdő játékos 8-nál hosszabb vonalat így nem tud elérni.

Mit mondhatunk a megszorítás nélküli n-in-a-row azaz n-amőba $3 \leq n \leq 8$ játékról?

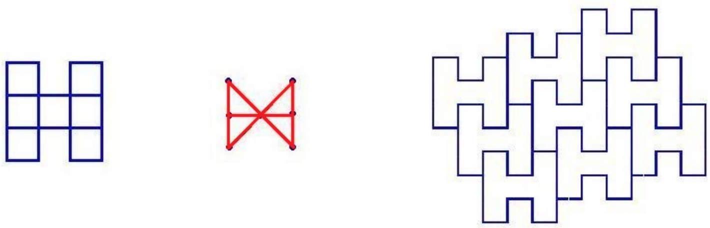
- $n = 3, 4$ esetek majdnem triviálisak: a kezdő játékosnak egyszerű nyerő stratégiája van.
- $n = 5$ esetén azt sejtjük, hogy a kezdő játékosnak nyerő stratégiája van. A stratégia lopás segítségével látjuk, hogy legalább döntetlen stratégiája van, de expliciten nem ismerjük.
- $n = 6$ esetén a sejtés szerint a második játékosnak döntetlen stratégiája van.

- $n = 7$ esetén a sejtés szerint második játékosnak döntetlen startégiája van, de a sejtés egyszerűbb, mint $n = 6$ esetén.

- $n = 8$ Tudjuk, hogy a második játékosnak explicit döntetlen stratégiája van. De ez nem párosítási stratégia. Az ötlet bemutatásához először adunk egy második bizonyítást a döntetlen stratégiára.

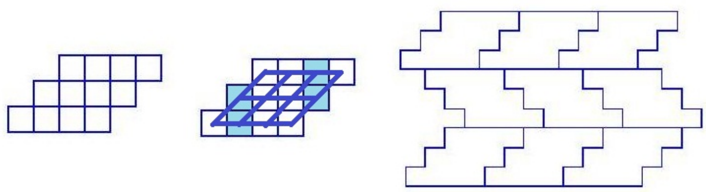
2.5.1. Felbontás független játékokra

Pollak és Shannon bizonyította először 1954-ben, hogy $n = 9$ esetén a második játékos döntetlent érhet el a következő stratégia segítségével. Fedjük le a síkot H-alakú heptominókkal (7 négyzet, l.2.3 ábra), a második játékos minden 7 négyzetből álló területen közönséges tic-tac-toe-t játszik, megakadályozza a 3 hosszú vonalakat átlósan, vízszintesen és a függőleges egyeneseken. Könnyen belátható, hogy egy ilyen heptominón a második játékosnak döntetlen stratégiája van. Ha a kezdő első lépésében nem a középső mezőt foglalja el, akkor második oda lép, különben pedig a heptominó valamelyik függőleges szárának középső mezőjére. A sík lefedhető ezen heptominókkal, láthatjuk, hogy ha 9 jel van vízszintesen, függőlegesen vagy átlósan egy sorban, akkor közülük 3 egy egyenesen van valamelyik heptominón. Tehát ha a második játékos megakadályozza kezdőt minden H-n a nyerő hármas összegyűjtésében, akkor ez döntetlen stratégiát biztosít számára $n = 9$ esetén.



2.3. ábra. A heptomino és Shannon-Pollak felbontási ötlete

Ugyanezt az ötletet használva a T.G.L. Zetters álnevet használó amszterdami csoport 1980-ban megmutatta, hogy a második játékos döntetlent tud elérni a 8-amőba játékban. A bizonyításban 12 cellából álló paralelogramma alakzatokat használtak, a nyerő halmazok a víszintes sorban lévő 4-4 pont, a négy átlós irányban elhelyezkedő 3-3 mező valamint az árnyékolt 2-2 mező. Így ebben a játékban 9 nyerő halmaz van. Ha 7 egyforma jel van vízszintesen egy sorban, akkor közülük 4 nyerő halmaz valamelyik lépcsős alakzatban; ha 8 egyforma jel átlósan van egy sorban, akkor közülük 3 nyerő halmaz egy lépcsős alakzatban, végül ha 7 egyforma jel van függőlegesen egy sorban, közülük 2 lesz nyerő. Ezért második játékosnak döntetlen stratégiája van $n = 8$ esetén, ha van döntetlen stratégiája a lépcsős alakzaton játszható játékban.



2.4. ábra. T.G.L Zetters felbontási ötlete

Hasonlóan bizonyítható a 7-amőba döntetlensége is.

Nézzünk egy elégséges feltételt a párosítási stratégia létezésére.

