Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Konform leképezések alkalmazásai

BSc szakdolgozat

Szuromi Márta
Matematika BSc, Alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető: Tóth Árpád, egyetemi docens
Analízis Tanszék

Budapest, 2011

Tartalomjegyzék

1. fejezet

A Dirichlet probléma

1.1. A Dirichlet probléma

Definíció 1.1.1 ***A Laplace egyenlet:*** *Legyen $\phi(x, y)$ egy nyílt tartományon értelmezett valós függvény. Ekkor a*

$$\Delta\phi = 0$$

vagyis

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0,$$

az úgynevezett Laplace egyenlet.

Definíció 1.1.2 ***A Dirichlet probléma:*** *Legyen D tartomány az xy síkon, g a D határán értelmezett valós függvény. A feladat olyan D-n értelmezett $\phi(x, y)$ folytonos valós függvényt találni, ami D belsejében kielégíti a Laplace egyenletet és D határán g-vel egyenlő.*

Definíció 1.1.3 *Ha a $\phi(x, y)$ nyílt tartományon értelmezett valós függvény folytonos, léteznek az első és második parciális deriváltjai a D tartományon és itt kielégíti a Laplace egyenletet, akkor azt mondjuk, hogy $\phi(x, y)$ harmónikus D-n.*

Megjegyzés 1.1.1 *Ezt a fogalmat használva tehát a Dirichlet feladat olyan $\phi(x, y)$ D-n értelmezett valós függvényt találni, ami harmónikus D-n és D határán megegyezik g-vel.*

Definíció 1.1.4 *Egy komplex $f(z)$ függvény reguláris z_0-ban, ha $f(z)$ differenciálható z_0-ban és létezik olyan környezete z_0-nak, hogy ennek minden pontjában is differenciálható.*

Megjegyzés 1.1.2 *A komplex deriváltat egy z_0 pontban hasonlóan a valós analízishez a következőképpen definiáljuk:*

$$f^{'}(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

feltéve, hogy ez a határérték létezik.

Tétel 1.1.1 ***A Cauhcy-Riemann egyenletek:*** *Legyen $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ és $z = x + iy$. $f(z)$ legyen differenciálható a z pontban. Ekkor z-ben léteznek u és v első parciális deriváltjai és kielégítik a következő egyenleteket:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

és

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Bizonyítás: *f deriváltja a z pontban:*

$$f^{'}(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Vagyis

$$f^{'}(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) - iv(x, y)}{\Delta x + i\Delta y}.$$

f differenciálható z-ben, tehát ez a határérték létezik, bármilyen irányból tartok Δz-vel 0-hoz. Először az x-tengellyel párhuzamosan tartsunk Δz-vel 0-hoz, ekkor $\Delta y = 0$ és $\Delta z = \Delta x$,

$$f^{'}(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y) + i\left[v(x + \Delta x, y) - v(x, y)\right]}{\Delta x} =$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x}.$$

Mivel $f^{'}(z)$ létezik, ezért ezek a határértékek is léteznek és

$$\frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x},$$
$$\frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Ahonnan adódik hogy

$$f^{'}(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Hasonlóan, ha Δz-vel az y-tengellyel párhuzamosan tartunk 0-hoz kapjuk hogy

$$f^{'}(z) = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Tehát

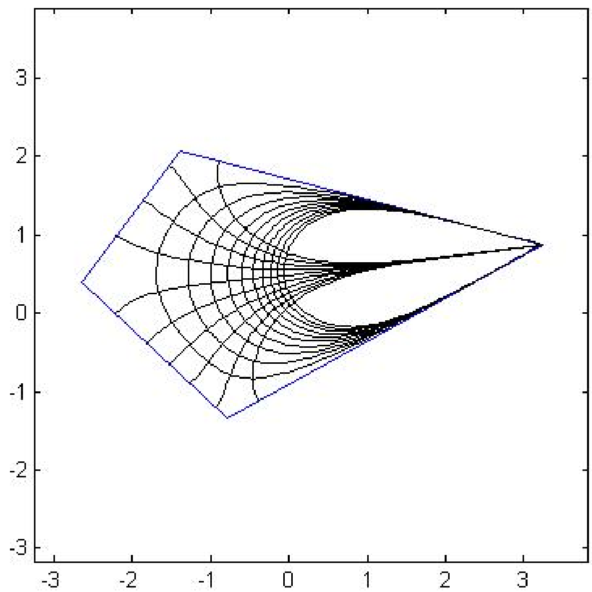
$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Ami akkor teljesül ha a valós és a képzetes részeik is egyenlőek, amiből már adódnak a Cauhcy-Riemann egyenletek.

Megjegyzés 1.1.3 *Tehát a Cauhcy-Riemann egyenletek szükséges feltételt adnak a komplex derivált létezésére. Ha teljesülnek a Cauhcy-Riemann egyenletek, $u(x, y)$, $v(x, y)$ folytonosak, léteznek és folytonosak az első parciális deriváltjaik, akkor ez elégséges is.*

Megjegyzés 1.1.4 *Ha $f(z)$ és $g(z)$ komplex függvények regulárisak D tartományon, akkor $f(z) + g(z)$, $f(z) - g(z)$, $f(z)g(z)$ és ha $g(z) \neq 0$ akkor $f(z)/g(z)$ is reguláris D-n.*

Definíció 1.1.5 *Most tegyük fel, hogy az $u(x, y)$ valós függvény harmónikus a D tartományon. Ha találunk olyan harmónikus $v(x, y)$ valós függvényt, hogy u és v kielégíti a Cauchy-Riemann egyenleteket D-n, akkor a $v(x, y)$ függvényt az $u(x, y)$ függvény harmónikus konjugáltjának nevezzük.*



1.1. ábra. Harmónikus konjugált

Megjegyzés 1.1.5 *A harmónikus konjugáltak úgynevezett merőleges görbecsaládokat definiálnak. Vagyis, ha $u(x,y)$ és $v(x,y)$ harmónikus konjugáltak, akkor a szintvonalaik merőlegesek lesznek egymásra. Az $u(x,y) = c_1$ görbe u illetve $v(x,y) = c_2$ görbe v szintvonala, ahol c_1, c_2 valós konstansok. Ekkor u bármely szintvonala merőleges v bármely szintvonalára. Vagyis ha kiválasztjuk u és v egy-egy szintvonalát és nézzük a metszéspontjukba húzott érintőiket, akkor ezek merőlegesek lesznek egymásra.*

Tétel 1.1.2 *Legyen $u(x,y)$ valós függvény D-n, $v(x,y)$ az u harmónikus konjugáltja. Ekkor az $u(x,y)$ és $v(x,y)$ függvényekkel definiált $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ komplex függvény reguláris D-n.*

Bizonyítás: A tétel nyilvánvaló az 1.1.5 definicióból és az 1.1.3 megjegyzésből.

