

# Egy inverz probléma

Írta: Szabó Eszter

Matematika BSc, alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető: Izsák Ferenc

adjunktus

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék



Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2012

# Tartalomjegyzék

<b>Előszó</b>	<b>4</b>
<b>1. A modell alapjai</b>	<b>6</b>
1.1. A vizsgált probléma . . . . .	6
1.2. Izotróp vezetés . . . . .	8
1.3. Anizotróp vezetés . . . . .	9
<b>2. Elektromos impedancia tomográfia</b>	<b>11</b>
2.1. Történeti áttekintés . . . . .	11
2.2. Ábrázolás . . . . .	12
2.3. Inverz problémák és álcázás . . . . .	13
2.4. A Laplace-egyenlet megoldása a körgyűrűn . . . . .	14
2.5. Az üreg kimutatása . . . . .	16
<b>3. A megfelelő felszín konstrukciója</b>	<b>19</b>
3.1. A változók variálása . . . . .	19
3.2. Az álca matematikai modellje . . . . .	23
3.3. A $\sigma$ vezetőképesség, mint az álcázás közelítése . . . . .	24
3.4. Az „álcázó rész” viselkedése . . . . .	24
3.5. Konklúzió . . . . .	27
<b>4. Egy példa</b>	<b>28</b>
<b>Jelölések és jelentésük</b>	<b>31</b>

# Köszönetnyilvánítás

Ezúton is szeretném megköszönni a rengeteg segítséget és támogatást, amit a szakdolgozat megírásakor kaptam.

Elsősorban témavezetőmnek, Izsák Ferencnek, hogy megbízott ezen érdekes matematikai probléma kutatásával, figyelemmel kísérte és észrevételeivel, hasznos tanácsaival segítette munkámat.

Számtalan segítséget kaptam barátaimtól. Külön köszönet illeti Gondos Rékát, aki a  $\text{\LaTeX}$ program használatában segített; Bekényi Balázst, akihez mindig fordulhattam matematikai kérdéseimmel és Lánszki Fülöpöt, aki az angol nyelv okozta nehézségeken segített át.

# Előszó

## Inverz problémák

Az inverz probléma egy olyan matematikai probléma, ahol a következményekből kell megállapítani a kiváltó okot, más szóval a tapasztalati adatok alapján kell következtetni a vizsgált rendszer jellemző tulajdonságaira, vagy kis túlzással: a válasz alapján kell megfogalmazni a helyes kérdést.

A differenciálegyenleteknél ez azt jelenti, hogy a differenciálegyenlet együtthatója levezethető a megoldások ismeretében, szemben a hagyományos "előre irányuló" vagy "direkt" problémákkal, ahol az együtthatók ismeretében keressük a differenciálegyenlet megoldását. Vegyünk pár példát.

Inverz problémák a *plazmafizikában*: A plazma paramétereinek mérése csak kívülről lehetséges, így gyakran úgynevezett tomografikus (térben integrált) mérésből kell a plazma belső tartományainak fizikai jellemzőit meghatározni. A tomográfia az inverz probléma a kétdimenziós térbeli méréssel való megoldása. A paraméterek száma általában nagyobb a mérési adatok számánál, valamint a megoldás érzékeny a mérési hibákra, ami jelentősen megnehezíti a feladat megoldását. A méréseken megjelenő hibák és zajok azt eredményezik, hogy a meghatározandó fizikai paraméterről csak valószínűségi kijelentést tehetünk.

Inverz problémák az *anyagvizsgálatban*: A szakítószilárdság-vizsgálat az egyik legáltalánosabban használt anyagvizsgálati eljárás, melynek célja az anyagok rugalmassági és szilárdsági jellemzőinek meghatározása, melyeket később a mérnöki gyakorlatban is felhasználhatnak. Az anyagvizsgálati mérések kiértékelése szintén inverz feladat, mivel a gerjesztés és a kialakuló potenciáltér ismeretében meghatározzuk az anyagszerkezetet, ahelyett a direkt probléma helyett, hogy a gerjesztés és a vizsgált anyag ismeretében határoznánk meg a kialakuló potenciáltér paramétere-

it. A probléma bonyolultságát növeli, hogy az újabb anyagmodellek általában több paramétert tartalmaznak. A mérések kellő pontosságú kiértékelésére legcélszerűbb numerikus szimulációt alkalmazni. Ezekre ma már akár kereskedelmi forgalomban beszerezhető programok is alkalmasak, ugyanakkor a legfejlettebb szimulációs szoftvereket nem az inverz problémák igényeit szem előtt tartva dolgozták ki, ezért az ilyen típusú feladatok megoldása további fejlesztések nélkül vagy nagyon nehézkes, vagy gyakorlatilag lehetetlen.

A következő problémákat Viktor Ambarcumjan (1908. szeptember 18. - 1996. augusztus 12.) kutatta, ő az elsők között ért el ezen a téren sikereket:

*Az asztrofizika inverz problémáinál* tapasztalati tények segítségével lehet következtetni valamely asztrofizikai jelenség mögött meghúzódó szabályosságra vagy akár törvényre.

*A szeizmikus* (földmozgással kapcsolatos) inverzió során a Föld különböző pontjain elhelyezett szeizmográfok méréseiből következtetnek a földrengés kipattanásának pontos helyére, a földkéreg és -köpeny szerkezetére, tulajdonságaira, a rengéshullámok megfigyelt beérkezési ideje és erőssége alapján.

*A környezetvédelemben* inverz probléma a vizeket szennyező források, ipari létesítmények felkutatása a különböző helyeken vett vízminták alapján.

*Az orvosi diagnosztikában* pedig a sebészi beavatkozást szükségtelenné tevő számítógépes tomográfia, amelynél kívülről történő mérésekkel határozzák meg a vizsgálandó szerv vagy szövet pontos alakját, helyzetét. Erről még a 2. fejezetben részletesebben beszélünk.

# 1. fejezet

## A modell alapjai

### 1.1. A vizsgált probléma

Az álcázás célja úgy megjeleníteni egy tárgyat, hogy egyik külső megfigyelő se lássa, aki afelé a tárgy felé néz. Azaz számukra láthatatlan legyen. Itt ezek a szavak, hogy „látni” és „nézni” a megfigyelők által használt elektromágneses hullámok valamilyen formájára utalnak, amik a szemünk számára láthatóvá teszik a tárgyakat. A megfigyelő egy radarral sugározza a tárgyat, vagy csupán a környező elektromágneses hullámokat használja ki a látáshoz, például a napfényt. A dolgozat célja egy olyan matematikai modell kifejlesztése, amely az *elektromágneses impedancia tomográfia* felhasználásával illusztrálja az álcázás menetét. A következő részben meg fogjuk mutatni, hogyan kell egy tárgyat álcázni ahhoz, hogy majdnem vagy teljesen láthatatlanná váljon. A mai technológiák több általános módszert alkalmaznak, továbbá ezekkel az alapelvekkel máshol is alkalmazható felfedezéseket tettek, mint például a hanghullámok, a vízhullámok és a földrengések vizsgálatának területén.

A fent leírt folyamat a gyakorlatban  $\mathbb{R}^2$ -ben vagy  $\mathbb{R}^3$ -ban valósul meg, de matematikai szempontból célszerű egy  $\Omega$  korlátos tartományon dolgozni. A továbbiakban az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy  $\Omega$  a nyílt egységlap  $\mathbb{R}^2$ -ben. Jelölje  $\partial\Omega$  az  $\Omega$  tartomány határát, azaz az egységlapot. A külső megfigyelő az  $\Omega$  belsejébe helyezett  $D$  objektumot próbálja észlelni az elektromágneses hullámok segítségével. A megfigyelő elektromágneses hullámokat vezet  $\Omega$ -ba, azonban csak az  $\Omega$  határán lévő változásokat veszi észre, és így próbál meg következtetni  $\Omega$  belsejének szerkezetére.

Általában Maxwell-egyenleteket használnak, hogy meghatározzák az elektromos mező viselkedését, de a mi problémánkhoz ez szükségtelenül bonyolult. Egyszerűsíthetjük a problémát, ha *hullámegyenlettel* modellezzük. Az  $u(x_1, x_2, t)$  függvény kielégíti a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0$$

hullámegyenletet, ahol  $c$  a fénysebesség és  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$  a *Laplace operátor*. Az egyenletet például kielégítik vákuumban az elektromos és mágneses mezők komponensei. Mivel minden mennyiség, amit itt vizsgálunk, időben állandó, figyelembe vehetjük ezt az egyensúlyi helyzetet, és tovább egyszerűsíthetünk. Sőt  $\Omega$  belseje üresen egy elektromos szempontból vezetőképes anyag. Ezért tudja a megfigyelő elektromos árammal és a feszültség mérésével kitalálni, hogy mi van  $\Omega$  belsejében, ahogy azt a későbbiekben meg is mutatjuk.