Tétel 2.5.1 *Vegyük az általánosított tic-tac-toe játékot a véges* $(X, \mathcal{F})$*-en. Tegyük fel, hogy minden* $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$*-re,*

$$\left| \bigcup_{A \in \mathcal{G}} A \right| \geq 2|\mathcal{G}|$$

Ekkor a második játékos legalább döntetlent ér el a párosítási stratégiával.

Bizonyítás: A König-Hall tétel segítségével találunk 2 elemű diszjunkt reprezentáns rendszert $h(A) \subset A (A \in \mathcal{F}), |h(A)| = 2, h(A) \bigcap h(B) = \emptyset$ ha A és B különböző elemei $\mathcal{F}$-nek. (A technikai csavar: minden $A \in \mathcal{F}$-et duplán veszünk, valójában erre alkalmazzuk a Kőnig-Hall tételt.) Így ha kezdő játékos elfoglal egy elemet a 2-elemű reprezentáns rendszerből, a második elfoglalja a másikat. □

Polinomiális idejű algoritmust ismerünk a 2-elemű diszjunkt reprezentáns rendszer megtalálására.

2.6. Építő-Romboló (Maker-Breaker) verzió

Már láttuk, hogy a második játékosnak nincs esélye nyerni az általánosított tic-tac-toe játékban okosan játszó kezdő játékos ellen. Így akár csak arra is koncentrálhat, hogy megakadályozza a másik nyerését. Így őt nevezhetjük Rombolónak, a másikat pedig Építőnek. Vehetünk olyan Építő-Romboló játékot is, ahol Romboló lép először.

$(X, \mathcal{F})$-en tudunk szimmetrikus tic-tac-toe-t és antiszimmetrikus Építő-Romboló verziót is játszani. Itt Építő célja $A \in \mathcal{F}$ nyerő halmaz minden elemét elfoglalni, Romboló célja pedig ebben Építőt megakadályozni. Az nyer, aki eléri célját, tehát döntetlen nem lehetséges.

Ha Romboló, mint második játékos nyer az Építő-Romboló verzióban $(X, \mathcal{F})$-en, akkor ugyanez a stratégia második játékosként legalább döntetlent biztosít számára a tic-tac-toe verzióban $(X, \mathcal{F})$-en.

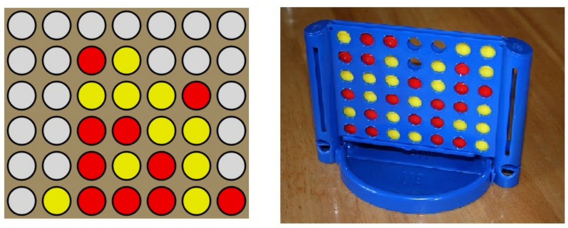
Következmény 2.6.1 *Legyen X véges, $\mathcal{F}$ (nyerő halmazok családja) kromatikus száma legalább 3. Ekkor Építő, mint kezdő játékosnak nyerő stratégiája van az Építő-Romboló verzióban $(X, \mathcal{F})$-en.*

Ennek megfordítása nem igaz. Lehetséges, hogy Építő, mint kezdő játékos nyer az Építő-Romboló verzióban miközben Romboló, mint második játékos döntetlent ér el a tic-tac-toe verzióban. Ez történik a 3×3-as minimalomban: az eredeti játék döntetlen, de az Építő-Romboló verzió győzelmet hoz Építőnek kezdő játékosként.

3. fejezet

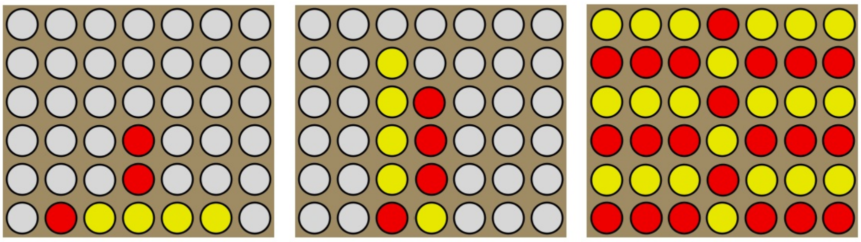
Connect four

Az eddig leírt játékok táblája vízszintes volt, most legyen függőleges. Két játékos felváltva dobálja korongjait a 7×6-os (7 oszlop, 6 sor) rácsba felülről. Így a játék alapjaiban változik meg, mert minden oszlopban csak a legalsó szabad mezőt tudjuk elfoglalni. Ha a játékos egy korongot tesz egy oszlopba az leesik a legalsó szabad mezőbe. Ha 6 korong van egy oszlopban azt mondhatjuk, hogy megtelt, nem tudunk több korongot ide tenni.



