Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Brückler Zita Flóra

Lineáris rendszerek integrálása

BSc szakdolgozat

Témavezető:

Dr. Kovács Sándor

Numerikus Analízis Tanszék

Budapest, 2012

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Kovács Sándornak, hogy igényeim szerint mindig időt szakított rám, rendszeresen tanácsokkal, útmutatással látott el, és nem utolsó sorban segített leküzdeni a LaTeX okozta nehézségeket. Köszönet illeti édesapámat, aki a dolgozat utómunkáiban nyújtott segítséget.

Szeretném megköszönni minden tanáromnak, akik az elmúlt három évben hozzájárultak a szakmai fejlődésemhez, illetve barátaimnak, szaktársaimnak, akiknek támogatására mindig számíthattam a nehéz helyzetekben.

Budapest, 2012. május 25.

Brückler Zita Flóra

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Lineáris differenciálegyenletek a természet-, a társadalom- és a műszaki tudományok különféle területein fordulnak elő – általában mindenütt, ahol *fejlődési folyamat*ok (folytonos változások) leírására lineáris matematikai modelleket alkalmaznak.

Ismeretes (vö. [6], [24] ill. [22]), hogy ha $n \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, ill. $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ és $b : I \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvények, akkor tetszőleges $(\tau, \xi) \in I \times \mathbb{R}^n$ esetén az

$$\dot{x} = Ax + b, \qquad x(\tau) = \xi \tag{1.1}$$

elsőrendű *lineáris kezdetiérték-feladat* teljes megoldása a

$$\varphi(t) := \Phi(t)\left\{[\Phi(\tau)]^{-1}\xi + \int_\tau^t [\Phi(s)]^{-1} b(s)\,\mathrm{d}s\right\} \qquad (t \in I) \tag{1.2}$$

függvény, ahol a (reguláris) Φ mátrix a homogén rendszer ($b(t) \equiv 0$) egy *alapmátrix*a, azaz $\dot{\Phi} = A\Phi$.

Az (1.1) kezdetiérték-feladat megoldására kvadratúrával az $n \geq 2$ esetben nincsen általános módszer. Fontos speciális eset az, ha az A együtthatómátrix *funkcionálisan felcserélhető* (vö. [23]), azaz ha a folytonosságon túl még az

$$A(t)A(s) = A(s)A(t) \qquad (t, s \in I) \tag{1.3}$$

tulajdonság is teljesül. Ez utóbbi esetben van reményünk a teljes megoldás meghatározására, hiszen ekkor a homogén rendszer *Cauchy-mátrix*ára

$$\Lambda(t, \tau) := \Phi(t)[\Phi(\tau)]^{-1} = \exp\left(\int_\tau^t A(s)\,\mathrm{d}s\right) \qquad (t, \tau \in I) \tag{1.4}$$

teljesül, ahol tetszőleges $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix esetén $\exp(M)$ jelöli az M mátrix *exponenciális*át:

$$\exp(M) := \sum_{k=0}^{\infty} (1/k!)M^k. \tag{1.5}$$

Mivel $\exp(M)$ invertálható, sőt $[\exp(M)]^{-1} = \exp(-M)$, így például $n = 1$ esetén (1.2) a

$$\varphi(t) = \left[\xi + \int_\tau^t b(s)\exp\left(-\int_\tau^s A(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\right)\,\mathrm{d}s\right]\exp\left(\int_\tau^t A(s)\,\mathrm{d}s\right) \quad (t \in I) \tag{1.6}$$

alakba írható.

Konstans együttható-mátrix, azaz $A(t) \equiv A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ esetén a Cauchy-mátrix nem más, mint

$$\Lambda(t,\tau) = \exp((t-\tau)A) \qquad (t,\tau \in I), \tag{1.7}$$

így (1.2) a

$$\varphi(t) = \exp((t-\tau)A)\xi + \int_\tau^t \exp((t-s)A)b(s)\,\mathrm{d}s \qquad (t \in I) \tag{1.8}$$

alakba írható.

Akármilyen egyszerűek is ezek az egyenletek, a lineáris rendszerek elméletének alkalmazása igen sokrétű. Alapvető szerepük van bizonyos fizikai, műszaki, biológiai ill. közgazdaságtani folyamatok leírásában és vizsgálatában, de felhasználási területük kiterjed szinte az összes tudományágra. Sőt, a matematika más területein is gyakran adódik olyan feladat, amelynek megoldása lineáris differenciálegyenletek megoldására vezethető vissza.

A dolgozatban az állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletek megoldásakor fellépő, mátrix-exponenciális kiszámítására vonatkozó különféle módszerek bemutatására kerül sor, példákon szemléltetve azok kiszámíthatóságának gyorsaságát. Több, méltatlanul a feledés homályába veszett módszer van, ami bizonyos esetekben gyakorlati szempontból több haszonnal bír, mint a hagyományosan tárgyalt Jordan-blokkos ill. interpolációs módszer.

A második fejezetben bemutatunk néhány lineáris differenciálegyenletre vezető (általunk érdekesnek tartott) példát. A harmadik fejezetben bevezetjük a használt jelöléseket, definíciókat, illetve áttekintünk néhány alapvető eredményt, amelyekre a későbbiekben támaszkodunk. A negyedik fejezetben a mátrix-exponenciális kiszámítására vonatkozó módszereket tárgyaljuk. A „hagyományos” módszerek ismertetésén túl hat módszert mutatunk be, publikálásuk szerinti időrendi sorrendben. Az utolsó fejezetben explicit képletet adunk e^{tA}-ra először a sajátértékek, majd 2×2-es esetben a mátrix elemeinek ismeretében. Megoldjuk a 2. fejezetben ismertetett példákat, végül pedig egy, a sztochasztika területén felmerülő alkalmazást vizsgálunk.

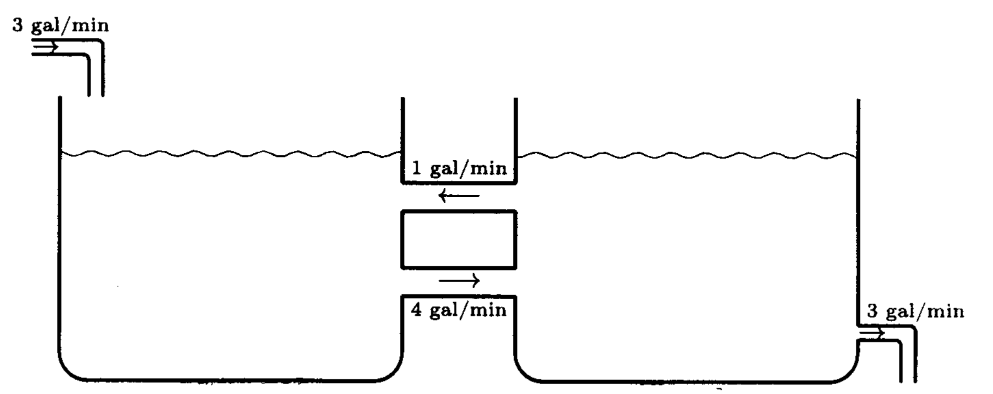
2. Néhány lineáris differenciálegyenletre vezető példa

2.1. Radiokarbonos kormeghatározás

Egy nemrég kivágott fa megfelelően előkészített darabjának a – szén-14 izotóptól származó – aktivitása 15 beütés/óra volt. Egy ugyanolyan tömegű, azonos módon előkészített régi fadarabot vizsgálva a beütésszám óránként csupán 8.5 volt. A méréseket 1971-ben végezték. A második fadarab Szenofern fáraó koporsójának töredéke volt. Igazolható-e a történészek azon feltevése, hogy a fáraó i. e. 2700 és 2550 között halhatott meg?

2.2. Tartályok

Két tartályt kapcsolunk össze, úgy, hogy a közöttük lévő csatornákon folyadék áramlik át az egyikből a másikba, az 1. ábrán látható módon.



1. ábra. A két tartály összekapcsolása.

Tegyük fel, hogy a bal oldali tartályban kezdetben 10 gallon sós víz van, amiben 2 font sót már korábban feloldottunk, a jobb oldali tartályban pedig 10 gallon tiszta víz van. A két tartály között a következő módon áramlanak az oldatok: percenként 4 gallon a bal oldaliból a jobb oldaliba és 1 gallon a jobb oldaliból a bal oldaliba. Kívülről a bal oldali tartályba oldatot öntünk 3 gal/min sebességgel, amely 1 font sót tartalmaz gallononként. A jobb oldali tartályból ugyanilyen sebességgel áramlik ki az oldat. Jelölje $y_b(t)$ ill. $y_j(t)$

a só mennyiségét a bal ill. a jobb oldali tartályban a $t \in [0, +\infty)$ időpontban. $\dot{y}_b$ a só mennyiségének változását adja meg, ami természetesen a beáramló és a kiáramló só mennyiségének előjeles összege. A bal oldali tartályba kívülről 3 gal/min sebességgel 1 font/gal koncentrációjú oldat áramlik, azaz 3 font só érkezik percenként; a jobb oldali tartályból 1 gal/min sebességgel érkezik a jobb oldali tartálynak megfelelő koncentrációjú oldat, ez a koncentráció pedig $\frac{y_j(t)}{10}$ font/gal. A bal oldali tartályból kifelé csak a jobb oldali tartályba áramlik oldat, mégpedig a bal oldali tartálynak megfelelő koncentrációval – ami $\frac{y_b(t)}{10}$ font/gal – és 4 gal/min sebességgel. Ez a mennyiség a jobb oldali tartálynál a beáramló összetevő lesz. A jobb oldali tartálynál tehát még a kiáramló oldatot kell vizsgálnunk, ami a tartály koncentrációjának megfelelő oldat lesz, és amely áramlási sebessége 3 gal/min. Ezekből tehát a

$$\left.\begin{array}{rcrcl} 10\dot{y}_b(t) & = & -4y_b(t) & + & y_j(t) + 3 \\ 10\dot{y}_j(t) & = & 4y_b(t) & - & 4y_j(t), \end{array}\right\} \qquad (t \in [0, +\infty)), \tag{2.9}$$

rendszer ill. az $y_b(0) = 2$ és $y_j(0) = 0$ a kezdeti feltétel adódik (vö. [2]).

2.3. A Leontyev-féle input-output-modell

Tegyük fel, hogy valamely gazdaság $n\,(\in \mathbb{N})$ szektorból áll, mindegyik szektor egyféle árut állít elő (vö. [10]). Az i-edik termék a_{ij}-ed része szükséges egységnyi j-edik áru előállításához, és az i-edik áru b_{ij}-ed része szükséges a j-edik szektorban egy egységnyi termelékenység növekedéséhez. Nyilvánvaló, hogy

$$a_{ij} \in [0, 1], \quad b_{ij} \in [0, 1] \qquad (i, j \in \{1, \ldots, n\}). \tag{2.10}$$

Jelölje az $y(t) \in \mathbb{R}^n$ vektor a végső felhasználási célt, $x_i(t)$ pedig az i-edik áru mennyiségét a $t \in [0, +\infty)$ időpontban. Gazdasági megfontolásokból az i-edik áruból annyit kell termelni, hogy

- kielégítse az összes áru előállításához az x_i-ből szükséges közbülső keresletet, ami a következőképpen fejezhető ki:
$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j;$$

- fedezze azt a szükségletet, amellyel az i-edik szektor hozzájárul az összes szektor termelékenységének növeléséhez, ami
$$\sum_{i=1}^{n} b_{ij}\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t};$$
- biztosítsa az $y_i(t)$ végső felhasználási szintet.

Tehát minden $t \in [0,+\infty)$ időpontban az x_i függvényre teljesülnie kell az alábbi mérlegnek:

$$x_i(t) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j(t) + \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}(t) + y_i(t) \qquad (i \in \{1,\ldots,n\}).$$

Bevezetve az $A := [a_{ij}]_{i,j=1}^{n,n}$, $B := [b_{ij}]_{i,j=1}^{n,n}$ mátrixokat, az (időfüggő) $x := (x_1,\ldots,x_n)^T$ ill. az $y := (y_1,\ldots,y_n)^T$ oszlopvektorokra ekkor

$$x = Ax + B\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} + y \tag{2.11}$$

adódik. $\det(B) \neq 0$ esetén ez azzal egyenértékű, hogy

$$\dot{x} = B^{-1}(E_n - A)x - B^{-1}y. \tag{2.12}$$

2.4. Farkas Miklós tanulási modellje

Valamely, egyszerre több tárgyat tanuló diák tanulásának időbeli folyamatát leíró determinisztikus, dinamikai modell található [5]-ben, amely az elsajátított anyag mennyiségének, illetve a tanulás intenzitás-változásának időtől való függését írja le. Jelöljük t-vel azt az időt, amelyet valamely időponttól, például $t = 0$-tól (a tanulmányok megkezdésének időpontjától) mérünk. A vizsgált időintervallum lehet $I := [0,+\infty)$, ha a diák teljes élete folyamán folytatjuk a megfigyelést, vagy $I := [0,T]$ $(T > 0)$, ha csak egy konkrét intervallumot, például egy szemesztert vizsgálunk. x_k-val jelöljük a diák tudásmennyiségét a k-adik tárgyból (ezt mérhetjük például oldalszámban), ahol $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ (a diák $n \geq 2$ számú tárgyat tanul). Ekkor az összes tárgyból a diák tudásmennyiségét az $x(t) = (x_1(t),\ldots,x_n(t))^T$ $(t \in I)$ oszlopvektor, a diák *tudásmennyiség-vektor*a jellemzi. Ennek deriváltja, az $\dot{x}$ vektor, amit a tanulás intenzitásának nevezünk, a tudásmennyiség időegység alatti megváltozását jelenti. Ha a diák a k-adik tárggyal foglalkozik a t időpillanatban és az i-edik tárggyal pedig nem, akkor $\dot{x}_k$ majdnem mindig pozitív, míg $\dot{x}_i$ negatív, hiszen a diák felejt. Az $\ddot{x}$ vektort a *tudás gyorsulás*ának nevezzük. Jelölje $b_i > 0$ a diák terhelhetőségét az i-edik tárgyban. Tehát b_i az a maximális intenzitás, amit a diák akkor ér el, ha csak az i-edik tárgyat tanulja, a többit nem. A b_i terhelhetőség nagy, ha a diák szereti, könnyűnek érzi az adott tárgyat, vagyis b_i értéke a tárgytól ill. a diák képességeitől, körülményeitől függ. Feltételezzük, hogy ez az érték a vizsgált időszak folyamán állandó. A $b := (b_1, \ldots, b_n)^T$ oszlopvektort a diák ún. *terhelhetőségi vektor*ának nevezzük.

Bevezetjük az $A = [a_{ik}]$ mátrixot $(i, k \in \{1, 2, \ldots, n\})$: a tárgyak *relatív disszipáció-mátrix*át. A mátrix i-edik sorának k-adik eleme azt adja meg, hogy a k-adik tárgy egységnyi intenzitású tanulása mennyire csökkenti a diák terhelhetőségét az i-edik tárgyban. Ha a *k-adik tárgynak az i-edikre vonatkoztatott relatív nehézségi fokát* a b_i/b_k hányadossal értelmezzük, akkor

$$a_{ik} =: r_{ik} \frac{b_i}{b_k} \qquad (i \neq k), \tag{2.13}$$

ahol $0 < r_{ik} < 1, r_{ik} = r_{ki}$, és az r_{ik} tényező az i-edik és a k-adik tárgy „rokonságát“ méri, vagyis azt, hogy mennyire nem üdítő az i-edik tárggyal való foglalkozásról a k-adikra áttérni. A k-adik tárgy egységnyi intenzitással való tanulása ugyanebben a tárgyban a terhelhetőséget eggyel csökkenti, így

$$a_{kk} = 1 \quad (k \in \{1, \ldots, n\}).$$

Tanulmányozzuk a *szabadon tanuló diák* modelljét. A diákot akkor nevezzük szabadon tanulónak, ha nem éri külső kényszer a tanulás időszaka alatt, például feleltetés, röpdolgozat, stb. A fenti jelölésekkel ekkor:

$$\ddot{x} = b - A\dot{x}. \tag{2.14}$$

Mivel itt a tudásmennyiség-vektornak csak a második és első deriváltja szerepel, ezért (2.14) nem más, mint

$$\dot{y} = b - Ay. \tag{2.15}$$

y i-edik komponensére

$$\dot{y}_i = b_i - \sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_k \qquad (i \in \{1, \dots, n\}). \tag{2.16}$$

Ha a diák egyetlen tárgyat tanul, az azt jelenti, hogy a tanulás intenzitása annak az i-edik tárgynak a kivételével zérus, azaz $y_k = 0$ $(k \neq i)$. Ekkor

$$\dot{y}_i = b_i - y_i. \tag{2.17}$$

Látható tehát, hogy a tanulás intenzitása a b_i értékig növelhető. Ha ui. tovább növelnénk, a deriváltja negatív lenne, azaz az intenzitás csökkenne. Amennyiben a többi tárgyat is tanulja, akkor az intenzitás nem érheti el a maximális b_i értéket, mivel az A mátrix pozitív elemű, és így a (2.17) egyenlet jobb oldalából további pozitív tagokat vonunk le: a derivált már valamilyen b_i-nél kisebb y_i értékre zérus lesz.

2.5. Strogatz szerelmi ügyeket leíró modellje

Egy könnyedebb példaként modellezhetjük Rómeó és Júlia szerelmének változását az idő függvényében, feltételezve persze, hogy – Shakespeare drámájával ellentétben – tragikus haláluk nem következik be. Tegyük fel, hogy a $t = 0$ pillanatban találkoztak először. Jelölje $R(t)$ Rómeó Júlia iránti érzelmeit a t időpontban, illetve $J(t)$ Júlia érzelmeit Rómeó iránt $(t \in [0, +\infty))$. Természetesen ezek pozitív értéke szerelmet, zérus értéke semlegességet, negatív értéke „nem szeretést” jelent. Az alábbi három esetben (vö. [12]) arra keressük a választ, hogy miként lehet leírni Rómeó és Júlia kapcsolatának változását.