Mit is jelent most az, hogy  $\Omega$  belseje üres? Anyagi vonatkozásban azt jelenti, hogy *homogén*, azaz a fizikai tulajdonságai minden pontban ugyan azok. Ezen belül kétféle anyagot különböztetünk meg az *izotrópot* és az *anizotrópot*. Izotróp egy anyag, ha egy adott pontban minden irányban ugyanakkora mértékű a vezetőképesége. Például egy nemvezető anyag izotróp. Anizotrópnak nevezünk valamit, ha az nem izotróp, azaz ha pontjaiban irányonként változó lehet a vezetőképesesség. Ilyen egy élő fa is, ami a törzsén hosszában sok vizet szállít fel-le, de ugyanakkor szélében nem képes átvezetni semennyi vizet sem. Ezek szerint  $\Omega$  üressége azt jelenti, hogy a belseje egy homogén és elektromos vezetést tekintve izotróp anyaggal van kitöltve. Azt reméljük, hogy ha  $\Omega$  ilyen, akkor a külső megfigyelőnek lesz elegendő információja  $\Omega$ -n kívül, hogy ábrázolni tudja  $\Omega$  belsejét. Természetesen, ha beleteszünk egy tárgyat  $\Omega$ -ba, annak nem lesz ugyanolyan elektromos tulajdonsága, és megváltoztatja az áram folyását  $\Omega$  belsejében. Ez az elektromos változás segít  $\Omega$ -n kívülről kitalálni, hogy mi lehet a belsejében.

## 1.2. Izotróp vezetés

Vezessük be az elektromos potenciált minden  $(x_1, x_2) \in \Omega$  pontban. Az ebből álló vektormezőt jelöljük  $\mathbf{E}$ -vel, ez az *elektromos mező*. Ez  $\Omega$ -ban kielégíti az  $\mathbf{E} = -\nabla u$  egyenletet. A vezetőképes anyagoknál a nagyobb potenciálú pont felől a kisebb felé indulnak el az elektronok, így az áram elkezd folyni. Habár az elektronok negatív töltésűek, mi a klasszikus modellt fogjuk használni, amiben pozitív töltés folyik. Jelölje  $\mathbf{J}$  azt a vektormezőt, ami az áram folyását írja le minden pontban. A legegyszerűbb modell, ami megmutatja, hogy hogyan függ  $\mathbf{J}$  az  $\mathbf{E}$ -től és ezért  $u$ -tól is az az alábbi:

$$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}, \quad (1.1)$$

ahol  $\gamma$  a vezetőképesség. Egy homogén izotróp anyag esetén  $\gamma$  egyszerűen csak egy nemnegatív konstans, de általánosabban  $\gamma$  lehet egy függvény, ami  $\Omega$ -beli pontokon van értelmezve.  $\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$  bizonyos értelemben az Ohm törvény ( $R = \frac{U}{I}$ ) két dimenziós változata, ahol a fluxus ( $\mathbf{J}$ ) egy dimenziós megfelelője az  $I$  áramerősség, az elektromos mező ( $\mathbf{E}$ ) egy dimenzióban az  $U$  potenciál, és a vezetőképesség ( $\gamma$ ) az  $R$  ellenállás reciproka. Ha  $\gamma$  nagy, akkor sok áram folyik, az adott elektromos térben, míg ha  $\gamma$  közel van a 0-hoz, nagyon kis áram folyik. Extrém esetben a  $\gamma = 0$  a tökéletes szigetelő kategóriának felel meg. Ekkor nem számít, milyen erős az elektromos mező, nem fog áram folyni. Az  $\mathbf{E} = -\nabla u$  egyenlettel kibővítve az előzőt, kapjuk, hogy

$$\mathbf{J} = -\gamma \nabla u \quad \Omega\text{-ban.} \quad (1.2)$$

Ha az elektromos töltés át tud folyni  $\Omega$ -n (ahogy az elvárható, ha nincs a belsejében áramforrás vagy ellenállás) akkor  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$  teljesül  $\Omega$  belsejében mindenhol. Egészítsük ki ezzel az előző egyenletet!

$$\nabla \cdot \gamma \nabla u = 0 \quad \Omega\text{-ban.} \quad (1.3)$$

Abban a speciális esetben, amikor  $\gamma$  konstans, megkapjuk a *Laplace-egyenletet*:

$$\Delta u = 0 \quad \Omega\text{-ban.} \quad (1.4)$$



Az (1.4)-t kielégítő függvényeket *harmonikusnak* hívjuk. Könnyű látni, hogy minden konstans  $u$  kielégíti  $\Delta u = 0$  -t, ami azt jelenti, hogy nincs potenciálkülönbség (feszültség), így nem folyik áram  $\Omega$ -ban. De a feladat akkor érdekes, ha folyik áram  $\Omega$ -ban, így a potenciál sem konstans.

Hogyan tudjuk kiszámolni  $\Omega$ -ban a nem konstans potenciált? Ha elektródákat csatlakoztatunk  $\Omega$  határára ( $\partial\Omega$ -ra) meg tudjuk mérni ott a potenciált minden pontban, azaz kapunk egy  $f$  függvényt  $\Omega$  határán, amire igaz:

$$u|_{\partial\Omega} = f. \quad (1.5)$$

Ez az egyenlet a *Dirichlet-peremfeltétel*.

A Laplace-egyenlet és a Dirichlet-peremfeltétel együtt egy standard *peremérték problémát* definiálnak, amelynek egyetlen  $u$  megoldása van a megfelelően sima (pl. folytonos) függvényekre. De egyelőre ezt csak az „üres”  $\Omega$ -n tudjuk megoldani, ezért még nem tudjuk kimutatni egy tárgy jelenlétét  $\Omega$ -ban.

### 1.3. Anizotróp vezetés

Nap mint nap nagyon sok anizotróp tulajdonságú anyaggal találkozunk. Elektromos vezetését tekintve meg kell különböztetni az adott irányokat az (1.1) vezetés modellező egyenletben, mivel a  $\gamma$  nem lesz skalár. Ezért úgy írjuk le, hogy feltesszük, hogy van egy irány, amerre maximális mértékű a vezetés, és van másik, amerre minimális. Legyen az adott anyag maximális vezetése  $\gamma_M > 0$  a  $\mathbf{v}_M$  egységvektor irányába, és a minimális vezetés mennyisége  $\gamma_m > 0$  a  $\mathbf{v}_m$  egységvektor irányába. Gyakran teljesül, hogy  $\mathbf{v}_M$  és  $\mathbf{v}_m$  ortogonálisak. Az alábbi modell rögzíti ezt a viselkedést:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (1.6)$$

ahol  $\sigma$  egy szimmetrikus pozitív definit,  $2 \times 2$ -es mátrix.

Az ilyen mátrixoknak ortogonálisak a sajátvektoraik, és pozitívak a sajátértékeik. Fordítva, ha egy mátrixnak ortogonálisak a sajátvektorai, és pozitívak a sajátértékei, akkor az a mátrix szimmetrikus pozitív definit.

Anizotróp vezetésre átírva az (1.1) és (1.3) egyenleteket, (1.6)-ból a következőt kapjuk:

$$\nabla \cdot \sigma \nabla u = 0 \quad \Omega\text{-ban} . \quad (1.7)$$

Ha az  $\mathbf{E}$  elektromos mezőt a  $v_M$  irányába alkalmazzuk, a fluxusra felírható:  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = \gamma_M \mathbf{E}$ . Ebből az következik, hogy  $\|\mathbf{J}\| = \gamma_M \cdot \|\mathbf{E}\|$ . Adott  $\|\mathbf{E}\|$ -re ez a képlet maximalizálja  $\mathbf{J}$ -t. Hasonlóan  $\mathbf{E}$ -t  $v_m$ -mel párhuzamosan alkalmazva,  $\|\mathbf{J}\|$ -t minimalizáló értéket kapunk, azaz

$$\gamma_m \cdot \|\mathbf{E}\| \leq \|\mathbf{J}\| \leq \gamma_M \cdot \|\mathbf{E}\|$$

## 2. fejezet

# Elektromos impedancia tomográfia

### 2.1. Történeti áttekintés

A tomográfia koncepciójának ötlete egy norvég fizikus, Abel munkásságában merült fel 1826-ban. Majd 100 évvel később, 1917-ben egy osztrák matematikus, Radon továbbdolgozta Abel ötletét. A számítógépes tomográfia (computerized tomography) az 1970-es évek szellemi terméke. A tomográfiának számos módszere van, például Röntgen-sugár, gamma-sugár, pozitron emissziós tomográfia, optikai, infravörös stb. Az elektromos impedancia tomográfia egy relative gyors (maximum kb. 200 kép/s), egyszerűen alkalmazható képalkotási eljárást tesz lehetővé. Alkalmazható kvalitatív eljárásként, különösen többfázisú, áramló rendszerek esetében. Segítségével az áramló rendszer színes áramképét rajzolhatjuk ki.