3.1. ábra. A Connect four játék táblája

Arra nincs szabály, hogy melyik játékos kezd, ez megállapodás kérdése. Mostantól úgy vesszük, hogy a kezdő játékos korongjai sárgák. A játék célja 4 azonos színű korong összegyűjtése vízszintesen, függőlegesen vagy átlósan. Ha mind a 42 mező megtelt és egyik játékos sem érte el célját, akkor döntetlenről beszélünk.



3.2. ábra. Példa sárga két nyerő állására és egy döntetlenre

Ahhoz, hogy állásokról tudjunk beszélni célszerű minden mezőt elnevezni. Vegyük át a sakktábla jelöléseit: az oszlopok a-tól g-ig, a sorok 1-től 6-ig számozottak. Így a lépéspárok (Sárga és Piros lépése egy körben) egy listán nyomon követhetőek, például a 3.2 első ábrájához tartozó lista:

1. $d1, d2$
2. $c1, d3$
3. $e1, b1$
4. $f1$, Sárga győz

Ezzel az elnevezéssel a nyerő halmazok is könnyen megadhatók. A példán ilyen $c1, d1, e1$ és $f1$. Mivel a mezőknek egy egyenesen kell lenniük, így elég a két végpontot megadni, azaz $c1 - f1$ meghatározza a nyerő konfigurációt.

3.1. A játék bonyolultsága

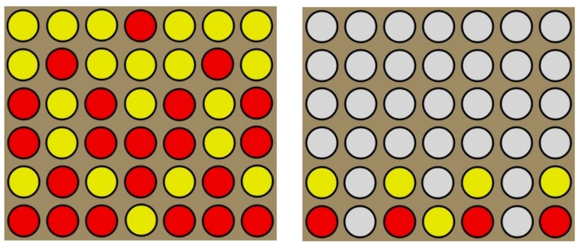
Szeretnénk megadni a lehetséges lépések számát. Ehhez nevezzük **legális**nak azokat az állásokat, melyeket a játék során megkaphatunk, ha a szabályok szerint játszunk, **illegális**nak, amit így nem kapunk meg.

Minden mezőnek három állapota lehet: piros, sárga vagy üres. Így könnyen látható, hogy legfeljebb $3^{42} (\geq 10^{20})$ állás lehet. Ez egy durva becslés, ennél sokkal jobbat adhatunk. Ehhez nézzünk pár egyszerű észrevételt!

- Ha az elfoglalt mezők száma páratlan, akkor sárga korongból eggyel több van, mint pirosból. Ha ez páros, akkor a sárga és piros korongok száma egyenlő.
- Ha egy oszlopban van egy üres mező, akkor minden fölötte lévő mező is üres.
- Nyerő állás esetén az utolsó lépés befejezte a játékot, így a négy korong közül legalább egy a saját oszlopának legfelső nem üres mezőjében van.
- Ha az előző állítás nem teljesül, vagy mindkét játékos összegyűjtött nyerő halmazt: az állás illegális.
- Ha egy játékosnak egynél több nyerő halmaza van, akkor ez csak úgy lehet legális, ha az utolsó korongot mindkét halmaz tartalmazza.

Az előbbi számításnál nem zártuk ki az illegális állásokat. Victor Allis egy program segítségével felső becslést adott a legális állások számára, ez $7.1 \cdot 10^{13}$.

Ez a felső határ hasznos a memóriaigény számításához, ha adatbázist szeretnénk használni a lehetséges lépések tárolásához. Szeretnénk alsó becsléssel megmutatni, hogy egy ilyen konstrukció memóriaigénye túl nagy. Ehhez tudnunk kell, hogy minden állás, amit számolunk legális. Ennek eldöntése szintén nem egyszerű feladat. Ezt egy példán szemléltetjük.



3.3. ábra. a) Példa illegális állásra b) egy köztes lépés

Első ránézésre ez egy döntetlen állás, de ha jobban megvizsgáljuk normális játék esetén nem elérhető.

- Sárga első lépése a $d1$ volt
- Ha Piros első lépése $b1, d2$ vagy $f1$ akkor Sárgának nem marad lehetséges lépés. Így Piros első lépése $a1, c1, e1$ vagy $g1$. Tfh $a1$-et választotta.

- Ekkor Sárga csak $a2$-t választhatta.
- Így Piros továbbra sem léphet $b1, d2, f1$-re és $a3$-ra sem. Tehát $c1, e1, g1$ közül választ. Bármelyik esetén és Sárga válaszával 3.3 b) ábrát kapjuk.
- Most Piros lép, és a következő lépésre Sárga nem tud válaszolni, tehát az állás illegális.

