Gráfok maximális élszáma

BsC Szakdolgozat

Írta: Lovas Bettnina

Alkalmazott matematikus szak

Témavezető:

Hermann György
Számítógéptudományi Tanszék
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2012

Köszönetnyilvánítás
Ezúton is szeretném megköszönni témavezetőmnek, Hermann Györgynek, hogy mindig szakított rám időt, és hasznos tanácsaival, útmutatásával és segédanyagokkal segítette elő szakdolgozatom létrejöttét.
Szeretném megköszönni továbbá családomnak és barátaimnak, hogy türelmükkel és bíztató szavakkal láttak el, köszönöm, hogy mindvégig mellettem álltak, és támogattak ezen a pályán.
Budapest, 2012. május 30.

Lovas Bettina

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Az extremális gráfelmélet jelentős fejezete a matematikának. A mai felfogás szerint az extremális gráfelmélet alapkérdése, hogy hogyan határozzuk meg, hogy bizonyos gráfelméleti tulajdonságok mit jelentenek gráfunk paramétereire nézve.

Jelen esetben legyen adva egy F gráf, és a kérdés az, hogy mi az n csúcsú gráf maximális élszáma, ha feltesszük, hogy nem tartalmazza az F gráfot részgráfként. A legtöbb gráfok témakörével foglalkozó szakember számára ez a legáltalánosabb extremális probléma. Mostanra nyilvánvalóvá vált, hogy ez a témakör meglehetősen különböző problémákat ölel fel. Mindazonáltal, a fenti kérdés alapvető extremális probléma, és ebben a dolgozatban ezzel a foglalkozunk.

Ebben a témakörben született legismertebb tétel Turán Pál gráftétele. Ez az eredmény 1940-ben született meg, és arra az esetre ad nekünk választ, ha $F_1 = K_r$. Meglehetősen sok olyan eredmény született, amelyek különböző kiterjesztései Turán tételének. Páros gráfok és r-osztályú gráfok esetében, főleg $n \geq 3$ esetén az eredmények meglehetősen hiányosak.

Dolgozatomban ezeket az eredményeket igyekszem összefoglalni, folyamatosan haladva az egyszerű esettől az érdekesebb, nehezebb eset felé. Végül foglalkozom egy keveset a teljes részgráfokkal, illetve azok számával.

1. fejezet

Alapfogalmak, definíciók

Először is ismerkedjünk meg a témakörben felhasznált definíciókkal.

1.0.1. Definíció (Gráf). *A $G = (V, E)$ jelöléssel definiált rendezett párok halmazát gráfnak nevezzük, ahol V nem üres halmaz, a gráf csúcsainak vagy pontjainak halmaza, E pedig ezen halmaz elemeiből képzett kételemű halmazokból áll, ezt nevezzük a gráf éleinek. A pontok számát $v(G)$-vel, az élekét $e(G)$-vel jelöljük.*

Megjegyzés:

- Az élt hurokélnek nevezzük, ha az él két végpontja megegyezik.
- Többszörös vagy párhuzamos élekről beszélünk abban az esetben, ha két különböző - nem hurok - élnek a végpontjai megegyeznek.
- Azt a gráfot, amelyik nem tartalmaz sem párhuzamos éleket, sem hurokéleket, egyszerű gráfnak nevezzük.
- Teljes gráfnak nevezzük az olyan egyszerű gráfot, amelyben minden él be van húzva. Az n pontú teljes gráfot K_n-nel jelöljük.
- Ha két élnek egyik végpontja közös, akkor őket szomszédos éleknek nevezzük.
- Két, éllel összekötött csúcsot szomszédos csúcsoknak nevezünk.
- A séta szomszédos csúcsok és élek váltakozó sorozata. Ha a sétában nincs ismétlődés, akkor útnak nevezzük. Ha az út első és utolsó csúcsa megegyezik, akkoz körről beszélünk.
- Egy gráfot összefüggőnek nevezünk, ha bármely pontból bármely másik pontba séta vezet.

- Az u csúcsból kiinduló élek számát a u fokszámának nevezzük, és $d(u)$-val jelöljük.

- Egy gráfot k-regulárisnak nevezünk, ha minden csúcs foka pontosan k.

- Egy $G'(V', E')$ gráfot a $G(V, E)$ gráf részgráfjának nevezünk, ha $V' \subseteq V$ és $E' \subseteq E$.

- Egy gráf egy komponensén egy maximális összefüggő részgráfot értünk.

- $X \subseteq V(G)$ független ponthalmaznak nevezzük, ha X-ben semelyik két csúcs között nem fut él. A legnagyobb méretű független ponthalmaz elemszámát $\alpha(G)$-vel jelöljük.

- $X \subseteq V(G)$ egy lefogó ponthalmaz, ha G minden élének legalább egyik végpontját tartalmazza. A legnagyobb méretű lefogó ponthalmaz elemszámát $\tau(G)$-vel jelöljük.

1.0.2. Definíció. *Kétosztályú gráfnak nevezünk egy olyan gráfot, amelynek élei két osztályba sorolhatóak úgy, hogy az osztályokon belül nem vezet él.*

Megjegyzés: A kétosztályú gráfot szokás páros gráfnak is hívni.

1.0.3. Állítás. *Egy n pontú egyszerű gráfnak legfeljebb $\binom{n}{k}$ éle lehet, ugyanis ha a gráf minden éle be van húzva, akkor egy csúcsból $n-1$ darab él húzható. Ez azt jelenti, hogy n csúcsból $n(n-1)$ db él húzható, de mivel minden élt kétszer számoltunk, így összesen $\frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{k}$ él húzható.*

Megjegyzés: Ha egy gráf nem tartalmaz kört, akkor legfeljebb $n-1$ éle lehet.

Most vizsgáljuk meg azt, mit tudunk mondani akkor, ha a gráf nem összefüggő. Tegyük fel, hogy a $G(V, E)$ gráfnak n pontja van és a gráf két komponensből áll. Azaz:
$V = V_1 + V_2$ ahol V_i-k a részgráfok csúcsai $(i = 1, 2)$
E $= E_1 + E_2$ ahol E_i-k pedig a részgráfok élei $(i = 1, 2)$
Tegyük fel, hogy $|V_1| = k$, ekkor $|V_2| = n - k$, így feltehető, hogy $k \leq \frac{n}{2}$.
Azt szeretnénk, hogy a lehető legtöbb élt be tudjuk húzni, ehhez tehát az kell, hogy a két részgráf az eredeti gráf teljes részgráfjai legyenek. Így összesen ennyi él húzható be:

$\binom{k}{2} + \binom{n-k}{2} = \frac{k!}{2!(k-2)!} + \frac{(n-k)!}{2!(n-k-2)!} = \frac{k(k-1)}{2} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2} = \frac{k^2-k+n^2-nk-n-kn+k^2+k}{2} = \frac{n^2-n}{2} - k(n-k) = \frac{n(n-1)}{2} - k(n-k) = \binom{n}{2} - k(n-k)$

Ezt a kifejezést szeretnénk maximalizálni. Ezt pedig úgy tehetjük meg, hogy k-t a lehető legkisebbre választjuk, mivel $\binom{n}{2}$ is és $k(n-k)$ is pozitív. Két pozitív tag különbségét pedig úgy tudjuk maximalizálni, ha a kivondandót minimalizáljuk. Ez pedig $k = 1$ illetve $k = n-1$ esetén lesz minimális (a két eset gyakorlatilag ugyanaz). Ekkor a maximális élszám $\binom{n}{2} - k(n-k) = c-(n-1) = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{2(n-1)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \binom{n-1}{2}$. Tehát ebben az esetben akkor kapunk maximális élszámot, ha egy izolált pontunk van (azaz a fokszáma 0), a másik komponens pedig teljes részgráfot alkot.

Megjegyzés:

- Egy gráfban pontosan akkor nincs páratlan hosszú kör, ha páros.
- Páros n esetén egy n csúcsú páros gráf esetén a maximális élszám $(\frac{n}{2})^2$, ugyanis mindkét osztályban $\frac{n}{2}$ csúcs van, egy csúcsból pedig $\frac{n}{2}$ él húzható.
- Páratlan n esetén tegyük fel, hogy az egyik osztályban k csúcs van, a másikban pedig $k+1$ (azaz $n = 2k+1$). Ebben az esetben $k(k+1)$ él húzható be maximálisan, azaz $e \leq \frac{n^2-1}{4}$.

Hogyan változik a helyzet akkor, ha nem akármilyen hosszú páratlan kört tiltunk meg, hanem meghatározott hosszúságút, például 3-at?

2. fejezet

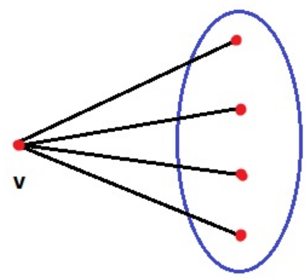
Maximális élszám

Az előbbi kérdésre a választ a Mantel-tétel adja meg nekünk.