Az elektromos impedancia tomográfia az utóbbi években robbanásszerű fejlődésnek indult terület, amelynek alkalmazásai vannak az orvosbiológiában, az iparban és a geológiában. Az orvosbiológiában az elektromos impedancia tomográfiára kifejlesztett bonyolult, számítógép-vezérelt műszerrel külsőleg hozzáférhető impedanciákat mérnek az emberi céltestrészen (mellkas, koponya, szív, ...), és a méréseredményekből rekonstruálják a belső elektromos impedancia térbeli eloszlást. Ennek nagy gyakorlati haszna van már ma is, például a tüdőrák kezdeti fázisát is tudják már a módszerrel detektálni, amikor a daganat még csak 3-5 mm átmérőjű, illetve használják az agy megfigyelésére öntudatlan állapotban is.

Általában az *impedancia* szó egy mennyiség a váltakozó áramú ellenállás mérése-

re, azaz váltóáramú elektromos hálózatban a komplex feszültség és a komplex áram értékeinek hányadosa. Mértékegysége az ohm, mint az egyenáram esetében. A tomográfia egy képalkotási módszer, mely egy tárgy egy szeletéről vagy sík felületéről készít képet, egy úgynevezett tomogramot eredményezve.

## 2.2. Ábrázolás

Tegyük egy kísérletet  $\Omega$  belsejének ábrázolására. Csatoljunk  $\partial\Omega$ -ra elektródákat, amiken keresztül  $\Omega$ -ba áramot vezetünk be. Ez egy térben váltakozó feszültséget indukál  $\Omega$  belsejében. A csatolt elektródákon be-, illetve kiléphetnek az elektronok, aminek a potenciálját meg tudunk mérni. Ez a mennyiség függ  $\Omega$  belsejének tulajdonságaitól, így következtethetünk egyes mennyiségekre. Főként az anyag vezetőképességéről, és ebből kifolyólag az alakjáról szerzünk információkat ezzel az eljárással.

Próbáljunk meg ábrázolni néhány speciális tárgyat  $\Omega$ -ban ezzel a megközelítéssel! Először azt akarjuk megtudni, hogy hogyan függ a külső potenciál  $\Omega$  belsejének tulajdonságaitól. Nézzük azt az esetet, amikor  $\Omega$  üres és az elektromosságra nézve izotróp, de  $\gamma > 0$ , azaz vezetőképes. Tegyük egy tetszőleges nem vezető  $D$  tárgyat  $\Omega$  belsejébe (amelyben  $\gamma = 0$ ). Ez meg fogja zavarni az áram folyását  $\Omega$ -ban, ami érzékelhető  $\partial\Omega$ -n is. Ezt úgy tudjuk megmérni, hogy figyeljük a be- és kifolyó áramot minden  $p \in \partial\Omega$  pontban. Képlettel leírva  $\mathbf{J}(p) \cdot \mathbf{n}(p)$ , ahol  $\mathbf{n}(p)$  a kifelé mutató egység hosszú normálvektor a  $p \in \partial\Omega$  pontban. Az átláthatóság érdekében mostantól nem fogjuk kiírni, hogy  $p$ -től függenek a mennyiségek. Az (1.2)-t behelyettesítve az előző képletbe, azt kapjuk, hogy  $\partial\Omega$  minden adott pontján a kifolyó áram a  $-\gamma \nabla u \cdot \mathbf{n}$ , a befolyó áram a  $\gamma \nabla u \cdot \mathbf{n}$  képlettel írható le. Ez a Neumann-peremértékfeltétel  $u$ -ra.

$D$  jelenléte  $\Omega$ -ban megváltoztatja az áram folyását, mert  $\Omega \setminus D$ -ből nem tud befolyani az áram  $D$ -be, azaz  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0$   $\partial D$ -n. Ehhez megint az (1.2)-t felhasználva kapjuk:  $\gamma \nabla u \cdot \mathbf{n} = 0$   $\partial D$ -n. Vagyis itt az  $u$  potenciál csak  $\Omega \setminus D$ -n van értelmezve, itt megoldása a Laplace-egyenletnek a Dirichlet-peremfeltétellel (1.5) sőt még a most definiált feltételt is kielégíti:

$$\gamma \nabla u \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \partial D\text{-n.} \quad (2.1)$$

Az  $\mathbf{n}$  szerinti deriváltra használhatjuk a következő jelölést:  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} := \nabla u \cdot \mathbf{n}$ . Így ha

$\gamma > 0$ , írhatjuk egyszerűen az előző egyenlet helyett azt, hogy  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0$ .

## 2.3. Inverz problémák és álcázás

A cél továbbra is  $\Omega$  belsejének feltérképezése, példánkban egy lyuk megtalálása  $\Omega$ -ban. Ez kétféle lépésből, esetleg ezek sorozatos ismételtetéséből áll:

1. Adott  $f$  potenciál rácsatolása  $\Omega$  határára,
2. A  $\gamma \nabla u \cdot \mathbf{n}$  viselkedésének mérése  $\partial\Omega$ -n.

Ezt hívjuk Dirichlet-Neumann peremfeltételnek. A peremen ismert adat ugyanis az ott mért feltétel miatt Dirichlet-peremfeltétel és a deriválási feltétel miatt egy adott irányban Neumann-peremfeltétel keveréke.

Ennek segítségével ki szeretnénk számolni a  $D$  lyuk pontos méretét, formáját és helyét. Ez a feladat az inverz probléma egy példája. Ebben az esetben a cél azt levezetni, hogy a  $D$ -vel jelölt belső térrész milyen változást hozhat létre a határon mért áramban, adott  $f$  csatolt feszültség esetén (ahelyett hogy  $D$  és  $f$  adott lenne és a határon lévő áram erősségét kellene kiszámolnunk a differenciál-egyenlet rendezésével). Ilyen jellegű inverz problémák gyakran adódnak olyan helyzeteknél, ahol valaki külső mérésekből szeretné levezetni a belső szerkezetet.

Egy karnyújtásnyira vagyunk attól, hogy elkezdjünk készíteni egy kezdetleges álcát. Ha el akarunk rejteni egy elektromosan vezető anyagból készült testet az  $\Omega$  belsejében, egyszerűen csak annyit kell tennünk, hogy létrehozunk egy nem-vezető anyaggal bélelt lyukat az  $\Omega$  belsejében, melynek ármérője  $\rho > 0$ , és a tárgyat belehelyezzük. Ekkor a tárgy most elektromosan el van szigetelve a külvilágtól, és impedancia tomográfiával nem tehető láthatóvá. Sajnos maga a lyuk viszont látható. Tehát a megfigyelő észleli, hogy valami el van rejtve, még ha arról nincs is információja, hogy pontosan mi is az.

## 2.4. A Laplace-egyenlet megoldása a körgyűrűn

Tegyük fel, hogy  $D = B_\rho(0)$ , ahol  $\rho < 1$ . Arra törekszünk, hogy meghatározzuk  $\rho$  értékét impedancia tomográfiával. Erre egy egyszerű megoldás, hogy az imént ismertett Laplace-egyenletet és a Dirichlet-Neumann peremfeltételt (1.5)–(2.1) alkalmazzuk. Látni fogjuk, hogy a Neumann peremfeltételből ki lehet olvasni  $\rho$  értékét. A Laplace-egyenletet a változók polárkoordinátákban történő standard szeparációjával fogjuk megoldani. A továbbiakban az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy  $\gamma = 1$ .

Mivel az  $\Omega \setminus D$  tartomány egy körgyűrű, egyszerűbb polárkoordinátákkal számolni.

**2.1. Állítás.** *Polárkoordinátákkal az (1.4) Laplace-egyenlet az alábbi módon írható fel:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \quad (2.2)$$

ahol  $u = u(r, \theta)$  a potenciál  $\Omega \setminus D$ -ben.

**2.2. Tétel.** *A*

$$\left. \begin{aligned} \Delta u &= 0 && \Omega \setminus D\text{-ben} \\ u|_{\partial\Omega} &= f \\ \gamma \nabla u \cdot \mathbf{n} &= 0 && \partial D\text{-n} \end{aligned} \right\} (*)$$

feladatnak megoldása az alábbi formulával definiált függvény:

$$u(r, \rho) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \frac{f_k}{1 + \rho^{2|k|}} r^{|k|} e^{ik\theta} + \frac{\rho^{2|k|} f_k}{1 + \rho^{2|k|}} r^{-|k|} e^{ik\theta} \right) \quad (2.3)$$

minden  $r \in [\rho, 1]$  és  $\theta \in [0, 2\pi)$  esetén.

*Bizonyítás.* Ahelyett, hogy egyszerűen behelyettesítsenénk a (2.3)-ban megadott  $u$  függvényt a feladatba, megmutatjuk, hogy hogyan nyerhetjük ezt a formulát.