Már látjuk, hogy mennyire nehéz egy állásnál megvizsgálni, hogy legális vagy illegális. Így az adatbázis rengeteg illegális pozíciót tartalmazna. Az előzőekben adott felső becslés ezek alapján már jó becslésnek tűnik. Mivel ez a szám olyan nagy, 1988-ban az adatbázisos megvalósítás lehetetlennek tűnt. 7×6-os tábla esetén az összes korong helyének lépésenkénti tárolásához legalább 4 Terabyte szükséges. Ma már ez nem probléma, de van hatékonyabb módszer is.

3.2. Ismeret alapú módszer

Brute-force módszer helyett adjunk egy ismeret alapú módszert. Lehetnek stratégiai szabályok, amik az egyik játékos győzelmét vagy döntetlent garantálnak. Ha ezen szabályok helyességét bizonyítani tudjuk, akkor nem szükséges nagy számú pozíciót vizsgálni.

Nézzünk példákat más méretű tábla esetén.

1. Legyen n oszlop, mindegyik pontosan 2 magas. Ilyen esetben csak vízszintesen tudunk 4 korongot összegyűjteni.

   A következő stratégia legalább döntetlent biztosít Piros számára:

   - Ha n páros: rendezzük az oszlopokat párokba a következőképpen: 1&2, $3\&4, \dots (n-1)\&n$. Minden alkalommal Sárga választ egy oszlopot, utána Piros kiválasztja az oszlop párját.
   - Ha n páratlan: hasonlóan rendezzük őket párokba úgy, hogy az n-edik oszlopnak nem jut pár. A stratégia ugyanaz, kivéve ha Sárga az n-edik oszlopba teszi korongját Piros is oda lép.

Nézzük miért működik ez az egyszerű stratégia. Tegyük fel, hogy Piros így játszott, és Sárga megnyerte a játékot. Ez azt jelenti, hogy összegyűjtött 4 korongot vízszintesen. Feltehetjük, hogy ez az első sorban történt (a másik eset hasonló). Könnyen belátható, hogy a nyerő halmaz korongjaiból legalább kettőnek olyan oszlopban kell lennie, amik a korábbi párosítás szerint egy párban vannnak. Mivel a stratégia szerint, ha Sárga elfoglal egy mezőt, Piros rögtön elfoglalja a párját, így az első sorban nem nyerhet. Hasonlóan belátható, hogy a második sorban sem nyerhetett.

2. Hasonló eredményt kaphatunk sokkal izgalmasabb tábla esetén. Legfeljebb 6 oszlop és $2n$ sor esetén a következő stratégia legalább döntetlent biztosít Pirosnak. Egyszerűség kedvéért a szabályokat pontosan 6 oszlop esetére írjuk le, kevesebbre ugyanúgy működik.

   (a) Az 1, 2, 5 és 6-os oszlopokhoz az alábbi szabályt használjuk:

   Piros akkor és csak akkor válaszol ebben az oszlopban, ha Sárga épp ebben az oszlopban játszott.

   (b) A 3-as és 4-es oszlopokhoz a szabály:

   Ha Sárga először játszik ezekben az oszopokban: Piros a másik oszlopban válaszol. Egyébként, ha Piros még tud abba az oszlopba tenni, ahol Sárga játszott, akkor ezt teszi, ha nem, akkor a másik oszlopban játszik.

Először ellenőriznünk kell, hogy Piros mindig játszhat ezen szabályok szerint. Az (a) szabály szerint Piros kapja a páros számú sorok mezőit, Sárga a páratlanokat. Mivel páros számú sor van, így Piros tud ugyanabban az oszlopban válaszolni. A (b) szabály szerint az első lépésben mindkét oszlop alsó páratlan mezőjét elfoglalják. Amikor Sárga lép páros mezőre lép, Piros a fölötte lévő páratlan mezőt foglalja el (ha létezik). Ha nincs fölötte mező, akkor a másik oszlop szabad mezőjét választja, ami páros számú és biztos létezik, mivel az utolsó foglalt mező páratlan volt.

Mit ad ez a stratégia a Piros játékosnak? Minden páros mezőt megkap az (a) oszlopokban. Továbbá (b) oszlopokban az alsó két mező egyike az övé. És ami a legfontosabb, legalább 1 középső mezőt kap minden páratlan sorban. Ez a (b) szabályból közvetlenül következik.