Elsőként tekintsük a következő (nem túl ideális) esetet. Rómeó nehéz természetű: amikor Júlia szereti őt, akkor Rómeó kezdi kevésbé szeretni Júliát, ha viszont Júlia kevésbé érdeklődik iránta, akkor Rómeó egyre jobban kezdi szeretni Júliát. Júlia viselkedése ennél érthetőbb: ha Rómeó szereti Júliát, akkor Júlia egyre szerelmesebb lesz Rómeóba, de kezd barátságtalanabb lenni, ha Rómeó nem szereti őt. A szituációt leíró differenciálegyenlet-rendszer a következő:

$$\dot{R} = -aJ, \qquad \dot{J} = bR, \tag{2.18}$$

ahol $a, b > 0$ az adott körülmények alapján meghatározható paraméterek (vö. [21]).

Az előző esetből tanulva, Júlia változtat a hozzáállásán, és csökkenti az érzelmi reakcióit. A modellben ez azt jelenti, hogy a második egyenlet jobboldala még egy cJ-s taggal is kibővül, ahol $c < 0$ az adott körülmények alapján meghatározható paraméter. Például

$$\dot{R} = -0.2J, \qquad \dot{J} = 0.8R - 0.1J. \tag{2.19}$$

A harmadik esetben Rómeó jobban el tudja fogadni Júlia szerelmét, azaz csak akkor csökken Júlia iránti szerelme, ha Júliáé nagyon erős (például $J > 2$), Júlia pedig kontrollálja érzelmeit úgy, hogy csak akkor nőjön a Rómeó iránti szerelme, ha Rómeóé nagyon erős (például $R > 2$). Ekkor a következő rendszert kapjuk:

$$\dot{R} = -0.2(J - 2), \qquad \dot{J} = 0.8(R - 2). \tag{2.20}$$

3. Alapvető ismeretek

Az $(n{\times}n)$-es mátrixokra ill. a $\mathbb{K}^n$-beli vektorokra a következő jelöléseket fogjuk használni:

$$A \in \mathbb{K}^{n\times n},\quad A = [a_{ij}],\quad \text{ill.}\ \ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n,\qquad x = \begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{bmatrix}^T$$

($\mathbb{K}$ jelöli a valós ill. a komplex számok halmazát: $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ ill. $\mathbb{K} := \mathbb{C}$).

O ill. E_n jelöli a $\mathbb{K}^{n\times n}$-beli *nullmátrix*ot ill. az *egységmátrix*ot.

Az A mátrix $\sigma(A)$ *spektrum*ának elemei (A *sajátérték*einek halmaza) a χ_A *karakterisztikus polinom* gyökei: $\lambda \in \sigma(A) \iff \chi_A(\lambda) = 0$, ahol

$$\chi_A(z) := \det(zE_n - A) = (-1)^n \prod_{k=1}^{r} (\lambda_k - z)^{n_k} \quad (z \in \mathbb{K}), \tag{3.21}$$

itt λ_k jelöli a különböző sajátértékeket, és $\sum\limits_{k=1}^{r} n_k = n$, $\sum\limits_{k=1}^{r} n_k\lambda_k = \mathrm{sp}(A)$, $\prod\limits_{k=1}^{r} \lambda_k^{n_k} = \det(A)$. n_k a λ_k sajátérték *multiplicitása*, pontosabban az *algebrai* multiplicitása, amelyet a következőkben a_{λ_k} jelöl. χ_A a következő formában is felírható

$$\chi_A(z) = z^n + \sum_{r=1}^{n} (-1)^r \sum_{|i|=r} \det(A_i)\, z^{n-r} \quad (z \in \mathbb{K}), \tag{3.22}$$

ahol tetszőleges $r \in \{1, \ldots, n\}$ és $i := (i_1, \ldots, i_r) \in \mathbb{N}^r$, $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_r \le n$ multiindex esetén legyen, $|i| := r$ ill. $A_i := [a_{i_k i_l}]_{k,l=1}^r$. Az $n = 2$ és $n = 3$ speciális esetekben χ_A a következő alakú

$$\begin{aligned} \chi_A(z) &= z^2 - \mathrm{sp}(A)z + \det(A) \quad (z \in \mathbb{K}) \quad \text{és} \\ \chi_A(z) &= z^3 - \mathrm{sp}(A)z^2 + \mathrm{sp}(A^\natural)z - \det(A) \quad (z \in \mathbb{K}), \end{aligned} \tag{3.23}$$

ahol $A^\natural$ az A asszociáltja.

A λ sajátértékhez tartozó $\mathrm{Ker}\left((A - \lambda E_n)\right) := \{x \in \mathbb{K}^n :\ (A - \lambda E_n)x = 0\}$ sajátaltér dimenziója adja a λ sajátérték g_λ *geometriai multiplicitás*át, amely nem lehet nagyobb az algebrai multiplicitásnál: $1 \le g_\lambda \le a_\lambda$. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha λ_k egyszeres gyöke A *minimálpolinom*jának, azaz annak a legkisebb fokú polinomnak, amelyet A annullál: $\mu_A(A) = \mathbf{O}$. A g_λ geometriai multiplicitás a

$$g_\lambda + \rho_\lambda = n, \tag{3.24}$$

formulából kapható meg, ahol ρ_λ jelöli a $\lambda E_n - A$ mátrix *rang*ját. A pontosan akkor diagonalizálható ($A = BDB^{-1}$, ahol D diagonális), ha minden sajátértékének algebrai és geometriai multiplicitása megegyezik.

A h vektort az A mátrix λ sajátértékéhez tartozó (jobboldali) k-adrendű *fővektor*ának ($k = 1$ esetén *sajátvektor*ának) nevezzük, ha

$$(A - \lambda E_n)^k h = 0 \quad \text{és} \quad (A - \lambda E_n)^{k-1} h \neq 0$$

teljesül. Ezek a vektorok rekurzívan az alábbi módon számíthatók:

$$(A - \lambda E)h_1 = 0, \quad (A - \lambda E_n)h_{i+1} = h_i \quad (i \in \{1, \dots, k-1\}). \tag{3.25}$$

Ha λ az A k-szoros sajátértéke ($a_\lambda = k$), akkor van k-darab lineárisan független fővektor: $\dim\big((A - \lambda E_n)^k\big) = k$. Különböző sajátértékekhez tartozó fővektorok bázist alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben ill. $\mathbb{C}^n$-ben (attól függően, hogy a sajátérték valós-e ill. komplex-e, utóbbi esetben a fővektorok valós ill. képzetes részéből áll a bázis).

A fővektoroknak ez a tulajdonsága fontos következménnyel bír A karakterisztikus polinomjával kapcsolatban: χ_A ui. az

$$\chi_A(A) = A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \ldots + c_1 A + c_0 E_n, \tag{3.26}$$

alakba írható, ahol a c_k ($k \in \{0, \dots, n-1\}$) együtthatók a (3.22)-beli számok, viszont $\chi_A(A)$ a következő alakú:

$$\chi_A(A) = \prod_{k=1}^{r} (A - \lambda_k E_n)^{n_k} \tag{3.27}$$

(vö. (3.21)). Így minden h fővektor esetén $\chi_A(A)h = 0$. Mivel ezek bázist alkotnak, ezért tetszőleges $x \in \mathbb{K}^n$ esetén $\chi_A(A)x = 0$. Beláttuk tehát, hogy teljesül a

3.1. Tétel. ***(Cayley-Hamilton-tétel.)*** *Minden négyzetes mátrix annullálja karakterisztikus polinomját:* $\chi_A(A) = \mathbf{O}$.

Ezt a tételt több, a mátrix-exponenciális függvény kiszámítására irányuló módszer használja.

A mátrixexponenciális definíciójából (vö. (1.5)) viszonylag egyszerűen vezethetők le az alábbi tulajdonságok:

3.2. Tétel. *Ha* $A, A_1, \ldots, A_r, B, M$ *olyan mátrixok, amelyekre* $\det(M) \neq 0$*, akkor*

$$\begin{aligned}
&\textit{1)}\ e^{\boldsymbol{O}} = E_n,\\
&\textit{2)}\ [A,B] = \boldsymbol{O} \quad \Longrightarrow \quad e^A e^B = e^{A+B}, \quad \textit{ahol} \quad [A,B] := AB - BA,\\
&\textit{3)}\ \left(e^A\right)^{-1} = e^{-A},\\
&\textit{4)}\ e^A = M e^{M^{-1}AM} M^{-1} \quad \textit{ill.} \quad e^{M^{-1}AM} = M^{-1} e^A M,\\
&\textit{5)}\ A = \operatorname{diag}\{A_1, \ldots, A_r\} \quad \Longrightarrow \quad e^A = \operatorname{diag}\left\{e^{A_1}, \ldots, e^{A_r}\right\}.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Bizonyítás: Kiindulva az (1.5)-beli definícióból kapjuk, hogy

1) $e^{\mathbf{O}} = \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\mathbf{O}^\nu}{\nu!} = E_n + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\mathbf{O}^\nu}{\nu!} = E_n + \mathbf{O} = E_n$;

2) Mivel $[A,B] = \mathbf{O}$, ezért alkalmazható a binomiális tétel, azaz

$$(A+B)^\nu = \sum_{i=0}^{\nu} \binom{\nu}{i} A^i B^{\nu-i} = \sum_{i=0}^{\nu} \frac{\nu!}{i!(\nu-i)!} A^i B^{\nu-i} \qquad (\nu \in \mathbb{N}_0),$$

így

$$\begin{aligned}
e^{A+B} &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(A+B)^\nu}{\nu!} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \sum_{i=0}^{\nu} \frac{1}{i!(\nu-i)!} A^i B^{\nu-i} \right\} =\\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \sum_{i=0}^{\nu} \frac{A^i}{i!} \frac{B^{\nu-i}}{(\nu-i)!} \right\} = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A^\nu}{\nu!} \right) \cdot \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{B^\nu}{\nu!} \right) =\\
&= e^A e^B.
\end{aligned}$$

3) Mivel $[A, -A] = \mathbf{O}$, ezért 2) ill. 1) egyszerű következménye, hogy

$$e^A e^{-A} = E_n, \qquad \text{azaz} \qquad \left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}.$$

4) Teljes indukcióval könnyen belátható, hogy

$$(MAM^{-1})^\nu = MA^\nu M^{-1} \qquad (\nu \in \mathbb{N}_0),$$

így

$$e^{M^{-1}AM} = \sum_{\nu=0}^{\nu} \frac{(MAM^{-1})^\nu}{\nu!} = \sum_{\nu=0}^{\nu} \frac{MA^\nu M^{-1}}{\nu!} = M \left(\sum_{\nu=0}^{\nu} \frac{A^\nu}{\nu!} \right) M^{-1} = Me^A M^{-1}.$$

5) Ha $A = \operatorname{diag}\{A_1, \dots, A_r\}$, akkor

$$\begin{aligned} e^A &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\operatorname{diag}\{A_1, \dots, A_r\})^\nu}{\nu!} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\operatorname{diag}\left\{ \frac{A_1^\nu}{\nu!}, \dots, \frac{A_r^\nu}{\nu!} \right\} \right) = \\ &= \operatorname{diag}\left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A_1^\nu}{\nu!}, \dots, \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A_r^\nu}{\nu!} \right\} = \operatorname{diag}\left\{ e^{A_1}, \dots, e^{A_r} \right\}. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

A későbbiekben használni fogjuk az alábbi tételben megfogalmazott állítást.

3.3. Tétel. *A $\Phi(t) := e^{tA}$ $(t \in \mathbb{R})$ mátrix-exponenciális függvény az*

$$Y^{(n)} + c_{n-1} Y^{(n-1)} + \dots + c_1 \dot{Y} + c_0 Y = 0,$$

$$Y(0) = E_n,\ \dot{Y}(0) = A,\ \ddot{Y}(0) = A^2,\ \dots,\ Y^{(n-1)}(0) = A^{n-1}$$

kezdetiérték-feladat egyetlen megoldása, ahol a c_k $(k \in \{0, \dots, n-1\})$ számok az A mátrix χ_A karakterisztikus polinomjának együtthatói (vö. (3.22)).

Bizonyítás: Világos, hogy ha Ψ_1 és Ψ_2 megoldása a fenti kezdetiérték-feladatnak, akkor a $\Psi := \Psi_1 - \Psi_2$ is az. Ezért Ψ megoldása az

$$\begin{gathered} x^{(n)} + c_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + c_1 \dot{x} + c_0 x = 0, \\ x(0) = x'(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0 \end{gathered}$$

kezdetiérték-feladatnak, amiről tudjuk, hogy az $x(t) \equiv 0$ egyértelmű megoldása, így $\Psi_1 = \Psi_2$.

A $\Phi(t) := e^{tA}$ $(t \in \mathbb{R})$ mátrix-exponenciális függvényre

$$\Phi'(t) = A e^{tA}, \quad \Phi''(t) = A^2 e^{tA}, \quad \dots, \quad \Phi^{(n-1)}(t) = A^{n-1} e^{tA} \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

ezért egyrészt

$$\Phi(0) = E_n, \quad \Phi'(0) = A, \quad \Phi''(t) = A^2, \quad \dots, \quad \Phi^{(n-1)}(t) = A^{n-1},$$

másrészt pedig a Cayley-Hamilton-tétel (vö. 3.1. tétel) következtében

$$\begin{gathered} \Phi^{(n)}(t) + c_{n-1} \Phi^{(n-1)}(t) + \dots + c_1 \Phi'(t) + c_0 \Phi(t) = \\ = (A^n + c_{n-1} A^{n-1} + \dots + c_1 A + c_0 E_n)\, e^{tA} = \chi_A(A) e^{tA} = \mathbf{O}. \quad \blacksquare \end{gathered}$$

Ha f analitikus függvény, azaz alkalmas $R > 0,\ a_\nu \in \mathbb{R}\ (\nu \in \mathbb{N}_0)$ esetén

$$f(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \quad (z \in U_R(0))\,, \quad \text{ahol} \quad U_R(0) := \{z \in \mathbb{K} :\ |z| < R\}\,, \tag{3.29}$$

akkor az $f(A)$ *mátrixfüggvény*t az

$$s_\nu(z) := \sum_{k=0}^{\nu} a_k z^k \quad (z \in U_R(0),\ \nu \in \mathbb{N}_0) \tag{3.30}$$

részletösszeg-sorozat határértékeként értelmezzük, amennyiben a sor konvergál.

4. e^{tA} kiszámításának különféle módszerei

4.1. e^{tA} számítása speciális struktúrájú mártixok esetén

A következő mátrix esetében az (1.5) definíció szerint számolható a mátrix-exponenciális, ui. olyan egyszerű struktúrával rendelkezik, ahol a hatványok indukcióval megsejthetők. Legyen

$$A := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ha kiszámítjuk az első pár hatványt, akkor látható, hogy

$$A^\nu = \begin{bmatrix} (-1)^\nu & 0 & 0 \\ (-1)^{\nu+1}\nu & (-1)^\nu & 0 \\ (-1)^\nu(\nu-1) & (-1)^{\nu+1} & 0 \end{bmatrix} \quad (\nu \in \mathbb{N}_0).$$

A mátrixexponenciális definíciójának megfelelően e^{tA} a következőképpen számítható:

$$e^{tA} = E_3 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} A^\nu \quad = \begin{bmatrix} 1 + \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{(-t)^\nu}{\nu!} & 0 & 0 \\ -\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-t)^\nu}{(\nu-1)!} & 1 + \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-t)^\nu}{\nu!} & 0 \\ \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{(-t)^\nu}{\nu!}(\nu-1) & -\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{(-t)^\nu}{\nu!} & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ te^{-t} & e^{-t} & 0 \\ -te^{-t} - (e^{-t} - 1) & 1 - e^{-t} & 1 \end{bmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

4.1.1. e^{tA} számítása, ha A nilpotens, diagonális ill. projektor-mátrix

Ha N (ν-indexű) nilpotens mátrix, akkor minden ν-nél nem kisebb hatványa a zérusmátrix, így

$$e^{tN} = \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{t^k}{k!} N^k \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Ha D diagonális mátrix, ahol $D = \mathrm{diag}\{d, \ldots, d\}$, akkor D k-adik hatványára:

$$D^k = d^k E_n \qquad (k \in \mathbb{N}_0),$$

így

$$e^{tD} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} D^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k d^k}{k!} E_n = e^{dt} E_n \qquad (t \in \mathbb{R}). \tag{4.31}$$

Ha P projektor-mátrix, azaz $P^2 = P$, akkor minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $P^k = P$, így

$$e^{tP} = E_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} P^k = E_n + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \right) P = E_n + (e^t - 1) P \quad (t \in \mathbb{R}).$$

4.1.2. e^{tA} számítása, ha $A^2 = \kappa E_n$ ill. $A^3 = \tau A$

A következő struktúrájú mátrixok esetében is könnyen kiszámítható a mátrix-exponenciális (vö. [3]):

- ha $A^2 = \kappa E_n$ $(0 \neq \kappa \in \mathbb{C})$, akkor

$$e^{tA} = \cosh\left(\sqrt{\kappa} t\right) E_n + \frac{\sinh\left(\sqrt{\kappa} t\right)}{\sqrt{\kappa}} A \qquad (t \in \mathbb{R}), \tag{4.32}$$

- ha $A^3 = \tau A$ $(0 \neq \tau \in \mathbb{C})$, akkor

$$e^{tA} = E_n + \frac{\sinh\left(\sqrt{\tau} t\right)}{\sqrt{\tau}} A + \frac{\cosh\left(\sqrt{\tau} t\right) - 1}{\tau} A^2 \qquad (t \in \mathbb{R}), \tag{4.33}$$

ugyanis pl. az első esetben $A^{2\nu} = \kappa^\nu E_n$ ill. $A^{2\nu+1} = \kappa^\nu A$ $(\nu \in \mathbb{N})$, így azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(tA)^\nu}{\nu!} &= \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(tA)^{2\mu}}{(2\mu)!} + \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(tA)^{2\mu+1}}{(2\mu+1)!} = \\ &= \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{\kappa} t)^{2\mu}}{(2\mu)!} E_n + \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{\kappa})^{2\mu} t^{2\mu+1}}{(2\mu+1)!} \sqrt{\kappa} \frac{A}{\sqrt{\kappa}} \qquad (t \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

A (4.33)-beli állítás is hasonlóan (egyszerűen) bizonyítható be.