Tétel 1.1.3 *Legyen D egyszeresen összefüggő tartomány $\mathbb{C}$-ben. A valós értékű $u(x,y)$ függvény akkor és csak akkor harmonikus D-n, ha D-n reguláris függvény valós része.*

Bizonyítás: Legyen $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ reguláris D-n. A Cauchy-Riemann egyenletek szerint

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0$$

a Young-tétel szerint, $u(x,y)$ tehát harmónikus.

Legyen most $u(x,y)$ harmónikus D-n. Ekkor $\frac{\partial u}{\partial x}$ $\frac{\partial u}{\partial y}$ folytonosak, hiszen differenciálhatóak is. Legyen γ a D-ben fekvő zárt rektifikálható görbe, ekkor a valós

$$\int_\gamma (-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy)$$

vonalintegrál zérus a Green tétel szerint, hiszen $\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{\partial u}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x})$ a $\nabla^2 \phi = 0$ feltétel miatt. Így az ismert kritérium szerint (lásd [1] 504.oldal 22.42. Megjegyzés)

$$v(z) = \int_{z_0}^{z} (-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy)$$

értelmes definíció, mert az integrál értéke független a z_0-ból a z-be vezető úttól. Sőt, azt is tudjuk, hogy v differenciálható és $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. A valós értelemben differenciálható u és v pár tehát kielégíti a Cauchy-Riemann egyenleteket, és így $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ reguláris D-n.

Megjegyzés 1.1.6 *Hasonlóan a következő tétel is igaz:*

Legyen D egyszeresen összefüggő tartomány $\mathbb{C}$-ben. A valós értékű $u(x, y)$ függvény akkor és csak akkor harmonikus D-n, ha D-n reguláris függvény képzetes része. Tehát ha $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ reguláris D-n, akkor $u(x, y)$ és $v(x, y)$ is harmónikus D-n.

Megjegyzés 1.1.7 *Tehát egy D egyszeresen összefüggő tartományon harmónikus $u(x, y)$ függvénynek mindig létezik a D-n harmónikus konjugáltja.*

Példa 1.1.1 *A D tartomány legyen a következő egyenlőtlenségekkel adva: $-1 < x < 1, -\infty < y < \infty$. D határa az $x = -1$ és $x = 1$ függőleges egyenes. Tekintsük a következő Dirichlet feladatot:*

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= 0 \\ \phi(-1, y) &= k_0 \\ \phi(1, y) &= k_1. \end{aligned}$$

D határán tehát ϕ konstans, vagyis nem függ y-tól. Ez adja az ötletet, hogy próbáljunk meg olyan $\phi(x)$ megoldást keresni, ami független y-tól. Ekkor a Laplace egyenlet azt mondja, hogy

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 0.$$

Tehát $\phi(x) = ax+b$ alakú. Ha a peremértékfeltételeket behelyettesítjük, akkor kapjuk, hogy $a = \frac{k_1-k_0}{2}$, $b = \frac{k_1+k_0}{2}$. Vagyis

$$\phi(x, y) = \frac{k_1 - k_0}{2}x + \frac{k_1 + k_0}{2}.$$

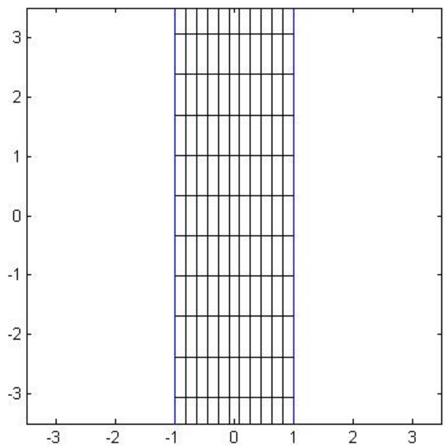
Keressük meg a harmónikus konjugáltját is $\phi(x, y)$-nek! Jelöljük ezt $\psi(x, y)$-vel. Tudjuk, hogy $f(x, y) = \phi(x, y)+i\psi(x, y)$ reguláris D-n, tehát, $\phi(x, y)$ és $\psi(x, y)$ kielégítik a Cauchy-Riemann egyenleteket,

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{k_1 - k_0}{2},$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0.$$

A második egyenletből látszik, hogy $\psi(x, y)$ csak y függvénye, ezért és az első egyenletből kapjuk, hogy

$$\psi(x, y) = \frac{k_1 - k_0}{2}y.$$



1.2. ábra.

Példa 1.1.2 *A D tartomány legyen most a felső félsík. A határa tehát az x-tengely. A Dirichlet-probléma:*

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0, y>0$$

és

$$\phi(x,0)=\begin{cases} k_0, & -\infty<x<0 \\ k_1, & 0<x<\infty. \end{cases}$$

Ennek megoldásához szükségünk lesz a komplex logaritmus függvényre, amit a következőképpen definiálunk:

$$logz = log\,|z| + iArgz.$$

A komplex logaritmus függvény reguláris a (hol?).

