

A VLSI HUZALOZÁS KOMBINATORIKUS ALGORITMUSAI

SZAKDOLGOZAT

Talabér Dóra Edit

Matematika BSc
Alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető:
Recski András
egyetemi tanár
Számítógéptudományi Tanszék



Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

2012

Tartalomjegyzék

Bevezetés	2
1. Részletes huzalozás	3
1.1. Szemléletes leírás	3
1.2. Definíciók	4
2. Egysoros huzalozási feladat	7
2.1. Egysoros huzalozás egy rétegen	7
2.2. Egysoros huzalozás két rétegen	9
3. Csatornahuzalozási feladat	12
3.1. Csatornahuzalozás a Manhattan-modellben két rétegen	12
3.2. Csatornahuzalozás a Manhattan-modellben három és több rétegen	13
3.3. Csatornahuzalozás a megszorítás nélküli modellben	18
4. Switchboxhuzalozási feladat	23
4.1. Switchboxhuzalozás a megszorítás nélküli modellben	23
4.2. Switchboxhuzalozás a Manhattan-modellben	24
5. Egy aktív rétegű huzalozási feladat	30
5.1. Definíciók	30
5.2. Két-terminálos netek huzalozása	32
5.3. Többterminálos netek huzalozása	36
5.4. Összefoglalás	37
Irodalomjegyzék	39
Köszönetnyilvánítás	41

Bevezetés

Szakedolgozatomban a nagy bonyolultságú integrált áramkörök – angol nevén VLSI (Very Large Scale Integrated) circuits – tervezésének egyik utolsó fázisával, a részletes huzalozással foglalkozunk. Ez egyike az olyan gyakorlati életből származó feladatoknak, ahol a kombinatorikus optimalizálás módszereit alkalmazzák. Rengeteg probléma van ebben a témakörben, amelyről sikerült bebizonyítani, hogy NP-teljes. Ugyanakkor sok részfeladatot hatékonyan meg lehet oldani és nehéz feladatokra is vannak a gyakorlatban jól használható heurisztikus algoritmusok.

VLSI alatt az áramkörök tervezése során felmerülő, egymástól lényegesen különböző feladatok összességét értjük. Adott áramköri elemek egy halmazát szeretnénk bizonyos szabályok szerint elhelyezni egy lapon és összekötni őket. Technikai követelmény, hogy a különböző csoportokba tartozó alkatrészek vezetőkei ne metsszék egymást, valamint bizonyos távolságnál közelebb se legyenek egymáshoz. Ezért a megoldást általában egy kockarácson adják meg. Külön foglalkoznak az elemek elhelyezésével, az összekötő vezetékek helyét ekkor csak nagyjából jelölik ki. Ezután következik a huzalok pontos helyének meghatározása. A tervezés során több optimalizációs szempontot is figyelembe lehet venni: például a huzalozáshoz használt terület nagysága (szélesség minimalizálása, rétegek számának minimalizálása), a teljes huzalhossz, vagy a furatok (két réteg közötti átmenetek) száma.

A dolgozat első fejezetében a részletes huzalozás szemléletes és precíz matematikai megfogalmazását tárgyaljuk. A további részekben áttekintünk néhány speciális esetet a huzalozási feladatok közül: a második fejezetben az *egysoros huzalozási feladattal*, a harmadik fejezetben a *csatornahuzalozási feladattal*, a negyedik fejezetben a *switchboxhuzalozási feladattal*, az ötödik fejezetben az *egy aktív rétegű huzalozási feladattal* foglalkozunk részletesen. Megvizsgáljuk, hogy mikor oldható meg egy feladat és ha megoldható, tudunk-e optimális megoldást adni.

A szakedolgozat célja az volt, hogy feldolgozza a téma irodalmának egy részét. Ennek megfelelően a szereplő tételek, lemmák, állítások nem új eredmények, forrásaikat az egyes szakaszokban részletesen feltüntettem.

