Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Luptovics János Sándor

Gazdasági Rendszerek Kvalitatív Vizsgálata

BSc szakdolgozat

Témavezető:

Dr. Kovács Sándor

Numerikus Analízis Tanszék

Budapest, 2012

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Kovács Sándornak, aki a félév során mindig szakított rám időt és tanácsaival segítette a szakdolgozat elkészültét. Köszönettel tartozom a családomnak, amiért nyugodt munkakörülményeket biztosítottak és köszönöm barátaimnak a LaTeX használatához nyújtott segítséget.
Budapest, 2012. május 30.

Luptovics János Sándor

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A közgazdaságtan olyan társadalomtudomány, amely a gazdasági rendszerek vizsgálatával foglalkozik. Az eleinte politikai gazdaságtannak nevezett tudomány területtel a pénz, az anyagi értékek, a gazdaság szervezett irányításának megjelenése miatt már az ókorban a görög, és római tudósok is foglalkoztak. Ennek ellenére a 18. századig nem születtek alaposan kidolgozott gazdasági rendszerek. Ekkor kezdték mélyebben vizsgálni a gazdasági jelenségeket, ennek köszönhetően jött létre a modern politikai gazdaságtan, melynek atyja Adam Smith volt. A 19. század végén az egész tudomány új irányzatot vett, ekkortól kezdték közgazdaságtannak nevezni. Az új irányzat legfőbb célja az volt, hogy a közgazdaságtan sokkal tudományosabb legyen, független a filozófiai és politikai szemléletektől, ekkor került előtérbe a matematikai eszközök alkalmazása. Ezt az új irányt neoklasszikus közgazdaságtannak nevezik [6] [7]. Szagdolgozatomban ezen irányzat néhány eredményét vizsgáljuk.

Az első fejezetben egy piacgazdasági modellel a Walras-féle piacmodellel foglalkozunk.

A második fejezetben a makroökonómia felé vesszük az irányt és Phillips stabilizációs modelljével foglalkozunk.

A harmadik fejezetben Solow és Swan neoklasszikus növekedési modellje kerül bemutatásra.

Végül a negyedik fejezetben néhány, a dolgozatban felhasznált, de bizonyításra nem kerülő tétel van összegyűjtve.

1. fejezet

A Walras-féle piacmodell

Ebben a fejezetben egy mikroökonómiai modellt, a Walras-féle piacmodell vizsgáljuk, ehhez a Dinamikus modellek a közgazdaságban [1] és a Mathematical Methods and Models in Economic Dynamics [2] című könyvek lesznek segítségünkre.

1.1. Bevezető

Tegyük fel, hogy m darab áru van a piacon, jelölje $p_j(t)$ a j-edik áru árát a $t \in [0, +\infty)$ időpontban, tegyük fel, hogy p_j nemnegatív, differenciálható függvény, és vezessük be a következő jelölést $\mathsf{p_j} := p_j(t)$, valamint jelölje $E_j(\mathsf{p_1}, \ldots, \mathsf{p_m})$ a j-edik árura vonatkozó túlkeresletet, ahol $E_j : [0, +\infty)^m \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény $(j \in \{1, \ldots, m\})$.

1.1 Tétel. (A piac alaptörvénye) *A túlkereslet emeli az árat, azaz ha* $E_j(\mathsf{p_1}, \ldots, \mathsf{p_m}) > 0$*, akkor a* p_j *függvény lokálisan növekedő a* $(\mathsf{p_1}, \ldots, \mathsf{p_m})$ *pontban. A túlkínálat csökkenti az árat, azaz ha* $E_j(\mathsf{p_1}, \ldots, \mathsf{p_m}) < 0$*, akkor a* p_j *függvény lokálisan csökkenő a* $(\mathsf{p_1}, \ldots, \mathsf{p_m})$ *pontban.*

1.2 Megjegyzés. *Ez csak az úgynevezett sznob áruk esetén - a vevők úgy gondolják, hogy minél drágább, annál jobb, ezért egyre többet vesznek - nem teljesül, de a modellben ezeket nem vizsgáljuk.*

1.3 Definíció. *Egy* $(\mathsf{p_1^e}, \ldots, \mathsf{p_m^e}) \in \mathbb{R}^m_+$ *pontot* ***egyensúlyi árrendszer****nek nevezünk, ha* $E_j(\mathsf{p_1^e}, \ldots, \mathsf{p_m^e}) = 0 \quad (j \in \{1, \ldots, m\})$*, azaz ha nincs se túlkereslet, se túlkínálat.*

Vezessük be a következő jelöléseket:

$\Delta \mathsf{p_j} := \mathsf{p_j} - \mathsf{p_j^e}$,

$\Delta E_j(\mathsf{p_1}, \ldots, \mathsf{p_m}) := E_j(\mathsf{p_1}, \ldots, \mathsf{p_m}) - E_j(\mathsf{p_1^e}, \ldots, \mathsf{p_m^e})$.

J. R. Hicks vizsgálatai során megállapította, hogy a túlkeresleti függvények a következő alakúak lehetnek:

1. Ha E_j lineáris függvény, akkor

$$E_j(\mathsf{p_1}, \ldots, \mathsf{p_m}) = a_{j1}\mathsf{p_1} + \cdots + a_{jm}\mathsf{p_m}$$

alakú, ahol $a_{j1}, \ldots, a_{jm} \in \mathbb{R}$ állandók.

Ekkor

$$\Delta E_j(\mathsf{p_1}, \ldots, \mathsf{p_m}) = E_j(\mathsf{p_1}, \ldots, \mathsf{p_m}) - E_j(\mathsf{p_1^e}, \ldots, \mathsf{p_m^e}) =$$
$$= a_{j1}(\mathsf{p_1} - \mathsf{p_1^e}) + \cdots + a_{jm}(\mathsf{p_m} - \mathsf{p_m^e}) = a_{j1}\Delta\mathsf{p_1} + \cdots + a_{jm}\Delta\mathsf{p_m} = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\Delta\mathsf{p_i}.$$

2. Ha E_j nemlineáris, akkor linearizáljuk, léteznek $a_{j1}, \ldots, a_{jm} \in \mathbb{R}$ állandók és $w_{j1}, \ldots, w_{jm} : [0, +\infty)^m \to \mathbb{R}$ differenciálható függvények, hogy

$$E_j(\mathsf{p_1}, \ldots, \mathsf{p_m}) = a_{j1}\mathsf{p_1} + \cdots + a_{jm}\mathsf{p_m} + w_{j1}(\mathsf{p_1}, \ldots, \mathsf{p_m})\mathsf{p_1} + \cdots + w_{jm}(\mathsf{p_1}, \ldots, \mathsf{p_m})\mathsf{p_m},$$

$$\lim_{(\mathsf{p_1},\ldots,\mathsf{p_m})\to(\mathsf{p_1^e},\ldots,\mathsf{p_m^e})} w_{jk}(\mathsf{p_1}, \ldots, \mathsf{p_m}) = 0 \quad (k \in \{1, \ldots, m\}),$$
$$\lim_{(\mathsf{p_1},\ldots,\mathsf{p_m})\to(\mathsf{p_1^e},\ldots,\mathsf{p_m^e})} \partial_l w_{jk}(\mathsf{p_1}, \ldots, \mathsf{p_m}) = 0 \quad (k, l \in \{1, \ldots, m\}).$$

Ekkor

$$E_j(\mathsf{p_1}, \ldots, \mathsf{p_m}) - E_j(\mathsf{p_1^e}, \ldots, \mathsf{p_m^e}) = \underbrace{a_{j1}(\mathsf{p_1} - \mathsf{p_1^e}) + \cdots + a_{jm}(\mathsf{p_m} - \mathsf{p_m^e})}_{\text{lineáris tagok}} +$$
$$+ \underbrace{w_{j1}(\mathsf{p_1}, \ldots, \mathsf{p_m})(\mathsf{p_1} - \mathsf{p_1^e}) + \cdots + w_{jm}(\mathsf{p_1}, \ldots, \mathsf{p_m})(\mathsf{p_m} - \mathsf{p_m^e})}_{\text{hibatag}},$$

$$a_{jk} = \lim_{\mathsf{p_k}\to\mathsf{p_k^e}} \frac{E_j(\mathsf{p_1^e}, \ldots, \mathsf{p_{k-1}^e}, \mathsf{p_k}, \mathsf{p_{k+1}^e}, \ldots, \mathsf{p_m^e}) - E_j(\mathsf{p_1^e}, \ldots, \mathsf{p_m^e})}{\mathsf{p_k} - \mathsf{p_k^e}} = \partial_k E_j(\mathsf{p_1^e}, \ldots, \mathsf{p_m^e}).$$

Ezeket felhasználva

$$\Delta E_j(\mathsf{p_1}, \ldots, \mathsf{p_m}) = \sum_{i=1}^{m} \partial_i E_j(\mathsf{p_1^e}, \ldots, \mathsf{p_m^e})\Delta\mathsf{p_i} + \sum_{i=1}^{m} w_{ji}(\mathsf{p_1}, \ldots, \mathsf{p_m})\Delta\mathsf{p_i}. \tag{1.1}$$

1.2. Stabilitás fogalmak

A piac az esetek többségében nem egy egyensúlyi állapotban van, ezért a vizsgálatokat olyan irányban kell folytatni, ami biztosítaná, hogy a piac valamilyen szempontból közel legyen egy egyensúlyi helyzethez, azaz stabilitás vizsgálatot szeretnénk végezni. A közgazdasági modellek vizsgálatához olyan stabilitási feltételeket szeretnénk, amelyek közgazdaságilag értelmezhetőek, sőt elvárhatóak.
Hicks a következő stabilitásfogalmakat vezette be:

$$\begin{array}{ccccc} & & & & \text{Imperfekt}\\ & & & \nearrow & \\ & & \text{Statikus} & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ \text{Stabilitásfogalmak} & & & & \text{Perfekt}\\ & \searrow & & & \\ & & \text{Dinamikus} & & \end{array}$$

Vizsgáljuk meg egyenként a stabilitásfogalmakat.