4.1. Példa. *Ha A egy (3×3)-as valós antiszimmetrikus mátrix, azaz*

$$A := \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} \tag{4.34}$$

ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$*:* $a^2 + b^2 + c^2 > 0$*, akkor pl. (4.33) jól használható, ui. ha* n *páratlan, akkor minden antiszimmetrikus* $(n \times n)$*-es mátrix esetén* $\det(A) = 0$ *és így*

$$\chi_A(z) = z^3 + (a^2 + b^2 + c^2)z \quad (z \in \mathbb{K})$$

(vö. (3.23)), ahonnan (3.26) alapján az $A^3 = \tau A$ *egyenlőség következik, ahol* $\tau := -(a^2 + b^2 + c^2) \neq 0$*. A (4.33) formulából így, ha* $\omega := \sqrt{|\tau|}$*, akkor tetszőleges* $t \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$\begin{aligned}
e^{tA} &= E_3 + \frac{\sinh(\sqrt{\tau} t)}{\sqrt{\tau}} A + \frac{\cosh(\sqrt{\tau} t) - 1}{\tau} A^2 = \\
&= E_3 + \frac{\sinh\left(\imath\sqrt{|\tau|} t\right)}{\imath\sqrt{|\tau|}} A + \frac{\cosh\left(\imath\sqrt{|\tau|} t\right) - 1}{-|\tau|} A^2 = \\
&= E_3 + \frac{\imath \sin\left(\sqrt{|\tau|} t\right)}{\imath\sqrt{|\tau|}} A + \frac{\cos\left(\sqrt{|\tau|} t\right) - 1}{-|\tau|} A^2 = \\
&= E_3 + \frac{\sin(\omega t)}{\omega} A + \frac{1 - \cos(\omega t)}{\omega^2} A^2.
\end{aligned}$$

4.2. e^{tA} számítása Jordan-blokkok segítségével

Ebben a fejezetben egy, a mártixok felbontásán alapuló módszert mutatunk be. Az alapötlet az, hogy az A mátrixhoz olyan vele hasonló $\widetilde{A}$ mátrixot konstruálunk, amely segítségével a mátrix-exponenciális könnyebben számítható. Olyan reguláris B transzformációt keresünk tehát, amelyre

$$A = B\widetilde{A}B^{-1}. \tag{4.35}$$

A mátrix-exponenciális függvény így a következő módon számítható (vö. (3.28)):

$$\exp(tA) = B\exp(t\widetilde{A})B^{-1} \quad (t \in \mathbb{R}). \tag{4.36}$$

(4.35) felírásához olyan B mátrixot keresünk, amelyre $J := B^{-1}AB$ Jordan-mátrix. Ebben az esetben J hasonló A-hoz. Ez A sajátértékeinek és a hozzá tartozó sajátvektorainak (szükség esetén fővektorainak) meghatározásával érhető el. Minden sajátérték esetében $\mathrm{Ker}\left((A - \lambda E_n)^r\right)$ egy bázisát kell meghatározni, ahol ezen részbázisok segítségével kapjuk $\mathbb{K}^n$ egy bázisát. A sajátvektorok (ill. fővektorok) mátrixba rendezésével kaphatjuk meg a kívánt transzformációt.

A (4.36)-beli formula felírásához Jordan-mátrixok exponenciálisának felírására lesz szükség. Ezt úgy érjük el, hogy felhasználjuk (4.31)-et és (3.28)-at, majd minden egyes blokkot $J = N + D$ alakba írunk, ahol N és D egymással felcserélhető nilpotens ill. diagonális mátrixok, amelyekre $\exp(ND) = \exp(N) \cdot \exp(D)$ teljesül.

Így e^{tA} $(t \in \mathbb{R})$ kiszámításának Jordan-felbontáson alapuló módszerének lépései a következők:

1. lépés. Meghatározzuk A karakterisztikus polinomját, majd sajátértékeit.

2. lépés $a_\lambda > 1$ esetén kiszámítjuk az $A - \lambda E_n$ karakterisztikus mátrix ρ_λ rangját és a (3.24) formula felhasználásával meghatározzuk a g_λ geometriai multiplicitást.

3. lépés Kiszámítjuk a λ sajátértékhez tartozó sajátvektort (ha szükséges $a_\lambda - g_\lambda$ számú fővektort).

4. lépés Az így kapott vektorokat egy B mátrix oszlopvektorainak tekintve (komplex sajátértékek esetén a komplex saját- ill. fővektorok valós és képzetes része külön oszlopnak tekintendő) kiszámítjuk B^{-1}-t ill. $J := B^{-1}AB$-t.

5. lépés A

$$B^{-1}AB = \operatorname{diag}\{J_1, \dots, J_k\}$$

felírásban azonosítjuk a $J_1, \dots, J_k$ Jordan-blokkokat, majd minden $k \in \{1, \dots, n\}$ esetén felírjuk az e^{tJ_k} mátrixot.

6. lépés Kiszámítjuk e^{tA}-t:

$$e^{tA} = B \operatorname{diag}\left\{e^{tJ_1}, \dots, e^{tJ_k}\right\} B^{-1} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

A fenti eljárást szemléltetik az alábbi példák.

4.2. Példa. *Kétdimenziós esetben, azaz ha $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, J az alábbi három mátrix valamelyike lehet:*

$$\textit{1)}\ J = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \qquad \textit{2)}\ J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \qquad \textit{3)}\ J = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix},$$

ui.

1) *ha $\sigma(A) = \{\lambda, \mu\}$ és A-nak két lineárisan független sajátvektora van: s, t (lehet $\lambda = \mu$ is), akkor a $B := [s, t]$ mátrixszal:*

$$\begin{aligned} J = B^{-1}AB &= B^{-1}A[s,t] = B^{-1}[As, At] = B^{-1}[\lambda s, \mu t] = \\ &= \frac{1}{s_1t_2 - s_2t_1}\begin{bmatrix} t_2 & -t_1 \\ -s_2 & s_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda s_1 & \mu t_1 \\ \lambda s_2 & \mu t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

2) *ha $\sigma(A) = \{\lambda\}$ és $\operatorname{rang}(A - \lambda E_2) = 1$, azaz A-nak egy sajátvektora: s, és egy másodrendű fővektora van: t, azaz $At = s + \lambda t$, akkor a $B := [s, t]$ mátrixszal:*

$$\begin{aligned} J = B^{-1}AB &= B^{-1}A[s,t] = B^{-1}[As, At] = B^{-1}[\lambda s, s + \lambda t] = \\ &= \frac{1}{s_1t_2 - s_2t_1}\begin{bmatrix} t_2 & -t_1 \\ -s_2 & s_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda s_1 & s_1 + \lambda t_1 \\ \lambda s_2 & s_2 + \lambda t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

3) *ha* $\sigma(A) = \{\alpha + \imath\beta, \alpha - \imath\beta\}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R} : \ \beta \neq 0)$ *és* A *megfelelő sajátvektorai:* $s = u + \imath v$ *és* $t = u - \imath v$*, ahol* $u, v \in \mathbb{R}^2$*, akkor a* $B := [u, v]$ *mátrixszal:*

$$\begin{aligned} J = B^{-1}AB &= B^{-1}A[u,v] = B^{-1}[Au, Av] = B^{-1}[\alpha u - \beta v, \beta u + \alpha v] = \\ &= \frac{1}{u_1 v_2 - u_2 v_1} \begin{bmatrix} v_2 & -v_1 \\ -u_2 & u_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha u_1 - \beta v_1 & \beta u_1 + \alpha v_1 \\ \alpha u_2 - \beta v_2 & \beta u_2 + \alpha v_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ha $B := [v, u]$*, akkor* $J = B^{-1}AB = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$.

Az ilyen J *mátrix esetén* e^{tJ} *a következő módon számítható ki:*

- *Ha* $J := \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$*, akkor teljes indukcióval azt kapjuk, hogy* $J^\nu = \begin{bmatrix} \lambda^\nu & 0 \\ 0 & \mu^\nu \end{bmatrix}$

  $(\nu \in \mathbb{N}_0)$*, és így*

$$e^{tJ} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} \begin{bmatrix} \lambda^\nu & 0 \\ 0 & \mu^\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^\nu}{\nu!} & 0 \\ 0 & \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\mu t)^\nu}{\nu!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{bmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}). \tag{4.37}$$

- *Ha* $J := \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} =: N + D$*, ahol* $ND = DN$*, akkor*

  (3.28) következtében $e^{tJ} = e^{t(N+D)} = e^{tN}e^{tD}$ $(t \in \mathbb{R})$*. Mivel* N *nilpotens és* D *diagonális, ezért*

$$e^{tN} = E_2 + tN = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \textit{ill.} \quad e^{tD} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

  Tehát

$$e^{tJ} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}). \tag{4.38}$$

- *Ha* $J = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{bmatrix} =: A + B$, *ahol* $AB = BA$, *akkor*

  (3.28) következtében $e^{tJ} = e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$. *Világos, hogy* $e^{tA} = e^{\alpha t}E_2$ *és*

$$B^{\nu} = (-1)^k \cdot \begin{cases} \begin{bmatrix} \beta^{2k} & 0 \\ 0 & \beta^{2k} \end{bmatrix} & (\nu = 2k) \\ & \\ \begin{bmatrix} 0 & \beta^{2k+1} \\ -\beta^{2k+1} & 0 \end{bmatrix} & (\nu = 2k+1) \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{N}_0).$$

  Tehát

$$\begin{aligned} e^{tJ} &= e^{\alpha t} \cdot \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} \begin{bmatrix} \beta^{2k} & 0 \\ 0 & \beta^{2k} \end{bmatrix} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} \begin{bmatrix} 0 & \beta^{2k+1} \\ -\beta^{2k+1} & 0 \end{bmatrix} \right\} = \\ &= e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}). \end{aligned} \tag{4.39}$$

Végül (3.28) felhasználásával e^{tA}*-t így számítjuk ki:* $e^{tA} = Be^{tJ}B^{-1}$ $(t \in \mathbb{R})$.

4.3. Példa. *Az*

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.40}$$

mátrix determinánsára

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2,$$

így A karakterisztikus polinomja:

$$\chi_A(z) = z^3 - 4z^2 + 5z - 2 = (z-1)^2(z-2) \quad (z \in \mathbb{K})$$

(vö. (3.23)) és $a_1 = 2$, $a_2 = 1$. *Mivel*

$$\operatorname{rang}(E_3 - A) = \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 2, \tag{4.41}$$

és (3.24) alapján $g_1 = 3-2 = 1$, *ezért az* 1 *sajátértékhez egy sajátvektort és egy fővektort és a* 2 *sajátértékhez egy sajátvektort kell keresni. Az* 1 *sajátértékhez tartozó sajátvektor meghatározásához egy* $A - E_3$ *együttható-mátrixú homogén lineáris egyenletrendszert kell megoldani:*

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ennek az egyenletrendszernek egydimenziós megoldástere van, amelyet pl. az $u := (1,1,0)$ *vektor feszít ki. Az* $(A-E)h = u$, *azaz a*

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

inhomogén egyenletrendszer megoldásával kapjuk meg a $h = (0,0,-1)$ *fővektort. A* 2 *sajátértékhez tartozó sajátvektor a következő lineáris egyenletrendszer nemtriviális megoldásaként kapható:*

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \textit{azaz pl.} \quad v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Az így kapott u, v *sajátvektorokból és a* h *fővektorból elkészítjük a*

$$B := [u,h,v] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixot, melynek inverze

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A

$$J := B^{-1}AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix olyan Jordan-mátrix, amelyben a sajátvektorok ill. a fővektor sorrendjében a következő blokkok ismerhetők fel:

$$J_1 := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \textit{és} \quad J_2 := [2].$$

(3.28) ill. (4.38) következtében ezen blokkok exponenciálisa

$$\exp(tJ_1) = e^t \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \textit{és} \qquad \exp(tJ_2) = \left[e^{2t}\right] \quad (t \in \mathbb{R}),$$

így

$$\exp(tJ) = \operatorname{diag}\{\exp(tJ_1), \exp(tJ_2)\} = \begin{bmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Ezért

$$e^{tA} = Be^{tJ}B^{-1} = \begin{bmatrix} e^t - te^t & te^t & -te^t \\ e^t - e^{2t} - te^t & te^t + e^{2t} & -te^t \\ e^t - e^{2t} & -e^t + e^{2t} & e^t \end{bmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}). \tag{4.42}$$

4.3. e^{tA} számítása interpoláció segítségével

Ebben a fejezetben olyan módszerről lesz szó, amely még J. J. Sylvester-től származik (vö. [20]), és amelynek részletes tárgyalása [19]-ben, ill. később [8]-ban, [4]-ben ill. [18]-ban is megtalálható.

Mielőtt ezt megtennénk, ejtsünk egy pár szót polinomkról és az interpolációról.

Tudjuk, hogy két polinom pontosan akkor egyenlő, ha minden együtthatójuk megegyezik. Tehát a polinomokat egyértelműen meghatározzák ez együtthatói. A Taylor-tétel következménye, hogy valamely $p(z) := \sum_{k=0}^{N} a_k z^k$ $(z \in \mathbb{K})$ polinom együtthatói lényegében a polinom deriváltjainak bizonyos helyen felvett értékei, azaz minden $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $p(z) = \sum_{k=0}^{N} b_k (z-\alpha)^k$ $(z \in \mathbb{K})$, ahol $b_k = p^{(k)}(\alpha)/k!$ $(k \in \{0, \ldots, N\})$. Világos, hogy a

$$\varphi(a) := \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \qquad \big(a := (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}\big)$$

függvény minden $z \in \mathbb{K}$ esetén folytonos, ui.

$$|a_k - b_k| \leq \max\left\{|a_k - b_k| \in \mathbb{R} : \ k \in \{0, \ldots, n\}\right\} \leq \|a - b\| \quad (k \in \{0, \ldots, n\})$$

következtében tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}^{n+1}$ esetén

$$|\varphi(a) - \varphi(b)| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k - b_k| \cdot |z|^k \leq \sum_{k=0}^{n} \|a - b\| \cdot |z|^k = \left(\sum_{k=0}^{n} |z|^k\right) \cdot \|a - b\|.$$

Ha (φ_ν) $(\nu \in \mathbb{N})$ a fenti függvények sorozata, akkor igaz a

$$\lim(\varphi_\nu) = \varphi \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_k^{(\nu)} \to a_k \quad (\nu \to \infty) \quad (k \in \{0, \ldots, n\}) \tag{4.43}$$

ekvivalencia. A *Hermite-féle interpoláció* lényege a következő: adott (páronként különböző)

$$x_k \in \mathbb{K} \quad (k \in \{1, \ldots, r\}, \ r \in \mathbb{N})$$

alappontokhoz ill. az

$$y_k^{(l)} \in \mathbb{K} \quad (l \in \{0, \ldots, m_k - 1\}, \ m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N})$$

értékekhez olyan legfeljebb N-edfokú $(N + 1 := \sum_{k=1}^{r} m_k)$ h polinomot kell meghatározni, amelyre

$$h^{(l)}(x_k) = y_k^{(l)}, \qquad (k \in \{1, \ldots, r\}, \ l \in \{0, \ldots, m_k - 1\}). \tag{4.44}$$

Ennek a polinomnak az együtthatóit az $N+1$ ismeretlent tartalmazó $N+1$ egyenletből álló

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^N \\ 0 & 1 & 2x_1 & \dots & Nx_1^{N-1} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^{(0)} \\ y_1^{(1)} \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{4.45}$$

egyenletrendszer szolgáltatja. Az $m_k = 1$ ($k \in \{1, \dots, r\}$) speciális esetben h a következő alakú:

$$h(z) = \sum_{k=1}^{r} h(x_k) L_k(z), \quad \text{ahol} \quad L_k(z) := \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{r} \frac{z - x_l}{x_k - x_l} \quad (z \in \mathbb{K}) \tag{4.46}$$

(*Lagrange-interpoláció*). Ha minden $k \in \{1, \dots, r\}$ esetén $y_k = 1$, akkor (4.46)-ból

$$1 = \sum_{k=1}^{r} L_k(z) \quad (z \in \mathbb{K}) \tag{4.47}$$

következik. Így a következő tételt bizonyíthatjuk be.

4.4. Tétel. *Ha az A mátrix minden sajátértéke különböző, azaz $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, akkor*

$$e^{tA} = \sum_{k=1}^{n} e^{\lambda_k t} L_k(A) \quad (t \in \mathbb{R}), \tag{4.48}$$

ahol

$$L_k(A) := \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} \frac{A - \lambda_l E_n}{\lambda_k - \lambda_l} \quad (k \in \{1, \dots, n\}).$$

Bizonyítás: (vö. [1]) Megmutatjuk, hogy a

$$\Phi(t) := \sum_{k=1}^{n} e^{\lambda_k t} L_k(A) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

függvény megoldása az

$$\dot{X} = AX, \quad X(0) = E_n \tag{4.49}$$

kezdetiérték-feladatnak. (4.49) megoldásának egyértelműsége miatt $\Phi(t) = e^{tA}$ ($t \in \mathbb{R}$). (4.47) miatt $\Phi(0) = \sum_{k=1}^{n} L_k(A) = E_n$. Így már csak azt kell megmutatnunk, hogy minden $t \in \mathbb{R}$ esetén $\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t)$. Ez viszont a Cayley-Hamilton-tétel (vö. 3.1. tétel) következménye, ui.

$$A\Phi(t) - \dot{\Phi}(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{\lambda_k t} A L_k(A) - \sum_{k=1}^{n} e^{\lambda_k t} \lambda_k L_k(A) = \sum_{k=1}^{n} e^{\lambda_k t} (A - \lambda_k E_n) L_k(A) = \mathbf{O} \quad (t \in \mathbb{R})$$

mivel $(A - \lambda_k E_n) L_k(A) = \mathbf{O}$ (vö. (3.27)). ■

Ennek a tételnek fontos következménye van az alkalmazások szempontjából:

4.5. Tétel. *Ha az A mátrix minden sajátértéke különböző, azaz $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, akkor*

$$e^{tA} = \left[e^{\lambda_1 t} s_1 \ldots e^{\lambda_n t} s_n \right] \quad (t \in \mathbb{R}), \tag{4.50}$$

ahol s_k az A λ_k sajátértékhez tartozó (jobb oldali) sajátvektora: $A s_k = \lambda_k s_k$ ($k \in \{1, \ldots, n\}$).