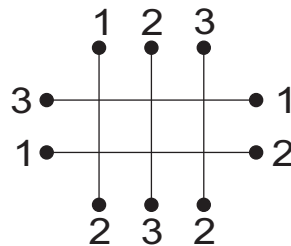
1. fejezet

Részletes huzalozás

1.1. Szemléletes leírás

A dolgozat folyamán a részletes huzalozási feladattal foglalkozunk. Képzeljük el, hogy alkatrészek egy téglalap alakú áramköri lapon elhelyezkedő kivezetéseiről (terminálokról) megmondták nekünk, hogy melyek tartoznak egy csoportba (netbe). Az áramköri elemek helyét már előre meghatározták, feladtunk a terminálokat huzalokkal összekötni úgy, hogy az ugyanabba a netbe tartozók egymás között elérhetők legyenek, viszont másik csoportba tartozó terminálok huzaljait ne keresztezzék.

Ehhez legegyszerűbb, ha a feladatot egy négyzetrácsra helyezzük, és a terminálokat a rácsvonalak mentén futó huzalokkal kapcsoljuk össze. Könnyű megmondolni, hogy már egészen kis és egyszerű feladatok sem biztos, hogy megoldhatók ezen az egyetlen rétegen (például 1.1. ábra), ezért érdemes a huzalozáshoz használható helyet kibővíteni több az eredeti lappal párhuzamos réteg engedélyezésével. A mai modern technika szerencsére ezt lehetővé teszi, bár még mindig komoly megszorítás a huzalozáshoz használható rétegek száma.



1.1. ábra. A pöttyök a terminálokat jelölik, az azonos netbe tartozó terminálok száma megegyezik. Bármely net meghuzalozása lehetetlenné teszi a többi net termináljainak összekötését.

Egy másik korlátozás, ha a vízszintes (sorokkal párhuzamos) és a függőleges (oszlopokkal párhuzamos) huzalok nem használhatják ugyanazt a réteget, sőt az egyes rétegeken felváltva helyezkednek el. Ekkor feladatunk Manhattan-modellbeli. Ha nincs ilyen megkö-

tés, akkor a feladat a megszorítás nélküli modellben van.

Egy további fontos tulajdonság – amit ebben a dolgozatban végig szem előtt tartunk, a szakirodalomban azonban más megközelítés is létezik –, hogy a lap sarokpontjaiban nincsenek terminálok és ezeket a huzalok sem használhatják. A terminálokhoz viszont bármely rétegről csatlakozhatnak huzalok.

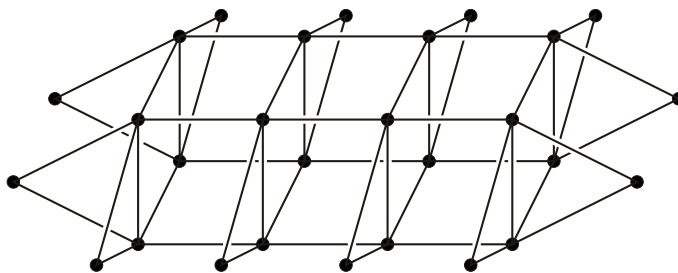
Általában nem csak az a célunk, hogy egy feladatot megoldjunk. Főleg gyakorlati szempontból fontos a miniatürizálás, ezért a feladatokat minél kevesebb rétegen, vagy ha a rétegszám rögzített, akkor minél kisebb szélességben szeretnénk megoldani. Ez például az anyagköltség vagy az áramfogyasztás miatt lényeges.

1.2. Definíciók

Most pontosan definiáljuk a terminál és net fogalmát, a huzalozási feladatot, annak néhány speciális esetét és megmondjuk, hogy mit értünk a huzalozási feladat egy megoldásán. Mindezek előtt szükségünk van a k rétegű derékszögű rácsgráf definíciójára.

1.2.1. Definíció. Az $\{1, \dots, w\} \times \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, k\}$ halmaz legyen egy gráf csúcshalmaza. Két csúcs pontosan akkor legyen szomszédos, ha egy koordinátában térnek el egymástól és abban éppen egygyel. Vegyünk fel t_{ij} csúcsot minden olyan (i, j) párra, amelyre teljesül, hogy $i = 1$ és $j = 1, \dots, w$; vagy $i = n$ és $j = 1, \dots, w$; vagy $j = 1$ és $i = 1, \dots, n$; vagy $j = w$ és $i = 1, \dots, n$.

A t_{ij} csúcsot kössük össze minden (i, j, l) csúccsal, ahol $l = 1, \dots, k$. Az így keletkezett G_k gráfot nevezzük k rétegű derékszögű rácsgráfnak. A rács szélessége w , hosszúsága n .