1.4 Definíció. *A* $(\mathsf{p}_1^{\mathsf{e}}, \ldots, \mathsf{p}_{\mathsf{m}}^{\mathsf{e}})$ *egyensúlyi árrendszer* ***imperfekt módon stabilis****, ha minden* $j \in \{1, \ldots, m\}$ *indexre, ha a* p_j *függvény növekszik a* $\mathsf{p}_{\mathsf{j}}^{\mathsf{e}}$ *pont egy környezetében és a* $p_1, \ldots, p_{j-1}, p_{j+1}, \ldots, p_m$ *függvények úgy változnak, hogy*

$$\Delta E_k(\mathsf{p}_1, \ldots, \mathsf{p}_{\mathsf{m}}) = 0 \quad (k \neq j), \tag{1.2}$$

akkor az E_j *függvény monoton csökken a* $(\mathsf{p}_1^{\mathsf{e}}, \ldots, \mathsf{p}_{\mathsf{m}}^{\mathsf{e}})$ *pont egy környezetében, azaz ha a j-edik árú ára nő és a többi árura vonatkozó túlkereslet nem változik, akkor a j-edik árura vonatkozó túlkereslet csökken.*

Jelölje $A := (a_{ij})_{i,j=1}^{m}$ az együtthatók mátrixát, D az A mátrix determinánsát, és D_{jj} az A mátrix a_{jj} eleméhez tartozó előjeles aldeterminánst.

1.5 Tétel. *Imperfekt stabilitás van, pontosan akkor, ha bármely* $j \in \{1, \ldots, m\}$ *indexre* $\operatorname{sgn} D = -\operatorname{sgn} D_{jj}$.

Bizonyítás: Alkalmazzuk az implicit-függvény tételt, ezt $D_{jj} \neq 0$ és az (1.2)-es egyenlőség miatt megtehetjük. A tétel szerint a $(\mathsf{p}^{\mathsf{e}}_1, \ldots, \mathsf{p}^{\mathsf{e}}_{\mathsf{m}})$ egy környezetében egyértelműen léteznek olyan

$$g_1, \ldots, g_{j-1}, g_{j+1}, \ldots, g_m : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$$

differenciálható függvények, amelyekre

$$\mathsf{p}_{\mathsf{k}} = g_k(\mathsf{p}_{\mathsf{j}}) \text{ és } \mathsf{p}^{\mathsf{e}}_{\mathsf{k}} = g_k(\mathsf{p}^{\mathsf{e}}_{\mathsf{j}}) \quad (k \neq j).$$

Ezeket a függvényeket használva, az imperfekt stabilitás feltétele

$$\partial_j(E_j(g_1(\mathsf{p}_{\mathsf{j}}), \ldots, g_{j-1}(\mathsf{p}_{\mathsf{j}}), \mathsf{p}_{\mathsf{j}}, g_{j+1}(\mathsf{p}_{\mathsf{j}}), \ldots, g_m(\mathsf{p}_{\mathsf{j}})))\Big|_{\mathsf{p}_{\mathsf{j}}=\mathsf{p}^{\mathsf{e}}_{\mathsf{j}}} < 0.$$

Használjuk a $g_j(\mathsf{p}_{\mathsf{j}}) := \mathsf{p}_{\mathsf{j}}$ jelölést, és legyen

$$x := \partial_j(E_j(g_1(\mathsf{p}^{\mathsf{e}}_{\mathsf{j}}), \ldots, g_m(\mathsf{p}^{\mathsf{e}}_{\mathsf{j}}))).$$

Az (1.1)-es, és (1.2)-es egyenlőségek, valamint az előző jelölés felhasználásával kapjuk, hogy

$$a_{j1}g'_1(\mathsf{p}^{\mathsf{e}}_{\mathsf{j}}) + \cdots + a_{jj-1}g'_{j-1}(\mathsf{p}^{\mathsf{e}}_{\mathsf{j}}) + a_{jj} + a_{jj+1}g'_{j+1}(\mathsf{p}^{\mathsf{e}}_{\mathsf{j}}) + \cdots + a_{jm}g'_m(\mathsf{p}^{\mathsf{e}}_{\mathsf{j}}) = x,$$

$$a_{k1}g'_1(\mathsf{p}^{\mathsf{e}}_{\mathsf{j}}) + \cdots + a_{km}g'_m(\mathsf{p}^{\mathsf{e}}_{\mathsf{j}}) = 0 \quad (k \neq j).$$

Ez egy lineáris egyenletrendszer $g'_1(\mathsf{p}^{\mathsf{e}}_{\mathsf{j}}), \ldots, g'_m(\mathsf{p}^{\mathsf{e}}_{\mathsf{j}})$-re. A Cramer-szabály alapján

$$1 = g'_j(\mathsf{p}^{\mathsf{e}}_{\mathsf{j}}) = \frac{x(-1)^{2j}D_{jj}}{D} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{D}{D_{jj}}.$$

Vagyis

$$x = \partial_j(E_j(g_1(\mathsf{p}^{\mathsf{e}}_{\mathsf{j}}), \ldots, g_m(\mathsf{p}^{\mathsf{e}}_{\mathsf{j}}))) < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad D \text{ és } D_{jj} \text{ előjele ellentétes.}$$

$\square$

1.6 Definíció. *A* $(\mathsf{p}^{\mathsf{e}}_1, \ldots, \mathsf{p}^{\mathsf{e}}_{\mathsf{m}})$ *egyensúlyi árrendszer* ***perfekt módon stabilis****, ha minden* $j \in \{1, \ldots, m\}$ *indexre, ha a* p_j *függvény növekszik* $\mathsf{p}^{\mathsf{e}}_{\mathsf{j}}$ *pont egy környezetében és minden* $0 \leq l \leq m-1$ *db ár függvény, amely nem tartalmazza a j-ediket, úgy változik, hogy a nekik megfelelő* $\Delta E_k = 0$*, hogyha a többi ár függvény a megfelelő* $\mathsf{p}^{\mathsf{e}}_{\mathsf{h}}$*-vel egyenlő, akkor az* E_j *függvény monoton csökken a* $(\mathsf{p}^{\mathsf{e}}_1, \ldots, \mathsf{p}^{\mathsf{e}}_{\mathsf{m}})$ *pont egy környezetében.*

1.7 Tétel. *Perfekt stabilitás van pontosan akkor, ha minden $j, j_1, j_2, \ldots$ különböző indexre*

$$a_{jj} < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{jj} & a_{jj_1} \\ a_{j_1j} & a_{j_1j_1} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{jj} & a_{jj_1} & a_{jj_2} \\ a_{j_1j} & a_{j_1j_1} & a_{j_1j_2} \\ a_{j_2j} & a_{j_2j_1} & a_{j_2j_2} \end{vmatrix} < 0, \ldots.$$

Bizonyítás: Teljes indukcióval bizonyítjuk a tételt.

l=0-ra:

$$E_j(\mathsf{p}^{\mathsf{e}}_1, \ldots, \mathsf{p}^{\mathsf{e}}_{\mathsf{j}-1}, \mathsf{p}_{\mathsf{j}}, \mathsf{p}^{\mathsf{e}}_{\mathsf{j}+1}, \ldots, \mathsf{p}^{\mathsf{e}}_{\mathsf{m}}) \text{ monoton csökken} \quad \Longleftrightarrow \quad \partial_j E_j(\mathsf{p}^{\mathsf{e}}_1, \ldots, \mathsf{p}^{\mathsf{e}}_{\mathsf{m}}) = a_{jj} < 0.$$

l=1-re:

$$\tilde{E}_k(\mathsf{p}_{\mathsf{j}}, \mathsf{p}_{\mathsf{j}_1}) := E_k(\mathsf{p}^{\mathsf{e}}_1, \ldots, \mathsf{p}^{\mathsf{e}}_{\mathsf{j}-1}, \mathsf{p}_{\mathsf{j}}, \mathsf{p}^{\mathsf{e}}_{\mathsf{j}+1}, \ldots, \mathsf{p}^{\mathsf{e}}_{\mathsf{j}_1-1}, \mathsf{p}_{\mathsf{j}_1}, \mathsf{p}^{\mathsf{e}}_{\mathsf{j}_1+1}, \ldots, \mathsf{p}^{\mathsf{e}}_{\mathsf{m}}) \quad (k = j, j_1).$$

Ekkor $\Delta\tilde{E}_{j_1}(\mathsf{p}_{\mathsf{j}}, \mathsf{p}_{\mathsf{j}_1}) = 0$ és $a_{j_1j_1} \neq 0$ miatt alkalmazhatjuk az implicit-függvény tételt, amelyből következik, hogy létezik pontosan egy

$$g : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$$

differenciálható függvény, amelyre

$$\mathsf{p}_{\mathsf{j}_1} = g(\mathsf{p}_{\mathsf{j}}) \text{ és } \mathsf{p}^{\mathsf{e}}_{\mathsf{j}_1} = g(\mathsf{p}^{\mathsf{e}}_{\mathsf{j}}).$$

Ezt felhasználva $\Delta\tilde{E}_{j_1}(\mathsf{p}_{\mathsf{j}}, g(\mathsf{p}_{\mathsf{j}})) = 0$.