Az egyenletbe behelyettesítve láthatjuk, hogy az alábbi függvények harmonikusak:  $1$ ,  $\ln(r)$ ,  $r^{|k|} e^{ik\theta}$  és  $r^{-|k|} e^{ik\theta} \forall k \in \mathbb{Z}$  esetén  $r > 0$ -ra, és ezért a  $\Omega \setminus D$  körgyűrűn is. Ennek a négy függvénynek az összeolvasztásából próbáljuk előállítani a megfelelő  $u(r, \theta)$  megoldást:

$$u(r, \theta) = c_0 1 + d_0 \ln(r) + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (c_k r^{|k|} + d_k r^{-|k|}) e^{ik\theta}, \quad (2.4)$$

ahol a  $c_k$  és  $d_k$  értékeket kell helyesen megválasztani.

A Dirichlet-peremfeltétel (1.5) az  $r = 1$  helyen felvett értékeket adja meg ( $u(1, \theta) = f(\theta)$ ), amiből:

$$c_0 + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (c_k + d_k) e^{ik\theta} = f(\theta) \quad \forall \theta \in [0, 2\pi). \quad (2.5)$$

Ez úgy néz ki, mint az  $f$  komplex Fourier-sora. Tegyük fel, hogy  $f$  elegendően sima függvény, tehát folytonos és pontonként differenciálható, így a Fourier sora konvergál pontonként  $f$ -hez. Ekkor  $f$  Fourier-sora így írható le:

$$f(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k e^{ik\theta}$$

ahol  $f_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-ik\theta} d\theta \quad \forall k \in \mathbb{Z}$  a Fourier-együtthatók, valamint

$$c_0 = f_0 \quad \text{és} \quad c_k + d_k = f_k \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (2.6)$$

A számítás elvégzéséhez felhasználjuk a Neumann-peremfeltételt, ami itt azt jelenti, hogy  $\frac{\partial u}{\partial r} = 0$   $\partial D$ -n. Mivel  $\mathbf{n}$  egy vektormező  $\partial D$ -n, ami sugárirányban az origó felé mutat,  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{\partial}{\partial r}$  a körgyűrű belső határa mentén. Lépésről lépésre haladva próbáljuk meg a (2.4)-ben megjelenő  $u$  függvény  $r$  szerinti deriváltját megkapni, ahol tudjuk (mivel  $\partial D$ -n vagyunk), hogy  $r = \rho$ .

$$\frac{d_0}{\rho} + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |k| (c_k \rho^{|k|-1} - d_k \rho^{-|k|-1}) e^{ik\theta} = 0 \quad \forall \theta \in [0, 2\pi). \quad (2.7)$$

Ezt úgy is lehetne értelmezni, mintha a nulla-függvény Fourier-sora lenne, ahol a Fourier-együtthatók mind nullák. Ebből következik, hogy

$$d_0 = 0 \quad \text{és} \quad |k| (c_k \rho^{|k|-1} - d_k \rho^{-|k|-1}) = 0 \quad \forall \theta \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (2.8)$$

A  $c_k$  és  $d_k$  együtthatókat most már ki tudjuk számolni (2.6) és (2.8) segítségével. Az előzőből

$$c_k \rho^{|k|-1} = d_k \rho^{-|k|-1} \Rightarrow d_k = c_k \rho^{2|k|}$$

amiből a (2.6) miatt

$$c_k = \frac{f_k}{1 + \rho^{2|k|}} \quad \text{és} \quad d_k = \frac{\rho^{2|k|} f_k}{1 + \rho^{2|k|}}$$

Ezt visszaírva (2.4)-ba kapunk a Laplace-egyenletre egy olyan megoldást, amely kielégíti az (1.5) és a (2.1) peremfeltételeket a körgyűrűn, így végül azt kaptuk, hogy

$$u(r, \rho) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \frac{f_k}{1 + \rho^{2|k|}} r^{|k|} e^{ik\theta} + \frac{\rho^{2|k|} f_k}{1 + \rho^{2|k|}} r^{-|k|} e^{ik\theta} \right)$$

minden  $r \in [\rho, 1]$  és  $\theta \in [0, 2\pi)$  esetén.  $\square$

Fontos, hogy a  $D$  belsejében  $u$  nincs értelmezve, csak a körgyűrűn. Ebből a (2.3) eredményből könnyen kiszámolható a Neumann-peremfeltétel  $\partial\Omega$ -n, tudva, hogy  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial}{\partial r}$  a körgyűrű külső határán, ahol  $\mathbf{n}$  az origóból kifelé mutató egységvektor, és  $r = 1$ :

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(1, \theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{|k|(1 - \rho^{2|k|})}{1 + \rho^{2|k|}} f_k e^{ik\theta}. \quad (2.9)$$

Kiszámolva a Laplace-egyenlet megoldását a nyílt körlemezen  $D$  nélkül ugyanezzel az eljárással, de kihagyva az  $\ln(r)$  és  $r^{-|k|} e^{ik\theta}$  kifejezéseket (2.4-ből), a megoldás pontosan meg fog egyezni azzal, amit a (2.3)-ból számolnánk ki  $\rho = 0$  behelyettesítéssel, ahogy azt vártuk. Ugyanez érvényes a Neumann-peremfeltételekre is (2.9). Meg kell jegyezni, hogy ez az eljárás csak akkor volt végrehajtható, ha feltettük, hogy  $f$  elég sima, és ezért a Fourier-sora konvergál  $f$ -hez.

## 2.5. Az üreg kimutatása

Ahogy eddig is láttuk, az a megoldás egy tárgy elrejtésére, hogy  $\Omega$  belsejében lévő  $D = B_\rho(0)$  lyukba helyezzük, ezáltal elektromosan elszigetelve  $\partial\Omega$ -tól. A megfigyelő így nem jut információhoz a tárgyra vonatkozóan, mivel a (2.9) Neumann-függvény adott és nem függ attól, hogy mit helyezünk  $D$ -be. A képlet és a tapasztalat azt mutatja, hogy ez a Neumann-függvény viszont függ  $\rho$ -tól, így a megfigyelő észleli, hogy van egy belső, elszigetelt része  $\Omega$ -nak.



Az így kapott Neumann-peremfeltételt hasonlítjuk össze azzal az esettel, amikor nincs üreg  $\Omega$  belsejében. Legyen ehhez  $u_0$  a Laplace egyenlet azon megoldása, amelyre

$$\left. \begin{array}{l} \Delta u_0 = 0 \quad \Omega\text{-n} \\ u_0 = f \quad \partial\Omega\text{-n} \end{array} \right\} (**)$$

teljesül, vagyis egész  $\Omega$ -n van értelmezve, és csak a Dirichlet-peremfeltételt elégíti ki. Legyen emellett  $u$  ismét a (\*) feladat megoldása. Megvizsgáljuk, hogy  $\rho$ -tól függően a Neumann-függvény mennyire különbözik egymástól  $u_0$  és  $u$  esetén.

**2.3. Tétel.** *A (\*) és (\*\*) feladatok megoldásának Neumann-függvényére teljesül a következő:*

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(1, \theta) - \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}}(1, \theta) \right\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq 2\rho^2 \left\| \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}}(1, \theta) \right\|_{L^2(\partial\Omega)}. \quad (2.10)$$

*Bizonyítás.* A (2.9) alapján a különbség könnyen számolható:

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(1, \theta) - \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}}(1, \theta) = - \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{2|k|\rho^{2|k|}}{1 + \rho^{2|k|}} f_k e^{ik\theta} = - \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k f_k. \quad (2.11)$$

A különbség nagyságát annak normájával mérjük, tehát vegyük az előző különbség  $L^2(\partial\Omega)$  normáját!

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(1, \theta) - \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}}(1, \theta) \right\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 := \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(1, \theta) - \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}}(1, \theta) \right|^2 d\theta$$

Az alábbi

$$\|f\|_2^2 = \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2$$

Parseval formulát normára alkalmazva:

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(1, \theta) - \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}}(1, \theta) \right|^2 d\theta = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{4k^2 \rho^{4|k|}}{(1 + \rho^{2|k|})^2} |f_k|^2. \quad (2.12)$$

Tudjuk, hogy  $0 < \rho < 1$  és  $|k| \geq 1$  esetén  $\frac{\rho^{4|k|}}{(1 + \rho^{2|k|})^2} < \rho^4$ , amit a (2.12)-be beírva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(1, \theta) - \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}}(1, \theta) \right\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 &\leq 8\pi\rho^4 \sum_{k \in \mathbb{Z}} k^2 |f_k|^2 \\
&= 4\rho^4 \left\| \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}}(1, \theta) \right\|_{L^2(\partial\Omega)}^2.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

A  $4\rho^4 \left\| \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}}(1, \theta) \right\|_{L^2(\partial\Omega)}^2$  képletet a Parseval azonosság újból alkalmazásával és abból kapjuk, hogy  $\rho$ -t a (2.9)-ben 0-nak választjuk. Az egyenlet mindkét oldalából gyököt vonva nyerjük, hogy

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(1, \theta) - \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}}(1, \theta) \right\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq 2\rho^2 \left\| \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}}(1, \theta) \right\|_{L^2(\partial\Omega)},$$

ahogy a tételben állítottuk. □

Röviden összefoglalva, azt kaptuk, hogy ha kicsi a lyuk, a Neumann-függvény is kicsi lesz, nagysága  $\rho^2$ -tel, vagyis a lyuk területével arányos. Ha a megfigyelő véges pontossággal megméri a Neumann függvényt, el tudjuk rejteni a tárgyat, ha  $\rho$ -t olyan kicsire választjuk, hogy a Neumann függvény mérési hibája alatt legyen, persze ezt csak akkor tehetjük meg, ha a tárgy így is belefér! Ha a megfigyelő elég nagy pontosságú mérést végez Neumann-függvényre vonatkozóan, akkor a (2.10) egyenlet  $\rho$  értékét túl alacsonyra adja ahhoz, hogy egy tárgyat bele lehessen rejteni, ezért ezzel a megközelítéssel nem érhetünk el túl sok új eredményt.