Tekintsük a következő függvényt:

$$\phi(x,y)=k_1+\frac{1}{\pi}(k_0-k_1)Argz.$$

Ez kielégíti a peremérték feltételeket, kell még, hogy harmónikus D-n. Az (1.1.3) tétel szerint elég ha egy D-n reguláris f függvény valós vagy képzetes részeként előáll ϕ. A felső fésíkon ϕ a következő függvény képzetes része:

$$f(z)=ik_1+\frac{k_0-k_1}{\pi}logz.$$

Ez reguláris, mivel a logaritmus függvény az. Ebből pedig rögtön adódik a harmónikus konjugált is:

$$\psi(x,y)=\frac{1}{\pi}(k_0-k_1)log\,|z|\,.$$

Példa 1.1.3 *Ha az előző példában a peremérték feltételeket eltoljuk a következő Dirichlet feladatot kapjuk.*

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0, y > 0$$

és

$$\phi(x,0) = \begin{cases} k_0, & -\infty < x < x_0 \\ k_1, & x_0 < x < \infty. \end{cases}$$

Ekkor:

$$\phi(x,y) = k_1 + \frac{1}{\pi}(k_0 - k_1)Arg(z - x_0).$$

$$\psi(x,y) = \frac{1}{\pi}(k_0 - k_1)log\left|z - x_0\right|.$$

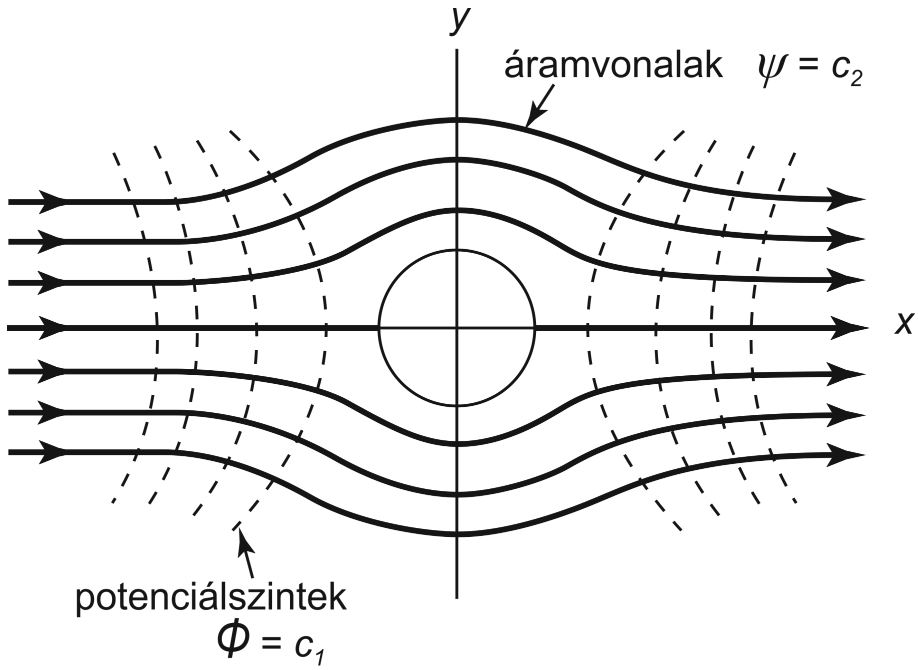
2. fejezet

Fizikai alkalmazások

2.1. Miért a Dirichlet probléma?

Néhány időben állandó fizikai feladat matematikai modellje a Dirichlet problémához vezet. Általában a síkon adott D tartományon keresünk olyan $\phi(x, y)$ függvényt, ami D belsejében kielégíti a Laplace egyenletet, D határán pedig adott.

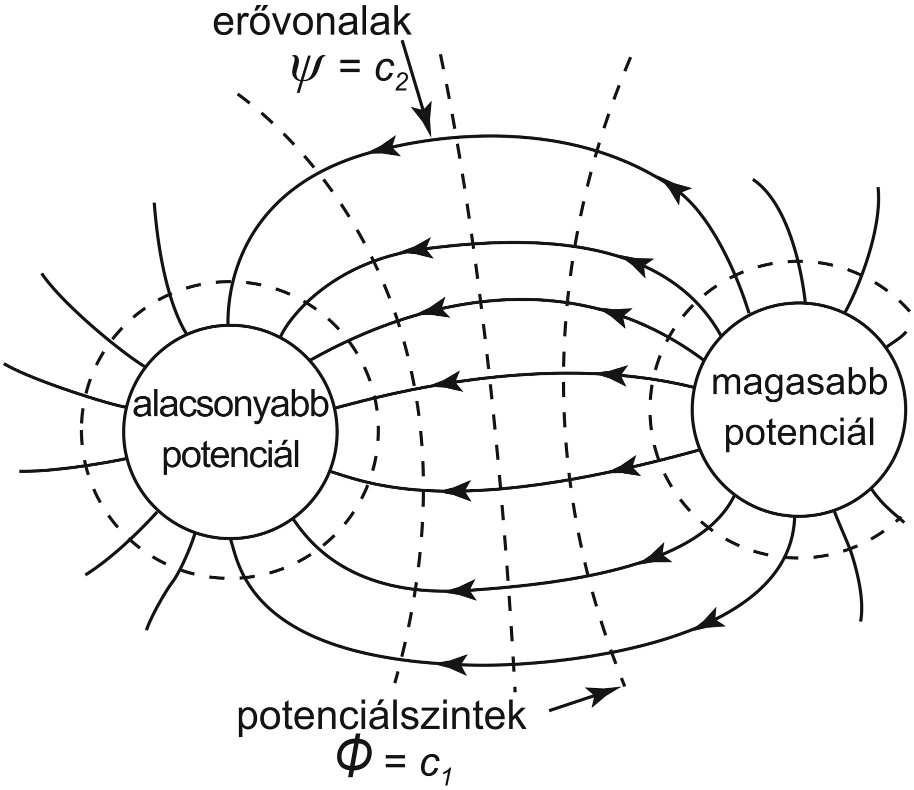
1. **Folyadékok áramlása:** A folyadékok mechanikájában egy áramlást kétdimenziósnak tekintünk, ha a folyadék (ami lehet víz, de akár lassan áramló levegő is) az xy-síkkal párhuzamos síkokon ugyanúgy mozog, mint az xy-síkon. Legyen $\mathbf{F}(x, y)$ a folyadék kétdimenziós sebességmezője. A folyadék összenyomhatatlan, vagyis div $\mathbf{F} = 0$ vagy $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$. Az áramlás örvénymentes ha curl $\mathbf{F} = 0$ vagy $\nabla \times \mathbf{F} = 0$. Az olyan kétdimenziós folyadékokat, amik összenyomhatatlanok, és a folyadék áramlása örvénymentes, ideális folyadékoknak nevezzük. Egy ideális folyadék $\mathbf{F}(x, y)$ sebességmezője előáll egy $\phi(x, y)$ függvény gradienseként. $\mathbf{F} =$grad $\phi(x, y) = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j}$. A ϕ-t sebességpotenciálnak hívjuk. A $\phi(x, y) = c_1$ szintvonalai a potenciálszintek vagy ekvipotenciálok. Ebből következik, hogy ϕ kielégíti a Laplace egyenletet, mert tudjuk, hogy div$\mathbf{F} = 0$ vagyis $\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot (\nabla\phi) = 0$, ami $\nabla^2\phi = \Delta\phi = 0$ és így ϕ harmónikus. A ϕ harmónikus konjugáltját $\psi(x, y)$-t áramfüggvénynek hívjuk, és a $\psi(x, y) = c_2$ szintvonalakat áramvonalaknak. Egy részecske a folyadékban az áramvonalak mentén mozog. Az $\Omega\ (z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ függvény a folyadék komplex sebességpotencilja.