1.2. ábra. Egy kétrétegű derékszögű rácsgráf (G_2) $w = 2$, $n = 4$ értékekkel.

1.2.2. Definíció. Az előzőekben definiált t_{ij} csúcsokat termináloknak nevezzük. A terminálok bizonyos részhalmazait neteknek hívjuk.

Megjegyzés. Látható tehát, hogy bármely terminálból bármely réteg elérhető, továbbá teljesül, hogy a rács sarkain nincsenek terminálok.

1.2.3. Definíció. Adott egy G_k derékszögű rácsgráf, melynek szélessége w , hosszúsága n . Ennek oldalain (esetleg csak az egyik oldalán) az 1.2.1. definíció szerint helyezkednek el a

terminálok. A huzalozási feladat páronként diszjunkt $N = \{N_1, \dots, N_t\}$ netek halmaza. A feladat szélessége w , hosszúsága n .

1.2.4. Definíció. *Tegyük fel, hogy adott egy $N = \{N_1, \dots, N_t\}$ huzalozási feladat. Ennek k rétegű megoldása a G_k derékszögű rácsgráf páronként pontdiszjunkt összefüggő részgráfjainak $T = \{T_1, \dots, T_t\}$ halmaza úgy, hogy $N_i \subset V(T_i)$ ($\forall i$).*

Megjegyzés. A fent definiált T_i részgráfokat másképp huzaloknak is nevezzük. Ezeket általában minimálisnak választjuk, tehát T_i egy fa. Elsőfokú pontjai az N_i net termináljai, azon éleit pedig, amelyek két szomszédos réteg között vezetnek átmeneteknek nevezzük. Azt is mondhatjuk, hogy egy huzalozási feladat nem más, mint pontdiszjunkt Steiner-fák keresése G_k derékszögű rácsgráfban.

1.2.5. Definíció. *Egy huzalozási feladat megoldása Manhattan-modellbeli, ha a szomszédos rétegeken futó huzalszakaszok különböző irányúak (azaz egy-egy rétegen csak függőleges, vagy csak vízszintes huzalszakaszok vannak) és ezek a rétegek felváltva helyezkednek el.*

Megjegyzés. Az elnevezés onnan ered, hogy Manhattan utcái a Broadwaytől eltekintve lényegében derékszögű rácsot határoznak meg. Az észak-déli irányú utakat avenue-nak, a kelet-nyugati irányú utakat street-nek nevezik. Ez azzal analóg, hogy a Manhattan-modellben más rétegre kerülnek a vízszintes és függőleges irányú huzalok [7]. Ez a modell gyártástechnológiai szempontból előnyös, hiszen ezzel elkerülhető például, hogy hosszan közvetlenül egymás fölött fussanak párhuzamos huzalok.

1.2.6. Definíció. *Ha a huzalozási feladat megoldására nézve nincs semmilyen megkötés (de továbbra is érvényesek az 1.2.4. definíció feltételei), akkor azt mondjuk, hogy az a megszorítás nélküli modellben van.*

1.2.7. Definíció. *Egy huzalozási feladatot switchboxhuzalozási feladatnak nevezünk, ha a rácsgráf minden oldalán helyezkednek el terminálok. A (1.2.1. definíció jelölései szerint) t_{ij} terminált*

- $i = 1$ esetén nyugati,
- $i = n$ esetén keleti,
- $j = 1$ esetén déli,
- $j = w$ esetén északi

terminálnak nevezzük.

A dolgozatban két speciális esettel foglalkozunk még részletesebben, ezek definíciója következik most.

1.2.8. Definíció. *Ha a rácsgráf két szemközti szélén vannak a terminálok, akkor a huzalozási feladat egy csatornahuzalozási feladat. Egy $N = \{t_1, t_2, \dots, t_u, b_1, b_2, \dots, b_v\}$ net t_i terminálja ($i = 1, \dots, u$) a rács felső (északi) szélén, b_j terminálja ($j = 1, \dots, v$) a rács alsó (déli) szélén foglal helyet.*

1.2.9. Definíció. *Egysoros huzalozási feladatról akkor beszélünk, ha a terminálok egyetlen sorban, például a rácsgráf felső (északi) szélén helyezkednek el.*

Megjegyzés. Megemlítjük, hogy a három klasszikus feladat mellett a szakirodalomban találkozhatunk két másik huzalozási feladattal is: a gamma huzalozási feladattal és a nyitott switchboxhuzalozási feladattal. Előbbi esetében a terminálok a lap két szomszédos, utóbbinál három szélét használják.