## 3. fejezet

# A megfelelő felszín konstrukciója

Arra törekszünk, hogy egy nagy lyukat úgy helyezhessünk  $\Omega$ -ba, hogy a külső megfigyelő azt lássa, mintha csak egy kis lyuk lenne csak ott, vagy mintha egyáltalán nem is lenne lyuk. Meg fogjuk mutatni, hogy hogyan lehet ezt elérni akkor, ha  $D = B_{\frac{1}{2}}(0)$ , ami általánosítható bármilyen 1-nél kisebb sugarú üreg esetén. Az lesz a megoldásunk, hogy  $D$ -t egy anizotróp anyaggal fedjük be. Azt kell csak megmondanunk, hogy egy adott irányban milyen legyen az anizotróp anyag vezetőképessége. Ezt változók variálásával fogjuk meghatározni.

### 3.1. A változók variálása

Vezessük be az alábbi jelölést: legyen  $\Omega_\rho$  a nyílt körgyűrű  $\Omega_\rho = \Omega \setminus \overline{B_\rho(0)}$ . Rögzítsünk egy tetszőleges  $\rho \in (0, \frac{1}{2})$ -t, és legyen  $u$  kétszer folytonosan differenciálható megoldása a következő feladatnak:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta u = 0 \quad \Omega_{\rho-\mathbf{n}} \\ u|_{\partial\Omega} = f \\ \gamma \nabla u \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \partial D-\mathbf{n} \end{array} \right\}$$

Vezessünk be egy  $\phi$  egy invertálható leképezést  $\overline{\Omega_\rho}$ -ból  $\overline{\Omega_{\frac{1}{2}}}$ -be, és tegyük fel, hogy  $\phi$  és  $\phi^{-1}$  kétszer differenciálhatók. Vegyünk az  $\Omega_\rho$  belső felszínén egy  $\mathbf{x}$  pontot és az  $\Omega_{\frac{1}{2}}$  belső felszínén egy  $\mathbf{y}$  pontot úgy, hogy  $\mathbf{y} = \phi(\mathbf{x})$ . Ekkor  $\|\mathbf{x}\| = \rho$  mindenhol  $\Omega_{\rho-\mathbf{n}}$ ,  $\|\mathbf{y}\| = \frac{1}{2}$  az egész  $\Omega_{\frac{1}{2}}-\mathbf{n}$  és  $\phi$  deriváltja

$$D\phi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

egy reguláris mátrix  $\overline{\Omega_\rho}$ -n.

Definiáljunk egy  $v$  függvényt  $\Omega_{\frac{1}{2}}$ -n a következőképpen:  $v(\mathbf{y}) := u(\phi^{-1}(\mathbf{y}))$ , ekvivalens alakban:  $v(\phi(\mathbf{x})) = u(\mathbf{x})$ . Azaz  $v$  az  $u$  függvény egy eltoltja  $\phi$  leképezéssel  $\Omega_\rho$ -ról a  $\Omega_{\frac{1}{2}}$  tartományba. Mivel  $u$  kielégítette a Laplace-egyenletet  $\Omega_\rho$ -n, a  $v$ -re is fel tudunk írni egy másodrendű parciális differenciálegyenletet az  $\Omega_{\frac{1}{2}}$  tartományon a következő tétel segítségével.

**3.1. Tétel.** *A fenti  $v(\mathbf{y})$  függvény kielégíti az alábbi parciális differenciálegyenletet:*

$$\nabla \cdot \sigma(\mathbf{y}) \nabla v = 0 \quad \Omega_{\frac{1}{2}}\text{-n}, \quad (3.1)$$

ahol  $\sigma(\mathbf{y})$  az alábbi  $2 \times 2$ -es mátrix:

$$\sigma(\mathbf{y}) = \frac{D\phi(\mathbf{x})(D\phi(\mathbf{x}))^T}{|\det(D\phi(\mathbf{x}))|}, \quad (3.2)$$

ahol  $\mathbf{x} = \phi^{-1}(\mathbf{y})$ .

*Bizonyítás.* Elsőre az tűnik a legegyszerűbbnek, ha a  $u(\mathbf{x}) = v(\phi(\mathbf{x}))$  egyenlet mindkét oldalán alkalmazzuk a Laplace operátort és a láncszabályt, de nem lesz ilyen egyszerű dolgunk. Fel kell használnunk hozzá a Gauss-Osztrogradszkij tételt is. A láncszabályt használva  $u(\mathbf{x}) = v(\phi(\mathbf{x}))$ -re kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_1}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial y_1}(\phi(\mathbf{x})) + \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial y_2}(\phi(\mathbf{x})), \\ \frac{\partial u}{\partial x_2}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial y_1}(\phi(\mathbf{x})) + \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial y_2}(\phi(\mathbf{x})). \end{aligned}$$

Ezek az egyenletek kompaktabb alakban:

$$\nabla_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}) = (D\phi(\mathbf{x}))^T \nabla_{\mathbf{y}} v(\phi(\mathbf{x})), \quad (3.3)$$

ahol  $\nabla_{\mathbf{x}}$  az  $(x_1, x_2)$  irányú és  $\nabla_{\mathbf{y}}$  a  $(y_1, y_2)$  irányú gradiens.

Legyen  $w(\mathbf{x})$  egy folytonosan differenciálható függvény  $\overline{\Omega_\rho}$ -n, amelyre  $w = 0$   $\partial\Omega$ -n. Definiáljuk továbbá  $\tilde{w}$  függvényt  $\Omega_{\frac{1}{2}}$ -n az alábbi módon:

$$\tilde{w}(\mathbf{y}) := w(\phi^{-1}(\mathbf{y})), \text{ illetve } w(\mathbf{x}) = \tilde{w}(\phi(\mathbf{x})).$$

A fenti számoláshoz hasonlóan itt is alkalmazzuk a láncszabályt és kapjuk, hogy

$$\nabla_{\mathbf{x}} w(\mathbf{x}) = (D\phi(\mathbf{x}))^T \nabla_{\mathbf{y}} \tilde{w}(\phi(\mathbf{x})). \quad (3.4)$$

Mivel  $\Delta_{\mathbf{x}} u = 0$   $\Omega_\rho$ -ban (ahol  $\Delta_{\mathbf{x}}$  a Laplace-operátor az  $\mathbf{x}$  koordinátaival), könnyű látni, hogy

$$\int_{\Omega_\rho} w(\mathbf{x}) \Delta_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0. \quad (3.5)$$

Jegyezzük meg, hogy  $w \Delta_{\mathbf{x}} u = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (w \nabla_{\mathbf{x}} u) - \nabla_{\mathbf{x}} w \cdot \nabla_{\mathbf{x}} u$ . Ezt behelyettesítve a (3.5)-be, és alkalmazva a Gauss-Osztrogradszkij tételt az első felére, azt kapjuk, hogy

$$\int_{\partial\Omega_\rho} w \nabla_{\mathbf{x}} u \cdot \mathbf{n} ds - \int_{\Omega_\rho} \nabla_{\mathbf{x}} w \cdot \nabla_{\mathbf{x}} u d\mathbf{x} = 0.$$

Mivel  $w \equiv 0$   $\partial\Omega_\rho$ -n, a fenti integrálokból az első nulla. Ebből

$$\int_{\Omega_\rho} (\nabla_{\mathbf{x}} w)^T \nabla_{\mathbf{x}} u d\mathbf{x} = 0,$$

Kihasználva (3.3)-t és (3.4)-t, végül így írhatjuk fel az egyenletet.

$$\int_{\Omega_\rho} \nabla_{\mathbf{y}} \tilde{w}(\phi(\mathbf{x}))^T (D\phi(\mathbf{x})) (D\phi(\mathbf{x}))^T \nabla_{\mathbf{y}} v(\phi(\mathbf{x})) d\mathbf{x} = 0. \quad (3.6)$$