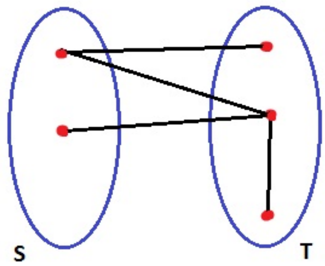
2.1. A Mantel-tétel

2.1.1. Tétel (Mantel). *Legyen adva egy olyan $G(V, E)$ egyszerű gráf, amely nem tartalmaz három hosszú kört. Ekkor a gráf éleire teljesül, hogy:* $e(G) \leq \frac{n^2}{4}$

Bizonyítás: *(első változat)*
Ebben a bizonyításban gyakorlatilag azt látjuk be, hogy $e(G) \leq \alpha(G)\tau(G)$.
Vegyünk egy $v \in V$ csúcsot. Mivel nem tartalmaz háromszöget, ezért a v szomszédjai független ponthalmazt alkotnak:

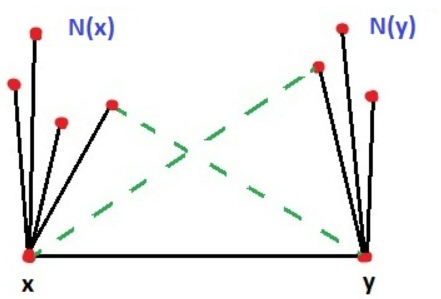


Tegyük fel, hogy G-ben a maximális független ponthalmaz mérete k, ekkor igaz, hogy $d(v) \leq k$. Ugyanis ha lenne $k+1$ fokú csúcs, akkor a legnagyobb független ponthalmaz mérete is $k+1$ lenne.
Ezután vegyünk egy olyan független ponthalmazt a G-ben, amelynek a mérete k. Jelöljük ezt S-sel. A többi pont által alkotott halmazt pedig T-vel.



Ekkor $e(G) \leq \sum\limits_{v \in T} d(v)$, ugyanis az S halmazon belül nem fut él. Az egyenlőség abban az esetben teljesül, ha a T halmazon belül sem fut él, azaz ha a gráf páros. Minden T-beli pont foka legfeljebb k, mivel minden pont szomszédjai független halmazt alkotnak. Így $e(G) \leq \sum\limits_{v \in T} d(v) \leq k|T| \leq k(n-k) \leq (\frac{n}{2})^2 = \frac{n^2}{4}$, ugyanis $k(n-k)$ felülről becsülhető $\frac{n^2}{4}$-gyel. ■

Bizonyítás: *(második változat)*
Legyen $x, y \in V(G)$ két éllel összekötött csúcsa a gráfnak, azaz $\{x, y\} \in E(G)$. Ekkor x-nek és y-nak nem lehet közös szomszédja, ugyanis akkor keletkezne a gráfban egy háromszög, ami a feltevésünknek ellentmondana.



Vagyis, ha $N(x)$ és $N(y)$ jelöli x és y szomszédainak halmazát, akkor $N(x)$ és $N(y)$ diszjunktak. Mivel $N(x)$ elemszáma éppen x foka, azaz $|N(x)| = d(x)$, így azt kapjuk, hogy:

$$d(x) + d(y) \leq n, \forall \text{ olyan } x, y \in V(G)\text{-re, ahol } \{x, y\} \in E(G).$$

Ez valójában egy $|E(G)| = e$ darab egyenlőtlenségből álló egyenlőtlenségrendszer. Adjuk ezeket össze, így a bal oldalon egy rögzített x csúcs foka pontosan $d(x)$-szer fordul elő (annyiszor, ahány csúccsal össze van kötve, ami pedig pont a fokszám). Így azt kapjuk, hogy:

$$\sum_{x \in V(G)} (d(x))^2 \leq ne$$

Mivel a fokszámok összege egyenlő $2e$-vel, így helyettesítsük be a $\sum\limits_{x \in V(G)} d(x) = 2e$ -t az egyenlőtlenségbe, majd alkalmazzuk a számtani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenséget:

$$(\sum_{x \in V(G)} d(x))^2 \leq n \sum_{x \in V(G)} (d(x))^2$$
$$\Downarrow$$
$$4e^2 \leq n(ne)$$
$$\Downarrow$$
$$e \leq \frac{n^2}{4}$$

■

Megjegyzés: A Mantel-tétel valójában a Turán-tétel egy speciális esete. Így gyakorlatilag egy harmadik féle bizonyítást nyerünk a Mantel-tétel igazolására, ha a Turán-tételt már beláttuk, és alkalmazzuk a tételt háromszögre, mint 3 csúcsú teljes részgráfra.

Ha a Mantel-tételben szereplő háromszöget úgy fogjuk fel, mint egy három hosszú kört, akkor általánosíthatunk! Nézzük meg, hogyan alakul a helyzet, ha 4 hosszú kört nem engedünk meg a gráfban.

2.1.2. Tétel. *4 hosszú kört nem tartalmazó egyszerű gráf élszámára teljesül, hogy* $e(G) \leq \frac{n}{4}(1 + \sqrt{4n-3})$.

Megjegyzés: A bizonyítás során két dolgot használunk fel.

- A Jensen-egyenlőtlenséget, illetve annak egyik következményét:
  Ha az f függvény konvex az I intervallumon, akkor
  $x_1, \ldots, x_n \in I$, $t_1 = \ldots = t_n = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{R})$ és teljesül, hogy
  $f(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}) \leq (\frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n}{n})$
- Valamint azt, hogy
  $\sum\limits_{v \in V} d(x) = 2e$, ahol e a gráf éleinek száma.

Bizonyítás: A bizonyítás ötlete az, hogy a cseresznyéket (azaz a 2 élből álló utakat) megszámoljuk kétféleképpen. Mivel azoknak a cseresznyéknek a száma, amelyekben a cseresznye középső pontja x, éppen $\binom{d(x)}{2}$, így a gráfban a cseresznyék száma pontosan $\sum\limits_{v \in V} \binom{d(x)}{2}$. Továbbá, mivel a gráfban nincs 4 hosszú kör, egy pontpárra legfeljebb egy olyan cseresznye illeszkedhet, amelynek ezek a pontok a végpontjai, így a cseresznyék száma legfeljebb $\binom{n}{2}$, azaz

$$\sum_{v\in V}\binom{d(x)}{2}\leq\binom{n}{2}$$

Legyen $f(x)=\binom{x}{2}=\frac{x(x-1)}{2}$, majd alkalmazzuk f-re a Jensen-egyenlőtlenség következményét (amelyet megtehetünk, hiszen x^2 együtthatója pozitív, tehát f konvex):

$$\frac{\sum\limits_{v\in V}d(x)}{\binom{n}{2}}\leq\frac{\sum\limits_{v\in V}\binom{d(x)}{2}}{n}$$

Szorozzuk be az egyenlőtlenséget n-nel, majd helyettesítsük be $\sum\limits_{v\in V}d(x)=2e$-t az egyenlőtlenségbe:

$$n\frac{\sum\limits_{v\in V}d(x)}{\binom{n}{2}}\leq\sum_{v\in V}\binom{d(x)}{2}$$
$$\Downarrow$$
$$n\frac{2e}{\binom{n}{2}}\leq\binom{d(x)}{2}$$

Rendezve az egyenlőtlenséget kapjuk, hogy:

$$n\frac{\frac{2e}{n}(\frac{2e}{n}-1)}{2}\leq\frac{n(n-1)}{2}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{2e}{n}(\frac{2e}{n}-1)\leq n-1$$
$$\Downarrow$$
$$4e^2-2en-n^2(n-1)\leq 0$$

Ezután oldjuk meg a $4e^2-2en-n^2(n-1)=0$ másodfokú egyenletet e-re. A megoldásban az egyik gyök sosem lesz pozitív, így azt nem kell figyelembe vennünk. Számolás után e-re adódik a felső becslés:
$e\leq\frac{2n+\sqrt{4n^2+16n^2(n-1)}}{8}=\frac{n}{4}(1+\sqrt{1+4(n-1)})=\frac{n}{4}(1+\sqrt{4n-3})$ ∎

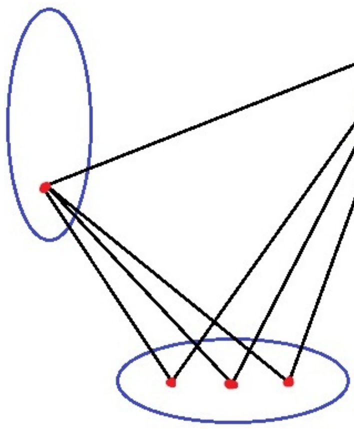
2.2. A Turán-tétel

Ebben a témakörben azt vizsgáljuk, hogy mit tudunk mondani az élek számáról, ha azzal a feltevéssel élünk, hogy a gráf nem tartalmaz r csúcsú teljes részgráfot, azaz K_r-t.