Legyen

$$x := \partial_j(\tilde{E}_j(\mathsf{p}^{\mathsf{e}}_{\mathsf{j}}, g(\mathsf{p}^{\mathsf{e}}_{\mathsf{j}}))).$$

Ekkor

$$\left.\begin{aligned} x &= ajj + a_{jj_1} g'(\mathsf{p}^{\mathsf{e}}_{\mathsf{j}}) \\ 0 &= a_{j_1j} + a_{j_1j_1} g'(\mathsf{p}^{\mathsf{e}}_{\mathsf{j}}) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad x = a_{jj} + a_{jj_1}\left(-\frac{a_{j_1j}}{a_{j_1j_1}}\right) = \frac{1}{a_{j_1j_1}}\begin{vmatrix} a_{jj} & a_{jj_1} \\ a_{j_1j} & a_{j_1j_1} \end{vmatrix}$$

Az előző esetnél láttuk, hogy $a_{j_1j_1} < 0$, ezért

$$x < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{vmatrix} a_{jj} & a_{jj_1} \\ a_{j_1j} & a_{j_1j_1} \end{vmatrix} > 0.$$

Most tegyük fel, hogy l=n-re tudjuk a tételt és lássuk be n+1-re:

$$\tilde{E}_k(\mathsf{p}_\mathsf{j}, \mathsf{p}_{\mathsf{j}_1}, \dots, \mathsf{p}_{\mathsf{j}_{\mathsf{n}+1}}) :=$$

$$= E_k(\mathsf{p}^\mathsf{e}_1, \dots, \mathsf{p}^\mathsf{e}_{\mathsf{j}-1}, \mathsf{p}_\mathsf{j}, \mathsf{p}^\mathsf{e}_{\mathsf{j}+1}, \dots, \mathsf{p}^\mathsf{e}_{\mathsf{j}_1-1}, \mathsf{p}_{\mathsf{j}_1}, \mathsf{p}^\mathsf{e}_{\mathsf{j}_1+1}, \dots, \mathsf{p}^\mathsf{e}_{\mathsf{j}_{\mathsf{n}+1}-1}, \mathsf{p}_{\mathsf{j}_{\mathsf{n}+1}}, \mathsf{p}^\mathsf{e}_{\mathsf{j}_{\mathsf{n}+1}+1}, \dots, \mathsf{p}^\mathsf{e}_\mathsf{m})$$

$$(k = j, j_1, \dots, j_{n+1}).$$

Ekkor $\Delta\tilde{E}_k(\mathsf{p}_\mathsf{j}, \mathsf{p}_{\mathsf{j}_1}, \dots, \mathsf{p}_{\mathsf{j}_{\mathsf{n}+1}}) = 0 \quad (k = j_1, \dots, j_{n+1})$ és az indukciós feltétel miatt

$$\begin{vmatrix} a_{j_1 j_1} & \dots & a_{j_1 j_{n+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j_{n+1} j_1} & \dots & a_{j_{n+1} j_{n+1}} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Az implicit-függvény tételből következik, hogy egyértelműen léteznek

$$g_{j_1}, \dots, g_{j_{n+1}} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$$

differenciálható függvények, melyekre

$$\mathsf{p}_\mathsf{k} = g_k(\mathsf{p}_\mathsf{j}) \text{ és } \mathsf{p}^\mathsf{e}_\mathsf{k} = g_k(\mathsf{p}^\mathsf{e}_\mathsf{j}) \quad (k = j_1, \dots, j_{n+1}).$$

Ezeket felhasználva $\Delta\tilde{E}_k(\mathsf{p}_\mathsf{j}, g_{j_1}(\mathsf{p}_\mathsf{j}), \dots, g_{j_{n+1}}(\mathsf{p}_\mathsf{j})) = 0 \quad (k = j_1, \dots, j_{n+1})$. Legyen

$$x := \partial_j(\tilde{E}_j(\mathsf{p}^\mathsf{e}_\mathsf{j}, g_{j_1}(\mathsf{p}^\mathsf{e}_\mathsf{j}), \dots, g_{j_{n+1}}(\mathsf{p}^\mathsf{e}_\mathsf{j}))).$$

Ekkor

$$x = a_{jj} + a_{jj_1} g'_{j_1}(\mathsf{p}^\mathsf{e}_\mathsf{j}) + \dots + a_{jj_{n+1}} g'_{j_{n+1}}(\mathsf{p}^\mathsf{e}_\mathsf{j}),$$

$$0 = a_{kj} + a_{kj_1} g'_{j_1}(\mathsf{p}^\mathsf{e}_\mathsf{j}) + \dots + a_{kj_{n+1}} g'_{j_{n+1}}(\mathsf{p}^\mathsf{e}_\mathsf{j}) \quad (k = j_1, \dots, j_{n+1}).$$

Alkalmazva a Cramer-szabályt, az 1.5-ös tétel bizonyításához hasonlóan azt kapjuk, hogy

$$x = \frac{\left.\begin{vmatrix} a_{jj} & a_{jj_1} & \dots & a_{jj_{n+1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j_{n+1}j} & a_{j_{n+1}j_1} & \dots & a_{j_{n+1}j_{n+1}} \end{vmatrix}\right\} (*)}{\left.\begin{vmatrix} a_{j_1 j_1} & \dots & a_{j_1 j_{n+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j_{n+1} j_1} & \dots & a_{j_{n+1} j_{n+1}} \end{vmatrix}\right\} (**)}$$

Ekkor

$$x < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (*) \text{ és } (**) \text{ előjele különböző.}$$

$\square$

1.8 Definíció. *A* $(\mathsf{p}^{\mathsf{e}}_1, \ldots, \mathsf{p}^{\mathsf{e}}_{\mathsf{m}})$ *egyensúlyi árrendszer **dinamikusan stabilis**, ha a* $(\mathsf{p}^{\mathsf{e}}_1, \ldots, \mathsf{p}^{\mathsf{e}}_{\mathsf{m}})$ *egyensúlyi pont a*

$$\dot{p}_j = F_j(E_j(p_1, \ldots, p_m)) \quad (j = 1, \ldots, m) \tag{1.3}$$

differenciálegyenlet-rendszer aszimptotikusan stabilis megoldása.

A differenciálegyenlet-rendszerben szereplő F_j függvények mondják meg, hogy a piac alaptörvénye értelmében a túlkeresleti függvények milyen mértékben hatnak az árakra. Az F_j függvényeknek minden $j \in \{1, \ldots, m\}$ indexre a következő tulajdonságokat kell teljesíteniük:

(1) $F_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható,

(2) $F_j(0) = 0$, azaz, ha nincs se túlkereslet, se túlkínálat, akkor az árak egyensúlyban vannak,

(3) $rF_j(r) > 0 \quad (r \neq 0)$, azaz túlkereslet esetén az árak nőnek, túlkínálat esetén az árak csökkennek, valamint

(4) $F'_j(0) > 0$ azaz, az egyensúlyi helyzettől való eltérés esetén a túlkeresleti függvény azonnal érezteti hatását.

1.9 Tétel. *Legyen*

$$b_{ji} := F'_j(E_j(\mathsf{p}^{\mathsf{e}}_1, \ldots, \mathsf{p}^{\mathsf{e}}_{\mathsf{m}})\partial_i E_j(\mathsf{p}^{\mathsf{e}}_1, \ldots, \mathsf{p}^{\mathsf{e}}_{\mathsf{m}}) = F'_j(0)\partial_i E_j(\mathsf{p}^{\mathsf{e}}_1, \ldots, \mathsf{p}^{\mathsf{e}}_{\mathsf{m}}) = F'_j(0)a_{ji}.$$

Ha a

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \lambda & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} - \lambda & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

karakterisztikus egyenlet minden gyökének valós része negatív, akkor az egyensúlyi árrendszer dinamikusan stabilis.
Ha van gyöke, amelynek a valós része pozitív, akkor nem dinamikusan stabilis.

Bizonyítás: Legyen

$$B := (b_{ij})_{i,j=1}^{m} \quad \text{és} \quad F := \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix}$$

Ekkor F derivált mátrixa a $(\mathsf{p}_1^{\mathsf{e}}, \ldots, \mathsf{p}_{\mathsf{m}}^{\mathsf{e}})$ pontban éppen B, ezért a derivált mátrix sajátértékei a fenti karakterisztikus egyenlet gyökei, így a 4.7-es tétel miatt készen vagyunk a bizonyítással.

$\square$

A 4.3-as, 4.4-es, és 4.5-ös tételek alapján közgazdászok a következő tételeket mondták ki.