2.1. ábra.

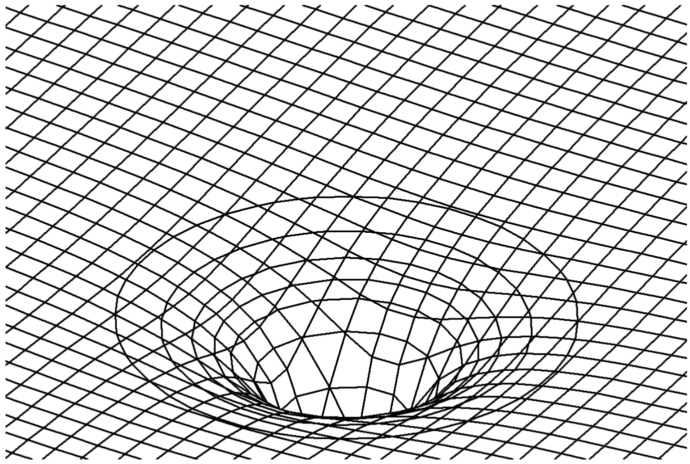
2. **Elektrosztatika:** A testek közötti elektromos erőhatásokat a töltéseket körülvevő elektromos mező közvetíti. Az elektrosztatikus mező forrásai a töltések. Az elektromos erővonalak olyan irányított vonalak, amiknek adott pontbeli érintője a térerősség irányát, a vonalak sűrűsége a térerősség naygságát szemlélteti. Az erővonalak pozitív töltésből vagy a végtelenből indulnak, negatív töltésben vagy a végtelenben végződnek. Ha az elektrosztatikus mezőben tetszőlegesen kijelölünk egy nulla szintet és ehhez képest megmérjük a mező bármely pontjának feszültségét, a mező adott pontjának potenciálját kapjuk. Az elektromos erővonalakra merőleges görbék, szintvonalak, a potenciálszintek, ezek mentén állandó a potenciál.

   A Dirichlet feladat megoldása $\phi(x, y)$, ennek a $\phi(x, y) = c_1$ szintvonalai a potenciálszintek. Ennek harmónikus konjugáltja $\psi(x, y)$, a $\psi(x, y) = c_2$ szintvonalai az erővonalak. Egy pozitív töltés az elektrosztatikus mezőben az erővonalak mentén mozog a nagyobb potenciálszint felől az alacsonyabb potenciálszint felé.



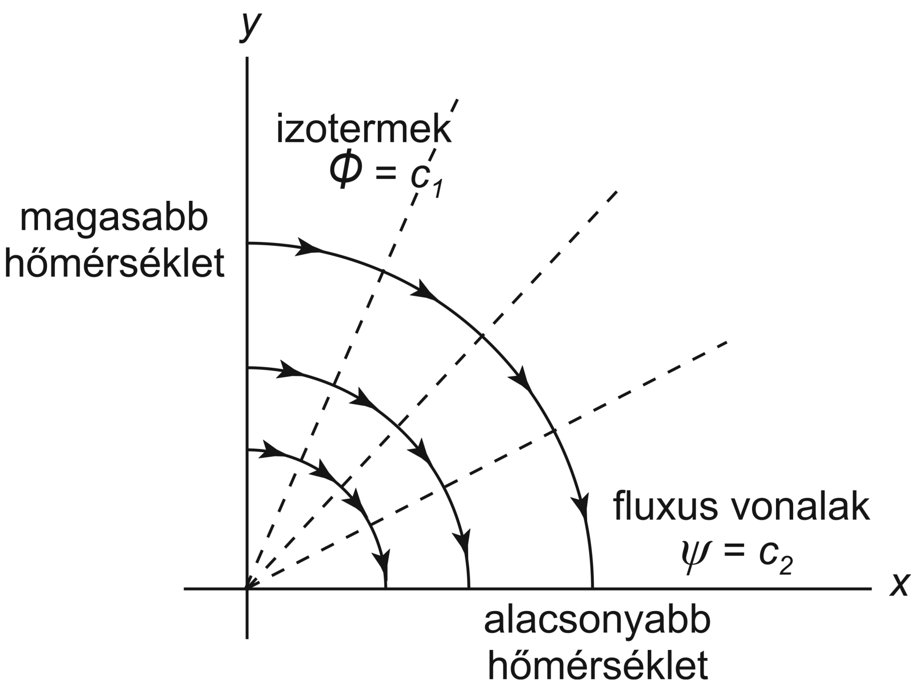
2.2. ábra.

3. **Gravitáció:** Képzeljük el, hogy egy test a tömegétől függő mértékben meghajlítja, elgörbíti maga körül a teret. A tér eme torzulása két dimenzióban úgy szemléltethető, hogy egy feszes gumilepedőre vagy gumihálóra rátesznek egy súlyos golyót. A golyó felé haladva az egyre meredekebbé váló felület érzékelteti a tér görbületének, és az ezzel ábrázolt gravitációnak az erősödését. Ha erre a felületre egy másik, kisebb golyót helyezünk, az a lejtős felület miatt a nagy golyó felé indul el, mintha az vonzaná magához. Ebben a modellben a szintvonalak igen látványosak, hiszen pont úgy rajzolódnak ki, mint a domborzat szintvonalai. Ezek mentén állandó a gravitáció nagysága. A Dirichlet feladat megoldása $\phi(x, y)$, ennek a $\phi(x, y) = c_1$ szintvonalai az egyenlő nagy gravitációjú pontokat összekötő vonalakat. Ennek harmónikus konjugáltja $\psi(x, y)$, a $\psi(x, y) = c_2$ szintvonalai a gravitáció hatásvonalai, amik egyben mutatják, hogy egy pontszerű test ebben a gravitációs térben milyen irányban mozdul el. (Einstein)



2.3. ábra.