Így függőlegesen biztos nem gyűjt össze Sárga 4 korongot. Ha vízszintesen szeretné a 4 korongot, akkor páratlan sorban nem fog sikerülni, mert Piros legalább 1 középső oszlopot elfoglalt (a nyeréshez mindkét középső mező kell, de ez 6-nál több oszlopra nem igaz). Páros sorokban szintén nem lehet. Átlós esetben felváltva páros és páratlan mezőket kell elfoglalni. Ebből látjuk, hogy Sárgának nem lehet olyan átlós négyese, ami részben az 1-es és 2-es oszlopban van, mivel ebben az esetben az átló mindkét mezőjének páratlannak kellene lennie. Ugyanezért nem lehet részben az 5-ös és 6-os oszlopban sem. Így egyetlen eset marad a 2, 3, 4 és 5-ös oszlopban. Sárga a 2-es és 5-ös oszlopban csak páratlan mezőket kap, miközben szüksége lenne páros mezőre valamelyik oszlopban a nyeréshez. Tehát Sárga nem tud nyerni, így Pirosnak döntetlen stratégiája van. □

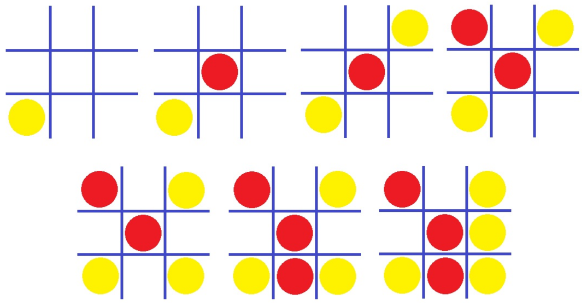
Láttunk olyan példákat ahol a második játékosnak tudtunk olyan stratégiai szabályokat adni, melyek használatával soha nem veszít. Ez is mutatja, hogy az ismeret alapú módszer legalább néhány esetben olyan eredményeket ad, amit a brute-force módszer segítségével nem vettünk volna észre.

3.3. A stratégia szabályok helyessége

Adjunk stratégiai szabályokat a korábban már vizsgált tic-tac-toe játékhoz. A szabályokat az alábbi sorrendben alkalmazzuk:

1. Ha van nyerő lépés (ami megtétele után nyerünk), akkor lépjük meg.
2. Ha az ellenfelünk egy lépéssel nyerni tudna, lépjük azt.
3. A középső mező elfoglalása fontosabb, mint a többi mező elfoglalása.
4. Sarokmezők elfoglalása fontosabb, mint a többi.

Nézzük mi történik, ha ezeket használjuk egy olyan ellenféllel szemben, aki nem ismeri a szabályainkat. Az ellenfél kezdi a játékot.



3.4. ábra. tic-tac-toe játék a szabályok szerint játszva

Ebből a példából jól látszik, hogy a négy stratégiai szabály nem mindig a legjobb elérhető eredményt (döntetlent) adja.

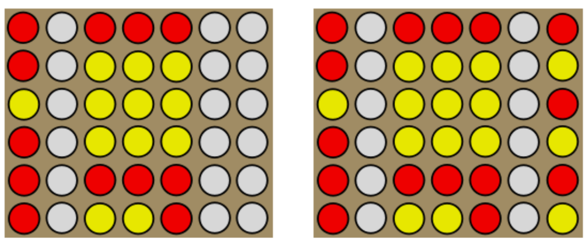
Fontos ezek után tisztázni, hogy mi a különbség e 4 szabály és az előzőekben látott szabályok között.

A 3.2 fejezetben miután megfogalmaztuk a szabályokat megmutattuk, hogy az ellenfél semmiképp nem tud nyerni, bizonyítottuk, hogy a szabályokat használó játékos döntetlent tud elérni. A tic-tac-toe-ra megfogalmazott szabályok is használhatónak tűntek, de itt nem adtunk semmilyen bizonyítást a játék kimenetelére így nem meglepő, hogy nem feltétlen nyerünk a szabályok használatával.

3.4. Stratégiai szabályok a Connect-four játékhoz

1. Használhatatlan fenyegetések:

   Victor Allis [5] egy példáján keresztül nézzük meg, hogy ez mit jelent.



3.5. ábra. Az állás 12, ill. 15 lépés után

Ehhez az álláshoz a következő lépéseken keresztül jutottunk (lépéspárokkal írjuk le):

1. $d1, d2$	5. $c1, c2$	9. $e3, a3$
2. $d3, e1$	6. $c3, a1$	10. $a4, a5$
3. $d4, e2$	7. $c4, a2$	11. $e4, a6$
4. $d5, d6$	8. $c5, c6$	12. $e5, e6$

Melyik játékos fog nyerni? Nézzük a játékosok lehetőségeit a nyerő négyes összegyűjtésére. Felsorolhatjuk azokat a halmazokat, amikből egy mező hiányzik a nyeréshez.