1.10 Tétel. (Samuelson tétele) *Ha B szimmetrikus, és (4.1) teljesül, akkor az egyensúlyi árrendszer dinamikusan stabilis.*

1.11 Megjegyzés. *A gyakorlatban B szimmetriája azt jelenti, hogy az i-edik áru árváltozásának hatása a j-edik áru árára ugyanakkora, mint a j-edik áru árváltozásának hatása az i-edik áru árára, ez pedig mind helyettesítő, mind kiegészítő áruk esetén elég természetes.*

1.12 Tétel. (Metzler tétele) *Ha $b_{ji} \geq 0$ minden $j \neq i$ esetén, és (4.1) teljesül, akkor az egyensúlyi árrendszer dinamikusan stabilis.*

1.13 Megjegyzés. *$F_j'(0) > 0$ miatt $b_{ji} > 0$ pontosan akkor, ha $a_{ji} > 0$, ez azt jelenti, hogy az i-edik áru árának növekedése a j-edik árura vonatkozó keresletet növeli, ami helyettesítő áruk esetén szintén természetes.*

1.14 Tétel. (Walras tétele) *Ha $b_{jj} < 0$ minden j esetén, és a főátlóban lévő elemek sor vagy oszlop dominánsak, akkor az egyensúlyi árrendszer dinamikusan stabilis.*

1.15 Megjegyzés. *Az oszlopdominancia azt jelenti, hogy a j-edik áru árának változása összességében kisebb hatással van a többi áru árának változására, mint a sajátjára. A sordominancia pedig azt jelenti, hogy a j-edik árut kivéve az összes többi áru árának változása kisebb hatással van a j-edik áru árára, mint a saját változása. Mindkét eset azt jelenti, hogy a j-edik áru árának változását, leginkább a saját árának változása határozza meg. Ez is természetes.*

Végül hasonlítsuk össze a stabilitásfogalmakat.

1. imperfekt $\not\Longrightarrow$ perfekt

   imperfekt $\not\Longrightarrow$ dinamikus

   $$B := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

   A főátló elemek pozitívak, a determináns negatív $\Longrightarrow$ imperfekt.

   A főátló elemek pozitívak $\not\Longrightarrow$ perfekt.

   A karakterisztikus egyenlet $(1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda+1)(\lambda-3)$, ennek van pozitív valós részű gyöke $\not\Longrightarrow$ dinamikus.

2. perfekt $\Longrightarrow$ imperfekt

   Definíció szerint következik l=m-1 esetén.

   perfekt $\not\Longrightarrow$ dinamikus

   $$B := \begin{pmatrix} -0.001 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.001 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.001 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -0.001 \end{pmatrix}$$

   A megfelelő determinánsok kiszámolásával igazolhatjuk, hogy a perfekt stabilitás feltételei teljesülnek $\Longrightarrow$ perfekt.

   Azonban a mátrix karakterisztikus egyenletének gyökei:

   $x_1 = 0.5464237946 + 1.120873490 \cdot i$,

   $x_2 = -0.5484237946 + 0.5856519797 \cdot i$,

   $x_3 = -0.5484237946 - 0.5856519797 \cdot i$,

$x_4 = 0.5464237946 - 1.120873490 \cdot i.$

Van gyök, melynek valós része pozitív $\quad \not\Longrightarrow \quad$ dinamikus.

1.16 Megjegyzés. *Bár általános esetben nem teljesül, de m=2 speciális esetben igaz az implikáció, hiszen ha a perfekt stabilitás feltételei teljesülnek, akkor a mátrix karakterisztikus egyenletének együtthatói pozitívak, ekkor pedig az egyenlet gyökeinek valós része negatív.*

3. dinamikus $\quad \not\Longrightarrow \quad$ imperfekt

   dinamikus $\quad \not\Longrightarrow \quad$ perfekt

$$B := \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

A karakterisztikus egyenlet $(-3-\lambda)(1-\lambda)+4 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2$, ennek minden gyöke negatív valós részű $\quad \Longrightarrow \quad$ dinamikus.

Az egyik főátló elem pozitív, a determináns pozitív $\quad \not\Longrightarrow \quad$ imperfekt.

Az egyik főátló elem pozitív $\quad \not\Longrightarrow \quad$ perfekt.

2. fejezet

Phillips stabilizációs modellje

Ebben a fejezetben Phillips stabilizációs modelljével foglalkozunk, azt vizsgáljuk meg, hogy a kormányzat milyen beavatkozások segítségével akadályozhatja meg a gazdaság alul teljesítését. Ezen vizsgálatokhoz is az [1]-es és a [2]-es könyveket használjuk forrásként.

2.1. Az alulteljesítő gazdaság

A modellben a következő jelöléseket fogjuk alkalmazni. $Y(t)$ a teljes kibocsátásnak a megfelelő egyensúlyi értékektől való eltérése a $t \in [0, +\infty)$ időpontban, feltesszük, hogy Y valós, kétszer differenciálható függvény, és $D(t)$ az összkeresletnek a megfelelő egyensúlyi értékektől való eltérése a $t \in [0, +\infty)$ időpontban, a D függvényről is feltesszük, hogy valós és differenciálható, ekkor $D - Y$ a túlkeresleti függvény.

Phillips a következő feltételezéseket tette:

A kibocsátás változása a túlkereslettel arányos, azaz

$$\dot{Y} = \alpha(D - Y), \tag{2.1}$$

ahol $\alpha > 0$ konstans. Az összkereslet

$$D = (1 - l)Y - u, \tag{2.2}$$

ahol $1-l$ a kötési hajlandóság, $0 \leq l \leq 1$ konstans és u úgynevezett zavarás (szállítási nehézségek, selejt, stb), $u>0$ konstans. Az egyenlet így

$$\dot{Y} = \alpha((1-l)Y - u - Y) = -\alpha l Y - \alpha u. \tag{2.3}$$

2.1 Állítás. *A (2.3)-as differenciálegyenlet megoldása*

$$Y(t) = ce^{-\alpha l t} - \frac{u}{l},$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ konstans.

Bizonyítás: A homogén megoldása

$$ce^{\int -\alpha l} = ce^{-\alpha l t}.$$

Az inhomogén egy megoldása előáll

$$d(t)e^{\int -\alpha l} = d(t)e^{-\alpha l t}$$

alakban.

Ezt behelyettesítve a differenciálegyenletbe

$$\dot{(d(t)e^{-\alpha l t})} = -\alpha l d(t) e^{-\alpha l t} - \alpha u$$

$$\dot{d}(t)e^{-\alpha l t} - d(t)\alpha l e^{-\alpha l t} = -\alpha l d(t) e^{-\alpha l t} - \alpha u$$

$$\dot{d}(t) = -\alpha u e^{\alpha l t}$$

$$d(t) = -\alpha u \frac{e^{\alpha l t}}{\alpha l}$$

Ezt behelyettesítve, az inhomogén egy megoldása

$$-\frac{u}{l} e^{\alpha l t} e^{-\alpha l t} = -\frac{u}{l}.$$

Vagyis a (2.3)-as differenciálegyenlet megoldása

$$Y(t) = ce^{-\alpha l t} - \frac{u}{l}.$$

$\square$

2.2 Állítás. *Ha $l \neq 0$, akkor a gazdaság hosszútávon alulteljesít.*
Ha $l = 0$, akkor a gazdaság hosszútávon összeomlik.

Bizonyítás: Ha $l \neq 0$, akkor

$$Y(t) = ce^{-\alpha lt} - \frac{u}{l} \longrightarrow -\frac{u}{l} \quad (t \to +\infty).$$

Ha $l = 0$, akkor

$$Y(t) = -\alpha ut \longrightarrow -\infty \quad (t \to +\infty).$$

$\square$

A kormány, hogy ezt megakadályozza beavatkozik a keresletbe (útépítéssel, kedvezményekkel, stb). Ekkor a kereslet a következő alakú

$$D = (1 - l)Y - u + G, \tag{2.4}$$

ahol $G : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ differenciálható függvény.
A kormány azonban nem tudja közvetlenül befolyásolni a keresletet, csak ösztönző, irányító intézkedéseket tehet a teljes kibocsátás ismeretében, ezért a G beavatkozás függvény csak közelíti az ideális G^* beavatkozás függvényt

$$\dot{G} = \beta(G^* - G), \tag{2.5}$$

ahol $\beta > 0$ állandó azt fejezi ki, hogy a kormány milyen gyorsan reagál az ideális G^* és a G függvények közötti eltérésre.

2.2. Beavatkozási politikák

2.3 Definíció. ***Arányos stabilizálás****i politikáról beszélünk , ha*

$$G^* = -f_p \cdot Y, \quad f_p > 0 \text{ konstans.}$$

Azaz a kormány a kívánt optimális helyzettől való eltérésre reagál, a keresletet a kibocsátási feszültséggel ellentétes irányban, azzal arányosan változtatja.

2.4 Definíció. ***Derivatív stabilizálás****i politikáról beszélünk , ha*

$$G^* = -f_d \cdot \dot{Y}, \quad f_d > 0 \text{ konstans.}$$

Azaz a kormány a rossz irányú változást próbálja megelőzni, a keresletet a kibocsátási feszültség változási sebességével ellentétes irányban, azzal arányosan változtatja.

2.5 Definíció. ***Integrális stabilizálás****i politikáról beszélünk , ha*

$$G^*(t) = -f_i \cdot \int_0^t Y(s)ds, \quad f_i > 0 \text{ konstans.}$$

Azaz a kormány a korábbi időszak kibocsátási átlaga szerint próbál beavatkozni.