4. **Hővezetés:** Végül, ha egy D tartomány határán a hőmérséklet állandó, akkor egy idő után a tartomány belsejében hőegyensúly áll elő. Ha a $\phi(x, y)$ függvény ezt az időben állandó hőmérsékletet adja meg a tartomány minden pontjában, kielégíti a Laplace egyenletet vagyis harmónikus. A $\phi(x, y) = c_1$ szintvonalak az egyforma hőmérsékletű pontokat kötik össze, ezeket izotermeknek hívjuk. A ϕ harmónikus konjugáltját $\psi(x, y)$-t $\psi(x, y) = c_2$ szintvonalait áramvonalaknak vagy fluxus vonalaknak hívjuk.



2.4. ábra.

3. fejezet

4 lépés

Állítás 3.0.1 *Legyen $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ egy reguláris komplex függvény a z-komplex síkban fekvő D tartományból a w-komplex síkban fekvő D' tartományba. Ha a $\Phi(x, y)$ valós függvény harmónikus D'-ben, akkor a $\phi(x, y) = \Phi(u(x, y), v(x, y))$ valós függvény harmónikus D-ben.*

Tehát a fenti állítás szerint a következő módszert haszálhatjuk a Dirichlet feladat megoldásához a D tartományon:

1. Keressünk $f(z) = u(x, y)+iv(x, y)$ reguláris komplex függvényt D tartományról egy egyszerűbb D' tartományra. D' lehet például az előző fejezetben látott x-tengellyel párhuzamos csík, a felső félsík vagy az egységkörlap.

2. Transzformáljuk a peremérték feltételeket D-ről D'-re. Ehhez kell, hogy $f(z)$ bijektív legyen. (nem elég, ha injektív?)

3. Oldjuk meg ezt az egyszerűbb Dirichlet problémát.

4. Képezzük a $\phi(x, y) = \Phi(u(x, y), v(x, y))$ függvényt, ez az eredeti probléma megoldása lesz.

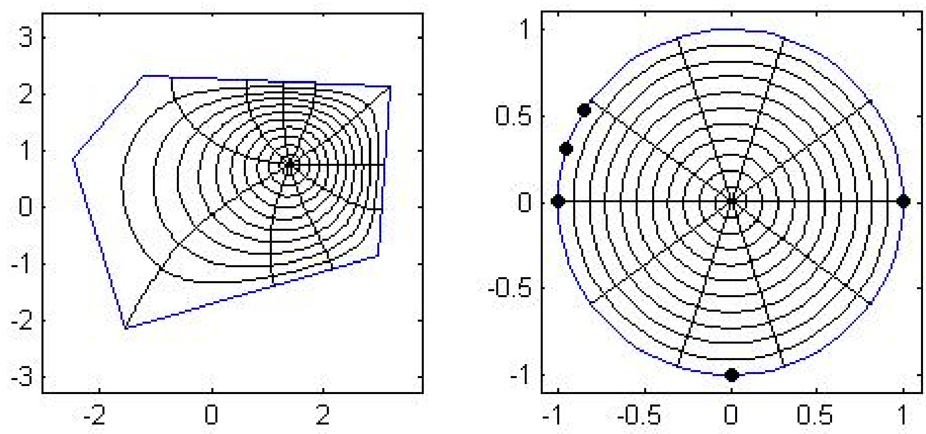
Nézzünk meg néhány fogalmat a témakörből és azt, hogy a módszer milyen feltételek mellett lesz alkalmazható.

Definíció 3.0.1 *Legyen $f(z)$ a D tartományon értelmezett komplex függvény és z_0 eleme D-nek. Azt mondjuk, hogy $f(z)$ konform a z_0-ban, ha bármely két egymást a z_0-ban metsző z-síkbeli görbe z_0-ban vett érintőinek szöge megegyezik a képek $f(z_0)$-ban vett érintőinek a szögével. Vagyis $f(z)$ szögtartó z_0-ban.*

Állítás 3.0.2 *Ha $f(z)$ reguláris komplex függvény a D tartományon, z_0 eleme D-nek és $f'(z_0) \neq 0$, akkor $f(z)$ konform z_0-ban.*

Megjegyzés 3.0.1 *Ha $f(z)$ reguláris komplex függvény a D tartományon, és $f(z)$ bijektív, akkor $f'(z)$ seholsem nulla, tehát $f(z)$ bijektív konform leképezés D-n. A Dirichlet feladat megoldásához tehát bijektív konform leképezést kell keresnünk D tartományról az egyszerűbb D' tartományba.*

Tétel 3.0.1 ***Konform leképezéses alaptétele*** *Legyen D egyszeresen összefüggő tartomány a z-komplex síkban, de ne az egész sík. Ekkor létezik $w = f(z)$ bijektív konform leképezés D-ből a w-komplex síkban fekvő $|w| < 1$ nyílt egységkörlapra.*



3.1. ábra.

Megjegyzés 3.0.2 *A $D \neq \mathbb{C}$ feltétel szükséges, mert ha az egységkörre képez a függvény, akkor korlátos, de a Liouville tétel szerint az egész síkon értelmezett korlátos és reguláris függvény konstans.*

Megjegyzés 3.0.3 *A tétel igaz lesz az egységkörlap helyett más egyszeresen összefüggő tartományra is. Például a felső félsíkra, amit használni fogunk a Schwarz-Christoffel formulánál.*

Tétel 3.0.2 ***Caratheodory.*** *Ha D tartomány határa egy egyszerű zárt görbe, akkor a konform leképezések alaptételében szereplő $w = f(z)$ függvény folytonosan kiterjeszthető D határára. Azaz létezik olyan folytonos*

$$f^* : \overline{D} \to \{w \in \mathbb{C} : |w| \leq 1\},$$

hogy a $z \in D$ esetén az $f^*(z) = f(z)$. Ez a kiterjesztés egyértelmű.