Bizonyítás: (vö. [7]) Az ismert tényből, miszerint egy homogén egyenlet alapmátrixát tetszőleges $c \in \mathbb{R}^n$ vektorral szorozva a homogén egyenlet megoldását kapjuk, nyilvánvaló, hogy a

$$\varphi_1(t) := e^{tA} s_1, \ldots, \varphi_n(t) := e^{tA} s_n \qquad (t \in \mathbb{R})$$

függvények megoldásai az (1.1)-hez tartozó homogén rendszernek ($b(t) \equiv 0$), továbbá a

$$\Psi(t) := \left[e^{tA} s_1 \ldots e^{tA} s_n \right] \qquad (t \in \mathbb{R})$$

mátrix reguláris, ui. az e^{tA} és az $[s_1 \ldots s_n]$ reguláris mátrixok szorzata. Így Ψ alapmátrix. Továbbá, mivel

$$\begin{aligned} L_k(A) s_j &= \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} \frac{A - \lambda_l E_n}{\lambda_k - \lambda_l} s_j = \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} \frac{A s_j - \lambda_l s_j}{\lambda_k - \lambda_l} = \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} \frac{\lambda_j s_j - \lambda_l s_j}{\lambda_k - \lambda_l} = \\ &= \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} \frac{\lambda_j - \lambda_l}{\lambda_k - \lambda_l} s_j = \begin{cases} 0 & (k \neq j) \\ s_j & (k = j) \end{cases} \qquad (j, k \in \{1, \ldots, n\}), \end{aligned}$$

ezért

$$e^{tA}s_j = \sum_{k=1}^{n} e^{\lambda_k t} L_k(A) s_j = e^{\lambda_j t} s_j \qquad (j \in \{1, \ldots, n\}). \quad \blacksquare$$

Tegyük fel, hogy A spektruma valamely f analitikus függvény konvergenciahalmazának része: $\sigma(A) \subset U_R(0)$ (vö. (3.29)), és tekintsük a

$$h(z) := h_N z^N + \ldots + h_1 z + h_0 \quad (z \in \mathbb{K})$$

polinomot, ahol

$$h^{(l)}(\lambda_k) = f_k^{(l)}(\lambda_k), \qquad (k \in \{1, \ldots, r\},\ l \in \{0, \ldots, m_k - 1\}), \tag{4.51}$$

$\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ és λ_k az A minimálpolinomjának m_k-szoros gyöke ($k \in \{1, \ldots, r\}$) ill. $N := \sum\limits_{k=1}^{r} m_k - 1$. Mint ahogy azt említettük, az Hermite-féle interpolációs polinom pont egy ilyen polinom. Az ilyen h polinomra igaz a következő tétel.

4.6. Tétel. *Ha az f analitikus függvény konvergenciahalmaza tartalmazza A összes sajátértékét, akkor a (3.30)-beli részletösszegek sorozata konvergens, azaz $f(A) \in \mathbb{K}^{n \times n}$, és f-et A spektrumán interpoláló fenti h polinomra $f(A) = h(A)$.*

Bizonyítás: Maradékos osztással f minden s_ν (vö. (3.30)) részletösszegéhez és a μ_A minimálpolinomhoz található olyan q_ν és r_ν polinom, amelyekre

$$s_\nu = \mu_A q_\nu + r_\nu \quad \text{és} \quad \mathrm{Grad}(r_\nu) < \mathrm{Grad}(\mu_A) = N \quad (\nu \in \mathbb{N}_0). \tag{4.52}$$

Mivel λ_k a μ_A minimálpolinom m_k-szoros gyöke, s_ν l-edik deriváltjára:

$$s_\nu^{(l)}(\lambda_k) = r_\nu^{(l)}(\lambda_k) \quad (k \in \{1, \ldots, r\};\ l \in \{0, \ldots, m_k - 1\}).$$

Így (3.30)-ból ill. (4.51)-ból következik (vö. (4.43)), hogy

$$\lim_{\nu\to\infty} \left(r_\nu^{(l)}(\lambda_k)\right) = f^{(l)}(\lambda_k) = h^{(l)}(\lambda_k), \quad \text{azaz} \quad \lim_{\nu\to\infty} (r_\nu(z)) = h(z) \quad (z \in \mathbb{K}). \tag{4.53}$$

Mivel $\mu_A(A) = \mathbf{O}$, ezért (4.52)-ból $s_\nu(A) = r_\nu(A)$ ($\nu \in \mathbb{N}_0$) következik és (4.53) miatt

$$\lim_{\nu\to\infty} (s_\nu(A)) = \lim_{\nu\to\infty} (r_\nu(A)) = h(A). \quad \blacksquare$$

Az e^{tA} $(t \in \mathbb{R})$ mátrix-exponenciális függvény kiszámításához az egész síkon analitikus $f(z) = e^{tz}$ $(z \in \mathbb{K})$ függvényt használjuk fel. Ebben az esetben

$$e^{tA} = h_t(A) = h_N(t)A^N + \ldots + h_1(t)A + h_0(t)E_n \quad (t \in \mathbb{R}),$$

ahol h_t f-et interpoláló polinom, amelynek együtthatói (4.51) következtében a – tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén érvényes –

$$\sum_{j=l}^{N} \frac{j!}{(j-l)!}\lambda_k^{j-1} h_j(t) = t^l e^{\lambda_k t} \quad (k = 1, \ldots, r;\ l = 0, \ldots, m_k - 1) \tag{4.54}$$

egyenletrendszer megoldásai ($N + 1 = \sum_{k=1}^{r} m_k$).
Így e^{tA} $(t \in \mathbb{R})$ Hermite-interpoláción alapuló kiszámításának lépései a következők:

1. lépés. Meghatározzuk A karakterisztikus polinomját és sajátértékeit.

2. lépés. Meghatározzuk a (4.54)-beli h_t polinomot.

3. lépés. Behelyettesítjük az A mátrixot h_t-be: $h_t(A) = e^{tA}$.

A következőkben a (4.40) és a (4.34) mátrixok esetében szemléltetjük ezt a módszert, hogy látható legyen, mennyi számolással jár.

4.4. Példa. *Legyen A a (4.40)-beli mátrix. A 4.3. példából tudjuk, hogy karakterisztikus polinomja: $\chi_A(A) = (z-1)^2(z-2)$ $(z \in \mathbb{K})$. Mivel csak egyetlen kétszeres sajátértéke van A-nak, ezért (4.41) következtében A nem diagonalizálható és* 1 *algebrai és geometriai multiplicitása nem egyezik meg, így a minimálpolinom azonos a karakterisztikus polinommal. Tehát olyan legfeljebb $N = (2+1) - 1 = 2$-odfokú h_t polinomot kell keresni, amelyre*

$$\begin{aligned} h_t(1) &= f(1), \quad \textit{azaz} \quad h_2(t) + h_1(t) + h_0(t) = e^t, \\ h_t'(1) &= f'(1), \quad \textit{azaz} \quad 2h_2(t) + h_1(t) = te^t, \qquad\qquad (t \in \mathbb{R}). \\ h_t(2) &= f(2), \quad \textit{azaz} \quad 4h_2(t) + 2h_1(t) + h_0(t) = e^{2t} \end{aligned}$$

Az első és a harmadik egyenletből kivonással $e^{2t} - e^t = h_1(t) + 3h_2(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ adódik. Innen a második egyenlet figyelembevételével azt kapjuk, hogy $e^{2t} - e^t - te^t = h_2(t)$ $(t \in \mathbb{R})$.

Ezért $h_1(t) = 2e^t + 3te^t - 2e^{2t}$ *és* $h_0(t) = e^{2t} - 2te^t$, *ahonnan*

$$e^{tA} = h_2(t)A^2 + h_1(t)A + h_0(t)E_3 = \{e^{2t} - e^t - te^t\} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -5 & 6 & -2 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix} +$$

$$+\{2e^t + 3te^t - 2e^{2t}\} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \{e^{2t} - 2te^t\} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^t - te^t & te^t & -te^t \\ e^t - e^{2t} - te^t & te^t + e^{2t} & -te^t \\ e^t - e^{2t} & -e^t + e^{2t} & e^t \end{bmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}),$$

egyezően (4.42)-vel.

4.5. Példa. *Legyen most A a (4.34)-beli antiszimmetrikus mátrix. Ekkor A sajátértékei:*

$$\lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = \imath\omega, \quad \lambda_2 = -\imath\omega.$$

Mivel minden sajátértéke egyszeres, A karakterisztikus polinomja egybeesik minimálpolinomjával. Olyan legfeljebb $N = (1 + 1 + 1) - 1 = 2$*-odfokú* h_t *polinomot kell keresni, amelyre*

$$\begin{aligned} h_t(0) &= f(0), && \textit{azaz} \;\; h_0(t) = 1, \\ h_t(\imath\omega) &= f(\imath\omega), && \textit{azaz} \;\; h_0(t) + \imath\omega h_1(t) - \omega^2 h_2(t) = e^{\imath\omega t}, \qquad (t \in \mathbb{R}). \\ h_t(-\imath\omega) &= f(-\imath\omega), && \textit{azaz} \;\; h_0(t) - \imath\omega h_1(t) - \omega^2 h_2(t) = e^{-\imath\omega t} \end{aligned}$$

A második és a harmadik egyenletet összeadva azt kapjuk, hogy

$$h_2(t) = \frac{e^{\imath\omega t} + e^{-\imath\omega t} - 2}{-2\omega^2} = \frac{2\cosh(\imath\omega t) - 2}{-2\omega^2} = \frac{1 - \cos(\omega t)}{\omega^2} \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

és a második egyenlet figyelembevételével pedig tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$h_1(t) = \frac{e^{\imath\omega t} + \omega^2 h_2(t) - 1}{\imath\omega} = \frac{\cos(\omega t) + \imath\sin(\omega t) + 1 - \cos(\omega t) - 1}{\imath\omega} = \frac{\sin(\omega t)}{\omega}.$$

Így

$$e^{tA} = h_2(t)A^2 + h_1(t)A + h_0(t)E_3 = \frac{1 - \cos(\omega t)}{\omega^2}A^2 + \frac{\sin(\omega t)}{\omega}A + E_3 \quad (t \in \mathbb{R}).$$

4.4. e^{tA} számítása Putzer módszereivel

(3.26) ill. a 3.1. tétel következtében A minden n-nél nem nagyobb hatványa az $E_n, A, \ldots, A^{n-1}$ mátrixok lineáris kombinációjaként írható:

$$A^\nu = \sum_{l=0}^{n-1} d_{\nu l} A^l \qquad (\nu \in \{0, \ldots, n\}), \tag{4.55}$$

ahol $d_{\nu l} \in \mathbb{R}$ alkalmas együtthatók. Ekkor a mátrixexponenciális függvény a következő alakú:

$$e^{tA} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu} A^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu} \sum_{l=1}^{n-1} d_{\nu l} A^l = \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu} d_{\nu l} A^l = \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_l(t) A^l \quad (t \in \mathbb{R}) \tag{4.56}$$

ahol α_l analitikus együtthatók (vö. [15]). A következőkben két egyszerű módszert mutatunk az α_l $(l \in \mathbb{N})$ együtthatók kiszámítására.

4.4.1. Putzer első módszere

A [16] dolgozatában E. J. Putzer az α_l $(l \in \mathbb{N})$ együtthatók meghatározására ad eljárást a karakterisztikus polinom c_k $(k \in \{0, \ldots, n-1\})$ együtthatóinak és egy n-edrendű lineáris differenciálegyenlet megoldásának függvényében. Az

$$\begin{gathered} x^{(n)} + c_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + c_1 \dot{x} + c_0 x = 0; \\ x(0) = \dot{x}(0) = \ldots = x^{(n-2)}(0) = 0, \quad x^{(n-1)}(0) = 1 \end{gathered} \tag{4.57}$$

kezdetiérték-feladat egy φ megoldása esetén értelmezzük a C és $\mathbf{z}$ mátrixot a következő módon:

$$C := \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_{n-1} & 1 \\ c_2 & c_3 & \ldots & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ c_{n-1} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{z} := \begin{bmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \\ \vdots \\ \varphi^{(n-2)} \\ \varphi^{(n-1)} \end{bmatrix}. \tag{4.58}$$

Ekkor az α_l $(l \in \mathbb{N})$ együtthatókra igaz a következő

4.7. Tétel. *Ha* $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1})^T$*, akkor* $\boldsymbol{\alpha} = C\mathbf{z}$*.*

Bizonyítás: Legyen

$$\Phi(t) := \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_l(t) A^l \qquad (t \in \mathbb{R}). \tag{4.59}$$

Megmutatjuk, hogy Φ megoldása az

$$\dot{X} = AX, \quad X(0) = E_n \tag{4.60}$$

kezdetiérték-feladatnak, ugyanis ekkor (4.60) megoldásának egyértelműsége miatt $\Phi(t) = e^{tA}$ $(t \in \mathbb{R})$. Világos, hogy Φ kielégíti az $X(0) = E_n$ kezdeti feltételt, ugyanis $\varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = \ldots = \varphi^{(n-2)}(0) = 0$-ból ill. $\varphi^{(n-1)}(0) = 1$-ből az következik, hogy

$$\Phi(0) = \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_l(0) A^l = \alpha_0(0) E_n = E_n$$

(vö. (4.58)). Tehát már csak azt kell megmutatni, hogy Φ megoldása az $\dot{X} = AX$ mátrix-differenciálegyenletnek. (4.55)-ből $\nu = n$, azaz $d_{nl} = -c_l$ esetén következik, hogy

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) - A\Phi(t) &= \sum_{l=0}^{n-1} \dot{\alpha}_l(t) A^l - A \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_l(t) A^l = \dot{\alpha}_0(t) E_n + \dot{\alpha}_1(t) A + \ldots + \dot{\alpha}_{n-1}(t) A^{n-1} - \\ &\quad -\alpha_0(t) A - \alpha_1(t) A^2 - \ldots - \alpha_{n-1}(t) \left(-\sum_{l=0}^{n-1} c_l A^l \right) = \\ &= \left[\dot{\alpha}_0(t) + c_0 \alpha_{n-1}(t)\right] E_n + \sum_{l=1}^{n-1} \left[\dot{\alpha}_l(t) - \alpha_{l-1}(t) + c_l \alpha_{n-1}(t)\right] A^l \quad (t \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Így tehát $\dot{\Phi} = A\Phi$ pontosan akkor teljesül, ha az α_l $(l \in \mathbb{N})$ együtthatókra

1) $\dot{\alpha}_0(t) = -c_0 \alpha_{n-1}(t) \quad (t \in \mathbb{R})$,
2) $\dot{\alpha}_l(t) = \alpha_{l-1}(t) - c_l \alpha_{n-1}(t) \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (l \in \{1, \ldots, n-1\})$.

Az $\boldsymbol{\alpha} = C\mathbf{z}$ egyenlőség l-edik komponense

$$\alpha_l = \sum_{k=1}^{n-l-1} c_{k+l} \varphi^{(k-1)} + \varphi^{(n-l-1)} \qquad (l \in \{0, \ldots, n-1\}),$$

tehát $\dot{\alpha}_l = \sum\limits_{k=1}^{n-l-1} c_{k+l}\varphi^{(k)} + \varphi^{(n-l)}$. (4.58)-ból nyilvánvalóan $\alpha_{n-1} = \varphi$ következik, ezért

$$\dot{\alpha}_l + c_l\alpha_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-l-1} c_{k+l}\varphi^{(k)} + \varphi^{(n-l)} \quad (l \in \{0, \dots, n-1\}),$$

ami (4.57) miatt az $l = 0$ speciális esetben

$$\dot{\alpha}_0 + c_0\alpha_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} c_k\varphi^{(k)} + \varphi^{(n)} = 0$$

alakú, ami igazolja 1)-et. 2) pedig azért igaz, mert

$$\alpha_{l-1} = \sum_{k=0}^{n-l-1} c_{k+l}\varphi^{(k)} + \varphi^{(n-l)} = \dot{\alpha}_l + c_l\alpha_{n-1} \quad (l \in \{1, \dots, n-1\})$$

teljesül. ■

Így e^{tA} $(t \in \mathbb{R})$ Putzer első módszerén alapuló kiszámításának lépései a következők:

1. lépés. Meghatározzuk A karakterisztikus polinomját és sajátértékeit.

2. lépés. Megoldjuk a (4.57)-beli n-edrendű lineáris differenciálegyenletet.

3. lépés. Képezzük a (4.58)-beli $C\mathbf{z}$ szorzatot.

4. lépés. Képezzük a (4.56)-beli véges összeget.