Megjegyzés. Az 1.2.4. definícióval ellentétben van olyan huzalozási feladat, melynek megoldására a pontdiszjunkságnak nem kell teljesülnie. Ez az éldiszjunkt huzalozás, melynek megoldásakor csak azt követeljük meg, hogy a huzalok éldiszjunktak legyenek. További engedmény, hogy a sarkokba is kerülhetnek terminálok, valamint a rács széleit és sarkait is használhatják huzalok. Ezzel az esettel a későbbiekben nem foglalkozunk.

2. fejezet

Egysoros huzalozási feladat

A huzalozási feladat egyik legegyszerűbb esete, amikor a terminálok a lap egyik oldalán helyezkednek el. Ez az egysoros huzalozási probléma. Ebben az esetben az n hosszúság rögzített, feladatunk a minimális szélesség megtalálása.

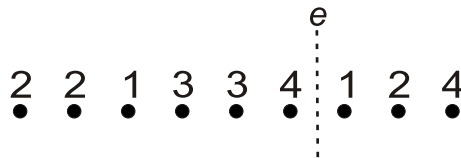
A továbbiakban megvizsgáljuk a feladatot az egyrétegű modellben, majd a kétrétegű Manhattan-modellben. Bemutatjuk az optimális szélességet meghatározó polinomiális idejű algoritmust, és kitérünk a kétrétegű megszorítás nélküli modellbeli eredményekre.

2.1. Egysoros huzalozás egy rétegen

A gyakorlati alkalmazások szempontjából az egysoros huzalozási feladat egy rétegen érdektelen, hiszen nagyon kevés feladat oldható meg benne. Érdekes azonban megvizsgálni néhány speciális esetet, mert azok összekapcsolhatók gráfelméleti tételekkel[11].

2.1.1. Definíció. A $\{t_1, t_2, \dots, t_k\}$ és a $\{t'_1, t'_2, \dots, t'_l\}$ neteket keresztező neteknek mondjuk, ha van olyan $1 \leq i < j \leq k$ és $1 \leq i' < j' \leq l$, hogy $t_i < t'_{i'} < t_j < t'_{j'}$ vagy $t'_{j'} < t_j < t'_{i'} < t_i$.

2.1.2. Definíció. A $\{t_1, t_2, \dots, t_k\}$ és a $\{t'_1, t'_2, \dots, t'_l\}$ neteket metsző neteknek mondjuk, ha $[t_1, t_k]$ és $[t'_1, t'_l]$ nem diszjunktak.



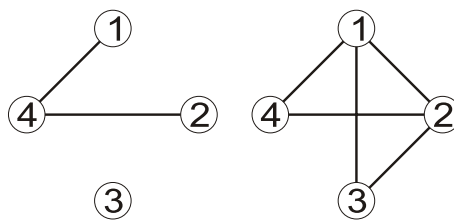
2.1. ábra. Példa egysoros huzalozási feladatra.

Megjegyzés. Az 2.1. ábrán négy net található, a terminálokat pöttyök jelölik. Az egy nethez tartozó terminálokat azonos számokkal jelöltük. Keresztező netek a (1, 4) és (2, 4) párok, és metsző netek az (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3) és (2, 4) párok. Látható tehát, hogy minden keresztező net pár egyben metsző is, visszafelé azonban nem igaz.

Kézenfekvő az egysoros huzalozási problémához bizonyos szabály szerint gráfokat definiálni.

2.1.3. Definíció. Az egysoros huzalozási feladat netjeit feleltessük meg pontoknak. Két pontot kössünk össze, ha a megfelelő netek keresztezők. Az így kapott G_C gráfot hívjuk a feladat kereszteződés gráfjának.

2.1.4. Definíció. Hasonlóan az előzőhöz, legyenek egy gráf csúcsai az egysoros huzalozási feladat netjei. Ha két net metsző, akkor húzzunk be a nekik megfelelő pontok között élet. A keletkezett gráf a feladat G_I metszetgráfja.



2.2. ábra.