4. fejezet

A Schwarz-Christoffel formula

4.1. A Schwarz-Christoffel integrál

A Dirichlet feladatok megoldásában a legfontosabb lépés az $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ bijektív konform leképezés megtalálása a D tartományból az egyszerűbb $D^{'}$ tartományba. Ha találunk ilyen leképezést, akkor a feladat gyakorlatilag kész, hiszen a $D^{'}$ tartományon már tudjuk a Dirichlet feladat $\Phi(x, y)$ megoldását és ebből $\phi(x, y) = \Phi(u(x, y), v(x, y))$ az eredeti feladat megoldása.

A Schwarz-Christoffel formula explicit képletet ad a felső félsíkot egy poligonba vivő $f(x, y)$ konform leképezés deriváltjára.

Definíció 4.1.1 ***A Schwarz-Christoffel formula:*** *Legyen f reguláris függvény az $y > 0$ tartományon olyan, hogy*

$$f^{'}(z) = A(z - x_1)^{(\alpha_1/\pi)-1}(z - x_2)^{(\alpha_2/\pi)-1} \dots (z - x_n)^{(\alpha_n/\pi)-1}$$

ahol $x_1 < x_2 < \dots x_n$, $0 < \alpha_i < 2\pi$ minden $1 \leq i \leq n, A$ komplex konstans. Ekkor a felső félsík $y \geq 0$ képe a $w = f(z)$ leképezésnél egy nemkorlátos poligon melynek belső szögei $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Megjegyzés 4.1.1 *A Schwarz-Christoffel formula az f deriváltjátt adja meg. Ebből integrálással kaphatjuk meg f-et.*

$$f(z) = A \int (z - x_1)^{(\alpha_1/\pi)-1}(z - x_2)^{(\alpha_2/\pi)-1} \dots (z - x_n)^{(\alpha_n/\pi)-1} dz + B,$$

ahol A és B komplex konstans.

Megjegyzés 4.1.2 *A Schwarz-Christoffel formula definíciójában nem esik szó arról, hogy zárt poligonra hogyan képezzük le a felső félsíkot. Ennek ellenére a formula* *használható ezekre az esetekre is. Mint a következő példában látni fogjuk ekkor az n belső szögből csak $n-1$-et használunk fel.*

Példa 4.1.1 *Legyen a D tartomány egy szabályos háromszög, csúcsai: $w_1 = 0$, $w_2 = 1$ és $w_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$. A háromszög belső szögei $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{\pi}{3}$. Olyan $f(z)$ bijektív konform leképezést keresünk, ami a felső félsíkot képezi a háromszögre. A felső félsík határa az x-tengely, ennek két pontját, x_1, x_2 a háromszög két csúcsába képezi $f(z)$, a végtelent pedig a harmadik csúcsba. Tehát két csúcsra és a hozzájuk tartozó belső szögekre lesz szükségünk. Legyen $x_1 = 0$ és $x_2 = 1$, a leképezés ezeket a pontokat rendre a $w_1 = 0$, $w_2 = 1$ csúcsokba, a végtelent pedig a háromszög harmadik $w_3 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}i$ csúcsába viszi. Ekkor a Schwarz-Christoffel formula a következőt adja:*

$$f'(z) = Az^{-2/3}(z-1)^{-2/3}.$$

$$f(z) = A\int_0^z \frac{1}{s^{2/3}(s-1)^{2/3}}ds + B,$$

ahol A és B komplex konstans.

$f(0) = 0$ amiből

$$f(0) = A\int_0^0 \frac{1}{s^{2/3}(s-1)^{2/3}}ds + B = 0.$$

Tehát $B = 0$.

$f(1) = 1$ amiből

$$f(1) = A\int_0^1 \frac{1}{s^{2/3}(s-1)^{2/3}}ds = 1.$$

Legyen

$$\Gamma = \int_0^1 \frac{1}{s^{2/3}(s-1)^{2/3}}ds,$$

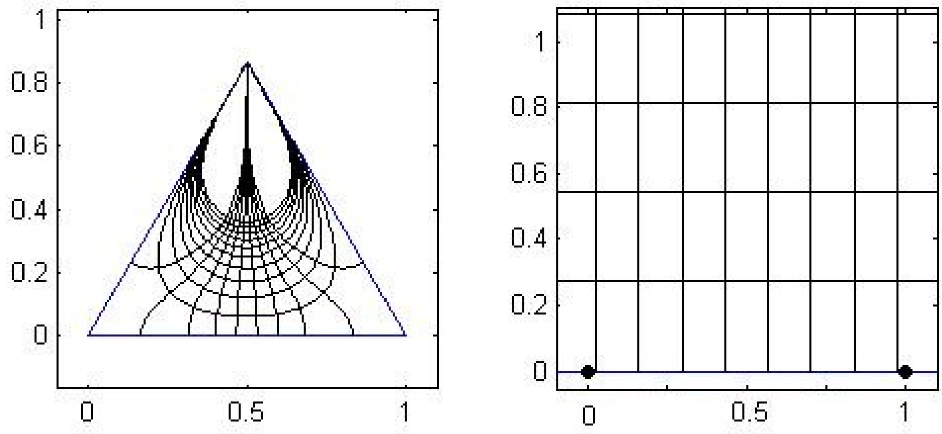
tehát

$$A = \frac{1}{\Gamma}$$

ezzel a jelöléssel

$$f(z) = \frac{1}{\Gamma}\int_0^z \frac{1}{s^{2/3}(s-1)^{2/3}}ds.$$

Egy elemi helyettesítés mutatja, hogy az így definiált $f(z)$ függvény a valós egyenest a háromszögvonalra képezi. Mivel $f(z)$ bijektív konform függvény a felső félsíkról a háromszögbe, $f^{-1}(z)$ bijektív konform függvény a háromszögről a felső félsíkra. Ha tehát ezen a háromszögön akarjuk megoldani a Dirichlet feladatot, akkor azt vissza tudjuk vezetni a felső félsíkon adott Dirichlet feladatra.



4.2. A Poisson integrálformula

A Schwarz-Christoffel formulával tehát vissza tudjuk vezetni egy véges vagy végtelen poligonon adott Dirichlet feladatot a felső félsíkon adott Dirichlet feladatra. Az első fejezet (1.1.3) példáját általánosítja a Poisson integrálformula, ha az x-tengely több szakaszra van felosztva, mindegyik szakaszon más peremértékfeltétellel.