Megjegyzés: Ha $k=3$, akkor visszakapjuk egy általunk korábban tárgyalt esetet, azaz amikor a gráf nem tartalmaz 3 hosszú kört. Ekkor annak a páros gráfnak a legnagyobb az élszáma, amelyiknek mindkét osztályában ugyanannyi csúcs van (ha a csúcsok száma páratlan, akkor nyilván az egyik osztályban 1-gyel több csúcs van), és a két osztály között minden él be van húzva. Ekkor $e \leq \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$.

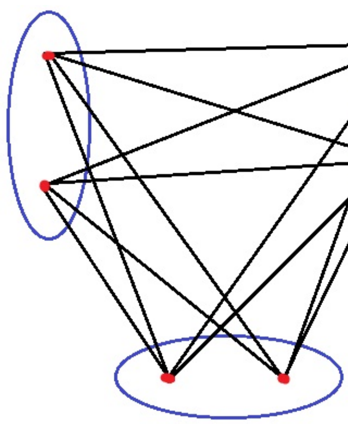
2.2.1. Definíció. *A teljes r osztályú gráf olyan egszerű gráf, amelynek pontjai r osztályba sorolhatóak úgy, hogy az osztályokon belül nem fut él, és az osztályok között minden él be van húzva.*

Ez például egy teljes 3 osztályú gráf:



2.2.2. Definíció (Turán gráf). *A Turán-gráf olyan teljes r osztályú gráf, amelynek osztályaiban az elemek száma legfeljebb 1-gyel tér el egymástól. Az n csúcsú, r osztályú Turán-gráfot $T(n,r)$-rel, éleinek számát $t(n,r)$-rel jelöljük.*

Példa egy 6 csúcsú, 3 osztályú Turán-gráfra, azaz $T(6,3)$-ra. Éleinek száma: $t(n,r) = 12$.



Megjegyzés: Egy teljes $r-1$ osztályú gráfban nyílvánvalóan nincs teljes r csúcsú részgráf. Azt fogjuk a következőkben belátni, hogy ezen gráfok között az n csúcsú, $r-1$ osztályú Turán-gráfnak van a legtöbb éle.

2.2.3. Állítás. *Legyen $G(V, E)$ n csúcsú és r osztályú gráf. Ekkor G éleire teljesül, hogy: $e(G) \leq t(n, r)$.*

Bizonyítás: Az r osztályú, nem teljes gráf nem lehet maximális élszámú, mert ha azt teljessé tennénk, akkor az élszám nőne. Legyen tehát a továbbiakban a gráf teljes r osztályú. Indirekt tegyük fel, hogy a gráf maximális élszámú, de a csúcsok eloszlása nem egyenletes, azaz léteznek olyan V_i és V_j osztályok, amelyekre $|V_i| \geq |V_j| + 2$. Tegyük át V_i egyik csúcsát V_j-be. Azonban ekkor a gráf nem teljes, így módosítanunk kell, hogy továbbra is teljes r osztályú legyen. Fel kell vennünk $|V_i| - 1$ darab élt, és le kell törölni $|V_j|$ darab élt. Ekkor az élszám ennyivel változik: $(|V_i| - 1) - |V_j| \geq 0$, amiből az következik, hogy az eredeti gráf nem volt maximális élszámú. ■

Ezután be fogjuk látni, hogy $T(n, r-1)$ a K_r-t nem tartalmazó gráfok között is maximális élszámú. Ehhez azonban először be kell vezetnünk egy új fogalmat, a szimmetrizálást, és meg kell ismerkednünk annak tulajdonságaival.

2.2.4. Definíció. *Vegyünk két olyan csúcsot, u-t és vt a gráfból, amelyek nem szomszédai egymásnak. Szimmetrizáljuk a v csúcsot az u csúcshoz. Ekkor egy olyan G' gráfot kapunk, amelyre a következők teljesülnek:*

- *A szimmetrizálás után ugyanazok G' csúcsai, mint az eeredeti gráfnak.*
- *Az eljárás után az új gráfban v ugyanazokkal a csúcsokkal van összekötve, mint az eredeti gráfban u.*
- *minden olyan él, amely nem a v csúcsból indul ki, csak akkor része az új gráfnak, ha az eredetinek is része volt.*

2.2.5. Lemma. *Tegyük fel, hogy G gráfban szimmetrizálva a $v_1, \ldots, v_k$ csúcsokat az u csúcshoz G' gráf keletkezik. Ekkor:*
(1) a G' gráf nem függ a szimmetrizálás sorrendjétől.
(2) ha az eredeti gráf nem tartalmazott teljes r csúcsú részgráfot, akkor a keletkező G' gráf sem fog tartalmazni teljes r csúcsú részgráfot.
(3) ha u az eredeti gráfban egy maximális fokú csúcs, akkor a szimmetrizálás során az élszám nem csökken.
(4) ha u az eredeti gráfban egy maximális fokú csúcs, továbbá a $v_1, \ldots, v_k$ csúcsok között fut él, akkor a szimmetrizálás során az élszám nő.

Bizonyítás: (1) Triviális.
(2) Indirekt: tegyük fel, hogy az eredeti gráf nem tartalmazott teljes r méretű részgráfot, és a szimmetrizálás után az új gráfban keletkezett K_r. Ebben az esetben valamely v_i is része K_r-nek, hiszen csak a $v_1, \ldots, v_k$ csúcsokra illeszkedő élek változtak meg. Mivel G'-ben v_i és u ugyanazokkal a csúcsokkal vannak összekötve és közöttük nem fut él, így ha v_i-t lecserélnénk u-ra, akkor ugyanúgy K_r keletkezne az új gráfban. Ez viszont az eredeti gráfban is szerepelt volna, ám ez ellentmondás, hiszen feltettük, hogy G nem tartalmaz K_r-t.
(3) Minden v_i-re igaz, hogyha a $v_1, \ldots, v_{i-1}$ csúcsokat szimmetrizáljuk, akkor v_i foka nem nő, hiszen u és v_i között nem fut él. Tehát ha v_i-t szimmetrizáljuk, akkor u foka legalább annyi, mint v_i foka. Vagyis a szimmetrizálás alkalmával nem csökkent az élszám.
(4) Tegyük fel, hogy v_1 és v_2 között fut él. Az, hogy mely élek vannak összekötve, gyakorlatilag a mi szempontunkból nem lényegesek, hisz az (1)-es pontban feltettük, hogy a szimmetrizálás alkalmával a sorrend nem számít. Először szimmetrizáljuk v_1-et u-hoz, ekkor v_2 foka csökken, tehát kisebb lesz u fokánál. Ha most szimmetrizáljuk v_2-t u-hoz, akkor az élszám nő. ■

2.2.6. Tétel (Turán). *Adott n csúcsú, e élszámú, teljes r csúcsú részgráfot nem tartalmazó G gráfra teljesül, hogy $e \leq t(n, r-1)$. Egyenlőség abban az esetben áll fenn, ha G éppen az n csúcsú, $r-1$ osztályú Turán-gráf.*

Bizonyítás: A tételt r szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha $r = 2$, akkor a tétel nyilvánvaló. Tegyük fel tehát, hogy a tétel igaz $r-1$-re, és lássuk be, hogy teljesül r esetén is!
Tekintsünk egy olyan maximális élszámú G gráfot, amelyre nem tartalmaz teljes r csúcsú gráfot részgráfként. Tegyük fel, hogy u maximális fokú csúcs G-ben. Ekkor szimmetrizáljuk u-hoz az összes olyan $v_1, \ldots, v_k$ csúcsokat G-ben, amelyek nincsenek vele összekötve. Jelöljük G_1-gyel az u szomszédjai által alkozott csúcshalmazt.
A szimmetrizálás (2)-es és (3)-as tulajdonsága miatt az új gráf szintén nem tartalmaz teljes r csúcsú gráfot részgráfként. A (4)-es tulajdonságot felhasználva az $u, v_1, v_2, \ldots, v_k$ csúcsok között nem megy él, mivel az élszám nem nőtt a szimmetrizálás alkalmával. Ez azt jelenti, hogy minden v_i össze volt kötve a szimmetrizálás előtt is G_1 minden csúcsával, azaz u szomszédaival, különben az élszám nőtt volna. Valójában tehát a szimmetrizálás a gráfon nem változtatott semmit sem.
A G_1 gráf nem tartalmaz K_{r-1}-et, ugyanis ha tartalmazva, akkor hozzá véve egy élt, K_r-t kapnánk. Továbbá, mivel G_1 maximális élszámú volt, emiatt G is maximális

élszámú, és nem tartalmaz K_r-t. Tehát az indukciós feltevés alapján G_1 egy $r-2$ osztályú gráf, ekkor a G viszont $r-1$ osztályú. Használjuk fel korábbi állításunkat, mely szerint az r osztályú gráfok között a Turán-gráf a maximális élszámú. Ebből már következik, hogy $G = T(n, r-1)$. ■

2.3. A probléma általánosítása

Ha nem azt tesszük fel a G gráfról, hogy nem tartalmaz K_r-t, hanem egy tetszőleges H gráfot tiltunk meg, akkor egy sokkal általánosabb, összetetteb problémát kapunk.