- Sárga lehetséges nyerő halmazai: $a4-d4$, $b2-e5$, $b3-e3$, $b4-e4$, $b5-e5$, $b6-e3$, $c5-f2$, $c3-f3$, $c4-f4$, $c5-f5$, $c3-f6$
- Piros lehetséges nyerő halmazai: $a2-d2$, $b2-e2$, $c2-f2$, $a6-d6$, $b6-e6$

Első lépésként vegyük észre, hogy $a2-d2$ és $b2-e2$ halmazok között nincs lényeges különbség, mivel mindkettőhöz a $b2$ mező szükséges.

További egyszerűsítésként ne a nyerő halmazokról beszéljünk, csak azokról a mezőkről, amiket a nyeréshez még el kell foglalni.

Sárga esetén ezek: $b2$, $b3$, $b4$, $b5$, $b6$, $f2$, $f3$, $f4$, $f5$, $f6$ valamelyike.

Piros esetén: $b2$, $b6$, $f2$, $f6$ valamelyike.

Sárgának sokkal több lehetősége van nyerő halmaz összegyűjtésére, de látni fogjuk, hogy ez nem sokat segít rajta, mivel nem fontos, hogy $b3$, $b4$, $b5$, $b6$, $f3$, $f4$, $f5$, $f6$ mezőkön nyerni tudna.

Tegyük fel, hogy a játék a következő lépésekkel folytatódna:

13. $g1, g2$
14. $g3, g4$
15. $g5, g6$

Olyan álláshoz érkeztünk, ahol Sárgának kell lépni, és csak a b vagy f oszlopot választhatja. Amint lépett Piros elfoglalja a második mezőt és ezzel nyer. Így a $b3-b6$ és $f3-f6$ mezőket nem használják. Tehát Sárgának hiába volt több lehetősége kezdetben, de minden befejezetlen halmaza használhatatlannak bizonyult, ahogy Piros halmazainak többsége is. Végül írjuk fel újra a kezdeti állás alapján azokat a mezőket, amikkel be lehet fejezni nyerő halmazt. Mindkét játékos esetén csak a $b2$ és $f2$ mezők lesznek a listánkon.

Definíció 3.4.1 *Fenyegetés az A játékosra nézve az a mező, amit ha B elfoglal B nyerő halmazhoz jut. Használhatatlan fenyegetésnek nevezzük az olyanokat, amiket valamilyen okból a játék alatt nem lehet elfoglalni.*

Már csak egy kérdés maradt. Melyik játékos fog arra kényszerülni, hogy $b1$ és $f1$ közül kelljen választania? A 15. lépés után egyértelmű, hogy Sárga lesz ez a játékos. Gondolhatnánk, hogy ez csak szerencse kérdése volt, de már 12 lépés után is meg tudjuk számolni az üres mezők számát, amiből látjuk, hogy Sárga fog következni.

Ha látunk egy állást, de a lépések sorrendjéről semmit sem tudunk, akkor is meg tudjuk állapítani, hogy melyik játékos következik. Elég az eddigi lépések számát ismerni, ha ez páros, akkor Sárga következik, ha páratlan, akkor pedig Piros.

2. Egy másik használhatatlan fenyegetés:

   Nézzünk egy olyan állást, ahol e kivételével minden oszlop fel van már töltve, de még nem értek el nyerő négyest. Piros akkor nyer, ha elfoglalja $e3$-at, Sárga akkor nyer ha elfoglalja $e4$-et. Tudjuk, hogy $e1$-re Sárgának kell lépni, Piros $e2$-t, Sárga $e3$-at, Piros $e4$-et foglalja el, így végül döntetlen lesz a játék.

   Általánosan azt mondhatjuk, ha egy játékosnak egy mezővel az ellenfél fenyegetése fölött van fenyegetése, az nem használható, mivel vagy az ellenfél nyer, vagy mindkét fenyegetés használhatatlanná válik.

3. Páros és páratlan fenyegetések

   Az előzőekből látjuk, hogy egy fenyegetés akkor lehet hasznos, ha a játék során valamilyen okból az ellenfélnek el kell foglalni az alatta lévő mezőt. Ez általában akkor történik, ha már minden más oszlop telítve van. Ebben az esetben megmutattuk, hogy Sárga a páratlan, Piros a páros mezőket foglalja el. Ha az utolsó üres oszlopban Sárgának csak páros, Pirosnak csak páratlan fenyegetései vannak, akkor egyik sem használható, a játék döntetlen lesz.