Definíció 4.2.1 ***Formula a felső félsíkra:*** *Nézzük a következő Dirichlet feladatot:*

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0, y > 0$$

és

$$\phi(x, 0) = \begin{cases} k_0, & -\infty < x < x_1 \\ k_1, & x_1 < x < x_2 \\ \vdots & \vdots \\ k_n, & x_n < x < \infty, \end{cases}$$

ahol $x_1 < x_2 < \ldots x_n$ n *különböző pont az* x*-tengelyen és* $k_1, k_2, \ldots, k_n$ $n+1$ *valós* *számok. Tekintsük a következő függvényt:*

$$\phi(x,y) = k_n + \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{n}(k_{j-1} - k_j)\operatorname{Arg}(z - x_j).$$

$\phi(x, y)$ kielégíti a megadott peremfeltételeket és harmónikus az $y > 0$ tartományon mivel képzetes része az

$$f(z) = ik_n + \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{n}(k_{j-1} - k_j)\log(z - x_j).$$

reguláris függvénynek.

5. fejezet

MATLAB

A MATLAB Schwarz-Christoffel Toolbox segítségével megoldhatunk adott Dirichlet feladatokat. Megkeresi az általunk megadott D tartományról a Schwarz-Christoffel formulával kiszámolható konform leképezést az egyszerűbb D' tartományra. D' lehet a felső félsík, az egységkörlap, az x tengellyel párhuzamos végtelen csík vagy téglalap. Kiszámolja a Dirichlet feladat megoldását, adott peremérték feltételek mellett.

Nézzük meg egy egyszerű példa megoldását a MATLAB segítségével! Legyen a D tartomány egy téglalap.

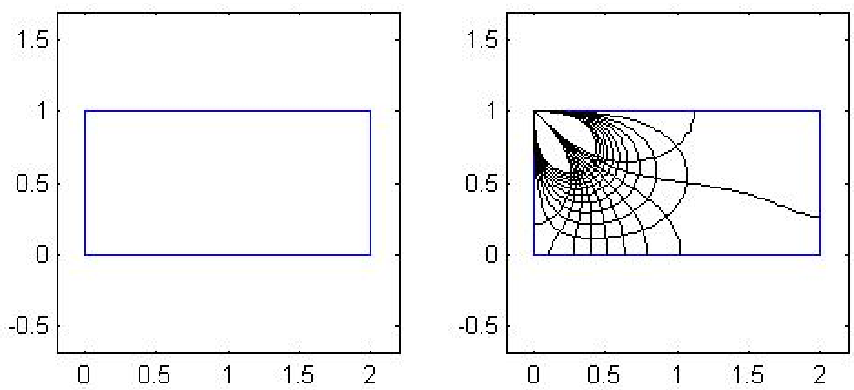
Először definiáljuk a poligont és keressük meg az f konform leképezést a felső félsíkról a poligonra.

```
>> a = [0 2 2+i i];
>> p = polygon(a)

p = polygon object:

        Vertex              Angle/pi
  ----------------------------------
         0                  0.5000
   2.0000                   0.5000
   2.0000 + 1.0000i         0.5000
         0 + 1.0000i        0.5000

>> f = hplmap(p)

  hplmap object:
```

```
     vertex                      alpha          prevertex
------------------------------------------------------------------
  0.00000 + 0.00000i            0.50000      -1.000000000000e+000
  2.00000 + 0.00000i            0.50000       9.411254970059e-001
  2.00000 + 1.00000i            0.50000       1.000000000000e+000
  0.00000 + 1.00000i            0.50000                       Inf

  c = -0.44681432 + 5.4718973e-017i

  Apparent accuracy is 4.78e-010

>> af = evalinv(f, a);
```

A táblázatban látjuk a csúcsok koordinátáit, a hozzájuk tartozó belső szögeket π-vel leosztva és azt, hogy az f az x-tengely mely pontjait képezi a téglalap egyes csúcsaiba. Az f inverze tehát a téglalapot képezi le a felső félsíkra.

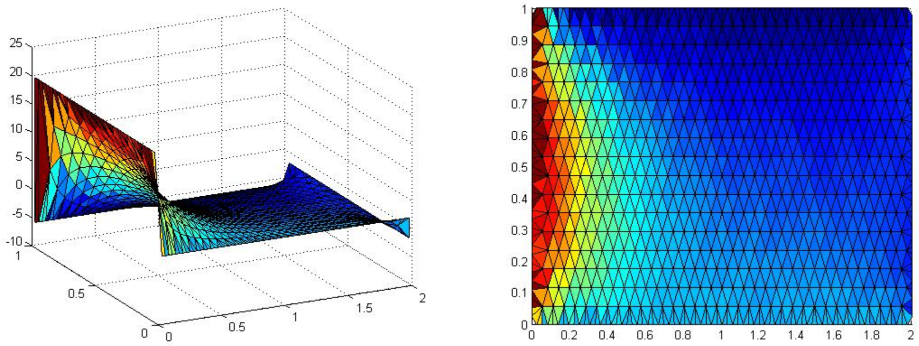
```
>> subplot(1,2,1); plot(p)
>> subplot(1,2,2); plot(f)
```



5.1. ábra.

Adjuk meg a peremértékfeltételeket a b vektorban és ábrázoljuk az így definiált Dirichlet feladat megoldását a MATLABbal, ez lesz $\phi(x, y)$.