4.6. Példa. *A (4.40)-beli A mátrix esetében*

$$\chi_A(z) = z^3 - 4z^2 + 5z - 2 = (z-1)^2(z-2) \qquad (z \in \mathbb{K}).$$

Így a C mátrix a következő alakú:

$$C = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tetszőleges $a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén a

$$\varphi(t) := ae^t + bte^t + ce^{2t} \quad (t \in \mathbb{R})$$

függvény megoldása az

$$\dddot{x} - 4\ddot{x} + 5\dot{x} - 2x = 0,$$

harmadrendű lineáris differenciálegyenletnek. Az

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0; \quad \ddot{x}(0) = 1$$

kezdeti feltételek figyelembevételével adódik, hogy

$$\begin{aligned}
&\varphi(0) = a + c = 0,\\
&\dot{\varphi}(0) = \left[(a+b)e^t + bte^t + 2ce^{2t}\right]_{t=0} = a + b + 2c = 0,\\
&\ddot{\varphi}(0) = \left[(a+2b)e^t + bte^t + 4ce^{2t}\right]_{t=0} = a + 2b + 4c = 1,
\end{aligned}$$

tehát $a = b = -1$ és $c = 1$. Így a $\mathbf{z}$ vektor a következő alakú:

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} -e^t - te^t + e^{2t} \\ -2e^t - te^t + 2e^{2t} \\ -3e^t - te^t + 4e^{2t} \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

A $C\mathbf{z}$ szorzat így az együtthatókat – mint $\boldsymbol{\alpha}$ komponenseit – szolgáltatja:

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -e^t - te^t + e^{2t} \\ -2e^t - te^t + 2e^{2t} \\ -3e^t - te^t + 4e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2te^t + e^{2t} \\ 2e^t + 3te^t - 2e^{2t} \\ -e^t - te^t + e^{2t} \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

A mátrix-exponenciális függvény ezek után a következő módon számítható ki:

$$\begin{aligned}
e^{tA} \quad &= \quad \alpha_0(t)E_3 + \alpha_1(t)A + \alpha_2(t)A^2 = \{-2te^t + e^{2t}\} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \\
&+ \{2e^t + 3te^t - 2e^{2t}\} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \{-e^t - te^t + e^{2t}\} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -5 & 6 & -2 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} e^t - te^t & te^t & -te^t \\ e^t - e^{2t} - te^t & te^t + e^{2t} & -te^t \\ e^t - e^{2t} & -e^t + e^{2t} & e^t \end{bmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

(egyezően (4.42)-vel).

4.4.2. Putzer második módszere

[16]-ben E. J. Putzer egy második algoritmust is közölt, amely szintén a 3.1. tételen alapul, de a karakterisztikus polinom A helyen vett helyettesítési értékének (3.27)-es alakját használja.

4.8. Tétel. *Ha $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix (nem feltétlenül különböző) sajátértékei, akkor*

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{n-1} r_{k+1}(t) P_k \quad (t \in \mathbb{R}), \tag{4.61}$$

ahol

$$P_k = \begin{cases} E_n & (k = 0) \\ \prod\limits_{l=1}^{k} (A - \lambda_l E_n) & (k \in \{1, \ldots, n-1\}) \end{cases} \tag{4.62}$$

és

$$\dot{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \dot{r}_1 \\ \dot{r}_2 \\ \vdots \\ \dot{r}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 r_1 \\ r_1 + \lambda_2 r_2 \\ \vdots \\ r_{n-1} + \lambda_n r_n \end{bmatrix} \quad \textit{és} \quad \mathbf{r}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.63}$$

Bizonyítás: Tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén legyen

$$r_0(t) := 0 \qquad \text{és} \qquad \Phi(t) := \sum_{k=0}^{n-1} r_{k+1}(t) P_k.$$

Megmutatjuk, hogy Φ megoldása az

$$\dot{X} = AX, \quad X(0) = E_n \tag{4.64}$$

kezdetiérték-feladatnak, ugyanis ekkor (4.64) megoldásának egyértelműsége miatt $\Phi(t) = e^{tA}$ $(t \in \mathbb{R})$. Világos, hogy Φ kielégíti az $X(0) = E_n$ kezdeti feltételt, ugyanis

$$\Phi(0) = \sum_{k=0}^{n-1} r_{k+1}(0) P_k = r_1(0) E_n = E_n.$$

Tehát már csak azt kell megmutatni, hogy Φ megoldása az $\dot{X} = AX$ mátrix-differenciálegyenletnek. (4.63) következtében

$$\dot{\Phi}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \dot{r}_{k+1}(t) P_k = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\lambda_{k+1} r_{k+1}(t) + r_k\right] P_k,$$

tehát

$$\begin{aligned}
\dot{\Phi}(t)-\lambda_n\Phi(t) &= \sum_{k=0}^{n-1}\left[\lambda_{k+1}r_{k+1}(t)+r_k\right]P_k-\lambda_n\sum_{k=0}^{n-1}r_{k+1}(t)P_k= \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left[\lambda_{k+1}-\lambda_n\right]r_{k+1}(t)P_k+\sum_{k=0}^{n-1}r_k(t)P_k= \\
&= \sum_{k=0}^{n-2}\left[\lambda_{k+1}-\lambda_n\right]r_{k+1}(t)P_k+\sum_{k=0}^{n-2}r_{k+1}(t)P_{k+1} \qquad (t\in\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

(4.62) miatt $P_{k+1}=(A-\lambda_{k+1}E_n)P_k$ $(k\in\{0,\ldots,n-1\})$, így

$$\begin{aligned}
\dot{\Phi}(t)-\lambda_n\Phi(t) &= \sum_{k=0}^{n-2}r_{k+1}(t)\left[(A-\lambda_{k+1}E_n)P_k+(\lambda_{k+1}-\lambda_n)P_k\right]= \\
&= \sum_{k=0}^{n-2}r_{k+1}(t)(A-\lambda_nE_n)P_k=(A-\lambda_nE_n)\sum_{k=0}^{n-2}r_{k+1}(t)P_k \quad (t\in\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Ez az összeg a következő alakba írható:

$$\sum_{k=0}^{n-2}r_{k+1}(t)P_k=\sum_{k=0}^{n-1}r_{k+1}(t)P_k-r_n(t)P_{n-1}=\Phi(t)-r_n(t)P_{n-1} \qquad (t\in\mathbb{R}).$$

Így a fenti különbség nem más, mint

$$\dot{\Phi}(t)-\lambda_n\Phi(t)=(A-\lambda_nE_n)\Phi(t)-r_n(t)(A-\lambda_nE_n)P_{n-1}=(A-\lambda_nE_n)\Phi(t)-r_n(t)P_n \quad (t\in\mathbb{R}).$$

A Cayley-Hamilton-tételből (vö. (3.27)) következik, hogy

$$P_n=\prod_{l=1}^{n}(A-\lambda_lE_n)=\chi_A(A)=\mathbf{O},$$

azaz $\dot{\Phi}(t)=A\Phi(t)$ $(t\in\mathbb{R})$. ■

Így e^{tA} $(t\in\mathbb{R})$ Putzer második módszerén alapuló kiszámításának lépései a következők:

1. lépés. Meghatározzuk A karakterisztikus polinomját és sajátértékeit.

2. lépés. Megoldjuk a (4.63)-beli elsőrendű lineáris differenciálegyenlet-rendszert.

3. lépés. Kiszámítjuk a (4.62)-beli szorzatot.

4. lépés. Képezzük a (4.61)-beli véges összeget.

4.7. Példa. *Tekintsük ismét a (4.40)-beli A mátrixot, melynek sajátértékei: 1 (kétszeres) és 2. Ezért olyan* $\mathbf{r}$ *függvényt keresünk, amelynek koordiáta-függvényeire*

$$\left.\begin{array}{rcl} \dot{r}_1 &=& r_1 \\ \dot{r}_2 &=& r_1 + r_2 \\ \dot{r}_3 &=& r_2 + 2r_3 \end{array}\right\}, \qquad \begin{bmatrix} r_1(0) \\ r_2(0) \\ r_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

teljesül. Pl. (1.6) felhasználásával

$$r_1(t) = e^t, \quad r_2(t) = te^t, \quad r_3(t) = e^{2t} - e^t - te^t \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

A (4.62)-beli mátrixok pedig a következők:

$$P_1 = A - 1E_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = (A - 1E_3)(A - 1E_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(4.61) alapján így azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} e^{tA} &= r_1 P_0 + r_2 P_1 + r_3 P_2 = \\ &= e^t \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + te^t \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \{e^{2t} - e^t - te^t\} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} e^t - te^t & te^t & -te^t \\ e^t - e^{2t} - te^t & te^t + e^{2t} & -te^t \\ e^t - e^{2t} & -e^t + e^{2t} & e^t \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

4.8. Példa. *Legyen*

$$A := \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A determinánsa viszonylag gyorsan kiszámítható:

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 8,$$

így A karakterisztikus polinomja:

$$\chi_A(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 8 = (z-2)^3 \qquad (z \in \mathbb{K}).$$

Azt kapjuk tehát, hogy

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{2t}\left\{E_3 + t(A-2E_3) + \frac{t^2}{2}(A-2E_3)^2\right\} = \\ &= e^{2t}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\right\} = \\ &= e^{2t}\begin{bmatrix} 1+2t+t^2/2 & 2t-t^2/2 & t^2/2 \\ 3t+t^2 & 1-t-t^2 & -t+t^2 \\ t+t^2/2 & -t^2/2 & 1-t+t^2/2 \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

4.5. e^{tA} számítása Kirchner módszerével

R. B. Kirchner a Cayley-Hamilton-tételen alapuló módszert ad e^{tA} kiszámítására A sajátértékeinek függvényében (vö. [11]).

Tegyük fel, hogy A spektruma: $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$, és vezessük be az $s_i := a_{\lambda_i}$ $(i \in \{1, \ldots, k\})$ jelölést. Ekkor a (3.21)-beli karakterisztikus polinom

$$\chi_A(z) = \prod_{i=1}^{k} (z - \lambda_i)^{s_i} \quad (z \in \mathbb{K})$$

alakú. Teszőleges $j \in \{1, \ldots, k\}$ esetén legyen

$$p_j(z) := \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} (z - \lambda_i)^{s_i} \quad (z \in \mathbb{K}).$$

Ekkor a

$$q(z) := p_1(z) + \ldots + p_k(z) \qquad (z \in \mathbb{K}),$$
$$f_n(x) := 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \qquad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$$

polinomok bevezetésével megfogalmazhatók az alábbi állítások.

4.1. Lemma. *Ha $r(z)$ $(z \in \mathbb{K})$ olyan polinom, melyre $r(\lambda_i) \neq 0$ $(i \in \{1, \ldots, k\})$, akkor $r(A)$ reguláris mátrix, és inverze A-nak polinomja.*

Bizonyítás: $r(\lambda_i) \neq 0$ $(i \in \{1, \ldots, k\})$ miatt r-nek és χ_A-nak nincsen közös gyöktényezője, így van olyan s ill. t polinom, hogy

$$r(z)s(z) + \chi_A(z)t(z) = 1 \qquad (z \in \mathbb{K}).$$

Ezért a Cayley-Hamilton-tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy $r(A)s(A) = E_n$. ■

4.2. Lemma. *Ha B négyzetes mátrix, akkor tetszőleges $j \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $g_j(B)$ mátrix, hogy*

$$e^B = f_j(B) + B^j g_j(B).$$

Bizonyítás: Könnyen belátható, hogy a

$$g_j(B) := \sum_{n=j}^{\infty} \frac{B^{n-j}}{n!} \qquad (j \in \mathbb{N})$$

választás megfelelő. ∎

4.9. Tétel. *Ha tetszőleges $i \in \{1, \ldots, k\}$ esetén*

$$q_i(A) := q(A)^{-1} p_i(A),$$

akkor

$$e^{tA} = \sum_{i=1}^{k} q_i(A) f_{s_i}((A - E_n\lambda_i)t) e^{\lambda_i t} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Bizonyítás: Mivel

$$q(\lambda_i) = \sum_{j=1}^{k} p_j(\lambda_i) = p_i(\lambda_i) \neq 0 \qquad (i \in \{1, \ldots, k\}),$$

ezért az első lemma miatt $q(A)$ reguláris mátrix. Ha tetszőleges $i \in \{1, \ldots, k\}$ esetén $B_i := A - E_n\lambda_i$, akkor – felhasználva a Cayley-Hamilton-tételt (utolsó egyenlőségnél), a második lemmát (utolsó előtti egyenlőség), és felcserélhető M ill. N mátrixokra vonatkozó $e^{M+N} = e^M e^N$ állítást (vö. (3.28)) –, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
e^{tA} &= q(A)^{-1} q(A) e^{tA} = q(A)^{-1} \sum_{i=1}^{k} p_i(A) e^{B_i t + \lambda_i E_n t} = \\
&= q(A)^{-1} \sum_{i=1}^{k} p_i(A) e^{B_i t} e^{\lambda_i E_n t} = \\
&= q(A)^{-1} \sum_{i=1}^{k} \left[p_i(A) f_{s_i}(B_i t) + p_i(A)(B_i t)^{s_i} g_{s_i}(B_i t) \right] e^{\lambda_i t} = \\
&= q(A)^{-1} \sum_{i=1}^{k} p_i(A) f_{s_i}(B_i t) e^{\lambda_i t} \qquad (t \in \mathbb{R}). \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Így e^{tA} ($t \in \mathbb{R}$) kiszámításának Kirchner módszerén alapuló lépései a következők:

1. lépés. Meghatározzuk az A mátrix $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ különböző sajátértékeit.

2. lépés. Megadjuk a $p_i(\lambda)$ polinomokat ($i \in \{1, \ldots, k\}$). Ezekből képezzük $q(\lambda)$ polinomot, behelyettsítjük A-t, és kiszámítjuk $q(A)$ inverzét.

3. lépés. Végül

$$e^{tA} = q(A)^{-1} \sum_{i=1}^{k} p_i(A) f_{s_i}(B_i t) e^{\lambda_i t} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

4.9. Példa. *Tekintsük ismét a 4.12. példabeli A mátrixot, melynek karakterisztikus polinomja:*

$$\chi_A(z) = z^3 + 2z^2 + z \qquad (z \in \mathbb{K})$$

(vö. (3.23)). χ_A gyökei: -1 (kétszeres) és 0 ($s_1 = a_{-1} = 2$, $s_2 = a_0 = 1$). Így

$$p_1(z) = (z+1)^2, \quad p_2(z) = z, \quad q(z) = (z+1)^2 + z \qquad (z \in \mathbb{K}).$$

Mivel

$$\begin{aligned} q(A) &= (A + E_3)^2 + A = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

ezért

$$q(A)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tudjuk, hogy

$$q_1(A) = q(A)^{-1}p_1(A) \qquad \textit{és} \qquad q_2(A) = q(A)^{-1}p_2(A),$$

így

$$q_1(A) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$q_2(A) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Még f_i $(i \in \{1,2\})$ *kiszámolására van szükség.* $f_1((A - E_3\lambda_1)t) \equiv E_3$ *ill.*

$$f_2((A - E_3\lambda_2)t) \equiv E_3 + (A - E_3(-1))t \equiv E_3 + E_3 t + At \equiv$$

$$\equiv \begin{bmatrix} 1+t & 0 & 0 \\ 0 & 1+t & 0 \\ 0 & 0 & 1+t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t & 0 & 0 \\ t & -t & 0 \\ 0 & t & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ 0 & t & 1+t \end{bmatrix}.$$

Így

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ te^{-t} & e^{-t} & 0 \\ 0 & te^{-t} & e^{-t} + te^{-t} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ te^{-t} & e^{-t} & 0 \\ 1 - e^{-t} - te^{-t} & 1 - e^{-t} & 1 \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

4.6. e^{tA} számítása van Rootselaar módszerével

B. van Rootselaar az (1.1) alakú egyenlethez tartozó homogén egyenlet helyett egy vele ekvivalens magasabbrendű egyenletet old meg (vö. [17]).

Világos, hogy ha $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ az (1.1)-hez tartozó homogén egyenlet $x(0) = \xi \in \mathbb{R}^n$ feltételt kielégítő teljes megoldása, akkor tetszőleges $k \in \{0, \dots, n-1\}$ esetén

$$\varphi^{(k)} = A^k \varphi, \qquad \varphi^{(k)}(0) = A^k \xi, \tag{4.65}$$

hiszen

$$\varphi^{(0)} = \varphi = E_n \varphi = A^0 \varphi, \qquad \varphi' = A\varphi, \qquad \varphi'' = (A\varphi)' = A\varphi' = AA\varphi = A^2\varphi, \ \dots$$

Tudjuk a 3.1. tételből, hogy $\chi_A(A) = 0$. Ennek az egyenletnek mindkét oldalát φ-vel beszorozva

$$0 = \chi_A(A)\varphi = A^n \varphi + c_{n-1} A^{n-1} \varphi + \dots + c_1 A \varphi + c_0 E_n \varphi$$

adódik (vö. (3.22)), amiből (4.65) figyelembevételével azt kapjuk, hogy

$$0 = \varphi^{(n)} + c_{n-1} \varphi^{(n-1)} + \dots + c_1 \varphi' + c_0 \varphi,$$

azaz φ megoldása az

$$x^{(n)} + c_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + c_1 x' + c_0 x = 0 \tag{4.66}$$

n-edrendű differenciálegyenlet-rendszernek. E rendszer minden egyes egyenlete egy állandó együtthatós n-edrendű homogén lineáris differenciálegyenlet, melynek karakterisztikus polinomja nem más, mint χ_A.

Tegyük fel, hogy A spektruma: $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$, és vezessük be az $m_k := a_{\lambda_k}$ ($k \in \{1, \dots, p\}$) jelölést. Ismeretes (vö. pl. [23]), hogy tetszőleges $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$ esetén a

$$\varphi_{jk}(t) := \alpha t^k \exp(\lambda_j t) \qquad (t \in \mathbb{R};\ j, k \in \{0, \dots, m_j - 1\})$$

függvények a fenti rendszer minden egyes egyenletének lineárisan független megoldásai. Könnyen belátható, hogy van olyan $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix, hogy

$$\varphi(t) = Rf(t) \qquad (t \in \mathbb{R}), \tag{4.67}$$

ahol tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(t) := \left[\frac{t^{m_1-1}}{(m_1-1)!}e^{\lambda_1 t}, \dots, te^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_1 t}, \dots, \frac{t^{m_p-1}}{(m_p-1)!}e^{\lambda_p t}, \dots, te^{\lambda_p t}, e^{\lambda_p t}\right]^T. \qquad (4.68)$$

Ha $\varphi := (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^T$ esetén

$$W(\varphi) := \left[\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n-1)}\right] \qquad (4.69)$$

jelöli φ Wronszki-mátrixát, akkor a

$$G(\xi) := W(\varphi)(0) = \left[\varphi(0), \varphi'(0), \dots, \varphi^{(n-1)}(0)\right] = \left[\xi, A\xi, A^2\xi, \dots, A^{n-1}\xi\right].$$

ill. $F(0) := W(f)(0)$ jelölések bevezetésével könnyen belátható a

4.10. Tétel. *Tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén*

$$e^{tA} = \left[G(e_1)F^{-1}(0)f(t), \dots, G(e_n)F^{-1}(0)f(t)\right],$$

ahol $\varphi(0) = e_i \in \mathbb{R}^n$ $(i \in \{1, \dots, n\})$ kanonikus egységvektorok.