Tehát Sárgának a legjobbak a páratlan, Pirosnak a páros fenyegetések.

Ha mindkét játékosnak van ilyen jó fenyegetése ugyanabban az oszlopban, akkor csak az alacsonyabban lévő használható. Ha mindkettőjüknek van, de különböző oszlopban, akkor Sárga fenyegetése az erősebb. Ilyenkor Piros nem tesz Sárga oszlopába, mert akkor veszítene, ezért inkább a saját oszlopában játszik, amivel megfordul a paritás és a fenyegetése használhatatlanná válik. Miután ezt az oszlopot feltöltötték pár lépés alatt Sárga nyerni tud.

Tegyük fel, hogy mindkét játékosnak egy-egy fenyegetése van (a játék során nem alakul ki új) és ezek különböző oszlopokban vannak. Nézzük a lehetőségeket és azt, hogy melyiküké erősebb:

- Sárgának páratlan, Pirosnak páros fenyegetése van. Ahogy már láttuk, Sárga fog győzni.
- Sárgának és Pirosnak is páros fenyegetés. Mivel nincs olyan oszlop amibe csak páratlan számú jel tehető, a paritás így nem fordul meg, Piros hárítani tudja Sárga fenyegetését és nyerni tud.
- Sárgának páros, Pirosnak páratlan. Mindkét játékosnak olyan fenyegetése van, amit lényegében nem tud használni, a játék döntetlen lesz. Ehhez azonban Pirosnak fel kell adnia saját fenyegetését, mert ha nem tenné, Sárga nyerne.
- Sárgának és Pirosnak is páratlan. Ebben az esetben Sárgának kell feladni saját fenyegetését, hogy hárítsa Pirosét, így a játék döntetlen lesz.

4. Még bonyolultabb szabályokat fogalmazott meg Victor Allis [5], illetve arról is olvashatunk, hogy milyen módon lehet ezeket megtalálni. Az ezek használatával működő VICTOR program képes volt megmutatni, hogy Sárga nyer, stratégiát is ad a játékhoz.

4. fejezet

Zarankiewicz probléma

Nézzük **Kazimierz Zarankiewicz** (1902-1959) lengyel matematikus által megfogalmazott problémát a Véges projektív síkok című könyv [3] tárgyalása szerint.

Tekintsük az $n \times m$-es négyzetrácsot, azaz az

$$\{(i,j) : i = 1, \cdots, m, j = 1, \cdots n\}$$

alakú rácspontokat. Válasszunk ki ezek közül minél többet úgy, hogy a kiválasztott pontok között ne legyen négy olyan pont, amelyek a koordináta-tengelyekkel párhuzamos oldalú téglalap csúcsai!

Hány pontot választhatunk ki ilyen módon?

Zarankiewicz probléma halmazokkal: Válasszuk ki az $1, \cdots, n$ halmaz néhány részhalmazát, $A_1, \cdots, A_m$-et úgy, hogy bármely két különböző részhalmaz metszete legfeljebb egyelemű, azaz

$$|A_i \bigcap A_j| \leq 1, \text{ ha } i \neq j, (i,j = 1, \cdots, m).$$

Mekkora lehet $|A_1| + |A_2| + \cdots + |A_m|$ maximuma?

Zarankiewicz probléma páros gráfokkal: Hány éle lehet egy $n + n$ csúcsú páros gráfnak, ha nem tartalmaz 4 hosszú kört?

Zarankiewicz probléma mátrixszal: Egy $m \times n$-es mátrix minden eleme 0 vagy 1. Legfeljebb hány egyes lehet a mátrixban, ha két sor és két oszlop négy keresztezési mezejében soha nem állhat mindenütt egyes.

Tétel 4.0.1 (Reiman) *$n \times m$-es négyzetrács esetén a kiválasztható rácspontok számára adott felső becslés:*

$$E \leq \frac{1}{2}(m + \sqrt{m^2 + 4mn(n-1)})$$

.

Következmény 4.0.1 *$n \times n$-es esetben*

$$\frac{n}{2}(1 + \sqrt{4n-3})$$

a felső becslés.

Ezek után nézzünk az előzőekben látott amőbákhoz hasonló játékokat. Két játékos felváltva tesz jeleket egy n $\times$ m-es négyzetrácson. Nevezzük **tiltott négyeseknek** a koordinátatengelyekkel párhuzamos oldalú téglalapokat.

Ezeket a játékokat négyféle szabállyal játszhatjuk:

1. A két játékos jelei azonos színűek, a tiltott négyest elérő nyer.
2. A két játékos jelei különböző színűek, a tiltott négyest elérő nyer.
3. A két játékos jelei azonos színűek, a tiltott négyest elérő veszít.
4. A két játékos jelei különböző színűek, a tiltott négyest elérő veszít.