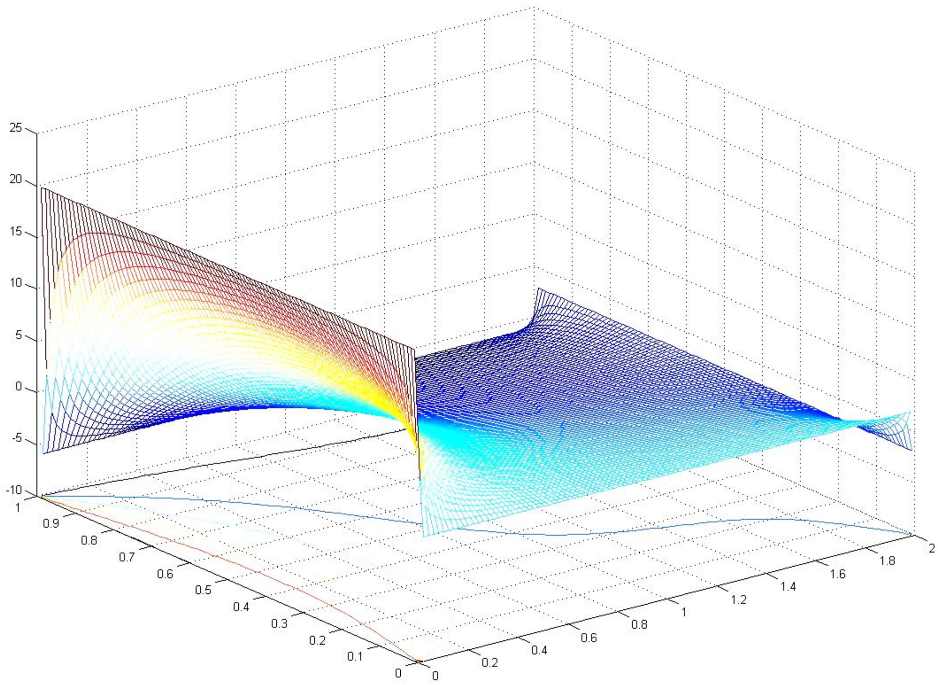
```
>> b = [2 -2 -6 20];
>> phi = lapsolve(p, b);
>> [tri, x, y] = triangulate(p);
>> trisurf(tri, x, y, phi(x+i*y))
```



5.2. ábra.

Ha egy hálót rakunk a téglalapra, akkor ennek pontjaiban kiszámolhatjuk $\phi(x, y)$ értékeit!

```
>> [X, Y] = meshgrid(linspace(0,2,100),linspace(0,1,100));
>> M = X+i*Y;
>> meshc(X, Y, phi(X+i*Y))
```

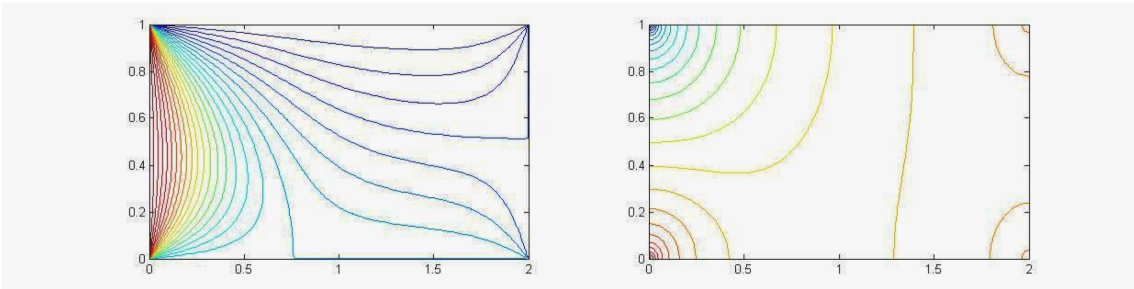


5.3. ábra.

A ϕ szintvonalai a potenciálszintek, ezt a MATLAB egy reguláris g függvény valós részeként számítja ki. A ϕ harmónikus konjugáltja adja az áramvonalakat. Ennek kiszámításához a Poisson-integrálformulát használjuk fel. Ehhez definiálok egy h MATLAB függvényt ami a Poisson formulában szereplő összeg egyes tagjait számítja ki.

Ezután ábrázoljuk a szintvonalakat és az áramvonalakat.

```
>> N = phi(M);
>> L = h(20,2,af(1),evalinv(f, M))+h(2,-2,af(2),

                        evalinv(f, M))+h(-2,-6,af(3),evalinv(f,M));
>> subplot(1,2,1); contour(X,Y,N,25);
>> subplot(1,2,2); contour(X,Y,L,25);
```



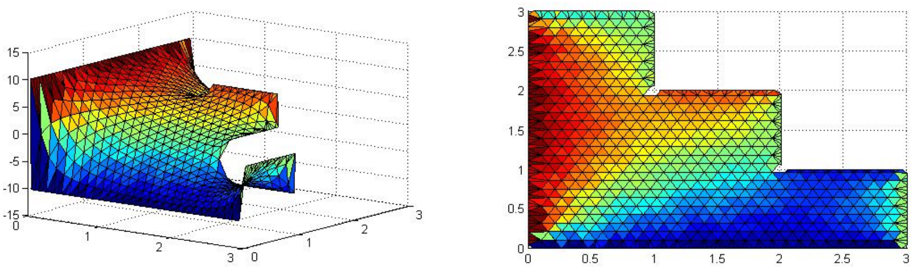
5.4. ábra.

Nézzünk meg egy kicsit bonyolultabb alakzatot. Legyen ez a következő nyolcszög.

```
>> a = [0 3 3+i 2+i 2+2*i 1+2*i 1+3*i 3*i]
>> p = polygon(a)

p = polygon object:

        Vertex              Angle/pi
    ------------------------------------
          0                  0.5000
    3.0000                   0.5000
    3.0000 + 1.0000i         0.5000
    2.0000 + 1.0000i         1.5000
    2.0000 + 2.0000i         0.5000
    1.0000 + 2.0000i         1.5000
    1.0000 + 3.0000i         0.5000
          0 + 3.0000i        0.5000
```

A b vektorban adom meg a peremértékfeltételeket.

```
>> f = hplmap(p);
>> b = [-10 0 -8 0 6 0 -2 10];
>> phi = lapsolve(p, b);
>> [tri, x, y] = triangulate(p);
>> subplot(1,2,1); trisurf(tri, x, y, phi(x+i*y))
>> subplot(1,2,2); trisurf(tri, x, y, phi(x+i*y))
```



5.5. ábra.

Irodalomjegyzék

[1] T. Sós Vera - Laczkovich Miklós: Analízis II., Nemzeti Tankönyvkiadó, 2007.

[2] Halász Gábor: Bevezető komplex függvénytan, Komplex függvénytani füzetek III. 2. kiadás, egyetemi jegyzet, ELTE Eötvös Kiadó, 2002.

[3] Petruska György: Komplex függvénytan, 6. kiadás, Nemzeti Tankkönyvkiadó, 1998.

[4] D. G. Zill, P. D. Shanahan: A first course in complex analysis with applications, Johns and Bartlett Publishers, 2009.

[5] Tobin A. Driscoll: Schwarz-Christoffel Toolbox User's Guide, http://www.math.udel.edu/d̃riscoll/software/SC/

[6] Stoyan Gisbert(szerk.): MATLAB, Typotex kiadó, 2008