Megjegyzés. A 2.2. ábra bal oldalán a fenti feladat kereszteződés gráfja, jobb oldalán a feladat metszetgráfja látható.

A keresztező és metsző netek kapcsolatából azonnal következik, hogy G_C részgráfja G_I gráfnak.

2.1.5. Tétel. Egy egysoros huzalozási probléma pontosan akkor oldható meg az egyrétegű modellben, ha a feladat G_C gráfja nem tartalmaz éleket.

Bizonyítás. Könnyű meggondolni, hogy szükséges és elégséges feltétel a megoldhatóságra, hogy a feladat kereszteződés gráfja ne tartalmazzon éleket. Ugyanis a keresztező neteket nem lehet ugyanazon a rétegen huzalozni: ha az egyik net termináljait már összekötöttük, lehetetlen a másik net termináljait összekötni. \square

2.1.6. Definíció. Adott egysoros huzalozási feladatnál a lapot kettévágó függőleges egyenesek terhelése azon netek száma, amelyeknek az egyenes mindkét oldalán van terminálja. Jelölje ezt e egyenes esetén $t(e)$.

Megjegyzés. A 2.1. ábrán látható feladatban például az e egyenes terhelése 3, mert kettéválasztja az 1, 2, 4 netek termináljait.

Nyilvánvaló, hogy az egyenesek terhelésének maximuma alsó korlát a szélességre. Minden huzalozásban egy függőleges egyenest elmetshi az összes olyan vízszintes huzalszakasz, amelyik az egyenes két oldalán lévő egy netbe tartozó terminálokat köti össze. A következő tétel éppen azt állítja, hogy ez a maximum lesz a huzalozás minimális szélessége.

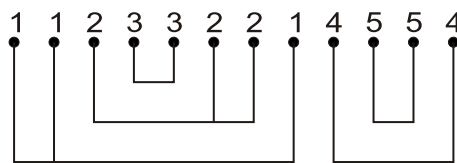
2.1.7. Tétel. *Ha egy egysoros huzalozási feladat G_C metszetgráfja üres, vagyis nincsenek metsző netek, akkor egyrétegű modellben a huzalozás minimális szélessége megegyezik a lapot kettévágó egyenesek maximális terhelésével.*

Bizonyítás. A tétel bizonyításához egy algoritmust használunk, ami minden netnek kijelöl egy sort. Abban egy vízszintes huzalszakaszt vezet a net bal oldali termináljától a jobb oldali termináljáig, majd minden terminált beköt egy függőleges huzallal. Pontosabban, tegyük fel, hogy az algoritmus az $N_i = \{t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_n}\}$ ($t_{i_1} < t_{i_2} < \dots < t_{i_n}$) netet a k -adik sorban fogja meghuzalozni. Ekkor a lap k -adik sorában a t_{i_1} terminál oszlopától a t_{i_n} terminál oszlopáig húz egy vízszintes huzalt, és minden t_{i_j} ($j = 1, 2, \dots, n$) terminálból egy k hosszú függőleges huzalt.

Tegyük fel, hogy azt már sikerült megállapítani, hogy a terhelések maximuma w . Azt kell tehát megmutatni, hogy van w szélességű huzalozás.

Készítsünk egy listát, amelyben a szabad sorokat tartjuk számon. Ebben azok a sorok vannak, amelyeket nem metszi az éppen soron lévő terminálból induló függőleges egyenes. Nyilván az algoritmus indulásakor ez a lista mind az w sort tartalmazza. Ezen kívül a netek első terminálját (bal szélsőt) is jegyezzük fel. Ugyanígy minden net utolsó (jobb oldali) terminálját is. Haladjunk a terminálok során, és ha egy N_i net t_{i_1} termináljához érünk, (vagyis N_i net bal szélső termináljához), akkor az N_i netnek jelöljük ki a szabad sorok listájából a legnagyobb indexűt. Ebben a sorban fogjuk meghuzalozni az N_i netet a bizonyítás elején leírt módon. Ezt a sort töröljük ki a szabad sorok listájából, majd haladjunk a következő terminálra. Amikor olyan terminálhoz érkezünk, amelyik egy N_j net jobb oldali terminálja, akkor a szabad sorok listájához vegyük vissza N_j sorát.