2.3.1. Definíció. *Legyen* $\mathrm{ext}(n, H)$ *annak az* n *csúcsú gráfnak a maximális élszáma, amely nem tartalmaz* H *gráfot részgráfként.*

Megjegyzés: A Turán-tétel esetében azt kapjuk, hogy: $\mathrm{ext}(n, K_r) = t(n, r-1)$.

2.3.2. Definíció. *Egy* G *gráf kromatikus száma* k*, ha a gráf csúcsait ki tudjuk színezni* k *színnel úgy (*$k-1$ *színnel még nem), hogy semelyik azonos színű csúcs nincs éllel összekötve. A kromatikus számot* $\chi(G)$*-vel jelöljük.*

A következő, itt nem bizonyított tétel megadja $\mathrm{ext}(n, H)$ nagyságrendjét:

2.3.3. Tétel (Erdős-Stone-Simonovits). *Tetszőleges* H *esetén*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{ext}(n,H)}{n^2} = \frac{\chi(H)-2}{2(\chi(H)-1)}$$

ahol $\chi(H)$ *a* H *kromatikus száma.*

Bizonyítás: Nem bizonyítjuk. ■

Megjegyzés: A tétel nem páros H gráf esetén megmondja, hogy az élek hányad része lehet behúzva a gráfban. Ha H páros, akkor az élszám nagyságrendje kisebb, mint n^2, így a tételből sok mindenre nem következtethetünk, hiszen $\chi(H) = 2$, ebből pedig azt kapnánk, hogy $\frac{\chi(H)-2}{2(\chi(H)-1)} = \frac{2-2}{2-1} = 0$.

2.4. Páros-gráfok maximális élszáma

Az Erdős-Stone-Simonovits-tétel sajnos nem mondd nekünk semmit az élszám nagyságrendjéről abban az esetben, ha a megtiltott H gráf páros. Vizsgáljuk meg, hogy mit tudunk erről a problémáról mondani néhány nevezetes páros gráf esetén.

2.4.1. Definíció. *$K_{k,l}$-lel jelöljük azt a teljes kétosztályú gráfot, amelynek osztályai k illetve l eleműek.*

Azt az esetet már korábban tárgyaltuk a 2.1.2-es tételben, amikor a $K_{2,2}$-t, azaz a 4 hosszú köröket tiltjuk meg G-ben. Arra az eredményre jutottunk, hogy $\exists c > 0$ úgy, hogy $e \leq cn^{\frac{3}{2}}$. Véges geometriák segítségével pedig be fogjuk bizonyítani, hogy ez a nagyságrend el is érhető.
Nézzük most meg, hogy mit mondhatunk általános esetben.

2.4.2. Állítás. *Legyen $k \leq l$. Ekkor létezik olyan $C_1 > 0$ szám, amelyre $\forall n$ esetén*

$$\mathrm{ext}(n, K_{k,l}) \leq C_1 n^{2-\frac{1}{k}}.$$

Bizonyítás: Az állítást k-cseresznyék segítségével hasonlóan beláthatjuk, mint a 2.1.2-es tételt. ■

Megjegyzés: A legjobb ismert $K_{k,l}$-t nem tartalmazó általános konstrukciónak $cn^{2-\frac{2}{k}}$ darab éle van. A sejtés az, hogy a felső becslés pontos, ezt erősíti tovább a következő tétel is.

2.4.3. Tétel (Kollár-Rónyai-Szabó). *Ha $l > k!$, akkor létezik olyan $d > 0$ szám, amelyre $\forall n$ esetén*

$$\mathrm{ext}(n, K_{k,l}) \geq dn^{2-\frac{1}{k}}.$$

Bizonyítás: Nem bizonyítjuk. ■

A továbbiakban tegyük fel, hogy a páros gráfok egy speciális esetének, a fáknak a tartalmazását tiltjuk meg. Nézzük meg a teljesség igénye nélkül, hogy milyen eredmények születtek ebben a témában.

2.4.4. Állítás. *Ha az n csúcsú, e élű gráf éleire teljesül, hogy $e > \lfloor\frac{(k-1)n}{2}\rfloor$, akkor a gráf tartalmaz k élű csillagot.*

Bizonyítás: Indirekt: ha a gráf nem tartalmaz k élű csillagot, akkor minden csúcs foka legfeljebb $k-1$, ami pedig ellentmondana a feltételünknek. ■

Ha egy n csúcsú gráf diszjunk K_k részgráfokból áll, akkor az nem tartalmazhat k élű utat. Az ilyen gráfnak nagyságrendileg $\frac{(k-1)n}{2}$ éle van. Erdős és Gallai bizonyították be, hogy a k élű utat nem tartalmazó gráfok között ez a gráf extremális.

Megjegyzés: Extremális gráfoknak nevezzük az adott tulajdonságú gráfok közül a maximális élszámúakat.

2.4.5. Tétel (Erdős-Gallai). *Ha az n csúcsú, e élű gráf éleire teljesül, hogy $e > \lfloor \frac{(k-1)n}{2} \rfloor$, akkor a gráf tartalmaz k élű utat.*

Bizonyítás: Nem bizonyítjuk. ■

2.4.6. Sejtés (Erdős-Sós). *Ha az n csúcsú és e élű gráf éleire teljesül, hogy $e > \lfloor \frac{(k-1)n}{2} \rfloor$, akkor a gráf tartalmazza az összes k élű fát.*

3. fejezet

Teljes részgráfok száma

Turán tételének egyik változata szerint $T(n, t(n, r-1)+1)$ nemcsak K_r-et tartalmaz, de majdnem tartalmaz K_{r+1}-et is. Ezt először Dirac mutatta meg.

3.0.7. Tétel. *Ha $n \geq r+1$, akkor minden $G = T(n, t(n, r-1)+1)$ tartalmaz egy olyan K_{r+1}-et, amiből egy él kimaradt.*

Bizonyítás: A tételt n-re való teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha $n = r+1$, akkor G éppen a K_{r+1} mínusz egy él. Tegyük fel, hogy a tétel igaz minden olyan gráfra, amelynek kevesebb, mint n csúcsa van (ahol $n \geq r+2$). Válasszunk egy olyan $x \in G$ csúcsot a gráfból, amelyre teljesül, hogy $d(x) = \Delta(\mathrm{G})$ (ahol $\Delta(G)$ a G maximális fokszámát jelenti). Könnyen ellenőrizhető, hogy $\Delta(G) \leq \Delta(T(n, r-1))$, tehát $e(G-x) \geq t(n-1, r-1)+1$. Az indukciós feltevés miatt $G-x$ tartalmaz K_{r+1} mínusz egy élt. ■

3.0.8. Következmény. *Ha egy n csúcsú G gráf nem tartalmaz K_r-t, akkor*

$$\Delta(G) \leq (1 - \tfrac{1}{r-1})n.$$

Andrásfai, Erdős és Sós bebizonyították, hogy ha $\chi(G) \geq r$ és $K_r \not\subset G$, akkor a $\Delta(G)$-re vonatkozó felső becslés tovább élesíthető a következőre:

$$\Delta(G) \leq (1 - \tfrac{1}{r-\frac{4}{3}})n = \tfrac{3r-7}{3r-4}n$$

3.0.9. Tétel. *Legyenek G gráf csúcsai $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Ha G nem tartalmaz K_r-t, akkor létezik egy $r-1$ osztályú G' gráf, amelynek csúcshalmaza V, és teljesül, hogy:*

$$d_G(x_i) \leq d_{G'}(x_i), \text{ ahol } i = 1, 2, \ldots, n$$

Bizonyítás: Teljes indukciót végzünk r-re. A tétel $r = 2$ esetén nyilvánvaló. Tegyük fel tehát, hogy $r > 2$, és a tétel igaz kisebb r esetén. Vegyünk egy maximális fokú csúcsot, és jelöljük W-vel ennek a csúcsnak a szomszédjait. Legyen H az a részgráf G-ben, amelyet W feszít. Ekkor H nem tartalmaz K_{r-1}-et. Az indukciós feltevés szerint létezik egy $r-1$ osztályú H' gráf, amelyben a csúcsok fokszámát nem csökkentettük. Állítsuk elő G'-t a H' segítségével oly módon, hogy minden csúcsot a $V - W$ halmazból kössünk össze minden W-ben lévő csúccsal. Azonnal adódik, hogy a csúcsok foka G'-ben legalább akkora, mint G-ben, és a konstrukció miatt G $r - 1$ osztályú. ∎