Részletesen az első két beavatkozási politikával fogunk foglalkozni, ehhez előbb alakítsuk át a (2.3)-as differenciálegyenletet. A (2.1)-es egyenlőséget átrendezve és (2.4)-et deriválva a következőket kapjuk

$$D = \frac{\dot{Y} + \alpha Y}{\alpha}, \qquad \dot{D} = (1-l)\dot{Y} + \dot{G}.$$

Ezeket használva egyrészt

$$\dot{D} + \beta D = \frac{\ddot{Y} + \alpha\dot{Y} + \beta\dot{Y} + \alpha\beta Y}{\alpha}.$$

Másrészt

$$\dot{D} + \beta D = (1-l)\dot{Y} + (1-l)\beta Y - \beta u + \beta G^*.$$

Ezekből pedig a következő differenciálegyenletet kapjuk

$$\ddot{Y} + (\beta + \alpha l)\dot{Y} + \alpha\beta l Y - \alpha\beta G^* = -\alpha\beta u. \tag{2.6}$$

Vizsgáljuk meg tehát egyenként az arányos és a derivatív beavatkozási politikákat.

Arányos beavatkozás esetén a (2.6)-os differenciálegyenlet a következő alakú lesz

$$\ddot{Y} + (\beta + \alpha l)\dot{Y} + \alpha\beta(l + f_p)Y = -\alpha\beta u. \tag{2.7}$$

2.6 Állítás. *A (2.7)-es differenciálegyenlet megoldására teljesül, hogy*

$$Y(t) \longrightarrow -\frac{u}{l + f_p} \quad (t \to +\infty).$$

Bizonyítás: A (2.7)-es differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 + (\beta + \alpha l)\lambda + \alpha\beta(l + f_p) = 0.$$

Megoldása

$$\lambda_{1,2} = -\frac{(\beta + \alpha l)}{2} \pm \sqrt{\frac{(\beta + \alpha l)^2}{4} - \alpha\beta(l + f_p)}.$$

$(\beta + \alpha l) > 0 \quad$ és $\quad \alpha\beta(l + f_p) > 0$ miatt,

ha $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C} \quad \Longrightarrow \quad \Re(\lambda_{1,2}) < 0$,

ha $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 + \lambda_2 = -(\beta + \alpha l) \quad$ és $\quad \lambda_1\lambda_2 = \alpha\beta(l + l_p) \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{1,2} < 0$

$\Longrightarrow \quad \Re(\lambda_{1,2}) < 0$.

Ezért a homogén megoldása $\longrightarrow 0 \quad (t \to +\infty)$.

Az inhomogén egyenlet egy megoldása $-\frac{u}{l+f_p}$.

Vagyis $\quad Y(t) \longrightarrow -\frac{u}{l+f_p} \quad (t \to +\infty)$.

□

2.7 Következmény. *Ha f_p elég nagy, akkor a gazdaság közel van az egyensúlyi helyzethez.*

2.8 Állítás. *Ha f_p elég nagy, akkor (2.7) megoldása oszcillál.*

Bizonyítás: (2.7) karakterisztikus egyenletének diszkriminánsa

$$D = (\beta + \alpha l)^2 - 4\alpha\beta(l + f_p).$$

Ha f_p elég nagy, akkor ez negatív, ezért a megoldás oszcillál.

□

Ez azt jelenti, hogy ha a beavatkozás erejét szabályzó f_p konstanst elég nagyra választjuk, akkor a gazdaság nem teljesít nagyon alul, ekkor azonban az oszcilláció miatta kibocsátás és a kereslet túl gyorsan változik.

Derivatív beavatkozás esetén a (2.6)-os differenciálegyenlet a következő alakú lesz

$$\ddot{Y} + (\beta + \alpha l + \alpha\beta f_d)\dot{Y} + \alpha\beta l Y = -\alpha\beta u. \tag{2.8}$$

2.9 Állítás. *A (2.8)-as differenciálegyenlet megoldására teljesül, hogy*

$$Y(t) \longrightarrow -\frac{u}{l} \quad (t \to +\infty).$$

Bizonyítás: A (2.8)-as differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 + (\beta + \alpha l + \alpha\beta f_d)\lambda + \alpha\beta l = 0.$$

Megoldása

$$\lambda_{1,2} = -\frac{(\beta + \alpha l + \alpha\beta f_d)}{2} \pm \sqrt{\frac{(\beta + \alpha l + \alpha\beta f_d)^2}{4} - \alpha\beta l}.$$

$(\beta + \alpha l + \alpha\beta f_d) > 0$ és $\alpha\beta l > 0$ miatt ezúttal is $\Re(\lambda_{1,2}) < 0$.

Ezért a homogén megoldása $\longrightarrow 0 \quad (t \to +\infty)$.

Az inhomogén egyenlet egy megoldása $-\frac{u}{l}$.

Vagyis $\quad Y(t) \longrightarrow -\frac{u}{l} \quad (t \to +\infty)$.

□

2.10 Következmény. *f_d választásától függetlenül a gazdaság alul teljesít.*

2.11 Állítás. *Ha f_d elég nagy, akkor (2.8) megoldása nem oszcillál.*

Bizonyítás: (2.8) karakterisztikus egyenletének diszkriminánsa

$$D = (\beta + \alpha l + \alpha\beta f_d)^2 - 4\alpha\beta l.$$

Ha f_d elég nagy, akkor ez pozitív, ezért a megoldás nem oszcillál.

□

Vagyis a derivatív beavatkozás a gazdaság alulteljesítését nem csökkenti, azonban, ha az f_d beavatkozási konstanst elég nagyra választjuk, akkor megszüntethető az esetleges oszcilláció.

Ezek szerint önmagában egyik beavatkozási politika sem elég ahhoz, hogy a gazdaságot megfelelően stabilizáljuk. Azonban az eredményekből úgy tűnik, mivel az előnyeik és hátrányaik az egyes beavatkozási politikáknak pont ellentétesek, a két beavatkozás együttes alkalmazása megfelelőbb eredményre vezethet. Vizsgáljuk meg, tényleg így van-e, kombináljuk a kétféle beavatkozási politikát.

Arányos és derivatív beavatkozás esetén a (2.6)-os differenciálegyenlet a következő alakú lesz

$$\ddot{Y} + (\beta + \alpha l + \alpha\beta f_d)\dot{Y} + \alpha\beta(l + f_p)Y = -\alpha\beta u. \tag{2.9}$$

2.12 Állítás. *A (2.9)-es differenciálegyenlet megoldására teljesül, hogy*

$$Y(t) \longrightarrow -\frac{u}{l + f_p} \quad (t \to +\infty).$$

Bizonyítás: A (2.9)-es differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 + (\beta + \alpha l + \alpha\beta f_d)\lambda + \alpha\beta(l + f_p) = 0.$$

Megoldása

$$\lambda_{1,2} = -\frac{(\beta + \alpha l + \alpha\beta f_d)}{2} \pm \sqrt{\frac{(\beta + \alpha l + \alpha\beta f_d)^2}{4} - \alpha\beta(l + f_p)}.$$

$(\beta + \alpha l + \alpha\beta f_d) > 0$ és $\alpha\beta(l + f_p) > 0$ miatt, ezúttal is $\Re(\lambda_{1,2}) < 0$.
Ezért a homogén megoldása $\longrightarrow 0 \quad (t \to +\infty)$.
Az inhomogén egyenlet egy megoldása $-\frac{u}{l+f_p}$.
Vagyis $Y(t) \longrightarrow -\frac{u}{l+f_p} \quad (t \to +\infty)$.

□

2.13 Következmény. *Ha f_p elég nagy, akkor a gazdaság közel van az egyensúlyi helyzethez.*

2.14 Állítás. *Ha f_d kellően nagy, akkor (2.9) megoldása nem oszcillál.*

Bizonyítás: (2.9) karakterisztikus egyenletének diszkriminánsa

$$D = (\beta + \alpha l + \alpha\beta f_d)^2 - 4\alpha\beta(l + f_p).$$

Ha f_d kellően nagy, akkor ez pozitív, ezért a megoldás nem oszcillál.

□

Ezzel sikerült igazolni azon sejtést, hogy a beavatkozások együttes alkalmazása jobb eredményre vezet, tehát az f_p és f_d beavatkozási konstansokat megfelelően nagyokra választásával, a gazdaság nem teljesít nagyon alul és nem lesz oszcilláció sem.

2.15 Megjegyzés. *Az integrális beavatkozás alkalmazásával lehet biztosítani a gazdaság aszimptotikus stabilitását.*

3. fejezet

A Solow-Swan-féle növekedési modell

Ezen fejezetben egy növekedési modell, nevezetesen a Solow-Swan-féle növekedési modell kerül bemutatásra, ehhez a Dinamikus modellek a közgazdaságban [1] és az Economic Growth [3] című könyvek szolgálnak forrásul.