Most a változókat variáljuk az  $\mathbf{y}$  koordinátaival, felhasználva, hogy  $\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$  és  $d\mathbf{x} = \frac{d\mathbf{y}}{|\det(D\phi)|}$ . Azt kapjuk ekkor, hogy

$$\int_{\Omega_{\frac{1}{2}}} (\nabla_{\mathbf{y}} \tilde{w}(\mathbf{y}))^T (\sigma(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} v(\mathbf{y})) d\mathbf{y} = 0 \quad (3.7)$$

ahol  $\sigma(\mathbf{y})$  úgy áll elő, ahogy azt a tételben állítottuk. Egy egyszerű számítással láthatjuk, hogy

$$\begin{aligned} (\nabla_{\mathbf{y}} \tilde{w}(\mathbf{y}))^T (\sigma(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} v(\mathbf{y})) &= \nabla_{\mathbf{y}} \tilde{w}(\mathbf{y}) \cdot (\sigma(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} v(\mathbf{y})) = \\ &= \nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\tilde{w}(\mathbf{y}) \sigma(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} v(\mathbf{y})) - \tilde{w}(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\sigma(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} v(\mathbf{y})). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Ezt beírva a (3.7) egyenletbe

$$\int_{\Omega_{\frac{1}{2}}} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\tilde{w}(\mathbf{y}) \sigma(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} v(\mathbf{y})) d\mathbf{y} - \int_{\Omega_{\frac{1}{2}}} \tilde{w}(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\sigma(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} v(\mathbf{y})) d\mathbf{y} = 0.$$

Alkalmazzuk megint a Gauss-Osztrogradszkij tételt az első integrálra, és használjuk fel azt is, hogy a  $\partial\Omega_{\frac{1}{2}}$  halmazon  $\tilde{w}(\mathbf{y}) \equiv 0$  teljesül, amelyekből az következik, hogy az integrál első fele ismét nulla. Annyi maradt, hogy

$$\int_{\Omega_{\frac{1}{2}}} \tilde{w}(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\sigma(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} v(\mathbf{y})) d\mathbf{y} = 0. \quad (3.9)$$

A  $\tilde{w}(\mathbf{y})$  függvény tetszőleges volt, hiszen minden  $\tilde{w}$ -hez létezik egy  $w$  visszavezetés  $\Omega_{\rho}$ -ra, ahol  $w(\mathbf{x}) = \tilde{w}(\phi(\mathbf{x}))$ . Ezért (3.9) teljesül minden folytonosan differenciálható  $\tilde{w}$ -re. Most már könnyű lesz belátnunk, hogy  $\nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\sigma(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} v(\mathbf{y}))$  azonosan nulla  $\Omega_{\frac{1}{2}}$ -n. Ehhez vezessük be  $h(\mathbf{y})$ -t:

$$h(\mathbf{y}) := \nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\sigma(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} v(\mathbf{y}))$$

Mivel  $\phi$  és  $u$  folytonos volt, így  $h$  is folytonos marad  $\Omega_{\frac{1}{2}}$ -n. Indirekt tegyük fel, hogy  $h$  nem azonosan nulla  $\Omega_{\frac{1}{2}}$ -n. Vegyük azt az esetet, amikor  $h(\mathbf{y}_0) > 0$  egy adott  $\mathbf{y}_0$  pontban. A folytonosság miatt létezik egy  $\delta > 0$ , melyre  $B_{\delta}(\mathbf{y}_0) \subset \Omega_{\frac{1}{2}}$ , ahol  $h(\mathbf{y}) > 0$  minden  $\mathbf{y} \in B_{\delta}(\mathbf{y}_0)$  esetén. Ekkor találunk olyan  $\tilde{w}$  függvényt, amelyre

$$\tilde{w}(\mathbf{y}) \geq 0 \quad B_{\delta}(\mathbf{y}_0)\text{-ban és}$$

$$\tilde{w}(\mathbf{y}) \equiv 0 \quad B_{\delta}(\mathbf{y}_0)\text{-n kívül.}$$

Ebből kifolyólag  $\tilde{w}(\mathbf{y})h(\mathbf{y}) \geq 0$   $\Omega_{\frac{1}{2}}$ -n és nem azonosan nulla, ezért az integrálja a (3.9)-ben szintén nem lehetne nulla, ami ellentmondás. A  $h(\mathbf{y}_0) < 0$  eset ugyanígy végiggondolható, ezért azt nem részletezzük. Arra jutottunk, hogy  $h(\mathbf{y}) = \nabla \cdot (\sigma(\mathbf{y}) \nabla v(\mathbf{y})) = 0$   $\Omega_{\frac{1}{2}}$ -ben, ami bizonyítja a tételben állítottakat. □

A (3.2)-ben definiált  $\sigma(\mathbf{y})$  mátrix pozitív definit. Összehasonlítva a tételbeli (3.1)-t és az anizotróp vezetőképesség (1.7) egyenletével, láthatjuk, hogy  $v$  tekinthető  $\Omega_{\frac{1}{2}}$ -beli elektromos potenciálnak, ahol a megfelelő anizotróp vezetőképesség  $\sigma(\mathbf{y})$ . Ennek segítségével már meg tudjuk tervezni az anizotróp anyagú környűrűt úgy, hogy a  $B_{\frac{1}{2}}(0)$  belső kört a külső megfigyelő  $\rho$  sugarúnak lássa.

## 3.2. Az álca matematikai modellje

Először arra vagyunk kíváncsiak, hogy milyen tulajdonságokkal kell rendelkezzen az anizotróp anyag  $D = B_{\frac{1}{2}}(0)$ -n. Ehhez vegyük észre a  $\phi$  függvény egy speciális felírását

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{\psi(\|\mathbf{x}\|)}{\|\mathbf{x}\|} \mathbf{x}, \quad (3.10)$$

azaz  $\mathbf{y} = \phi(\mathbf{x})$  felírható koordinátáinként:  $y_1 = \frac{\psi(\|\mathbf{x}\|)}{\|\mathbf{x}\|} x_1$  és  $y_2 = \frac{\psi(\|\mathbf{x}\|)}{\|\mathbf{x}\|} x_2$ , ahol  $\psi$  az alábbiakat kell, hogy teljesítse:

- $\psi(\rho) = \frac{1}{2}$ , mivel  $\phi : \Omega_\rho \rightarrow \Omega_{\frac{1}{2}}$ ,
- minden  $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ -re, ahol  $\frac{1}{2} + \delta < r < 1$ , legyen  $\psi(r) = r$ , vagyis definiáljuk  $\phi$ -t a külső határ egy környezetében is, ahol  $\frac{1}{2} + \delta < \|\mathbf{x}\| < 1$ ,
- $\psi$  legyen kétszer folytonosan differenciálható,  $\psi'(r) \geq d_0$ , ahol  $d_0 > 0$  tetszőleges, és emiatt  $\psi$  szigorúan monoton növekvő és invertálható függvény.

Azt látjuk, hogy  $\phi$  kihelyezi a pontokat sugárirányban, amíg  $\rho \leq \|\mathbf{x}\| < \frac{1}{2} + \delta$ . Ezért  $\psi$  egy lehetséges definíciója az alábbi:

### 3.2. Definíció.

$$\psi(r) := \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{\delta}{1-2\rho}(r - \rho) & : \rho \leq r \leq \frac{1}{2}, \\ g(r) & : \frac{1}{2} < r < \frac{1}{2} + \delta, \\ r & : \frac{1}{2} + \delta \leq r \leq 1, \end{cases}$$

ahol  $g(r)$  egy alkalmas függvény, amellyel  $\phi$  folytonos lesz az egész  $\Omega_\rho$ -n.

Ezzel a  $\psi$ -vel azt kaptuk, hogy  $\mathbf{y} = \mathbf{x}$  a külső határ egy környezetében, azaz az  $\frac{1}{2} + \delta \leq r \leq 1$  körgyűrűn, ezért itt  $v \equiv u$ . A  $v = u \circ \phi^{-1}$  függvény a belső határon (ahol  $\|\mathbf{y}\| = \frac{1}{2}$ ) vett Neumann-függvénye szintén nulla. Pontosabban, azt kaptuk, hogy

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\|\mathbf{y}\|=\frac{1}{2}} &= - \left. \frac{\partial v}{\partial \|\mathbf{y}\|} \right|_{\|\mathbf{y}\|=\frac{1}{2}} = \left. \frac{\partial \|\mathbf{x}\|}{\partial \|\mathbf{y}\|} \frac{\partial u}{\partial \|\mathbf{x}\|} \right|_{\|\mathbf{y}\|=\rho} \\ &= - \frac{1-2\rho}{\delta} \left. \frac{\partial u}{\partial \|\mathbf{x}\|} \right|_{\|\mathbf{y}\|=\rho} = 0, \end{aligned}$$

ahol  $\|\mathbf{y}\| = \psi(\|\mathbf{y}\|)$ .  $\psi$  definíciójának első esetéből azt kapjuk, hogy ha  $\|\mathbf{x}\| = \rho$ , akkor  $\frac{\partial\|\mathbf{y}\|}{\partial\|\mathbf{x}\|} = \frac{\delta}{1-2\rho}$ , amiből  $\frac{\partial\|\mathbf{x}\|}{\partial\|\mathbf{y}\|} = \frac{1-2\rho}{\delta}$ , ezt használtuk ki.