3.1. Háromszögek száma

Ebben a részben azt vizsgáljuk, hogy mennyi a háromszögek, azaz a K_3-asok minimális száma egy G gráfban. Jelölje $k_r(G)$ a gráfban lévő K_r-esek számát. Ezek alapján tehát a $k_2(G)$ jelenti azt, hogy mennyi a G gráf élszáma; és $k_3(G)$ a háromszögek számát jelenti. Jelöljük $(d_i)_1^n$ az n csúcsú gráfban a fokszámok sorozatát. Ekkor G komplementerének, azaz $\overline{G}$-nek a fokszámsorozatát $(\overline{d_i})_1^n$ jelöli. Erre $(\overline{d_i})_1^n = (n-1-d_i)_1^n$. Így $\sum\limits_{i=1}^{n} \binom{d_i}{2}$ darab szomszédos élpárunk van G-ben, $\overline{G}$-ben pedig $\sum\limits_{i=1}^{n} \binom{n-1-d_i}{2}$. Ezek az összegek a következőképpen is számolhatóak: minden egyes $k_3(G) + k_3(\overline{G})$ háromszögből G és G' három ilyen élpárt tartalmaz, míg a maradék, $\binom{n}{3} - k_3(G) + k_3(\overline{G})$ csúcshármasok pontosan egy élpárt tartalmaznak. Ebből

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{d_i}{2} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1-d_i}{2} = 3k_3(G) + 3k_3(\overline{G}) + \binom{n}{3} - k_3(G) - k_3(\overline{G})$$

Ezt átalakítva kapjuk a következőt ($\overline{e}$ a $\overline{G}$-beli élek száma):

$$k_3(G) + k_3(\overline{G}) = \binom{n}{3} - (n-2)e + \sum_{i=1}^{n} \binom{d_i}{2} = \binom{n}{3} - (n-2)\overline{e} + \sum_{i=1}^{n} \binom{\overline{d}_i}{2}$$

3.1.1. Tétel. *Egy n csúcsú gráf és annak komplementere legalább $\frac{1}{24}n(n-1)(n-5)$ háromszöget tartalmaz.*

Bizonyítás: Felhasználva a fenti eredményt, adódik a tétel állítása.
$\binom{n}{3} - (n-2)\overline{e} + n\binom{2\overline{e}/n}{2} = \binom{n}{3} - \frac{2\overline{e}(n^2-n-2\overline{e})}{2n} \geq \frac{1}{24}n(n-1)(n-5)$. ∎

3.1.2. Következmény. *Egy n csúcsú és e élű G gráf legalább $\frac{e}{3n}(4e - n^2)$ háromszöget tartalmaz.*

Bizonyítás: Ismét a fenti eredményt használjuk fel, miszerint

$$3k_3(\overline{G}) \leq \sum_{i=1}^{n} \binom{\overline{d_i}}{2}.$$

$\overline{e}$ helyére írjuk be, hogy $\overline{e} = \binom{n}{2} - e$, így a következőt kapjuk:

$$k_3(G) \leq \binom{n}{3} - (n-2)\overline{e} + n\binom{2\overline{e}/2}{2} = \frac{e}{3n}(4e - n^2)$$

■

3.1.3. Definíció. *$2 \leq p < r \leq n$ esetén definiáljuk a következőt:*

$$k_r(k_p^n \geq x) = \min\{k_r(G) : k_p(G) \geq x, |V(G)| = n\}$$

A feladatunk, hogy megbecsüljük $k_r(k_p^n \geq x)$-t. Megjegyzendő, hogy ez azt mondja meg, hogy mennyi a minimális K_r-esek száma egy olyan n csúcsú gráfban, amelyben a K_p-esek száma legalább x.
Rögzítsük az $r, p, n \in \mathbb{Z}$ számokat, és vizsgáljuk $k(x) = k_r(k_p^n \geq x)$ -t, mint x függvényét. Ha $G = T(n, r-1)$, akkor:

$$k(x) = k_r(k_p^n \geq x) = 0, \text{ ha x} \leq k_p(T(n, r-1)).$$

A továbbiakban tegyük fel tehát, hogy $k_p(T(n, r-1)) \leq x \leq \binom{n}{p}$.

3.1.4. Definíció. *Legyen $\psi(x) = \psi_r^p(x, n)$ az a maximális konvex függvény, amelyre teljesül, hogy:*

- *$k_p(T(n, r-1)) \leq x \leq \binom{n}{p}$ intervallumon van értelmezve, és*
- *$\psi(k_p(T(n,q))) \leq k_r(T(n,q))$*

3.1.5. Tétel. $k(x) = k_r(k_p^n \geq x) \geq \psi(x) = \psi_r^p(x, n)$

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $c > 0$. Jelölje $\mathcal{G}$ azon n csúcsú gráfok halmazát, amelyeknek a csúcsai $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Ezek után definiáljunk egy f_c függvényt a $\mathcal{G}$-n a következőképpen:

$$f_c(G) = k_p(G) - ck_r(G) \text{ ahol } G \in \mathcal{G}.$$

Mivel $\psi(x)$ konvex, így a tétel bizonyításához elég azt belátni, hogy f_c felveszi a maximumot a $G \in \mathcal{T}$-re (ahol $\mathcal{T} = \{T(n,q) : q = 1, 2, \ldots, n\} \subset \mathcal{C}$), ahol $\mathcal{C}$ azokból a $G \in \mathcal{G}$-beli gráfokból áll, amelyek teljes q osztályúak valamely q-ra. Ahhoz, hogy ezt igazoljuk, bevezetjük az $\widetilde{f_y}$ függvényt, amellyel az f_c függvényt tudjuk közelíteni, és erről az $\widetilde{f_y}$-ról fogjuk belátni, hogy felveszi a maximumot a $G \in \mathcal{T}$-re.
Legyenek $y, \alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0$ algebrailag független számok. Ha K egy olyan teljes részgráf, amelynek csúcsahalmaza $V(K)$, akkor legyen:

$$
\begin{aligned}
w(K) &= \prod_{x_i \in K} (1+\alpha_i), \\
w_q(G) &= \sum_{K_q \subset G} w(K_q), \\
\widetilde{f_y} &= w_p(G) - y w_r(G).
\end{aligned}
$$

Továbbá $1 \leq i \leq n$ esetén legyen:

$$
\begin{aligned}
w_q^i(G) &= \sum_{\{x_i\} \subset K_q \subset G} w(K_q), \\
\widetilde{f_y^i} &= w_p^i(G) - y w_r^i(G).
\end{aligned}
$$

Legyen $G_0 \in \mathcal{G}$ olyan gráf, amelyre $\widetilde{f_y}$ felveszi a maximumot. Feltehetjük az általánosság megszorítása nélkül, hogy G_0 minden éle legalább egy K_p-ben benne van. Tegyük fel, hogy x_i és x_j nem szomszédos csúcsok G_0-ban. Ekkor:

$$
\widetilde{f_y}\,(G_0) = \widetilde{f_y^i}\,(G_0) + \widetilde{f_y^j}\,(G_0) + A
$$

ahol A csak a $G_0 - x_i - x_j$ gráftól függ. Tegyük fel, hogy

$$
\begin{gathered}
\frac{\widetilde{f_y^i}(G_0)}{1+\alpha_i} \neq \frac{\widetilde{f_y^j}(G_0)}{1+\alpha_j} \\
\Downarrow \\
\frac{\widetilde{f_y^i}(G_0)}{1+\alpha_i} > \frac{\widetilde{f_y^j}(G_0)}{1+\alpha_j}
\end{gathered}
$$

Töröljük a gráfból az x_j-ből kiinduló éleket, majd x_j-t kössük össze minden olyan csúccsal, amivel x_i is össze van kötve. Ezzel az eljárással kapunk egy új gráfot, jelöljük ezt G_0'-val. Ekkor teljesül, hogy:

$$
\widetilde{f_y}\,(G_0') > \widetilde{f_y}\,(G_0)
$$

Mivel ez ellentmond a feltételünknek G_0-ról, így arra a következtetésre jutottunk, hogy

$$
(1+\alpha_j)\,\widetilde{f_y^i}\,(G_0) = (1+\alpha_i)\,\widetilde{f_y^j}\,(G_0)
$$