3.1. Solow feltételei

Ebben a fejezetben a következő jelöléseket fogjuk alkalmazni. $K(t)$ a tőke mennyisége, $L(t)$ a munkaerő nagysága, $Y(t)$ a termelés mennyisége, $C(t)$ a fogyasztás mennyisége, és $I(t)$ a beruházás mennyisége a $t \in [0, +\infty)$ időpontban.
A K, L, C, I függvényekről feltesszük, hogy nem negatívak és differenciálhatóak, valamint Y-ról, hogy nem negatív, kétszer differenciálható.
Solow a következő feltételezéseket tette:

$$Y = F \circ (K, L),$$

ahol $F : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ kétszer differenciálható, azaz a termelés, a tőke, és a munkaerő függvénye, F-et termelésfüggvénynek nevezzük.

$$Y = C + I,$$

vagyis a termelést csak fogyasztásra és beruházásra használhatjuk.

$$I = sY,$$

azaz a termelés egy rögzített hányadosát fordítjuk beruházásra, ahol s a megtakarítási arány, $0 \leq s \leq 1$ konstans. Ekkor nyilván

$$C = (1 - s)Y.$$

Valamint

$$\dot{K} = I - \delta K,$$

ahol $\delta > 0$ konstans az értékcsökkenés mértéke.

$$\frac{\dot{L}}{L} = n,$$

ahol $n \geq 0$ konstans a munkaerő növekedésének aránya, így L a következő alakban írható

$$L(t) = e^{nt}.$$

Továbbá vezessük be az egy főre jutó tőke, termelés, és fogyasztás függvényeket:

$$k := \frac{K}{L}, \quad y := \frac{Y}{L}, \quad c := \frac{C}{L}.$$

Vezessük még be a következő változókat:

$$\mathsf{K} := K(t), \qquad \mathsf{L} := L(t), \qquad \mathsf{C} := C(t), \qquad \mathsf{I} := I(t), \qquad \mathsf{Y} := Y(t),$$

ezeket makrováltozóknak nevezzük, továbbá

$$\mathsf{k} := k(t), \qquad \mathsf{c} := c(t), \qquad \mathsf{y} := y(t).$$

3.2. A termelésfüggvény tulajdonságai

A feltételek szerint a termelés mennyisége a következő alakban írható

$$\mathsf{Y} = F(\mathsf{K}, \mathsf{L}). \tag{3.1}$$

3.1 Definíció. *Egy termelésfüggvényt* ***neoklasszikus termelésfüggvény****nek nevezünk, ha teljesülnek a következők:*

(1) F elsőrendű pozitív homogén függvény, azaz tetszőleges $\lambda > 0$ számra

$$F(\lambda \mathsf{K}, \lambda \mathsf{L}) = \lambda F(\mathsf{K}, \mathsf{L}).$$

(2) Az F függvény elsőrendű parciális derivált függvényei pozitívak, a másodrendűek negatívak, azaz

$$\partial_1 F > 0, \quad \partial_2 F > 0, \qquad \partial_1^2 F < 0, \quad \partial_2^2 F < 0.$$

(3) Teljesülnek az úgynevezett Inada feltételek, azaz

$$\lim_{\mathsf{K}\to 0} \partial_1 F(\mathsf{K}, \mathsf{L}) = \lim_{\mathsf{L}\to 0} \partial_2 F(\mathsf{K}, \mathsf{L}) = +\infty, \qquad \lim_{\mathsf{K}\to +\infty} \partial_1 F(\mathsf{K}, \mathsf{L}) = \lim_{\mathsf{L}\to +\infty} \partial_2 F(\mathsf{K}, \mathsf{L}) = 0.$$

Vizsgáljuk meg az egy főre jutó termelés és tőke mennyiségek kapcsolatát

$$\mathsf{Y} = F(\mathsf{K}, \mathsf{L}) = \mathsf{L} F\left(\frac{\mathsf{K}}{\mathsf{L}}, \frac{\mathsf{L}}{\mathsf{L}}\right) = \mathsf{L} F(\mathsf{k}, 1) = \mathsf{L} f(\mathsf{k}),$$

$$\mathsf{y} = f(\mathsf{k}),$$

ahol $f(\mathsf{k}) := F(\mathsf{k}, 1)$.

Először rögzített L mellett a K változó szerint, majd rögzített K mellett L változó szerint deriválva

$$\partial_1 \mathsf{Y} = \mathsf{L}\left(f\left(\frac{\mathsf{K}}{\mathsf{L}}\right)\right)' = \mathsf{L}\frac{f'\left(\frac{\mathsf{K}}{\mathsf{L}}\right)}{\mathsf{L}} = f'(\mathsf{k}), \tag{3.2}$$

$$\partial_2 \mathsf{Y} = \mathsf{L}' f\left(\frac{\mathsf{K}}{\mathsf{L}}\right) + \mathsf{L}\left(f\left(\frac{\mathsf{K}}{\mathsf{L}}\right)\right)' = f(\mathsf{k}) + \mathsf{L} f'(\mathsf{k})\left(\frac{\mathsf{K}}{\mathsf{L}}\right)' = \tag{3.3}$$

$$= f(\mathsf{k}) + \mathsf{L} f'(\mathsf{k})\left(-\frac{\mathsf{K}}{\mathsf{L}^2}\right) = f(\mathsf{k}) - \mathsf{k} f'(\mathsf{k}).$$

3.2 Állítás. *(i)* $\lim\limits_{\mathsf{k}\to 0} f'(\mathsf{k}) = +\infty$.

(ii) $\lim\limits_{\mathsf{k}\to +\infty} f'(\mathsf{k}) = 0$.

(iii) $f'(\mathsf{k}) > 0 \quad (0 < \mathsf{k} < +\infty)$.

(iv) $f''(\mathsf{k}) < 0 \quad (0 < \mathsf{k} < +\infty)$.

(v) $F(\mathsf{K}, 0) = 0 \quad (\mathsf{K} < +\infty)$.

(vi) $f(0) = F(0, \mathsf{L}) = 0 \quad (\mathsf{L} < +\infty)$.

(vii) $\lim\limits_{\mathsf{L}\to +\infty} F(\mathsf{K}, \mathsf{L}) = +\infty \quad (0 < \mathsf{K} < +\infty)$.

(viii) $\lim\limits_{\mathsf{k}\to +\infty} f(\mathsf{k}) = \lim\limits_{\mathsf{K}\to +\infty} F(\mathsf{K}, \mathsf{L}) = +\infty \quad (\mathsf{L} < +\infty)$.

Bizonyítás: $(i) - (ii)$ A (3.2)-es összefüggés felhasználásával az Inada feltételekből következnek.

(iii) A (3.2)-es összefüggés és a 3.1 definíció (2)-es pontja miatt nyilvánvaló.

(iv) A (3.2)-es egyenlőséget K szerint deriválva a következőt kapjuk

$$\mathsf{L}\partial_1^2 \mathsf{Y} = f''(\mathsf{k}),$$

amiből a 3.1 definíció (2)-es pontja miatt következik az állítás.

(v) Rögzített Y esetén $\lim\limits_{\mathsf{K}\to +\infty} \frac{\mathsf{Y}}{\mathsf{K}} = 0$.

$\mathsf{Y} \longrightarrow +\infty$ esetén $\lim\limits_{\mathsf{K}\to +\infty} \frac{\mathsf{Y}}{\mathsf{K}} = \lim\limits_{\mathsf{K}\to +\infty} \partial_1 \mathsf{Y} = 0$.

Ezért, ha $\mathsf{L} < +\infty$, akkor

$$0 = \lim_{\mathsf{K}\to +\infty} \frac{\mathsf{Y}}{\mathsf{K}} = \lim_{\mathsf{K}\to +\infty} F\left(1, \frac{\mathsf{L}}{\mathsf{K}}\right) = F(1, 0).$$

Emiatt pedig $F(\mathsf{K}, 0) = \mathsf{K}F(1, 0) = 0$, ha $\mathsf{K} < +\infty$.

(vi) Rögzített Y esetén $\lim\limits_{\mathsf{L}\to +\infty} \frac{\mathsf{Y}}{\mathsf{L}} = 0$.

$\mathsf{Y} \longrightarrow +\infty$ esetén $\lim\limits_{\mathsf{L}\to +\infty} \frac{\mathsf{Y}}{\mathsf{L}} = \lim\limits_{\mathsf{L}\to +\infty} \partial_2 \mathsf{Y} = 0$.

Ezért, ha $\mathsf{K} < +\infty$, akkor

$$0 = \lim_{\mathsf{L}\to+\infty} \frac{\mathsf{Y}}{\mathsf{L}} = \lim_{\mathsf{L}\to+\infty} F\left(\frac{\mathsf{K}}{\mathsf{L}}, 1\right) = F(0,1).$$

Emiatt $\quad f(0) = F(0,1) = 0.$

És $\quad F(0,\mathsf{L}) = \mathsf{L}F(0,1) = 0$, ha $\mathsf{K} < +\infty$.

(*vii*) Ha $0 < \mathsf{K} < +\infty$, akkor

$$F(\mathsf{K},\mathsf{L}) = \mathsf{L}F(\mathsf{k},1) = \mathsf{L}f(\mathsf{k}) = \mathsf{K}\frac{\mathsf{L}}{\mathsf{K}}f(\mathsf{k}) = \mathsf{K}\frac{f(\mathsf{k})}{\mathsf{k}}.$$

Ekkor

$$\lim_{\mathsf{L}\to+\infty} F(\mathsf{K},\mathsf{L}) = \mathsf{K}\lim_{\mathsf{k}\to 0}\frac{f(\mathsf{k})}{\mathsf{k}} = \mathsf{K}\lim_{\mathsf{k}\to 0} f'(\mathsf{k}) = +\infty$$

az állítás (vi)-os és (i)-es pontja miatt.