Az így nyert huzalozás szélessége épp a terhelések maximumával egyenlő. \square



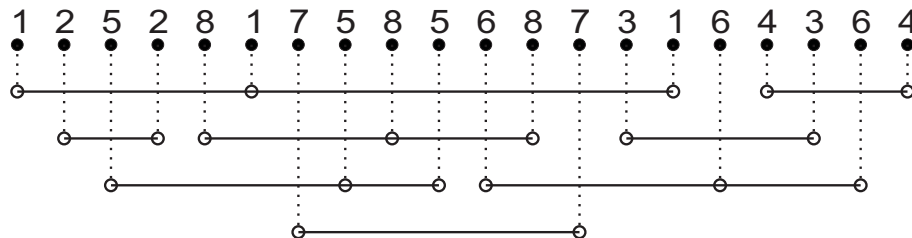
2.3. ábra. Egysoros huzalozási feladat megoldása egy rétegen.

Megjegyzés. A 2.3. ábrán látható egysoros feladat megoldása: elsőként az N_1 netet huzalozzuk meg a harmadik sorban, majd az N_2 netet a második sorban, aztán N_3 -at az első sorban. Amikor t_{4_1} terminálhoz érünk, a szabad sorok listája megint az összes sort tartalmazza, ezért N_4 nethez válasszuk a harmadik sort, végül N_5 -höz a második sort.

2.2. Egysoros huzalozás két rétegen

Áttérve a kétrétegű modellre, látjuk majd, hogy a keresztező neteket tartalmazó feladatok is megoldhatók (még a Manhattan-modellben is). A probléma megoldására az első

eredményt Gallai Tibor adta meg [2]. Algoritmus, az ún. mohó intervallumpakolás a két-rétegű Manhattan-modellben ad optimális megoldást. A lépésszám felülről becsülhető a lap hosszúságának konstansszorosával, tehát lineáris idejű.



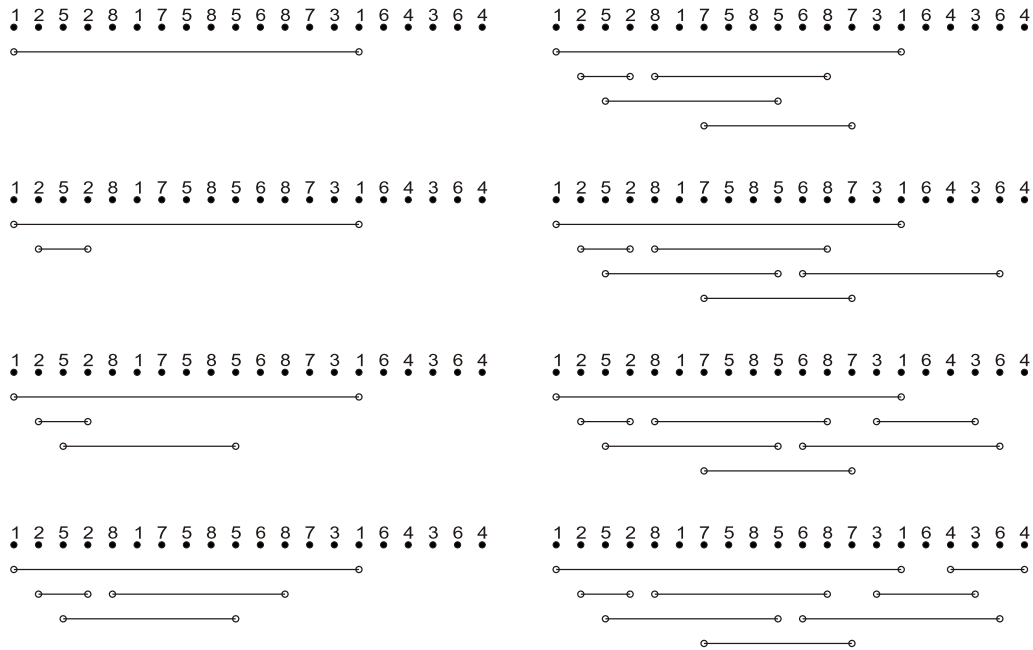
2.4. ábra. Egysoros huzalozási feladat megoldása a mohó intervallumpakolással. A folytonos vonalak az első rétegen lévő huzalokat, a pontozott vonalak a második rétegre került huzalokat jelölik.