Ebből, valamint $y, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ függetlenségéből következik, hogy x_i és x_j pontosan ugyanazokkal a csúcsokkal vannak összekötve. Tehát $G_0 \in \mathcal{C}$.
Fontos megjegyezni, hogy ha $\widetilde{f_y}\,(G) \longrightarrow f_c(G)$ $(y \longrightarrow c)$ és $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \longrightarrow 0$, akkor $f_c(G)$ felveszi a maximumát valamely $G \in \mathcal{C}$-re.
Ahhoz, hogy a bizonyítást befejezzük, meg kell még mutatnunk, hogy G-t választhatjuk $\mathcal{T}$-ből. Feltehetjük az általánosság megszorítása nélkül, hogy c irracionális. Azt kell még bizonyítanunk, hogy minden olyan $G \in \mathcal{C}$-re, amelyre f_c felveszi a maximumát, a G gráf benne van $\mathcal{T}$-ben is. Legyen $G_1 \in \mathcal{C}$ egy ilyan gráf, és tegyük fel,

hogy G_1 olyan teljes q-osztályú gráf, amelynek $a_1, \ldots, a_q$ pontja van az egyes osztályokban ($0 < a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_q$). Feltehető az általánosság megszorítása nélkül, hogy $q \geq r$, különben a maximum 0, amit $G = T(n, r-1)$ esetén ér el. Tehát, ha $q \geq r$, akkor

$$f_c(G_1) = a_1 a_q B_1 - c a_1 a_q B_2 + C = a_1 a_q (B_1 - cB_2) + C$$

ahol B_1, B_2 és C nem nulla racionális számok, és csak $a_2, a_3, \ldots, q_{q-1}$-től és $a_1 + a_q$-tól függnek. Ekkor $B_1 - cB_2 \neq 0$. Tegyük fel tehát, hogy $B_1 - cB_2 > 0$, különben lecserélhetnénk a_1-et és a_q-t 0-ra és $a_1 + a_q$-ra, és ez csökkentené $f_c(G_1)$-et. Végül az, hogy $B_1 - cB_2 > 0$, azt jelenti, hogy $a_q \leq a_1 + 1$, különben felcserélnénk a_1-et $a_1 + 1$-re, a_q-t pedig $a_q - 1$-re, de ezzel ismét csökkentenénk $f_c(G_1)$-et.
$a_q \leq a_1 + 1$ pedig pontosan azt jelenti, hogy $G_1 = T(n, q) \in \mathcal{T}$, és pontosan ezt kellett belátnunk. ∎

3.1.6. Következmény. *Legyen $2 \leq p \leq r \leq n$. Ha G több K_p-t tartalmaz, mint $T(n, r-1)$, akkor G tartalmaz K_r-t is.*

4. fejezet

Véges geometriák

Véges geometriák segítségével konstruálunk olyan $K_{2,2}$-t (azaz 4 hosszú kört) nem tartalmazó gráfot, amelynek $cn^{\frac{3}{2}}$ éle van, vagyis belátjuk, hogy a korábban szerepelt becslés pontos. Ehhez azonban szükségünk van előbb a véges geometriák megismerésére.

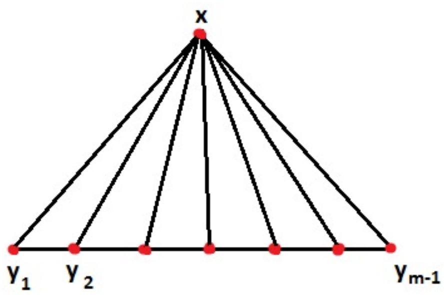
4.1. A véges geometria fogalma és tulajdonságai

4.1.1. Definíció. *Legyen X egy véges alaphalmaz. Ezen alaphalmaz $E_1, E_2, \dots, E_m$ részhalmazainak rendszerét véges geometriának nevezzük, ha*

$$\text{(1) } \forall\ i \neq j\text{-re } |E_i \cap E_j| = 1$$
$$\text{(2) } \forall x, y \in X\text{-ra létezik olyan } E_i\text{, hogy } \{x, y\} \subseteq E_i$$

Megjegyzés:

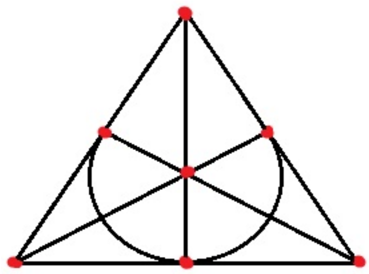
- Általában, amikor véges geometriákról beszélünk, akkor halmaz helyett az egyenes, elem helyett a pont, tartalmazás helyett pedig az illeszkedés kifejezéseket szoktuk használni.
- Triviális (elfajuló) véges geometria például:
  $E_i = \{x, y_i\}$ $(i = 1, \dots, m)$, $E_m = \{y_1, \dots, y_{m-1}\}$



4.1.2. Definíció. *A véges geometria néhány pontja általános helyzetű, ha semelyik három pont nem illeszkedik ugyanarra az egyenesre.*

4.1.3. Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy véges geometria nem elfajuló, ha létezik négy általános helyzetű pontja.*

Megjegyzés: Nevezetes hételemű, nem elfajuló véges geometria a Fano-féle véges geometria.



4.1.4. Definíció. *A véges geometria P pontjának rendjét a rajta áthaladó egyenesek száma határozza meg.*

4.1.5. Lemma. *(i) Ha $x \notin E_i$, akkor x foka $|E_i|$*
(ii) Tegyük fel, hogy x_1, x_2, x_3, x_4 általános helyzetű pontok. Ekkor van olyan q természetes szám, hogy a négy pont mindegyikének foka $q+1$, és minden általuk meghatározott egyenesre pontosan $q+1$ pont illeszkedik.

Bizonyítás: (i) Mivel az E_i minden pontján pontosan egy olyan egyenes megy át, amely x-re illeszkedik (és ezek különbőzek), továbbá mivel minden x-re illeszkedő egyenes metszi az E_i halmazt, így adódik az állítás, miszerint x foka éppen $|E_i|$.
(ii) Tegyük fel, hogy $q+1$ az x_1 és x_2 pontokon átmenő egyenesre illeszkedő pontok száma. Az (i) alapján x_3 ás x_4 foka pontosan $q+1$. Ha ugyanezt megismételjük minden pontpárra, akkor abból adódik, hogy minden egyenesre pontosan $q+1$ pont illeszkedik. ■

4.1.6. Tétel. *Minden nem elfajuló véges geometriához $\exists$ olyan q természetes szám, hogy*
(a) minden elem $q+1$ fokú
(b) $\forall i$-re $|E_i|$ = q+1
(c) $|H| = q^2 + q + 1$
(d) $m = q^2 + q + 1$

Bizonyítás: (a) Tegyük fel, hogy x_1, x_2, x_3, x_4 általános helyzetű pontok. Ekkor létezik olyan q szám, hogy ennek a négy pontnak a foka $q+1$, és az általuk meghatározott egyenesekre pontosan $q+1$ pont illeszkedik.
Legyen y tetszőleges H-beli pont. Ekkor teljesül, hogy az x_1 és x_2-n, valamint az x_1 és x_3-on átmenő egyenesek közül y legfeljebb csak az egyiken lehet rajta. Ebből következik, hogy y foka is $q+1$.
(b) Mivel minden egyenes esetén van olyan pont az x_1, x_2, x_3, x_4 pontok közül, amelyik nem illeszkedik az adott egyenesre, emiatt minden egyenesre pontosan $q+1$ pont illeszkedik.
(c) Az (a) és (b) pontok alapján számoljuk össze egy adott egyenesen a rá illeszkedő pontok számát! Ekkor azt kapjuk, hogy:

$$|H| = 1 + (q+1)q = q^2 + q + 1$$

(d) Még meg kell határoznunk az egyenesek számát is. Ezt úgy kaphatjuk meg, hogy tudjuk, hogy egy egyenesre pontosan q^2+q+1 pont illeszkedik. $q+1$ egyenesre tehát $(q+1)(q^2+q+1)$ pont illeszkedik. Ezt még le kell osztanunk a pontok számával, így kapjuk, hogy:

$$\mathrm{m}= \tfrac{(q+1)(q^2+q+1)}{q+1} = q^2 + q + 1$$

■

Megjegyzés: A tételben szereplő q számot a véges geometria rendjének nevezzük.

4.1.7. Állítás. *Ha p prímszám, akkor létezik p-edrendű nem elfajuló véges geometria.*

Bizonyítás: Vegyük a $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ elemekből képzett három hosszúságú sorozatokat úgy, hogy hagyjuk ki belőle a $(0, 0, 0)$ vektort. A maradékon legyen adva a következő ekvivalencia-reláció:

$$(x, y, z) \sim (kx, ky, kz) \pmod p, \text{ ha } k \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$$

Ennek az ekvivalencia-relációnak az ekvivalencia-osztályai $p-1$ eleműek, így számuk $\frac{p^3-1}{p-1} = p^2 + p + 1$. Legyen az általunk konstruálandó véges geometria alaphalmaza ezeknek az ekvivalencia-osztályoknak a halmaza, melyet jelöljünk H-val. Az (a, b, c) ekvivalencia-osztályt pedig jelöljük $\overline{(a, b, c)}$-vel.
Most még difinálnunk kell az egyeneseket ebben a véges geometriávan: $\forall h = \overline{(a, b, c)} \in H$-hoz legyen

$$E_h = \{\overline{(x, y, z)}; ax + by + cz = 0 \pmod p\}$$

Megállapítható, hogy E_h független h és $\overline{(x, y, z)}$ választásától.
Igazolnunk kell még, hogy bármely két E_h-nak egy közös mellékosztálybeli eleme van, és bármely két mellékosztályt pontosan egy E_h tartalmaz. Ennek teljesüléséhez azt kell észrevenni, hogy $(u_1, v_1, w_1) \not\sim (u_2, v_2, w_2)$ esetén az

$$u_1\xi + v_1\eta + w_1\zeta \equiv 0 \pmod p$$
$$u_2\xi + v_2\eta + w_2\zeta \equiv 0 \pmod p$$

egyenletnek pontosan egy szabadsági foka van a ξ, η és ζ változókban. Alkalmazzuk ezt először az $u_i = a_i, v_i = b_i, w_i = c_i$ együtthatókkal az x, y, z változókra, majd az $u_i = x_i, v_i = y_i, w_i = z_i$ együtthatókkal az a, b, c változókra.
Végezetül mutatnunk kell még négy általános helyzetű pontot a konstruált véges geometriában. Ez a négy általános helyzetű pont pedig:

$$\overline{(1, 0, 0)}, \overline{(0, 1, 0)}, \overline{(0, 0, 1)}, \overline{(1, 1, 1)}$$

■

4.2. A Riemann- és a Brown-konstrukció

Mostmár elegendő ismeretünk van a véges geometriákról ahhoz, hogy megkonstruálhassunk egy olyan gráfot, amely nem tartalmaz 4 hosszú kört és $cn^{\frac{3}{2}}$ éle van.