Az (1)-es esetet részletesen vizsgálták középiskolások az Országos Diákkutatói Program keretében [6]. Sikerült megadniuk a nyerő stratégiákat: ha m és n is páratlan, akkor Kezdőnek van nyerő stratégiája. Ha n vagy m bármelyike páros, akkor a Második játékosnak van nyerő stratégiája.

A (2)-es esetre szeretnénk nyerő stratégiákat adni.

Nevezzünk egy sort vagy oszlopot **szabad**nak, ha nincs még rajta jel, ellenkező esetben **foglalt**nak.

2×2-es esetben könnyen látható, hogy Kezdő játékos nyer, mivel csak 3 jelet lehet letenni tiltott négyes nélkül.

$n \times 2$-es esetekben $n + 1$ jelet lehet letenni, így ha n páros, akkor Kezdőnek, ha n páratlan akkor Másodiknak van nyerő stratégiája.

A 3×3-as eset még könyen átlátható, itt 5 jelet lehet letenni a tiltott négyes elérése előtt, így a kezdő játékos nyer. A stratégia: J1 kezdjen szabad sorban (tehát bárhol kezdhet). Továbbiakban ha J2 szabad sorba tett válasszon J1 is szabad sort, ha J2 foglalt sort választott tegyen J1 ugyanabba a sorba. Ezt mindig megteheti, mert a korábbi lépések után minden oszlopban 0, 1 vagy 3 jel van.

Ezt általánosabban is megfogalmazhatjuk. Az $n \times 3$-as esetekben ha n páratlan, akkor az előbb látott stratégiát alkalmazva J1 nyer. Ha n páros, akkor J2 nyer. Ha J1 üres sorba lépett akkor J2 is lépjen üres sorba (ezt megteheti, mert páros számú sor van, egy lépéspár 0-val vagy 2-vel csökkenti az üres sorok számát). Ha J1 foglalt sorba lépett, akkor lépjen J2 ugyanabba a sorba(a 3×3-as esetben láttuk, hogy ezt megteheti). J2 mindig tud válaszolni J1 lépésére, így ő nyer.

5. fejezet

Összefoglalás

Szakdolgozatomban a diszkrét matematikai játékokhoz tartozó alapfogalmak ismertetése után bemutattam az amőbához hasonló játékokat és általánosításaikat. Láttuk az n-amőba esetén, hogy az $n = 3, 4$ és $n > 6$ esetben ismerünk nyerő vagy döntetlen stratégiát, de a leggyakoribb ($n = 5$) verzióra csak számítógépes eredmények vannak, így ez a játék továbbra is érdekes, játszható maradt. Hasonló eredményt kaptunk a Connect Four játékra.

Ebben a témakörben igen fontosnak és érdekesnek találtam a párosítási stratégiákat. Ezek segítségével a játékot fel tudjuk bontani független kisebb játékokra, akkor elég ezekre stratégiát adnunk, ami jelentősen egyszerűbb feladat. Felbontások segítségével érdekes lenne a továbbiakban többdimenziós általánosításokat vizsgálni.

Végül a Zarankiewicz probléma bemutatása után próbáltam nyerő (vagy döntetlen) stratégiát találni. Ez egészen kis esetekre sikerült, érdemes lenne ezt nagyobb esetekre tovább vizsgálni.

6. fejezet

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Szőnyi Tamásnak, aki számtalan teendője mellett mindig szakított rám időt, és tanácsaival, meglátásaival segített a dolgozatírás során. Köszönet illeti továbbá Héger Tamást, aki hasznos ötletekkel segítette munkámat.

Irodalomjegyzék

[1] Beck József: Amőba-játékok, *A matematika tanítása* , (1981).

[2] Beck József: Achievement Games and the Probabilistic Method, *Combinatorics, Paul Erdős is Eighty (Volume 1), Keszthely*, 51-78, (1993).

[3] Bérczi Gergely, Gács András, Szőnyi Tamás: Véges projektív síkok, *Új matematikai mozaik*, TypoTex Kiadó, 53-76, (2002)

[4] Csákány Béla: Diszkrét matematikai játékok, *Polygon Kiadó(Szeged)*, (1998).

[5] Victor Allis: A Knowledge-based Approach of Connect-Four, *Masters Thesis Vrije Universiteit*, (1988).

[6] Fábián Kata, Hörömpöli Balázs, Sápi András: A ZARANKIEWICZ PROBLÉMÁRÓL, *ELTE TTK Országos Diákkutatói Program*