2.2.1. Tétel. *Egysoros huzalozási probléma Manhattan-modellbeli megoldásának minimális szélessége megegyezik a lapot kettévágó függőleges egyenesek terhelésének a maximumával. Egy optimális huzalozás lineáris időben megadható.*

Bizonyítás. Az egyrétegű esetről bemutatott algoritmust használjuk kisebb módosítással. Az első módosításra azért van szükség, mert most kétrétegű modellben dolgozunk. El kell döntenünk tehát, hogy az egyes huzalokat melyik rétegen helyezjük el. Minden netnek kijelölünk egy sort az első rétegen, abban a vízszintes huzalt vezetjük, míg a függőleges huzalszakaszokat a második rétegre helyezük (mivel a Manhattan-modellben dolgozunk). A másik módosítás, hogy a sorok kiosztásánál a szabad sorok listájából nem a legnagyobb indexű sort választjuk, hanem a legkisebb indexűt.

Az algoritmus lépései tehát a következők:

1. Jegyezzük fel minden net bal szélső és jobb szélső terminálját.
2. Készítsünk egy listát, melyben a szabad sorokat tartjuk.
3. Haladjunk végig a terminálok során,
 - a) ha olyan terminálhoz érünk, ami egy net bal szélső végpontja, akkor ennek a netnek jelöljük ki a szabad sorok listájáról a legkisebb indexűt, majd töröljük a sort a szabad sorok listájáról;
 - b) ha olyan terminálhoz érünk, ami egy net jobb szélső végpontja, akkor a nethez kijelölt sort vegyük vissza a szabad sorok listájára.
4. Az első rétegre rakjuk az $N_i = \{t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_n}\}$ ($i = 1, 2, \dots, t_{i_1} < t_{i_2} < \dots < t_{i_n}$) nethez kijelölt sorban a vízszintes huzalszakaszt t_{i_1} oszlopától t_{i_n} oszlopáig.
5. Minden terminálból indítsunk függőleges huzalszakaszt a netjéhez kijelölt sorig a második rétegen.



2.5. ábra. Az algoritmus harmadik és negyedik lépéseinek szemléltetése a fenti példán.

Tegyük fel, hogy az így nyert huzalozás szélessége w . Azt kell megmutatnunk, hogy a függőleges egyenesek terhelésének maximuma ezzel egyenlő. Tekintsük az utolsó sorba került netek közül azt, amelyiket elsőként huzaloztunk meg. Legyen ez N_k . A t_{k_1} terminált metsző függőleges egyenes terhelése w , hiszen minden kisebb indexű sorban futnia kell ebben az oszlopban huzalnak, különben az N_k netnek nem ezt a sort kellett volna kijelölni.

Az algoritmus lineáris futásidejű, a netekhez tartozó sorok kiosztásához elég a terminálok során végighaladni. Így a második rétegen futó függőleges szakaszok és az első rétegen lévő vízszintes huzalok helyét is meghatároztuk, és ezzel együtt az átmeneteket is. \square

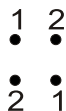
Az egysoros huzalozási problémára a kétrétegű megszorítás nélküli modellben nem ismert optimális eredményt adó algoritmus. A feladat persze biztosan megoldható, hiszen a Manhattan-modellbeli megoldás – ami speciális esete a megszorítás nélkülinek – egy lehetséges huzalozást ad, ám ez nem mindig a lehető legkisebb szélességű. Annyit tudunk tehát, hogy $\left\lceil \frac{\max t(e)}{2} \right\rceil \leq w \leq \max t(e)$.

3. fejezet

Csatornahuzalozási feladat

Egy csatornahuzalozási feladatban a terminálok a lap két szemközti szélén helyezkednek el. Ilyenkor előre rögzített, hogy hány rétegen szeretnénk a feladatot megoldani. Ahogy az egysoros huzalozásnál, a csatornahuzalozási feladatnál is a szélesség minimalizálása a célunk.