(*viii*) Ha $0 < \mathsf{K} < +\infty$, akkor

$$F(\mathsf{K},\mathsf{L}) = \mathsf{K}F\left(1, \frac{\mathsf{L}}{\mathsf{K}}\right) = \mathsf{L}\frac{\mathsf{K}}{\mathsf{L}}F\left(1, \frac{\mathsf{L}}{\mathsf{K}}\right) = \mathsf{L}\frac{F\left(1, \frac{1}{\mathsf{k}}\right)}{\frac{1}{\mathsf{k}}}.$$

Ekkor

$$\lim_{\mathsf{K}\to+\infty} F(\mathsf{K},\mathsf{L}) = \mathsf{L}\lim_{\frac{1}{\mathsf{k}}\to 0}\frac{F\left(1, \frac{1}{\mathsf{k}}\right)}{\frac{1}{\mathsf{k}}} = \mathsf{L}\lim_{\frac{1}{\mathsf{k}}\to 0}\partial_2 F\left(1, \frac{1}{\mathsf{k}}\right) = +\infty$$

az állítás (v)-ös pontja és az Inada feltételek miatt.

□

3.3. Az egyensúlyi helyzet

A (3.1)-es összefüggés miatt a tőke növekedésére most fennáll a következő összefüggés

$$\dot{K} = s(F \circ (K,L)) - \delta K. \tag{3.4}$$

Osszuk le az egyenletet L-el és számoljuk ki $\dot{k}$-at.

$$\frac{\dot{K}}{L} = s(f \circ k) - \delta k,$$

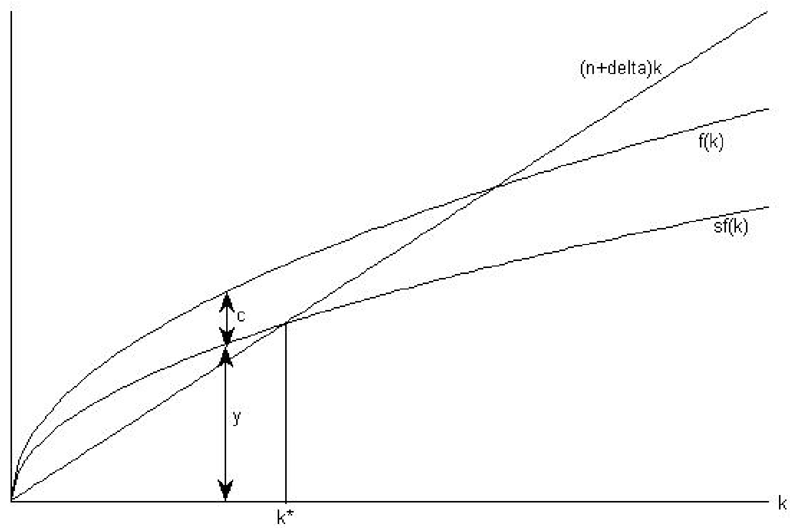
$$\dot{k} = \frac{\dot{K}L - K\dot{L}}{L^2} = \frac{\dot{K}}{L} - nk.$$

Ezeket felhasználva megkapjuk a Solow-Swan modell alapegyenletét

$$\dot{k} = s(f \circ k) - (\delta + n)k. \tag{3.5}$$

Az alapegyenletet algebrai formában is felírhatjuk

$$\dot{\mathsf{k}} = sf(\mathsf{k}) - (\delta + n)\mathsf{k}.$$



3.1 ábra

3.3 Definíció. ***Egyensúlyi helyzet****nek nevezzük azt a helyzetet, amikor a makrováltozók konstans növekednek.*

$\mathsf{k} = 0$ nyilván megoldása az egyenletnek, de ez az eset érdektelen, ezért mostantól feltesszük, hogy $k > 0$. Jelölje k^*, y^*, és c^* a megfelelő változók egyensúlyi helyzetben felvett értékeit.

3.4 Állítás. *A Solow-Swan modellnek egyensúlyi helyzete van, ha* $\dot{\mathsf{k}} = 0$*, azaz abban a* k^* *pontban, amely megoldja az*

$$sf(\mathsf{k}) - (n + \delta)\mathsf{k} = 0$$

egyenletet.

Bizonyítás: Ebben a k^* pontban a k függvény konstans, ezért

$$y = f \circ k \quad \text{és} \quad c = (1-s)(f \circ k)$$

miatt, az y és c függvények is konstansok. Az L függvény növekedési aránya n, ezért a K, Y és C függvények is növekednek n arányában, vagyis a makrováltozók konstans növekednek a k^* pontban.

$\square$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\gamma_k := \frac{\dot{k}}{k}, \quad \gamma_y := \frac{\dot{y}}{y}, \quad \gamma_c := \frac{\dot{c}}{c},$$

$$\gamma_{\mathsf{k}} := \gamma_k(t), \quad \gamma_{\mathsf{y}} := \gamma_y(t), \quad \gamma_{\mathsf{c}} := \gamma_c(t).$$

Az alapegyenletet k-val leosztva a

$$\gamma_{\mathsf{k}} = \frac{sf(\mathsf{k})}{\mathsf{k}} - (n+\delta) \tag{3.6}$$

egyenlőséget kapjuk.

3.5 Állítás. *(i)* $\lim\limits_{\mathsf{k}\to 0} \frac{f(\mathsf{k})}{\mathsf{k}} = +\infty.$

(ii) $\lim\limits_{\mathsf{k}\to +\infty} \frac{f(\mathsf{k})}{\mathsf{k}} = 0.$

(iii) $\left(\frac{f(\mathsf{k})}{\mathsf{k}}\right)' < 0 \quad (0 < \mathsf{k} < +\infty).$

Bizonyítás: (i)

$$\lim_{\mathsf{k}\to 0} \frac{f(\mathsf{k})}{\mathsf{k}} = \lim_{\mathsf{k}\to 0} f'(\mathsf{k}) = +\infty$$

a 3.2 állítás (vi) és (i) pontja miatt.

(ii)

$$\lim_{\mathsf{k}\to +\infty} \frac{f(\mathsf{k})}{\mathsf{k}} = \lim_{\mathsf{k}\to +\infty} f'(\mathsf{k}) = 0$$

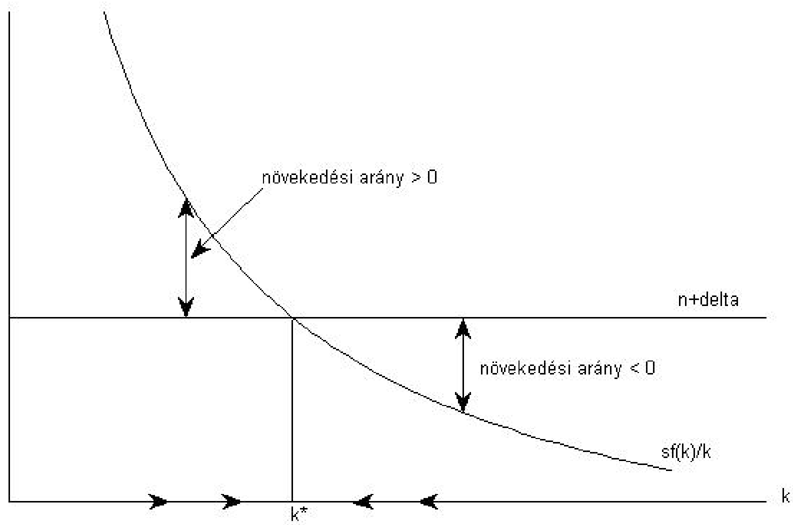
a 3.2 állítás (viii) és (ii) pontja miatt.

(*iii*)

$$\left(\frac{f(\mathsf{k})}{\mathsf{k}}\right)' = \frac{f'(\mathsf{k})\mathsf{k} - f(\mathsf{k})}{\mathsf{k}^2} = -\frac{f(\mathsf{k}) - \mathsf{k}f'(\mathsf{k})}{\mathsf{k}^2} < 0,$$

mert $f(\mathsf{k}) - \mathsf{k}f'(\mathsf{k}) = \partial_2 \mathsf{Y} > 0$ a 3.1 definíció (2)-es pontja miatt.

$\square$



3.2 ábra

3.6 Tétel. *A Solow-Swan modellnek egyértelműen létezik* $\mathsf{k}^* > 0$ *egyensúlyi helyzete.*

Bizonyítás: Teljesülnek a következő ekvivalenciák

$$\dot{\mathsf{k}} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma_{\mathsf{k}} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{sf(\mathsf{k})}{\mathsf{k}} = n + \delta.$$

Mivel az $n + \delta > 0$ függvény grafikonja vízszintes egyenes és $\frac{s(f \circ k))}{k}$ folytonos, monoton csökkenő függvény, melynek nullában végtelen, végtelenben nulla a határértéke, ezért a két görbének pontosan egy metszés pontja van.

$\square$

3.7 Tétel. *A* k^* *egyensúlyi helyzet aszimptotikusan stabilis abban az értelemben, hogy bármely* $0 < k_0 = k(0)$ *kezdeti érték feltételt kielégítő* $k(t)$ *megoldás monoton tart* k^**-hoz* $(t \to +\infty)$.

Bizonyítás:

1. Legyen $k_0 = \mathsf{k}^*$. Ekkor $k(t) \equiv \mathsf{k}^*$.

2. Legyen most $k_0 < \mathsf{k}^*$. Ekkor teljesülnek a következő implikációk

$$k < \mathsf{k}^* \quad \Longrightarrow \quad \gamma_k > 0 \quad \Longrightarrow \quad \dot{k} > 0 \quad \Longrightarrow \quad k(t) \nearrow \mathsf{k}^* \quad (t \to +\infty).$$

3. Végül legyen $k_0 > \mathsf{k}^*$. Ez esetben teljesülnek a következők

$$k > \mathsf{k}^* \quad \Longrightarrow \quad \gamma_k < 0 \quad \Longrightarrow \quad \dot{k} < 0 \quad \Longrightarrow \quad k(t) \searrow \mathsf{k}^* \quad (t \to +\infty).$$

Kész a bizonyítás.