4.2.1. Állítás. *$\exists$ olyan $c > 0$ szám, amelyre $\forall n$ esetén*

$$\text{ext}(n, K_{2,2}) \geq cn^{\frac{3}{2}}.$$

Bizonyítás: (Riemann-konstrukció)
A tételt a Riemann-konstrukció segítségével bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy $\frac{n}{2} = p^2 + p + 1$, ahol p prímszám. Az előző állítás miatt ekkor létezik p-edrendű nem elfajuló véges geometria. Legyenek a véges geometria egyenesei a páros gráf egyik pontosztálya, míg a véges geometria csúcsai a páros gráf másik pontosztálya. Ebben a gráfban az x_i pontot akkor és csak akkor kössük össze az E_i egyenessel, ha x_i rajta van az E_i egyenesen. Mivel bármelyik két pontra csak egy egyenes illeszkedhet, így a megkonstruált páros gráf nem tartalmaz $K_{2,2}$-t. A gráf csúcsainak száma tehát:

$$n = 2(p^2 + p + 1) \sim p^2,$$

éleinek száma pedig:

$$e = (p^2 + p + 1)(p + 1) \sim p^3 \sim n^{\frac{3}{2}}.$$

■

Megjegyzés: Mit mondhatunk az élek számáról, ha a gráf nem tartalmaz $K_{3,3}$-at? A kérdésre a választ a Brown-konstrukció adja meg nekünk, ám még mielőtt rátérnénk, bővítenünk kell néhány definícióval ismereteinket.

4.2.2. Definíció. *Véges affin síknak nevezünk egy olyan X nem üres halmazt, amelyre a következők teljesülnek:*

- *Minden pontpárra pontosan egy egyenes illeszkedik.*
- *Ha adva van egy e egyenes és egy rajta kívül fekvő P pont, akkor egyértelműen létezik olyan f egyenesen, amely átmegy a P ponton és nem metszi az e egyenest.*
- *Létezik négy olyan pont, amely közül semelyik három sem esik egy egyenesre.*

4.2.3. Definíció. *Legyen $\mathbb{K}$ egy test, és tegyük fel, hogy $n \geq 2$. A $\mathbb{K}$-feletti n dimenziós vektortér vektorait pontoknak, az egydimenziós lineárisok sokaságait pedig egyeneseknek nevezzük. Azt mondjuk, hogy egy pont illeszkedik egy egyenesre, ha az adott vektor eleme annak az adott lineáris sokaságnak. Az így definiált struktúrát $\mathbb{K}$-feletti n dimenziós affin altérnek nevezzük.*

Megjegyzés:

- Ha egy kétdimenziós vektortérből indulunk ki, akkor pont affin síkot kapunk.

- $AG(n,q)$-val jelöljük az olyan n dimenziós vektortérből képzett affin teret, amelyet egy q elemű véges test felett konstruáltunk.

4.2.4. Állítás. *Ha egy Affin síknak van olyan P pontja, amelyre pontosan q egyenes illeszkedik, akkor:*

- *az Affin sík minden egyenesére pontosan q pont illeszkedik,*
- *a sík minden pontján pontosan $q+1$ egyenes halad át,*
- *a síknak összesen q^2 pontja és q^2+q egyenese van.*

Ezt a q számot az Affin sík rendjének nevezzük.

Bizonyítás: Nem bizonyítjuk. ∎

4.2.5. Definíció. *Másodrendű felületnek nevezzük azokat a térbeli alakzatokat, amelyeknek az egyenelte a koordinátákban másodfokú. Általános alakja:*

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + K = 0$$

ahol $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K \in \mathbb{R}$.

4.2.6. Tétel (Brown-konstrukció). *Legyen adva egy egyenlet, amely az $AG(3,q)$ egy $\mathcal{E}$ elliptikus másodrendű felületét adja meg: $x^2 + l_1y^2 + l_2z^2 = 1$. Definiáljuk az $AG(3,q)$ pontjain egy gráfot a következő módon: kössük össze az (x,y,z) pontokat az (a,b,c) pontokkal abban az esetben, ha $(x-a)^2 + l_1(y-b)^2 + l_2(z-c)^2 = 1$ teljesül a pontokra. Az így megkonstruált gráfnak nagyságrendileg $n^{\frac{5}{3}}$ éle van, és nem tartalmaz $K_{3,3}$-at.*

Bizonyítás: Az $\mathcal{E}$ másodrendű felület az ideális síkot az $x^2 + l_1y^2 + l_2z^2 = 0$ egyenletű kúpszeletben metszi. Emiatt a pontjainak száma $q^2 + 1 - (q+1)$, azaz éppen $q^2 - q$. Mivel a mi egyenletünk $x^2 + l_1y^2 + l_2z^2 = 1$ az ideális esethez képest $\mathcal{E}$-nak egy eltoltja, és az (a,b,c) pontok azon vannak rajta, így teljesül, hogy minden pont foka $q^2 - q$. Ebből következik, hogy az élek száma $e = \frac{1}{2}g^3(q^2-q)$. Mivel jelen esetben $n = q^3$, így adódik a becslés, hogy $e \sim \frac{1}{2}n^{\frac{3}{2}}$.
Legyen adva a következő három pont: $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$ és $C(c_1, c_2, c_3)$. Jelölje rendre $\mathcal{E}_A, \mathcal{E}_B$ és $\mathcal{E}_C$ a három pont szomszédainak egyenletét, azaz a három eltolt másodrendű felület egyenletét. Ez a három egyenlet tehát:

$$
\begin{aligned}
(x-a_1)^2 + l_1(y-a_2)^2 + l_2(z-a_3)^2 &= 1\\
(x-b_1)^2 + l_1(y-b_2)^2 + l_2(z-b_3)^2 &= 1\\
(x-c_1)^2 + l_1(y-c_2)^2 + l_2(z-c_3)^2 &= 1
\end{aligned}
$$

Ekkor csináljuk a követekzőt: vonjuk ki az első egyenletet a másodikból és a harmadikból is. Így kapunk két lineáris egyenletet. Egyértelmű, hogy a két lineáris egyenlet nem lehet azonos, tehát metszetük vagy egy egyenes, vagy üres. Tudjuk, hogy $\mathcal{E}_A$ nem tartalmaz egyeneset, ezért ez az egyenes, ami megoldása a lineáris egyenleteknek, legfeljebb két pontban metszheti $\mathcal{E}_A$-t. Azaz A, B és C szomszédainak száma legfeljebb kettő. ∎

A Brown-konstrukció intuitív tartalma az, hogy a valós térben, ha összekötjük az egy távolságra lévő pontokat, akkor ez a gráf nem tartalmaz $K_{3,3}$-at. Hiszen, ha veszünk három pontot, akkor az ezek mindegyikétől 1 távolságra lévő pontok a háromszög síkjára merőleges egyenesen vannak, így csak két ilyen pont lehet, a sík mindkét oldalán egy-egy.

4.3. Négyszögmentes gráfok

A négyszögmentes gráfok egyik lehetséges általánosítása azon gráfok vizsgálata, amelyek nem tartalmaznak $5, 6, 7\ldots$ hosszú kört. Ezekről kevesebb ismert, az alábbi megjegyzés azonban beleillik a mi tárgyalásunkba.

4.3.1. Definíció. *Általánosított négyszögnek nevezünk egy $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathrm{I})$ hármast, ahol $\mathcal{P}$ és $\mathcal{E}$ diszjunkt halmazok (ezeknek az elemeit pontoknak illetve egyeneseknek nevezzük), $\mathrm{I} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{E}$, és valamely s, t pozitív egészekre*
(1) $\mathcal{P}$ minden eleme $\mathcal{E}$-nek pontosan $t+1$ elemével áll relációban, azaz minden ponton át $t+1$ egyenes megy.
(2) $\mathcal{E}$ minden eleme $\mathcal{P}$-nek pontosan $s+1$ elemével áll relációban, azaz minden egyenesen $s+1$ pont van.
(3) Ha (P, E) nem illeszkedő pont-egyenes pár, akkor egyértelműen létezik olyan (P', E') pont-egyenes pár, melyre $P\mathrm{I}E'\mathrm{I}P'\mathrm{I}E$ teljesül, azaz egyértelműen létezik az adott ponton átmenő, a pontra nem illeszkedő egyenest metsző egyenes.