Bizonyítás: Megmutatjuk, hogy az (1.1)-hez tartozó homogén egyenlet $x(0) = \xi \in \mathbb{R}^n$ feltételt kielégítő teljes megoldása a

$$\varphi(t) = G(\xi)F^{-1}(0)f(t) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

függvény. Innen már következik az állítás, ha ξ-nek az $e_i \in \mathbb{R}^n$ $(i \in \{1, \dots, n\})$ kanonikus egységvektorokat választjuk.

(4.67)-ből

$$\varphi^{(k)} = Rf^{(k)} \qquad (k \in \{0, \dots, n-1\})$$

adódik, ezért

$$\varphi^{(k)}(0) = Rf^{(k)}(0) \qquad (k \in \{0, \dots, n-1\}). \qquad (4.70)$$

Vegyük észre, hogy (4.70) így is írható: $G(\xi) = RF(0)$, azaz $R = G(\xi)F(0)^{-1}$ ($F(0)$ reguláris, hiszen oszlopai lineárisan függetlenek). ■

Így e^{tA} ($t \in \mathbb{R}$) kiszámításának van Rootselar módszerén alapuló lépései a következők:

1. lépés. Meghatározzuk A sajátértékeit és azok (algebrai) multiplicitását.

2. lépés. Képezzük az f vektorfüggvényt a (4.68)-ban leírt módon.

3. lépés. Meghatározzuk, majd invertáljuk az $F(0)$ mátrixot.

4. lépés. Kiszámoljuk a

$$G(e_i) = \left[e_i, Ae_i, A^2e_i, \ldots, A^{n-1}e_i\right] \qquad (i \in \{1, 2, \ldots, n\})$$

mátrixokat.

5. lépés Kiszámítjuk a

$$G(e_i)F^{-1}(0)f(t) \qquad (i \in \{1, 2, \ldots, n\})$$

szorzatokat. Ezek adják az e^{tA} mátrix megfelelő indexű oszlopait.

4.10. Példa. *Tekintsük ismét a (4.40)-beli A mátrixot, melynek sajátértékei: 1 (kétszeres) és 2 ($a_1 = 2$, $a_2 = 1$). Így a (4.68)-beli vektorfüggvény a következő:*

$$f(t) := \left[te^t, e^t, e^{2t}\right]^T \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Mivel

$$W(f)(t) = \begin{bmatrix} te^t & (1+t)e^t & (2+t)e^t \\ e^t & e^t & e^t \\ e^{2t} & 2e^{2t} & 4e^{2t} \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

ezért

$$F(0) = [f(0), f'(0), f''(0)] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \textit{ill.} \qquad F(0)^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Továbbá, mivel

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \textit{ill.} \qquad A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -5 & 6 & -2 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

ezért

$$G(e_1)=\left[e_1,Ae_1,A^2e_1\right]=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&-2&-5\\0&-1&-3\end{bmatrix},\qquad G(e_2)=\left[e_2,Ae_2,A^2e_2\right]=\begin{bmatrix}0&1&2\\1&3&6\\0&1&3\end{bmatrix}$$

ill.

$$G(e_3)=\left[e_3,Ae_3,A^2e_3\right]=\begin{bmatrix}0&-1&-2\\0&-1&-2\\1&1&1\end{bmatrix}.$$

Így e^{tA} *oszlopai rendre*

$$G(e_1)F(0)^{-1}f(t)=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&-2&-5\\0&-1&-3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2&0&1\\3&2&-2\\-1&-1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}te^t\\e^t\\e^{2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1&0\\-1&1&-1\\0&1&-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}te^t\\e^t\\e^{2t}\end{bmatrix},$$

$$G(e_2)F(0)^{-1}f(t)=\begin{bmatrix}0&1&2\\1&3&6\\0&1&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2&0&1\\3&2&-2\\-1&-1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}te^t\\e^t\\e^{2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&-1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}te^t\\e^t\\e^{2t}\end{bmatrix}$$

ill.

$$G(e_3)F(0)^{-1}f(t)=\begin{bmatrix}0&-1&-2\\0&-1&-2\\1&1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2&0&1\\3&2&-2\\-1&-1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}te^t\\e^t\\e^{2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\-1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}te^t\\e^t\\e^{2t}\end{bmatrix},$$

ahonnan

$$e^{tA}=\begin{bmatrix}e^t-te^t&te^t&-te^t\\e^t-e^{2t}-te^t&te^t+e^{2t}&-te^t\\e^t-e^{2t}&-e^t+e^{2t}&e^t\end{bmatrix}\qquad(t\in\mathbb{R}).$$

4.1. Megjegyzés. *Az*

$$f_{j,k}(t):=\frac{t^k}{k!}e^{\lambda_j t}\qquad(t\in\mathbb{R};\ j\in\{1,2,\ldots,p\},\ k\in\{0,1,\ldots,m_j-1\})$$

jelöléssel a (4.68)*-beli vektorfüggvény a következő alakú:*

$$f=\left[f_{1,m_1-1},\ldots,f_{1,0},\ldots,f_{p,m_p-1},\ldots,f_{p,0}\right]^T.$$

Az $F(0)$ *mátrixban egy* m_j*-szeres* λ_j *gyökhöz a következő* m_j *darab sor tartozik:*

$$\begin{array}{ccccc}
f_{j,m_j-1}(0) & f'_{j,m_j-1}(0) & f''_{j,m_j-1}(0) & \dots & f^{(n-1)}_{j,m_j-1}(0) \\
 & & \vdots & & \\
f_{j,1}(0) & f'_{j,1}(0) & f''_{j,1}(0) & \dots & f^{(n-1)}_{j,1}(0) \\
f_{j,0}(0) & f'_{j,0}(0) & f''_{j,0}(0) & \dots & f^{(n-1)}_{j,0}(0).
\end{array}$$

A $k = 0$ esetben kapjuk az utolsó sor elemeit: $1,\ \lambda_j,\ \lambda_j^2,\ \dots,\ \lambda_j^{n-1}$.
Mivel tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$f'_{j,k}(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{\lambda_j t} + \lambda_j \frac{t^k}{k!}e^{\lambda_j t} = f_{j,k-1}(t) + \lambda_j f_{j,k}(t) \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

ezért $f_{j,k}$ i-edik deriváltjának ($i \in \mathbb{N}$) 0-ban felvett értékére

$$f^{(i)}_{j,k}(0) = f^{(i-1)}_{j,k-1}(0) + \lambda_j f^{(i-1)}_{j,k}(0) \qquad (i \in \mathbb{N}),$$

ahol

$$f^{(0)}_{j,k}(0) = 0 \quad (k \in \mathbb{N}) \qquad\qquad \textit{ill.} \qquad\qquad f^{(i)}_{j,0}(0) = \lambda_j^i \quad (i \in \mathbb{N}_0).$$

Így az $F(0)$ mátrix előbbi részére a következő adódik:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5\lambda_j & \dots \\
0 & 0 & 0 & 1 & 4\lambda_j & 10\lambda_j^2 & \dots \\
0 & 0 & 1 & 3\lambda_j & 6\lambda_j^2 & 10\lambda_j^3 & \dots \\
0 & 1 & 2\lambda_j & 3\lambda_j^2 & 4\lambda_j^3 & 5\lambda_j^4 & \dots \\
1 & \lambda_j & \lambda_j^2 & \lambda_j^3 & \lambda_j^4 & \lambda_j^5 & \dots
\end{array}$$

Látható, hogy az együtthatók, amik 0-tól különböznek, a Pascal-háromszög elemei.

4.11. Példa. *A 4.10. Példa $F(0)$ mátrixa egyszerűen adódik a fentiekből. A $\lambda_1 = 1$ kétszeres sajátérték, így hozzá 2 sor tartozik, míg a $\lambda_2 = 2$-höz a harmadik sor tartozik az alábbiak szerint:*

$$F(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2\lambda_1 \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

4.7. e^{tA} számítása Leonard módszerével

I. E. Leonard – Putzer első módszeréhez hasonlóan – e^{tA} kiszámítását egy állandó együtthatós, homogén lineáris differenciálegyenlet megoldására vezeti vissza (vö. [14]).

4.11. Tétel. *Ha a c_k ($k \in \{0, \dots, n-1\}$) számok az A mátrix χ_A karakterisztikus polinomjának együtthatói (vö. (3.22)), akkor*

$$e^{tA} = \psi_1(t)E_n + \psi_2(t)A + \psi_3(t)A^2 + \cdots + \psi_n(t)A^{n-1} \qquad (t \in \mathbb{R}), \tag{4.71}$$

ahol a ψ_k ($1 \leq k \leq n$) függvények az

$$x^{(n)} + c_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + c_1\dot{x} + c_0x = 0 \tag{4.72}$$

n-edrendű differenciálegyenlet

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1(0) & = & 1 \\ \dot{x_1}(0) & = & 0 \\ & \vdots & \\ x_1^{(n-1)}(0) & = & 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{rcl} x_2(0) & = & 0 \\ \dot{x_2}(0) & = & 1 \\ & \vdots & \\ x_2^{(n-1)}(0) & = & 0 \end{array}\right\} \cdots \left.\begin{array}{rcl} x_n(0) & = & 0 \\ \dot{x_n}(0) & = & 0 \\ & \vdots & \\ x_n^{(n-1)}(0) & = & 1 \end{array}\right\} \tag{4.73}$$

kezdeti feltételeket kielégítő megoldásai.

Bizonyítás: Világos, hogy a

$$\Phi(t) := \psi_1(t)E_n + \psi_2(t)A + \psi_3(t)A^2 + \cdots + \psi_n(t)A^{n-1} \qquad (t \in \mathbb{R}) \tag{4.74}$$

függvényre $\Phi^{(n)} + c_{n-1}\Phi^{(n-1)} + \cdots + c_1\dot{\Phi} + c_0\Phi =$

$$\begin{aligned} = {} & \left(\psi_1^{(n)} + c_{n-1}\psi_1^{(n-1)} + \cdots + c_1\dot{\psi}_1 + c_0\psi_1\right)E_n + \\ & + \left(\psi_2^{(n)} + c_{n-1}\psi_2^{(n-1)} + \cdots + c_1\dot{\psi}_2 + c_0\psi_2\right)A + \\ & \quad \vdots \\ & + \left(\psi_n^{(n)} + c_{n-1}\psi_n^{(n-1)} + \cdots + c_1\dot{\psi}_n + c_0\psi_n\right)A^{n-1} = \\ = {} & 0E_n + 0A + \cdots + 0A^{n-1} = \mathbf{O}. \end{aligned}$$

Sőt, teljesülnek a következők is:

$$\begin{aligned} \Phi(0) &= \psi_1(0)E_n + \psi_2(0)A + \cdots + \psi_n(0)A^{n-1} = E_n, \\ \dot{\Phi}(0) &= \dot{\psi}_1(0)E_n + \dot{\psi}_2(0)A + \cdots + \dot{\psi}_n(0)A^{n-1} = A, \\ & \;\; \vdots \\ \Phi^{(n-1)}(0) &= \psi_1^{(n-1)}(0)E_n + \psi_2^{(n-1)}(0)A + \cdots + \psi_n^{(n-1)}(0)A^{n-1} = A^{n-1}. \end{aligned}$$

Tehát a (4.74)-ben definiált Φ megoldása az alábbi kezdetiérték-feladatnak:

$$Y^{(n)} + c_{n-1}Y^{(n-1)} + \cdots + c_1\dot{Y} + c_0 Y = 0,$$

$$Y(0) = E_n,\ \dot{Y}(0) = A,\ \ddot{Y}(0) = A^2,\ \ldots,\ Y^{(n-1)}(0) = A^{n-1}.$$

Mivel ennek megoldása e^{tA} $(t \in \mathbb{R})$ (vö. 3.3. tétel), ezért a megoldás egyértelműségéről szóló tételből következik (4.71). ■

Így e^{tA} $(t \in \mathbb{R})$ kiszámításának Leonard módszerén alapuló lépései a következők:

1. lépés Meghatározzuk az A mátrix karakterisztikus polinomját.

2. lépés Meghatározzuk a 4.11. tételbeli kezdetiérték-feladat ψ_k $(1 \leq k \leq n)$ megoldásait.

3. lépés Képezzük a (4.71)-beli összeget.

4.12. Példa. *Tekintsük a 4. fejezetbeli*

$$A := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrixot, melynek karakterisztikus polinomja:

$$\chi_A(z) = z^3 + 2z^2 + z \qquad (z \in \mathbb{K})$$

(vö. (3.23)). Tetszőleges $a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén a

$$\psi(t) := ae^{-t} + bte^{-t} + c \qquad (t \in \mathbb{R})$$

függvény megoldása az

$$\dddot{x} + 2\ddot{x} + \dot{x} = 0$$

differenciálegyenletnek, hiszen

$$\dot{\psi}(t) = b(e^{-t} - te^{-t}) - ae^{-t}; \quad \ddot{\psi}(t) = b(-e^{-t} + te^{-t} - e^{-t}) + ae^{-t} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Az

$$1 = x_1(0) = a_1 + c_1; \quad 0 = \dot{x_1}(0) = b_1 - a_1; \quad 0 = \ddot{x_1}(0) = -2b_1 + a_1$$

kezdeti feltételekből $a_1 = b_1 = 0, c_1 = 1,$ *azaz* $\psi_1(t) = 1\ (t \in \mathbb{R})$. *A*

$$0 = x_2(0) = a_2 + c_2; \quad 1 = \dot{x_2}(0) = -a_2 + b_2; \quad 0 = \ddot{x_2}(0) = a_2 - b_2 - b_2$$

kezdeti feltételekből $a_2 = -2, b_2 = -1, c_2 = 2,$ *azaz* $\psi_2(t) = 2 - te^{-t} - 2e^{-t}\ (t \in \mathbb{R})$. *A*

$$0 = x_3(0) = a_3 + c_3; \quad 0 = \dot{x_3}(0) = -a_3 + b_3; \quad 1 = \ddot{x_3}(0) = a_3 - b_3 - b_3$$

kezdeti feltételekből $a_3 = b_3 = -1, c_3 = 1,$ *azaz* $\psi_3(t) = 1 - te^{-t} - e^{-t}\ (t \in \mathbb{R})$. *Mivel*

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

így a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} e^{tA} &= 1E_n + (2 - te^{-t} - 2e^{-t})A + (1 - te^{-t} - e^{-t})A^2 = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 + te^{-t} + 2e^{-t} & 0 & 0 \\ 2 - te^{-t} - 2e^{-t} & -2 + te^{-t} + 2e^{-t} & 0 \\ 0 & 2 - te^{-t} - 2e^{-t} & 0 \end{bmatrix} + \\ &\quad + \begin{bmatrix} 1 - te^{-t} - e^{-t} & 0 & 0 \\ -2 + 2te^{-t} + 2e^{-t} & 1 - te^{-t} - e^{-t} & 0 \\ 1 - te^{-t} - e^{-t} & -1 + te^{-t} + e^{-t} & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ te^{-t} & e^{-t} & 0 \\ 1 - te^{-t} - e^{-t} & 1 - e^{-t} & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

4.8. e^{tA} számítása Liz módszerével

E. Liz egy a Leonard-módszeren alapuló eljárást ismertet a mátrix-exponenciális függvény kiszámítására, célul kitűzve annak egyszerűsítését (vö. [13]).

4.12. Tétel. *Ha*

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$$

a (4.72)*-beli n-edrendű egyenlet egy alaprendszere, akkor*

$$e^{tA} = \psi_1(t)E_n + \psi_2(t)A + \psi_3(t)A^2 + \cdots + \psi_n(t)A^{n-1} \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

ahol

$$\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{bmatrix} := W(\varphi)(0)^{-1} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{bmatrix} \tag{4.75}$$

(W jelöli φ Wronszki-mátrixát, vö. (4.69)*).*

Bizonyítás: Vegyük észre, hogy a (4.72)-(4.73) kezdetiérték-feladat megoldásai is alaprendszert alkotnak, hiszen a $\psi := (\psi_1, \ldots \psi_n)^T$ függvény Wronszki-mátrixára:

$$\det(W(\psi)(0)) = \det\left(\left[\psi, \psi', \ldots, \psi^{(n-1)}\right](0)\right) = 1 \neq 0.$$

Így a megoldás egyértelműsége miatt

$$\varphi_k = \varphi_k(0)\psi_1 + \dot{\varphi}_k\psi_2(t) + \cdots + \varphi_k^{(n-1)}(0)\psi_n \qquad (k \in \{1, \ldots, n\}),$$

azaz

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{bmatrix} = W(\varphi)(0) \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{bmatrix}.$$

Mivel $W(\varphi)(0)$ invertálható, ezért innen (4.75) következik. ■

Így e^{tA} $(t \in \mathbb{R})$ kiszámításának Liz módszerén alapuló lépései a következők:

1. lépés Meghatározzuk a (4.72) n-edrendű egyenlet egy alaprendszerét.

2. lépés Megoldjuk a (4.75) egyenletrendszert.

3. lépés Képezzük az

$$e^{tA} = \psi_1(t)E_n + \psi_2(t)A + \psi_3(t)A^2 + \cdots + \psi_n(t)A^{n-1} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

összeget.