### 3.3. A $\sigma$ vezetőképesség, mint az álcázás közelítése

Arra jutottunk, hogy a (3.2)  $\sigma$  vezetőképesség álcázni tudja a  $D$  üreget bármilyen mértékben, és a  $\rho$  paraméter szabja meg az álca minőségét. Hogy ezt lássuk, jegyezzük meg, hogy  $\sigma$  mátrix skalár vezetőképesség  $\Omega_{\frac{1}{2}}$ -n, ha  $\|\mathbf{y}\| > \frac{1}{2} + \delta$ , azaz a külső határ egy környezetében. Mivel itt  $v = u$ , ezért ugyanazt a Dirichlet-Neumann peremértékfeltételt fogják kielégíteni  $\partial\Omega$ -n. Az „álcázó részen”, ahol  $\frac{1}{2} < \|\mathbf{y}\| < \frac{1}{2} + \delta$  a  $\sigma(\mathbf{y})$  vezetőképesség anizotróppá válik. A (2.3) tételbeli (2.10) becslésből és abból, hogy  $\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$   $\partial\Omega$ -n, láthatjuk, hogy

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}(1, \theta) - \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}}(1, \theta) \right\|_{L^2(\partial\Omega)} = \rho^2 \left\| \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}}(1, \theta) \right\|_{L^2(\partial\Omega)}, \quad (3.11)$$

annak ellenére, hogy  $v$  a potenciál  $\Omega_{\frac{1}{2}}$ -n. Mivel  $\rho$  nullához közel van, a  $v$ -re vonatkozó Neumann-függvényt is közelíthetjük az  $u_0$  potenciál Neumann-függvényéhez, vagyis tényleg el tudjuk érni, hogy az  $\frac{1}{2}$  sugarú belső kör úgy látsszon, mintha szinte nem is lenne belül kör, ahogy azt szeretnénk.

### 3.4. Az „álcázó rész” viselkedése

Nagyon érdekes dolgokat tapasztalhatunk, ha  $\sigma$  viselkedését  $\|\mathbf{y}\| = \frac{1}{2}$  közelében vizsgáljuk, vagyis ahol  $\frac{1}{2} \leq \|\mathbf{y}\| \leq \frac{1}{2} + \delta$ . Ez a terület a  $\phi$  transzformációval véve a  $\rho < \|\mathbf{x}\| < \frac{1}{2}$ -nek felel meg. Speciálisan tekintsük  $\sigma$  maximális és minimális sajátértékeihez tartozó sajátvektorokat.

A (3.2)-ből egyszerű számolással következik, hogy

$$D\phi = \left( \frac{\psi'(r)}{r^2} - \frac{\psi(r)}{r^3} \right) \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 x_2 \\ x_1 x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} + \frac{\psi(r)}{r} \mathbf{I}, \quad (3.12)$$

ahol  $\mathbf{I}$  az egységmátrix és  $r = \|\mathbf{x}\| = \psi^{-1}(\|\mathbf{y}\|)$ . Vegyük észre azt is, hogy  $D\phi$  szimmetrikus, pozitív definit, ezért a (3.2)-ből azt kapjuk, hogy



$$\sigma = \frac{(D\phi)^2}{|\det(D\phi)|}.$$

Ki szeretnénk számítani  $D\phi$  sajátvektorait és sajátértékeit. Ehhez lássuk az alábbi két állítást!

**3.3. Állítás.** Legyen  $\mathbf{A}$  egy  $n \times n$ -es mátrix, amelynek  $\mathbf{v}$  az egyik sajátvektora a  $\mu$  sajátérték mellett. Legyen továbbá  $\mathbf{B} = \frac{\mathbf{A}^2}{\det \mathbf{A}}$ . Ekkor  $\mathbf{v}$  a  $\mathbf{B}$  mátrixnak is sajátvektora lesz, a hozzá tartozó sajátérték meg  $\frac{\mu^2}{\det \mathbf{A}}$  lesz.

A fenti állítás segítségével ki tudjuk számolni  $\sigma$  sajátvektorait és sajátértékeit, ha tudjuk  $D\phi$  ezen értékeit.

**3.4. Állítás.** Az  $\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 x_2 \\ x_1 x_2 & x_2^2 \end{pmatrix}$  mátrix sajátvektorai ortogonálisak, és így írhatók fel:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

a hozzájuk tartozó sajátértékek pedig  $r^2 = \|\mathbf{x}\|^2$  illetve 0.

Ebből az állításból könnyen ki tudjuk számolni  $D\phi$  sajátvektorait és sajátértékeit. Csak be kell szorozni a mátrixot  $\left(\frac{\psi'(r)}{r^2} - \frac{\psi(r)}{r^3}\right)$ -bel, és eltolni  $\frac{\psi(r)}{r}\mathbf{I}$ -vel. Ekkor  $D\phi$  sajátvektorai:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix},$$

és a hozzá tartozó sajátértékei:

$$\mu_1 = \left(\psi'(r) - \frac{\psi(r)}{r}\right) + \frac{\psi(r)}{r} = \psi'(r), \text{ illetve } \mu_2 = \frac{\psi(r)}{r}.$$

Vegyük észre azt is, hogy  $\det(D\phi) = \mu_1 \mu_2$ . Így a (3.3) állításból megkaphatjuk, hogy  $\sigma$  sajátvektorai megegyeznek a  $D\phi$ -ével, azaz  $\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_1$  és  $\mathbf{v}_m = \mathbf{v}_2$  a maximális és minimális vezetőképesség irányai. A sajátértékei, azaz a vezetőképességek:

$$\begin{aligned} \gamma_m &= \frac{\mu_1^2}{\mu_1 \mu_2} = \frac{r\psi'(r)}{\psi(r)}, \\ \gamma_M &= \frac{\mu_2^2}{\mu_1 \mu_2} = \frac{\psi(r)}{r\psi'(r)}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Azaz a vezetőképességek egymás reciprokai. Ez a gyakorlatban is könnyen meggondolható, hisz ha két irányban áramlik bizonyos mennyiségű elektron, az adott irányokban vett elektronmennyiségek fordítottan arányosak, ami pont ezt jelenti.

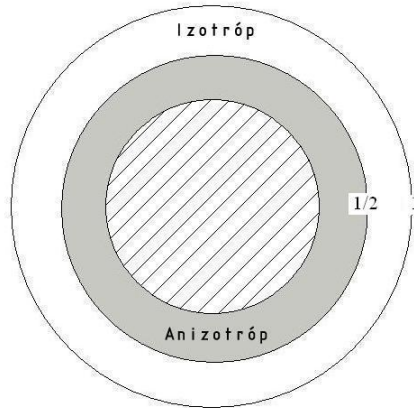
A  $\mathbf{v}_m$  az origóból kifelé mutató, sugárirányú vektor; a  $\mathbf{v}_M$  vektor pedig érintőirányú az origó középpontú körökre. A (3.14)-ből következtetünk a belső rész viselkedésére, ahol  $\frac{1}{2} \leq \|\mathbf{y}\| \leq \frac{1}{2} + \delta$ . Felhasználva  $\psi$  definícióját  $\rho \leq r \leq \frac{1}{2}$  esetben, az itteni vezetőképesség az alábbi lesz:

$$\begin{aligned}\gamma_m(r) &= \frac{2r\delta}{1 + 2r\delta - 2\rho - 2\delta\rho}, \\ \gamma_M(r) &= \frac{1 + 2r\delta - 2\rho - 2\delta\rho}{2r\delta} = \frac{1}{\gamma_m(r)}.\end{aligned}\tag{3.14}$$

Ebből azt kapjuk, hogy ha a  $\Omega_{\frac{1}{2}}$  belső felszínén (ahol  $r = \rho$ ) nézzük a vezetőképességet, azt kapjuk, hogy

$$\gamma_m(r) = \frac{2r\delta}{1 - 2\rho} \quad \text{és} \quad \gamma_M(r) = \frac{1 - 2\rho}{2r\delta}.$$

Ezért ha  $\rho$  közel van a nullához,  $\gamma_M \approx \frac{1}{2\rho\delta}$  nagy, így a tangenciális irányban nagy a vezetőképesség  $\Omega_{\frac{1}{2}}$ -n. Hasonlóan  $\gamma_m \approx 2\rho\delta$  nullához közeli, így ebben az esetben a normális irányú vezetés kicsi. Fizikailag ez azt jelenti, hogy egy beküldött elektronok érintőirányban mozdulnak el, ami  $\Omega$ -n kívül úgy látszik, mintha az elektronok egyenesen áramlottak volna át.