$\square$

Most vizsgáljuk meg hogyan változik az egy főre jutó kibocsátás mennyisége

$$\gamma_{\mathsf{y}} = \frac{\dot{\mathsf{y}}}{\mathsf{y}} = \frac{f'(\mathsf{k})\dot{\mathsf{k}}}{f(\mathsf{k})} = \underbrace{\left(\mathsf{k}\frac{f'(\mathsf{k})}{f(\mathsf{k})}\right)}_{Sh(\mathsf{k})}\gamma_{\mathsf{k}}.$$

A (3.6)-os egyenlőséget felhasználva

$$\gamma_{\mathsf{y}} = sf'(\mathsf{k}) - (n+\delta)\left(\mathsf{k}\frac{f'(\mathsf{k})}{f(\mathsf{k})}\right). \tag{3.7}$$

Ezt deriválva

$$\left(sf'(\mathsf{k}) - (n+\delta)\left(\mathsf{k}\frac{f'(\mathsf{k})}{f(\mathsf{k})}\right)\right)' =$$

$$= sf''(\mathsf{k}) - (n+\delta)\left(\mathsf{k}'\frac{f'(\mathsf{k})}{f(\mathsf{k})} + \mathsf{k}\left(\frac{f''(\mathsf{k})f(\mathsf{k}) - (f'(\mathsf{k}))^2}{f^2(\mathsf{k})}\right)\right) =$$

$$= s\frac{f(\mathsf{k})}{\mathsf{k}}\frac{\mathsf{k}}{f(\mathsf{k})}f''(\mathsf{k}) - (n+\delta)\mathsf{k}\frac{f''(\mathsf{k})}{f(\mathsf{k})} - (n+\delta)\frac{f'(\mathsf{k})}{f(\mathsf{k})} + (n+\delta)\mathsf{k}\frac{(f'(\mathsf{k}))^2}{f^2(\mathsf{k})} =$$

$$= \mathsf{k}\frac{f''(\mathsf{k})}{f(\mathsf{k})}\left(s\frac{f(\mathsf{k})}{\mathsf{k}} - (n+\delta)\right) - (n+\delta)\frac{f'(\mathsf{k})}{f(\mathsf{k})} + (n+\delta)\frac{f'(\mathsf{k})}{f(\mathsf{k})}\left(\mathsf{k}\frac{f'(\mathsf{k})}{f(\mathsf{k})}\right) =$$

$$= \mathsf{k}\frac{f''(\mathsf{k})}{f(\mathsf{k})}\gamma_{\mathsf{k}} - (n+\delta)\frac{f'(\mathsf{k})}{f(\mathsf{k})}(1 - Sh(\mathsf{k})).$$

3.8 Állítás. $y(t) \nearrow \mathsf{y}^* \quad (t \to +\infty)$.

Bizonyítás:

$$\underbrace{\mathsf{k}\frac{f''(\mathsf{k})}{f(\mathsf{k})}}_{<0}\gamma_{\mathsf{k}} - \underbrace{(n+\delta)\frac{f'(\mathsf{k})}{f(\mathsf{k})}(1 - Sh(\mathsf{k}))}_{>0}$$

1. Ha $k_0 < \mathsf{k}^*$, akkor teljesülnek a következő implikációk

$$\gamma_k > 0 \quad \Longrightarrow \quad \gamma_y \searrow \quad \Longrightarrow \quad y \nearrow .$$

   Ez esetben

$$\lim_{t \to +\infty} k(t) = \mathsf{k}^* \text{ és } \lim_{\mathsf{k} \to \mathsf{k}^*} \mathsf{y} = \mathsf{y}^*$$

   miatt $\quad y(t) \nearrow y^* \quad (t \to +\infty)$.

2. Ha $k_0 > \mathsf{k}^*$, akkor $\gamma_{\mathsf{k}} < 0$ miatt γ_y deriváltjának előjele függ $f(\mathsf{k})$ értékétől. Ha $t \to +\infty$, akkor

$$k \longrightarrow \mathsf{k}^* \quad \Longrightarrow \quad \gamma_{\mathsf{k}} \text{ kicsi} \quad \Longrightarrow \quad \gamma_y \searrow \quad \Longrightarrow \quad y \nearrow$$

   Ezért

$$\lim_{t \to +\infty} k(t) = \mathsf{k}^* \text{ és } \lim_{\mathsf{k} \to \mathsf{k}^*} \mathsf{y} = \mathsf{y}^*$$

   miatt ezúttal is $\quad y(t) \nearrow \mathsf{y}^* \quad (t \to +\infty)$.

Igazoltuk az állítást.

□

Végül vizsgáljuk meg hogyan változik az egy főre jutó fogyasztás.

3.9 Állítás. $\gamma_c = \gamma_y$.

Bizonyítás:

$$c = (1-s)y \quad \text{és} \quad \dot{c} = (1-s)\dot{y}$$

miatt teljesül az állítás.

□

3.10 Következmény. $c(t) \nearrow \mathsf{c}^* \quad (t \to +\infty)$.

4. fejezet

Tételjegyzék

Ebben a fejezetben a dolgozatban felhasznált, de nem bizonyított tételek vannak összegyűjtve, ezek forrása az [1]-es, [4]-es és [5]-ös könyvek.

4.1. Lineáris algebra

4.1 Tétel. (Cramer-szabály) *Legyen*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Ekkor, ha $D = \det A \neq 0$, akkor az $A\underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van. A megoldásban $x_j = \frac{D_j}{D}$, ahol a D_j determinánst úgy kapjuk, hogy D-ben a j-edik oszlop helyére a $\underline{b}$ vektor komponenseit írjuk.

4.2 Definíció. *Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixot **stabilis**nak nevezzük, ha a $\det(\lambda I - A) = 0$ karakterisztikus egyenlet minden gyökének valós része negatív.*

4.3 Tétel. *Ha A szimmetrikus, akkor A stabilis akkor és csak akkor, ha*

$$a_{11} < 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0, \dots \tag{4.1}$$

teljesül.

4.4 Tétel. *Ha* $a_{jk} \geq 0 \quad \forall j \neq k$ *esetén, akkor* A *stabilis akkor és csak akkor, ha (4.1) teljesül.*

4.5 Tétel. *Ha* $a_{jj} < 0 \quad (j = 1, \ldots, n)$ *és a főátlóban levő elemek sor dominánsak, azaz*

$$|a_{jj}| > \sum_{k=1 k\neq j}^{n} |a_{jk}|$$

vagy oszlop dominánsak, azaz

$$|a_{jj}| > \sum_{k=1 k\neq j}^{n} |a_{kj}|$$

akkor A *stabilis.*

4.2. Differenciálegyenletek

4.6 Definíció. *Legyen* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, *az*

$$\begin{cases} \dot{x} = f \circ x \\ x(0) = p \end{cases} \tag{4.2}$$

kezdetiérték-feladat teljes megoldását jelölje $t \mapsto \varphi(t,p)$, *ennek maximális értelmezési tartományát* $I(0,p)$. *A* $p \in \mathbb{R}^n$ *egyensúlyi pontot, azaz olyan vektort, amelyre teljesül hogy* $f(p) = 0$

(i) ***stabilis****nak nevezzük, ha* $I(0,+\infty) \subseteq I(0,p)$, *és*

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0, \text{ hogy ha } |q - p| < \delta, \text{ akkor } |\varphi(t,q) - \varphi(t,p)| < \varepsilon \quad (t \geq 0),$$

(ii) ***aszimptotikusan stabilis****nak nevezzük, ha stabilis, és*

$$\lim_{t\to+\infty} |\varphi(t,q) - \varphi(t,p)| = 0,$$

(iii) ***labilis****nak nevezzük, ha nem stabilis.*

4.7 Tétel. *Legyen* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f \in C^1$, *tekintsük az*

$$\dot{x} = f \circ x \tag{4.3}$$

rendszert, és legyen $p \in \mathbb{R}^n$ *egyensúlyi pont. Ekkor* *(i) ha az f'(p) mátrix minden λ_i sajátértékére $\Re(\lambda_i) < 0$, akkor a p aszimptotikusan stabilis egyensúlyi pontja a (4.3)-as rendszernek, és*

(ii) ha az f'(p) mátrixnak van λ_i sajátértéke, amire $\Re(\lambda_i) > 0$, akkor a p labilis egyensúlyi pontja a (4.3)-as rendszernek.

Irodalomjegyzék

[1] Hatvani László, Krisztin Tibor, Makay Géza, *Dinamikus Modellek a Közgazdaságban*, Polygon, Szeged (2001).

[2] Giancarlo Gandolfo, *Mathematical Methods and Models*, North Holland Publishing Company, Amsterdam, London (1971).

[3] Robert J. Barro, Xavier Sala-i-Martin, *Economic Growth*, The MIT Press, Cambridge, London (1999).

[4] Freud Róbert, *Lineáris Algebra*, ELTE Eötvös Kiadó (2009).

[5] Tóth János, Simon L. Péter, *Differenciálegyenletek*, TYPOTEX Kiadó, Budapest (2005).

[6] *http://en.wikipedia.org/wiki/History_of_economic_thought*.

[7] *http://hu.wikipedia.org/wiki/A_közgazdaságtan_története*.
http://hu.wikipedia.org/wiki/Közgazdaságtan.