4.13. Példa. *Tekintsük a 4.12. példabeli mátrixot, melynek karakterisztikus polinomja:*

$$\chi_A(z) = z^3 + 2z^2 + z \qquad (z \in \mathbb{K})$$

(vö. (3.23)*).* χ_A *gyökei:* -1 *(kétszeres) és* 0*. Így a*

$$\varphi_1(t) := 1, \qquad \varphi_2(t) := e^{-t}, \qquad \varphi_3(t) := te^{-t} \qquad\qquad (t \in \mathbb{R})$$

függvények az

$$\dddot{x} + 2\ddot{x} + x = 0$$

egyenlet megoldáshalmazának egy bázisát alkotják. A

$$W(\varphi)(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ e^{-t} & -e^{-t} & e^{-t} \\ te^{-t} & e^{-t} - te^{-t} & -2e^{-t} + te^{-t} \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Wronszki-mátrixra

$$W(\varphi)(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \textit{ill.} \qquad W(\varphi)(0)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

teljesül. A (4.75) egyenletrendszer most a következőképpen néz ki:

$$\begin{bmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \\ \psi_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-t} \\ te^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 - 2e^{-t} - te^{-t} \\ 1 - e^{-t} - te^{-t} \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Szükségünk van még az alábbiakra:

$$\psi_1(t)E_3 \equiv E_3, \qquad x_2(t)A \equiv \begin{bmatrix} -2+2e^{-t}+te^{-t} & 0 & 0 \\ 2-2e^{-t}-te^{-t} & -2+2e^{-t}+te^{-t} & 0 \\ 0 & 2-2e^{-t}-te^{-t} & 0 \end{bmatrix};$$

ill. mivel

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

ezért

$$\psi_3(t)A^2 \equiv \begin{bmatrix} 1-e^{-t}-te^{-t} & 0 & 0 \\ -2+2e^{-t}+2te^{-t} & 1-e^{-t}-te^{-t} & 0 \\ 1-e^{-t}-te^{-t} & -1+e^{-t}+te-t & 0 \end{bmatrix}.$$

Így

$$e^{tA} = \psi_1(t)E_3 + \psi_2(t)A + \psi_3(t)A^2 = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ te^{-t} & e^{-t} & 0 \\ 1-e^{-t}-te^{-t} & 1-e^{-t} & 1 \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

5. Alkalmazások

5.1. e^{tA} számítása A sajátértékeinek ismeretében

5.1.1. $\sigma(A)=\{\lambda\}$ esetben

Tegyük fel, hogy A-nak egyetlen sajátértéke van, minimálpolinomja viszont m-edfokú: $\mathrm{Grad}(\mu_A)=m$. Putzer második módszerét (vö. 4.4.2) használva kapjuk:

$$e^{tA}=e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^k}{k!}(A-\lambda E_n)^k \quad (t\in\mathbb{R}), \tag{5.76}$$

ugyanis $P_0=E_n$, $P_k=\prod_{l=1}^{k}(A-\lambda E_n)=(k\in\{1,\ldots,n\})$ és az

$$\left.\begin{aligned} \dot{r}_1&=\lambda r_1\\ \dot{r}_2&=r_1+\lambda r_2\\ &\vdots\\ \dot{r}_n&=r_{n-1}+\lambda r_n \end{aligned}\right\} \quad \text{és} \quad \left.\begin{aligned} r_1(0)&=1\\ r_2(0)&=0\\ &\vdots\\ r_n(0)&=0 \end{aligned}\right\}$$

egyenlőségekből az következik, hogy $P_k=(A-\lambda E_n)^k$ $(k\in\{0,\ldots,m-1\})$, $P_k=\mathbf{O}$ $(k\in\{m,\ldots,n\})$ (vö. (3.27)) ill. (1.6) felhasználásával könnyen látható, hogy

$$r_1(t)=e^{\lambda t},\quad r_2(t)=te^{\lambda t},\quad \text{ill.}\quad r_k(t)=e^{\lambda t}\int_0^t r_{k-1}(s)e^{-\lambda s}\,\mathrm{d}s\quad (k\in\{2,\ldots,n\})\quad (t\in\mathbb{R}),$$

azaz

$$r_k(t)=\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{\lambda t}\quad (k\in\{1,\ldots,n\})\quad (t\in\mathbb{R}).$$

Így az (5.76) formula bizonyítottnak tekinthető:

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{k=0}^{n-1}r_{k+1}(t)P_k=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^k}{k!}e^{\lambda t}(A-\lambda E_n)^k+\sum_{k=m}^{n-1}\frac{t^k}{k!}e^{\lambda t}(A-\lambda E_n)^k=\\ &= e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^k}{k!}(A-\lambda E_n)^k\quad (t\in\mathbb{R}). \end{aligned}$$

A jobb oldalon levő második tag $\mu_A(A)=\mathbf{O}$ miatt nem más, mint a zérusmátrix.

Megemlítjük, hogy (5.76) sokkal egyszerűbben is belátható, ha figyelembe vesszük a (3.28)-beli tulajdonságokat (vö. [1])). Igaz ui., hogy

$$tA = \lambda t E_n + tA - t\lambda E_n = \lambda t E_n + t(A - \lambda E_n) \quad \text{és} \quad [\lambda t E_n, t(A - \lambda E_n)] = \mathbf{O},$$

így (vö. (3.28)-beli 2) és 5))

$$e^{tA} = e^{\lambda t E_n} \cdot e^{t(A-\lambda E_n)} = e^{\lambda t} E_n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(A - \lambda E_n)^k = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!}(A - \lambda E_n)^k,$$

ui. a Cayley-Hamilton-tételből (vö. (3.27)) $(A - \lambda E_n)^k = \mathbf{O}$ $(m \leq k \in \mathbb{N})$ következik.

5.2. Megjegyzés. *A különböző sajátértékek esetét, azaz amikor $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, a 4.4. és a 4.5. tételben tárgyaltuk.*

5.1.2. $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ esetén

Kétdimenziós esetben az (5.76) összefüggésből $\lambda = \mu$ esetén

$$e^{tA} = e^{\lambda t} \left[E_2 + t\left(A - \lambda E_2\right)\right] \quad (t \in \mathbb{R}); \tag{5.77}$$

ill. $\lambda \neq \mu$ esetén a (4.48) összefüggésből

$$e^{tA} = e^{\lambda t} \frac{A - \mu E_2}{\lambda - \mu} + e^{\mu t} \frac{A - \lambda E_2}{\mu - \lambda} = \frac{e^{\lambda t} - e^{\mu t}}{\lambda - \mu} A + \frac{\lambda e^{\mu t} - \mu e^{\lambda t}}{\lambda - \mu} E_2 \quad (t \in \mathbb{R}) \tag{5.78}$$

adódik.

5.1.3. $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ esetben

Háromdimenziós esetben, ha A minden sajátértéke valós, akkor e^{tA} számítása a következő tétel alapján történik.

5.13. Tétel. *Ha az $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mártixnak egyetlen, háromszoros λ sajátértéke van: $\sigma(A) = \{\lambda\}$, $a_\lambda = 3$, akkor*

$$e^{tA} = e^{\lambda t} \left[E_3 + t(A - \lambda E_3) + \frac{t^2}{2}(A - \lambda E_3)^2\right] \qquad (t \in \mathbb{R}). \tag{5.79}$$

Ha azonban A spektrumára $\sigma(A)=\{\lambda,\mu,\nu\}$ teljesül, akkor

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{\lambda t}\frac{(A-\mu E_3)(A-\nu E_3)}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}+e^{\mu t}\frac{(A-\nu E_3)(A-\lambda E_3)}{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}+ \\ &\quad +e^{\nu t}\frac{(A-\lambda E_3)(A-\mu E_3)}{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)} \qquad (t\in\mathbb{R}). \end{aligned} \tag{5.80}$$

Ha A-nak két különböző sajátértéke van, ahol az egyik kétszeres multiplicitású: $\sigma(A)=\{\lambda,\mu\}$, $a_\lambda=2$, akor e^{tA} a következő alakú:

$$e^{tA}=e^{\lambda t}\left[E_3+t(A-\lambda E_3)\right]+\frac{e^{\mu t}-e^{\lambda t}}{(\mu-\lambda)^2}(A-\lambda E_3)^2+\frac{te^{\lambda t}}{\mu-\lambda}(A-\lambda E_3)^2 \quad (t\in\mathbb{R}). \tag{5.81}$$

Bizonyítás: Az első két formula (5.76) és (4.48) speciális esete. A harmadik formulát Putzer második módszerének felhasználásával kapjuk: $P_0=E_n$, $P_1=(A-\lambda E_3)$, $P_2=(A-\lambda E_3)^2$ és

$$\left.\begin{aligned} \dot r_1 &= \lambda r_1, & r_1(0)&=1 \\ \dot r_2 &= r_1+\lambda r_2, & r_2(0)&=0 \\ \dot r_3 &= r_2+\mu r_3, & r_3(0)&=0 \end{aligned}\right\},$$

ahonnan

$$r_1(t)=e^{\lambda t}, \quad r_2(t)=te^{\lambda t}, \quad \text{ill.} \quad r_3(t)=e^{\mu t}\int_0^t r_2(s)e^{-\mu s}\,\mathrm{d}s \quad (t\in\mathbb{R}),$$

azaz

$$r_3(t)=\frac{te^{\lambda t}}{\lambda-\mu}-\frac{e^{\lambda t}-e^{\mu t}}{(\lambda-\mu)^2} \qquad (t\in\mathbb{R})$$

következik. Így (vö. (4.61)) azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} e^{tA} &= r_1(t)E_3+r_2(t)(A-\lambda E_3)+r_3(t)(A-\lambda E_3)^2= \\ &= e^{\lambda t}E_3+te^{\lambda t}(A-\lambda E_3)+\left[\frac{te^{\lambda t}}{\lambda-\mu}-\frac{e^{\lambda t}-e^{\mu t}}{(\lambda-\mu)^2}\right](A-\lambda E_3)^2 \quad (t\in\mathbb{R}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

5.2. e^{tA} számítása $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ esetén

Ebben a szakaszban tetszőleges $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ esetén kiszámítjuk az e^{tA} $(t \in \mathbb{R})$ mátrixot A elemeinek függvényében (vö. [3]).

Ha $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, akkor A karakterisztikus polinomja (vö. (3.23)) a

$$\chi_A(z) = z^2 - (a+d)\,z + ad - bc \quad (z \in \mathbb{K})$$

polinom, aminek alapján könnyen bizonyítható a következő tétel.

5.14. Tétel. *Ha Δ jelöli χ_A diszkriminánsát, azaz*

$$\Delta := (a+d)^2 - 4ad + 4bc = (a-d)^2 + 4bc,$$

akkor

1) $\Delta = 0 \Longrightarrow e^{tA} \equiv e^{(a+d)t/2} \begin{bmatrix} 1 + \dfrac{(a-d)t}{2} & bt \\ ct & 1 - \dfrac{(a-d)t}{2} \end{bmatrix}$*;*

2) $\Delta > 0 \Longrightarrow e^{tA} \equiv e^{(a+d)t/2} \begin{bmatrix} \operatorname{ch}(\delta t) + \dfrac{(a-d)\operatorname{sh}(\delta t)}{2\delta} & \dfrac{b\operatorname{sh}(\delta t)}{\delta} \\ \dfrac{c\operatorname{sh}(\delta t)}{\delta} & \operatorname{ch}(\delta t) - \dfrac{(a-d)\operatorname{sh}(\delta t)}{2\delta} \end{bmatrix}$,

ahol $\delta := \sqrt{\Delta}/2$;

3) $\Delta < 0 \Longrightarrow e^{tA} \equiv e^{(a+d)t/2} \begin{bmatrix} \cos(\delta t) + \dfrac{(a-d)\sin(\delta t)}{2\delta} & \dfrac{b\sin(\delta t)}{\delta} \\ \dfrac{c\sin(\delta t)}{\delta} & \cos(\delta t) - \dfrac{(a-d)\sin(\delta t)}{2\delta} \end{bmatrix}$

ahol $\delta := \sqrt{-\Delta}/2$.

Bizonyítás: A sajátértékei a χ_A polinom gyökei:

$$\lambda = \frac{a+d+\sqrt{\Delta}}{2}, \qquad \mu = \frac{a+d-\sqrt{\Delta}}{2}.$$

Ezek pontosan akkor egyenlőek, ha a diszkrimináns eltűnik. Ekkor behelyettesítve (5.77)-be kapjuk a $\Delta = 0$ eset eredményét:

$$e^{tA} \equiv e^{(a+d)t/2}\left[E_2 + t\left(A - \frac{(a+d)}{2}E_2\right)\right] \equiv e^{(a+d)t/2} \begin{bmatrix} 1 + \dfrac{(a-d)t}{2} & bt \\ ct & 1 - \dfrac{(a-d)t}{2} \end{bmatrix}.$$

$\Delta > 0$ esetén (5.78)-ba behelyettesítve, némi számolással kapjuk e^{tA}-ra a fenti formulát:

$$e^{tA} \equiv e^{\lambda t}\frac{A-\mu E_2}{\lambda-\mu} + e^{\mu t}\frac{A-\lambda E_2}{\mu-\lambda} \equiv e^{\lambda t}\begin{bmatrix} \dfrac{a-d+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} & \dfrac{b}{\sqrt{\Delta}} \\ \dfrac{c}{\sqrt{\Delta}} & \dfrac{-a+d+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} \end{bmatrix} -$$

$$-e^{\mu t}\begin{bmatrix} \dfrac{a-d-\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} & \dfrac{b}{\sqrt{\Delta}} \\ \dfrac{c}{\sqrt{\Delta}} & \dfrac{-a+d-\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} \end{bmatrix} \equiv e^{(a+d)t/2}\begin{bmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{D} \end{bmatrix},$$

ahol

$$\mathfrak{A} = \frac{e^{\sqrt{\Delta}t/2}(a-d+\sqrt{\Delta})}{2\sqrt{\Delta}} - \frac{e^{-\sqrt{\Delta}t/2}(a-d-\sqrt{\Delta})}{2\sqrt{\Delta}} =$$

$$= \frac{(a-d)e^{\sqrt{\Delta}t/2}}{2\sqrt{\Delta}} + \frac{e^{\sqrt{\Delta}t/2}\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} - \frac{(a-d)e^{-\sqrt{\Delta}t/2}}{2\sqrt{\Delta}} + \frac{e^{-\sqrt{\Delta}t/2}\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} =$$

$$= \operatorname{ch}(\delta t) + \frac{(a-d)\operatorname{sh}(\delta t)}{2\delta};$$

$$\mathfrak{B} = e^{\sqrt{\Delta}t/2}\frac{b}{\sqrt{\Delta}} - e^{-\sqrt{\Delta}t/2}\frac{b}{\sqrt{\Delta}} = \frac{b\operatorname{sh}(\delta t)}{\delta};$$

$$\mathfrak{C} = e^{\sqrt{\Delta}t/2}\frac{c}{\sqrt{\Delta}} - e^{-\sqrt{\Delta}t/2}\frac{c}{\sqrt{\Delta}} = \frac{c\operatorname{sh}(\delta t)}{\delta};$$

$$\mathfrak{D} = \frac{e^{\sqrt{\Delta}t/2}(-a+d+\sqrt{\Delta})}{2\sqrt{\Delta}} - \frac{e^{-\sqrt{\Delta}t/2}(-a+d-\sqrt{\Delta})}{2\sqrt{\Delta}} =$$

$$= \frac{-(a-d)e^{\sqrt{\Delta}t/2}}{2\sqrt{\Delta}} + \frac{e^{\sqrt{\Delta}t/2}\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} + \frac{(a-d)e^{-\sqrt{\Delta}t/2}}{2\sqrt{\Delta}} + \frac{e^{-\sqrt{\Delta}t/2}\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} =$$

$$= \operatorname{ch}(\delta t) - \frac{(a-d)\operatorname{sh}(\delta t)}{2\delta}.$$

A $\Delta < 0$ eset az előbbiből adódik, azzal a megfontolással, hogy $\operatorname{ch}(\delta\imath t) = \cos(\delta t)$, illetve $\operatorname{sh}(\delta\imath t)/\delta\imath t = \sin(\delta t)/\delta t \quad (t \in \mathbb{R})$. ■

5.3. A 2. fejezetben lévő példák megoldása

5.3.1. Radiokarbonos kormeghatározás

Legyen a megfelelő radioaktív anyag tömege a $t = 0$ időpillanatban M_0, a $t > 0$ időpillanatban pedig $M(t)$ (arányos az aktivitással). A megfigyelések szerint a radioaktív anyagoknak a $[t, t+h]$ $(h > 0)$ időintervallumban elbomlott része egyenesen arányos a jelen lévő tömegével és az intervallum hosszával:

$$M(t) - M(t+h) = \alpha h M(t),$$

ahol az $\alpha > 0$ arányossági tényező kizárólag a bomló atomfajtára jellemző (ún. bomlási állandó). Feltéve, hogy Mdifferenciálható függvény, a $h \to 0$ határátmenettel azt kapjuk, hogy M az

$$\dot{x} = -\alpha x$$

lineáris differenciálegyenlet megoldása. (1.6)-ot felhasználva látható, hogy

$$M(t) = M_0 \exp(-\alpha t) \quad (t \in [0, +\infty)), \qquad \text{ahol} \qquad M_0 := M(0).$$

Legyen T az az idő, amely alatt a szén-14 fele elbomlik (*felezési idő*), ekkor

$$\frac{M_0}{2} = M_0 \exp(-\alpha T),$$

azaz $T = \dfrac{\ln(2)}{\alpha}$. A felezési idő sok esetben a sugárzás intenzitásának időbeli csökkenéséből vagy a bizonyos idő alatt elbomló atomok közvetlen megszámlálásából határozható meg; a szén-14 esetében ez 5760 év. Ezért, ha $M_0 = 15$ és $M(t) = 8,5$, akkor (365 napos évvel számolva) a fáraó i. e. 2749 körül halhatott meg (vö. [9]).