3.1. ábra. Az álca matematikai modellje

### 3.5. Konklúzió

Azt kaptuk, hogy ha úgy állítjuk be az anizotróp vezetési együtthatót, ahogy a (3.2) formula megadja, akkor az  $\frac{1}{2}$  sugarú belső kör kívülről olyannak látszik, mintha csak egy  $\rho$  sugarú üreg lenne egy izotróp vezetőképességű anyagban. Mivel egy külső megfigyelő csak véges mérést tud csak végezni,  $\rho$ -t közelítve a nullához, teljesen láthatatlanná tehetjük az  $\frac{1}{2}$  sugarú körbe tett tárgyat.

Az álca gyakorlati előállítása már egy másik, nagy mértékben fizikai probléma, ezzel nem foglalkozunk.

## 4. fejezet

### Egy példa

1. Keressünk egy harmonikus függvényt, amely az alábbi feladatot elégíti ki  $\Omega$ -n:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta u = 0 \quad \Omega\text{-n} \\ u = f \quad \partial\Omega\text{-n} \end{array} \right\}$$

ahol  $\Omega$  az 1 sugarú körlap.  $\partial\Omega$ -t paraméterezzük a szokásos módon:

$$x_1 = \cos \theta, \quad x_2 = \sin \theta \quad \text{ahol } 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

És a Dirichlet-függvény legyen:

$$f(\theta) := a \cos \theta + b \sin \theta + c$$

Ennek egy megoldása:

$$u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 + c \quad \text{harmonikus függvény.}$$

2. Most keressünk hasonló feladatra megoldást.

$$\left. \begin{array}{l} \Delta u = 0 \quad \Omega \setminus D\text{-ben,} \\ u = f \quad \partial\Omega\text{-n,} \\ \gamma \nabla u \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \partial D\text{-n.} \end{array} \right\}$$

Ez a feladat csak  $\Omega \setminus D$ -n van értelmezve, ahol  $D := B_{\frac{1}{2}}(0)$ . Legyen a Dirichlet-függvény

$$f(\theta) := a \cos \theta + b \sin \theta.$$

$\partial D$ -t is paraméterezzük a szokásos módon:

$$x_1 = \frac{1}{2} \cos \theta, \quad x_2 = \frac{1}{2} \sin \theta \quad \text{és} \quad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} -\cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix}.$$

Ekkor az előző feladat  $u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$  függvénye a Neumann-peremfeltételt nem teljesíti, így nem lesz megoldás. Ugyanis

$$\nabla u \cdot \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix} = -(\cos \theta + \sin \theta),$$

ami nem lesz azonosan nulla  $\partial D$ -n. Ebben az esetben az alábbi potenciál lesz jó megoldás:

$$u(x_1, x_2) = \frac{(x_1 + x_2)(4x_1^2 + 4x_2^2 + 1)}{5x_1^2 + 5x_2^2}.$$

Ekkor azonban a külső megfigyelő érzékeli a belső üreget, mivel míg a csatolt potenciál az érintetlen lemezen  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(1, \theta) = (\cos \theta + \sin \theta)$  volt, itt

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(1, \theta) = \frac{3}{5}(\cos \theta + \sin \theta).$$

3. Anizotróp esetben ha vesszük azt az  $\mathbf{x}$ -et, melyre

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta,$$

$\sigma$  sajátvektorai a következők:

$$\mathbf{v}_m = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{v}_M = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}.$$

ezek határozzák meg az anizotróp anyagot. Legyen  $V = (\mathbf{v}_m, \mathbf{v}_M)$  a sajátvektorok  $2 \times 2$ -es mátrixa. Ekkor

$$\sigma = V D V^{-1} \quad , \text{ ahol } D = \sigma = \begin{pmatrix} \gamma_m & 0 \\ 0 & \gamma_M \end{pmatrix}$$

Ekkor a  $\sigma$  mátrix az alábbi módon írható fel:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \gamma_m \cos^2 \theta + \gamma_M \sin^2 \theta & (\gamma_m - \gamma_M) \sin \theta \cos \theta \\ (\gamma_m - \gamma_M) \sin \theta \cos \theta & \gamma_m \sin^2 \theta + \gamma_M \cos^2 \theta \end{pmatrix} ,$$

ami tényleg egy szimmetrikus pozitív definit mátrix.

# Jelölések és jelentésük

Jelölés	Matematikai tulajdonsága	Jelentése
$\Omega$	$\subset \mathbb{R}^2$	nyílt egységlap, a vizsgált tartomány
$u$	megfelelően sima	potenciál, a hullámegyenletet kielégítő megoldás
$\mathbf{E}$	$\Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$	elektromos mező
$\mathbf{J}$	$\Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$	kétdimenziós fluxus
$\gamma$	$\in \mathbb{R}$	vezetőképesség izotróp esetben
$f$	$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$	Dirichlet-függvény
$\sigma$	$2 \times 2$ -es mátrix	vezetőképesség anizotróp esetben
$\gamma_M$	$\in \mathbb{R}$	maximális vezetőképesség anizotróp esetben
$v_M$	$\in \mathbb{R}^2$	maximális vezetőképesség iránya
$\gamma_m$	$\in \mathbb{R}$	minimális vezetőképesség anizotróp esetben
$v_m$	$\in \mathbb{R}^2$	minimális vezetőképesség iránya
$\mathbf{n}$	$\in \mathbb{R}^2$	kifelé mutató normális egységvektor
$D$	$\subset \Omega \subset \mathbb{R}^2$	belső nemvezető körlap
$\rho$	$\in (0, \frac{1}{2})$	belső körlap sugara

Jelölés	Matematikai tulajdonsága	Jelentése
$r, \theta$	sugár és szög	polárkoordináták
$u_0$	megfelelően sima	potenciál a körlapon
$\Omega_\rho$	$= \Omega \setminus \overline{B_\rho(0)}$ , ahol $\rho \in (0, \frac{1}{2})$	$\rho$ belső sugarú nyitott körgyűrű
$\mathbf{x}$	$\ \mathbf{x}\  = \rho$	$\Omega_\rho$ belső felszínén egy pont
$\mathbf{y}$	$\ \mathbf{y}\  = \frac{1}{2}$	$\Omega_{\frac{1}{2}}$ belső felszínén egy pont
$\phi(\mathbf{x})$	$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$	leképezés $\overline{\Omega_\rho}$ -ból $\overline{\Omega_{\frac{1}{2}}}$ -be
$D\phi(\mathbf{x})$	$2 \times 2$ -es mátrix	a $\phi$ függvény deriváltja
$\sigma(\mathbf{y})$	$2 \times 2$ -es mátrix	$v$ potenciálhoz tartozó anizotróp vezetőképesség
$v(\mathbf{y})$	$= u(\phi^{-1}(\mathbf{y}))$	megoldása az anizotróp differenciálegyenletnek
$w(\mathbf{x})$	$w = 0 \quad \partial\Omega$ -n	folytonosan differenciálható függvény $\overline{\Omega_\rho}$ -n
$\tilde{w}(\mathbf{y})$	$= w(\phi^{-1}(\mathbf{y}))$	függvény $\Omega_{\frac{1}{2}}$ -n
$h(\mathbf{y})$	$= \nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\sigma(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} v(\mathbf{y}))$	tétel szerint egy azonosan nulla függvény $\Omega_{\frac{1}{2}}$ -n
$\psi(\mathbf{x})$	$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$	leképezés $\overline{\Omega_\rho}$ -ból $\overline{\Omega_{\frac{1}{2}}}$ -be
$\delta$	$\in (0, \frac{1}{2})$	tetszőleges szám
$g(r)$	$r \in (\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \delta)$	egyenletesen interpolálható függvény
$\mu_1$	$= \psi'(r)$	$D\phi$ sajátértéke
$\mu_2$	$= \frac{\psi(r)}{r}$	$D\phi$ sajátértéke
$\mathbf{v}_1$	$= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$	$D\phi$ sajátvektora
$\mathbf{v}_2$	$= \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$	$D\phi$ sajátvektora



# Irodalomjegyzék

- [1] Kurt Bryan és Tanya Leise, *Impedance Imaging, Inverse problems and Harry Potter's cloack. SIAM Review*, 52 (2); 359-377, 2010  
<http://scitation.aip.org/getpdf/servlet/GetPDFServlet?filetype=pdf&id=SIREAD000052000002000359000001&idtype=cvips&doi=10.1137/090757873&prog=normal&bypassSS0=1>
- [2] Simon László és E. A. Baderko, *Másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1983.
- [3] <http://www.matud.iif.hu/08sze/10.html>
- [4] <http://howonearthradio.org/archives/1072>
- [5] [http://bme.ysolt.net/4\\_felev/EMT/EMTszobeli\\_marci.pdf](http://bme.ysolt.net/4_felev/EMT/EMTszobeli_marci.pdf)
- [6] <http://discovermagazine.com/2009/apr/10-metamaterial-revolution-new-science-making-anything-disappear>
- [7] <http://wikipedia.org>