Megjegyzés: Tegyük fel, hogy adva van egy pont és egy egyenes, amik nem illeszkednek. Ekkor egyértelműen létezik egy egyenes ezen a ponton át, ami a másik egyenest metszi.

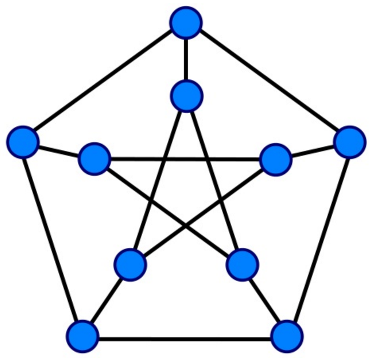
4.3.2. Tétel. *Tegyük fel, hoyg adva van egy (q, q) rendű általánosított négyszög. Ez egy olyan $n = 2(q^3 + q^2 + q + 1)$ csúcsú gráfot határoz meg, amely nem tartalmaz $3, 4, 5, 6, 7$ hosszú kört.*

Bizonyítás: Konstruáljunk egy páros gráfot a következőképpen: legyen az egyik osztályának elemei a véges geometria pontjai, a másik osztályának elemeni pedig a véges geometria egyenesei. Ekkor a konstruált gráfnak valóban $n = 2(q^3+q^2+q+1)$ csúcsa van. Ebben a gráfban nem létezik 3,5 és 7 hosszú kör, mert a gráf páros. A 4 és 6 hosszú kör nem létezése az általánosított négyszög definíciójából következik. ■

A Moore-gráfok elmélete - egy speciális esetben - egy másik olyan téma, ami pont beleillik a tárgyalásunkba. Ez a témakör arról szól, hogy keresünk egy olyan r reguláris gráfot, amelyben nincsen g-nél rövidebb kör.

4.3.3. Definíció. *A gráfban előforduló legrövidebb kör hosszát (= g) a gráf bőségéek vagy kerületének nevezzük.*

Erdős és Sachs bebizonyították, hogy bármely g és bármely r esetén létezik ilyen gráf. Így a továbbiakban értelmes kérdés, hogy vajon mennyi az ilyen gráf csúcsainak minimális száma? Alapvetően a $g = 6$ esettel foglalkozunk, a többi esetet csak említés szintén tárgyaljuk.
Példa:
Ha $r = 3$ és $g = 5$, akkor $n \geq 10$. Ha az egyenlőség teljesül, akkor kapjuk az úgynevezett Petersen gráfot [9,].



Vegyünk egy csúcsot a gráfból, majd számoljuk meg a szomszédjait, majd a szomszédjainak szomszédjait. Feltehető, hogy ezek a csúcsok mind különbözőek, ellenkező esetben ugyanis keletkezne a gráfban 5-nél rövidebb kör. Az ilyen gráf csúcsainak száma tehát legalább $1+r+r(r-1) = 1+r^2$. De vajon meg lehet-e adni $1+r^2$ csúcson 5 bőségű gráfot? Hoffmann és Singleton bizonyították be, hogy csak az $r = 2, 3, 7$

és 57 esetekben lehet megadni ilyen gráfot, más esetben nem. Ha $r = 2$, akkor a keresett gráf az 5 hosszú kör, ha pedig $r = 3$, akkor ez a gráf éppen a Petersen gráf. Az $r = 7$ esetre-re Hoffmann és Singleton konstruált 5 bőségű gráfot, azonban $r = 57$-re egyelőre nem ismert, hogy létezik-e ilyen gráf.

Ha ezt a gondolatmenetet kiterjesztjük páratlan g-re, akkor nagyon hasonlót kapunk. Ebben az esetben tehát egy r reguláris és g bőségű gráf csúcsainak száma legalább

$$n \leq 1 + r + r(r-1) + \ldots + r(r-1)^{\frac{g-3}{2}}.$$

Most térjünk át az $r = 6$ esetre.

4.3.4. Tétel. *Tegyük fel, hogy adva van egy r-reguláris, 6 bőségű gráf. Ekkor a csúcsaira teljesül, hogy $n \geq 2(1+(r-1)+(r-1)^2)$. Egyenlőség abban az esetben teljesül, ha a gráf egy projektív síkhoz tartozó páros gráf, amelynek egyik pontosztálya a véges geometria pontjai, másik pontosztálya a véges geometria egyenesei, és abban az esetben van összekötve a v_i pont az e_i egyenessel, ha v_i rajta van az e_i egyenesen.*

Bizonyítás: Vegyünk egy tetszőleges élet a gráfból. Tekintsük ennek az élnek a két végpontjának szomszédait, majd azok szomszédait. Ezeknek a pontoknak páronként különbözőnek kell lenniük ahhoz, hogy a gráfban ne keletkezzen egy 6 hosszú kör. Ebből a csúcsok számára vonatkozó becslés már adódik.

Végezzük el a következő eljárást a csúcsokon: színezzük a kiindulási él egyik végpontját kékre, a másikat pirosra. Ezután tekintsük a piros csúcs szomszédait, és színezzük azokat kékre, és fordítva: a kék csúcs szomszédait pirosra. Folytassuk az eljárást úgy, hogy az eddig megrajzolt élek mindig két különböző színű pontokat kössenek össze. Ha nincs további él a gráfban, akkor a keletkező gráf páros, hiszen két színnel tudtuk színezni a csúcsokat. Ráadásul ennek a páros gráfnak a két pontosztályában a csúcsok száma egyenlő.

Be kell még látnunk, hogy azonos színű pontoknak csak egy közös szomszédja lehet. Vegyünk egy tetszőleges pontból (v-ből) kiinduló élt a gráfból, és válasszuk ezt kiindulási élnek. Ekkor a másik él:

- vagy v-vel azonos oldalon van, az él szomszédainak szomszédjai között. Ebben az esetben ugyanis a közös szomszéd az első szomszédok között van, a másik oldalon.

- vagy az v-ből kiinduló él másik végpontjának első szomszédai között van. Akkor a közös szomszéd az v-ből kiinduló él másik végpontja.

Ezt felhasználva nem lenne már nehéz megmutatni, hogy a gráf projektív síkhoz tartozó páros gráf kell, hogy legyen. ■

Megjegyzés: A bizonyítást befejezhetnénk a Zarankiewicz problémára hivatkozva is, amely azzal a kérdéskörrel foglalkozik, hogyha adva van egy nxm-es négyzetrács, akkor maximálisan hány olyan pontot választhatunk ki a négyzetrács pontjai közül, amelyekre az teljesül, hogy bármely négy pont nem alkot a koordinátatengelyekkel párhuzamos téglalapot.

Megjegyzés: Ha az előbbi tételben szereplő bizonyítást lemásoljuk páros g-re, akkor a következőt kapjuk eredményül:

$$n \geq 2(1 + (r-1) + (r-1)^2 + \ldots + (r-1)^{\frac{g}{2}-2}).$$

Ennek a Moore-gráfnak a csúcsainak számát meg tudjuk becsülni úgy, a gráfban ha veszünk két tetszőleges pontot, akkor a pontok távolsága legfeljebb $g-1$. Ebből adódik a becslés, mely szerint:

$$n \leq 1 + r + r(r-1) + \ldots + r(r-1)^{g-2} < \tfrac{r}{r-1}(r-1)^g.$$

Irodalomjegyzék

[1] Elekes György, Brunczel András: *Véges matematika*, Eötvös kiadó (2006)

[2] Szőnyi Tamás: *Turán tételkör* (http://www.cs.elte.hu/ szonyi/turanuj.pdf)

[3] Katona Gyula, Recski András, Szabó Csaba: *A számítástudomány alapjai*, Typotex Kiadó (1978)

[4] Béla Bollobás: *Extremal Graph Theory*, Academic Press (1978)

[5] Saját véges matematika I-II. jegyzet - Recski András előadása alapján (2008-2009-es tanév, I. és II. félév)

[6] Wikipedia: *A Turán-féle gráftétel* (http://hu.wikipedia.org/wiki/Turán-féle_gráftétel)

[7] Wikipedia: *Gráf* (http://hu.wikipedia.org/wiki/Gráf)

[8] Wikipedia: *Véges geometria* (http://hu.wikipedia.org/wiki/Véges_geometria)

[9] Wikipedia: *Petersen-gráf* (http://hu.wikipedia.org/wiki/Petersen-gráf)

[10] Szőnyi Tamás: *Zarankiewicz porblémája* (http://www.cs.elte.hu/ szonyi/kutdiak.pdf)