5.3.2. Tartályok

A (2.9) egyenlet (1.1) alakú, ahol

$$A := \begin{bmatrix} -4/10 & 1/10 \\ 4/10 & -4/10 \end{bmatrix}, \qquad b := \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \tau := 0.$$

A homogén rendszer alapmátrixa az

$$e^{tA} = \exp(-4t/10) \begin{bmatrix} \mathrm{ch}(2t/10) & \mathrm{sh}(2t/10)/2 \\ 2\,\mathrm{sh}(2t/10) & \mathrm{ch}(2t/10) \end{bmatrix} \qquad (t \in [0, +\infty))$$

mátrix (vö. 5.14. tétel). A

$$2\,\mathrm{ch}(x) = e^x + e^{-x}, \qquad 2\,\mathrm{sh}(x) = e^x - e^{-x} \qquad\qquad (x \in \mathbb{R})$$

összefüggések felhasználásával

$$e^{tA} = \frac{1}{4} \left\{ e^{-t/5} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + e^{-3t/5} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \right\} \qquad (t \in [0, +\infty)).$$

Így a (2.9) rendszer $y_b(0) = 2$ és $y_j(0) = 0$ kezdeti feltételeknek eleget tévő megoldása (vö. (1.8)):

$$\varphi(t) = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \begin{bmatrix} 13e^{-t/5} + 3e^{-3t/5} - 20 \\ 26e^{-t/5} + 14e^{-3t/5} - 40 \end{bmatrix} \qquad (t \in [0, +\infty)).$$

5.3.3. A Leontyev-féle input-output-modell

Ha a (2.10)-beli B mátrix minden egyes eleme zérus, akkor (2.11) nem más, mint az

$$x = Ax + y \tag{5.82}$$

algebrai egyenletrendszer. A modell akkor tekinthető jónak, ha (5.82)-nek minden adott nemnegatív komponensű y-hoz van x megoldása, azaz ha

$$\det(E_n - A) \neq 0 \tag{5.83}$$

teljesül. További természetes követelmény az, hogy pozitív y_i-hez pozitív x_i tartozzon, azaz az $E_n - A$ mátrix minden eleme pozitív legyen:

$$E_n - A > 0. \tag{5.84}$$

Az alábbiakban feltételezzük az (5.83) ill. az (5.84) feltételek teljesülését. Világos (vö. (1.2), (1.7)), hogy tetszőleges $\xi \in \mathbb{R}^n$ ill. $t \in [0, +\infty)$ esetén a (2.12) egyenlet $x(0) = \xi$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása nem más, mint a

$$\varphi(t) = \exp\left(tB^{-1}(E_n - A)\right)\xi + \int_0^t \exp\left((t-s)B^{-1}(E_n - A)\right) y(s)\,\mathrm{d}s \quad (t \in [0, +\infty))$$

függvény.

5.3.4. Farkas Miklós tanulási modellje

Nézzük a (2.15) egyenlet megoldásait. Az elfajuló esetek elkerülése végett feltehetjük, hogy A reguláris és sajátértékei mind egyszeresek: $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Az A nemdiagonális elemeinek (2.13) definíciójából látszik, hogy hasonló az $[r_{ik}]$ szimmetrikus mátrixhoz, így sajátértékei mind valósak. Ha $s_1, \ldots s_n$ jelöli A megfelelő sajátvektorait és $y(0) = \xi \in \mathbb{R}^n$, akkor

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-tA}\xi + A^{-1}b = \left[e^{-\lambda_1 t}s_1 \ldots e^{-\lambda_n t}s_n\right]\xi + A^{-1}b = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \xi_k e^{-\lambda_k t}s_k + A^{-1}b \qquad (t \in I) \end{aligned} \tag{5.85}$$

(vö. (1.8) ill. 4.5. tétel), hiszen a (2.15) inhomogén egyenlet egy megoldása az $y_{ih} = A^{-1}b$.

Ahhoz, hogy (5.85) reális képet adjon a tanulás intenzitásáról a $[0, +\infty)$ intervallumon, az kell, hogy y koordináta függvényei korlátosak legyenek. Ez pedig azzal ekvivalens, hogy a $(-A)$ mátrix sajátértékei nem-pozitívak, de mivel A reguláris, ezért azt kapjuk, hogy minden $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén $\lambda_k > 0$, így

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = A^{-1}b.$$

Ebből láthatjuk, hogy a szabadon tanuló diák kezdettől, vagy egy idő eltelte után állandó intenzitással tanulja az összes tárgyat. Természetes feltétel, hogy a $t = 0$ időpontban a diák tudásmennyisége minden tárgyban zérus: $x(0) = 0$. Így

$$x(t) = \int_0^t y(\tau)\,\mathrm{d}\tau = A^{-1}bt \qquad (t \in [0, +\infty)),$$

azaz a tudásmennyiség időben lineárisan növekszik.

5.3.5. Strogatz szerelmi ügyeket leíró modellje

Az első esetben az $(R, J) : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^2$ az

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ b & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{5.86}$$

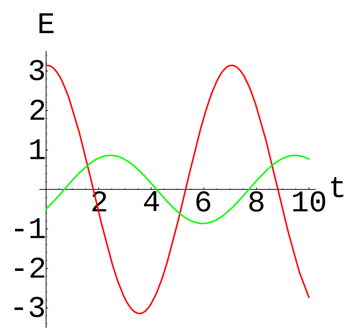
lineáris differenciálegyenlet-rendszer megoldása (vö. (2.18)). Ekkor (vö. 5.14. tétel ill. (1.8))

$$\begin{bmatrix} R(t) \\ J(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{ab}t) & \dfrac{-a\sin(\sqrt{ab}t)}{\sqrt{ab}} \\ \dfrac{b\sin(\sqrt{ab}t)}{\sqrt{ab}} & \cos(\sqrt{ab}t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} \qquad (t \in [0,+\infty)).$$

Az $x(0) = 0$, $y(0) = 0$ kezdeti feltételek teljesülése esetén

$$R(t) = J(t) = 0 \qquad (t \in [0,+\infty)),$$

azaz Rómeó és Júlia végig közömbösek egymás iránt. Ha viszont $a := 0.2$, $b := 0.4$, $x(0) := 3.14$, $y(0) := -0.5$, akkor Rómeó és Júlia érzelmeinek alakulása a 2. ábrán látható ($E \in \{R, J\}$).



2. ábra. Rómeó és Júlia érzelmei az $b := 2a := 0.4$, $x(0) := 3.14$, $y(0) := -0.5$ esetben.

Az $a = b = 1$ ill. az $x(0) = 2$, $y(0) = 0$ kezdeti feltételek (Rómeó első látásra vonzódott Júliához, Júlia pedig semleges volt) teljesülése esetén pedig

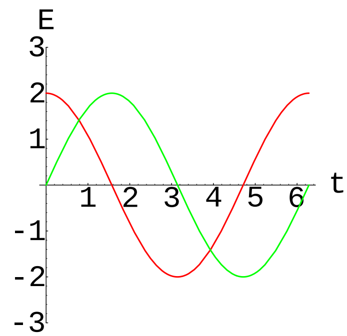
$$\begin{bmatrix} R(t) \\ J(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \end{bmatrix} \qquad (t \in [0,+\infty))$$

(vö. 3. ábra). Ha pedig kezdetben mindkettőjük egyformán szimpatikus volt egymásnak, azaz pl. $x(0) = \sqrt{2}/2 = y(0)$, akkor ($a =: b := 1$ esetén)

$$R(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(t) - \sin(t)) = \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \qquad (t \in [0,+\infty))$$

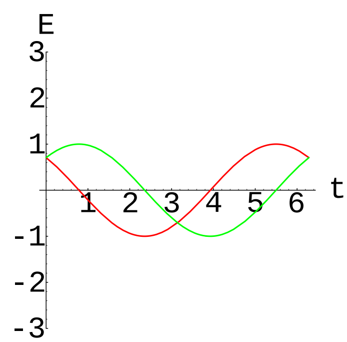
ill.

$$J(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin(t) + \cos(t)) = \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \qquad (t \in [0,+\infty)).$$



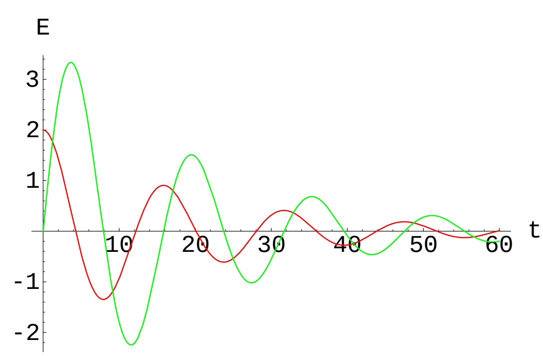
3. ábra. Rómeó és Júlia érzelmei az $a = b = 1$, $x(0) = 2$, $y(0) = 0$ esetben.

A 4. ábrán az ismerettségüket a $[0, 2\pi]$ intervallumra korlátoztuk. Jól látszik, hogy a $[0, \pi/4)$ és a $(7\pi/4, 2\pi]$ intervallumon Rómeó és Júlia szereti egymást, egyébként pedig valamelyikük nem szereti a másikat.



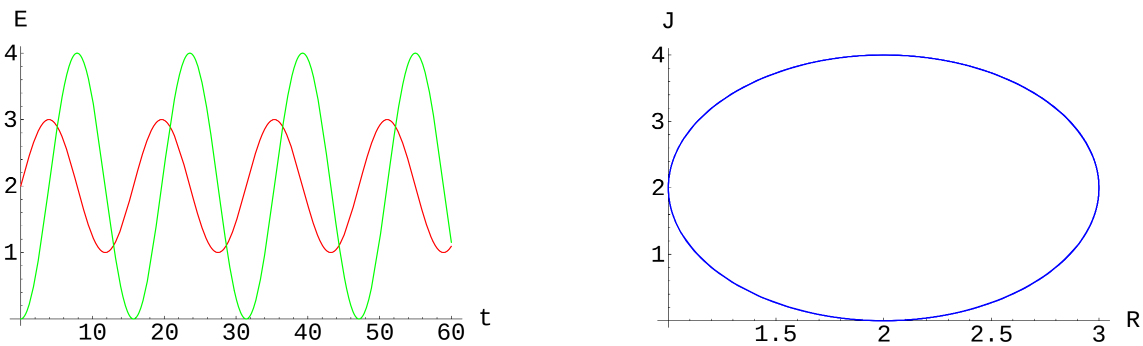
4. ábra. Rómeó és Júlia érzelmei érzelmei az $a = b = 1$, $x(0) = \sqrt{2}/2 = y(0)$ esetben.

A második esetben a (2.19) rendszer $x(0) = 2$, $y(0) = 0$ kezdeti feltételeket kielégítő megoldását az 5. ábrán szemléltetjük. Látható, hogy ez az egész szerelmi életükre negatív hatással lesz.



5. ábra. Rómeó és Júlia érzelmei érzelmei az $a = b = 1$, $x(0) = \sqrt{2}/2 = y(0)$ esetben.

A harmadik esetben (2.20) ideális állapotot kaptunk, mint ahogy azt a 6. ábra is mutatja.



6. ábra. Rómeó és Júlia érzelmei az ideális esetben.

5.4. Infinitezimális generátorok

5.1. Definíció. *Legyen az I állapottér diszkrét halmaz, elemeit jelölje $i, j, k, \ldots$. Tekintsük az $X_t : \Omega \to I$ $(t \geq 0)$ valószínűségi változókat, és ezek alkossák az $\{X_t\}$ folyamatot. A folyamatot folyamatos paraméterű Markov-láncnak nevezzük, ha teljesül a*

$$P(X_t = y | X_r,\ 0 \leq r \leq s) = P(X_t = y | X_s) \quad (y \in I)$$

Markov-tulajdonság, és a

$$p_{ij}(t) := P(X_{s+t} = j | X_s = i) \qquad (t > 0)$$

stacionáruis átmenetvalószínűség nem függ s-től.

A $p_{ij}(t)$ értékekből alkotott mátrixot jelöljük $P(t)$-vel. Belátható (vö. [25]), hogy minden $i, j \in I$ és $\delta > 0$ esetén $p_{ij}(t)$ egyenletesen folytonos a $[\delta, \infty)$ intervallumon. Ennek következménye (vö. [25]), hogy létezik a $\lim\limits_{t \to 0} p_{ij}(t)$ határérték.

5.2. Definíció. *$P(t)$ standard, ha $\lim\limits_{t \to 0} p_{ij}(t) = \delta_{ij}$. Ekkor $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$, tehát $P(0)$ az egységmátrix.*

A továbbiakban a standard átmenetvalószínűségű Markov-láncokat tekintjük.

Belátható, hogy standard esetben létezik a $-p'_{ii}(0)$ jobboldali derivált, amely nemnegatív ($+\infty$ előfordulhat), míg $i \neq j$ esetben p'_{ij} jobboldali derivált nemnegatív és véges (vö. [25]).

5.3. Definíció. *Jelölje $q_{ij} := p'_{ij}(0)$, ezekből alkossuk a Q mátrixot úgy, hogy a főátlóbeli elemekre $q_{ii} = -p'_{ii}(0)$ teljesüljön. Q-t nevezzük a Markov-lánc infinitezimális generátorának.*

Szintén bizonyítható (vö. [25]), hogy $q_{ii} < \infty$ esetén p_{ij} folytonosan differenciálható a $[0, \infty)$ intervallumon. Tegyük fel még azt is, hogy minden i-re $\sum\limits_k q_{ik} = 0$. Ekkor $P(t)$-re a $P'(t) = QP(t)$ egyenletet kapjuk, ugyanis:

$$p_{ij}(t+h) = \sum_{k \in I} p_{ik}(h) p_{kj}(t),$$

amit átrendezünk az alábbiak szerint:

$$\frac{p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)}{h} = \frac{p_{ii}(h) - 1}{h} p_{ij}(t) + \sum_{k \neq i} \frac{p_{ik}(h)}{h} p_{kj}(t),$$

ami $h \to 0$ esetén $\sum\limits_k q_{ik} p_{kj}(t)$-hez tart (vö. [25]). Hasonló képpen adódik a $P'(t) = P(t)Q$ alak is. Ha tekintjük a $P(0) = E_n$ kezdetiérték feltételt, a $P(t)$ mátrixra $P(t) = e^{tQ}$ adódik.

5.14. Példa. *Tekintsünk egy olyan folyamatos paraméterű Markov-láncot (vö. [26]), melynek csak két állapota van: $I = \{0, 1\}$. Legyen $Q := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.*
Erre az explicit képletből (vö. 5.14. tétel), mivel $\Delta = 9 > 0$, a következő adódik:

$$P(t) = e^{tQ} = e^{-3t/2} \begin{bmatrix} \mathrm{ch}(3t/2) + \dfrac{\mathrm{sh}(3t/2)}{3} & \dfrac{2\,\mathrm{sh}(3t/2)}{3} \\ \dfrac{4\,\mathrm{sh}(3t/2)}{3} & \mathrm{ch}(3t/2) - \dfrac{\mathrm{sh}(3t/2)}{3} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{1+e^{-3t}}{2} + \dfrac{1-e^{-3t}}{6} & \dfrac{2(1-e^{-3t})}{6} \\ \dfrac{4(1-e^{-3t})}{6} & \dfrac{1+e^{-3t}}{2} - \dfrac{1-e^{-3t}}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{2+e^{-3t}}{3} & \dfrac{1-e^{-3t}}{3} \\ \dfrac{2-2e^{-3t}}{3} & \dfrac{1+2e^{-3t}}{3} \end{bmatrix}.$$

Hivatkozások

[1] Apostol, T. M.: *Some Explicit Formulas for the Exponential Matrix* e^{tA}, Amer. Math. Monthly **76**(3) (1969), 289–292.

[2] Adkins, W. A.; Davidson, M. G.: *Ordinary Differential Equations*, 2009 (https://www.math.lsu.edu/ adkins/m2065/Math2065Fall09.pdf).

[3] Bernstein, D. S.; So, W.: *Some explicit formulas for the matrix exponential*, IEEE Trans. Automat. Control **38**(8) (1993), 1228–1232.

[4] Egerváry, J.: *Mátrixfüggvények kanonikus előállításáról és annak néhány alkalmazásáról*, Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közleményei **3** (1953), 417–458.

[5] Farkas, M.: *A szimultán tanulás matematikai elmélete*, Alkalmazott Matematikai Lapok, **2** (1976), 103–114.

[6] Farkas, M.: *Periodic Motions*, Berlin, Heidelberg and New York: Springer-Verlag, 1994.

[7] Farkas, M.; Kotsis D.; Mile, K: *Differenciálegyenletek*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1991.

[8] Gantmacher, F. R.: *Teoriya matric* Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit., MOszkva, 1953.

[9] Hanson, C. G.: *Problems and Examples in Physics for Onc/Ond* McGraw-Hill Book Company Ltd, 1971.

[10] Hatvani, L.; Krisztin, T.; Makai G..: *Dinamikus modellek a közgazdaságban* Polygon, Szeged, 2001.

[11] Kirchner, R. B.: *An explicit formula for* e^{tA}, Amer. Math. Monthly **74**(10) (1967), 1200–1204.

[12] McDill, J. M.; Felsager, B.: *The Lighter Side of Differential Equations* , The College Mathematics Journal **25**(5) (1994), 448–452.

[13] Liz, E.: *A Note on the Matrix Exponential*, SIAM Rev. **40**(3) (1998), 700–702.

[14] Leonard, I. E.: *The matrix exponential*, SIAM Rev. **38**(3) (1996), 503–512.

[15] Moler, C.; Van Loan, C.: *Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twenty-five years later*, SIAM Rev. **45**(1) (2003), 3–49.

[16] Putzer, E. J.: *Avoiding the Jordan Canonical Form in the Discussion of Linear Systems with Constant Coefficients*, The American Mathematical Monthly, **73**(1) (1966), 2–7.

[17] Rootselaar, van B.: *How to solve the system $x' = Ax$*, The American Mathematical Monthly, **92**(5) (1985), 321–326.

[18] Rózsa, P.: *Lineáris algebra és alkalmazásai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1974.

[19] Smirnow, W. I.: *Kurs Vyčsej Matematiki.*, Teil III. rész, 2 OGIZ, Leningrad-Moskau, 1941.

[20] Sylvester, J. J.: *On the equation to the secular inequalities in the planetary theory* Philosophical Magazine **16** (1883), 267-269.

[21] Strogatz, S. H.: *Love Affairs and Differential Equations*, Mathematics Magazine, **61**(1) (1988), 35.

[22] Tallos, P.: *Dinamikai rendszerek alapjai*, Aula, 1999.

[23] Terjéki, J.: *Differenciálegyenletek*, Polygon, 1997.

[24] Tóth, J.; Simon, P.: *Differenciálegyenletek*, Typotex, 2005.

[25] Csiszár, V.: *Diszkrét és folytonos paraméterű Markov láncok*, (http://www.cs.elte.hu/ villo/ml/ML.pdf), 52–59.

[26] Harmati, I.: *Infinitezimális generátor*, (http://www.sze.hu/ harmati/Sztochasztikus%20folyamatok/sztocha_07.pdf).