A kétrétegű csatornahuzalozás az egyik legnépszerűbb és legtöbbet vizsgált feladat a VLSI huzalozás irodalmában. Míg a Manhattan-modellben könnyen adható olyan példa, amely nem oldható meg (még akkor sem, ha tetszőlegesen nagy szélességet megengedünk), a megszorítás nélküli modellben már minden feladat megoldható. Ha kettőnél több réteg engedélyezett, akkor a Manhattan-modellben is mindig van megoldás. A megoldhatóság mellett persze fontos vizsgálni, hogy mekkora szélességben tudunk megoldani egy feladatot. Ahogy látni fogjuk, optimális megoldást adó algoritmus egyik kétrétegű modellben sem ismert.



3.1. ábra. Egy csatornahuzalozási feladat, amely nem oldható meg a kétrétegű Manhattan-modellben. A megoldhatatlan feladatok könnyen felismerhetők.

Ebben a fejezetben áttekintünk néhány eredményt, kezdve a kétrétegű Manhattan-modellel, látni fogjuk, hogyan lehet ezt a három rétegű Manhattan-megoldások keresésére használni, majd a kétrétegű megszorítás nélküli modellben egy polinomiális idejű algoritmust ismertetünk.

3.1. Csatornahuzalozás a Manhattan-modellben két rétegen

Először néhány Manhattan-modellbeli eredményt tekintünk át, kezdve egy 1985-ből Thomas G. Szymanski-tól származó tétellel[16].

3.1.1. Tétel. *NP-teljes annak eldöntése, hogy egy csatornahuzalozási feladat megoldható-e legfeljebb w szélességben a kétrétegű Manhattan-modellben.*

Egy speciális esete a feladatnak, ha minden netnek csak a lap felső, vagy csak az alsó szélén vannak termináljai. Egy természetesen felmerülő ötlet, hogy a feladatot visszavezetjük az egysoros huzalozási feladatra. Mindkét oldalon alkalmazva Gallai optimális megoldást adó algoritmusát, kapunk egy megoldást. Ez az optimális megoldás szélességének legfeljebb a kétszerese. A minimális szélesség megtalálására ebben a speciális esetben sem számíthatunk, ezt Ronald Greenberg, Joseph Jájá és Srinthar Krishnamurthy bizonyították 1992-ben [3].

3.1.2. Tétel. *Egy csatornahuzalozási feladat minimális szélességének megtalálása NP-nehéz a Manhattan-modellben abban a speciális esetben is, ha minden netnek csak a lap egyik szélén helyezkednek el termináljai.*

Egy további specifikáció, ha korlátozzuk az egy nethez tartozó terminálok számát. A következő tétel Martin Middendorf nevéhez fűződik [9].

3.1.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy egy csatornahuzalozási feladatban minden netnek csak két terminálja van. Ha minden netnek csak az egyik oldalon vannak a termináljai, akkor NP-nehéz a Manhattan-modellbeli minimális szélesség meghatározása.*

Láthatjuk tehát, hogy optimális eredményt adó algoritmusra sok esetben nem számíthatunk. Ennek ellenére (vagy éppen ezért) nagyon sok a gyakorlatban jól használható heurisztikus algoritmus létezik a feladat megoldására.

3.2. Csatornahuzalozás a Manhattan-modellben három és több rétegen

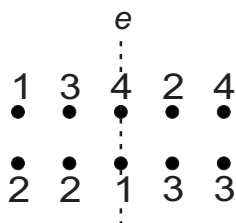
A huzalozási technológia fejlődésével lehetővé vált, hogy kettőnél több réteget is használjunk egy huzalozási feladat megoldásakor (bár a rétegek száma még ma is komoly korlátozást jelent). Ha a huzalozásra használható rétegek száma legalább három, akkor abban már biztosak lehetünk, hogy a feladatnak van megoldása.

Vezessünk be néhány definíciót, melyek segítségével majd az optimális szélességet meg tudjuk becsülni.

3.2.1. Definíció. *Adott csatornahuzalozási feladatnál a lapot kettévágó függőleges egyenesek terhelése azon netek száma, amelyeknek az egyenes mindkét oldalán van terminálja. Jelölje ezt az e egyenes esetén $t(e)$.*

3.2.2. Definíció. *A csatornahuzalozási feladat sűrűsége az összes függőleges egyenes terhelésének maximuma: $d = \max t(e)$.*

Megjegyzés. Az egysoros huzalozásnál a terhelést elég volt a rácspontok közötti függőleges egyeneseken vizsgálni, hiszen minden rácspontban pontosan egy netnek lehetett terminálja. Csatornahuzalozás esetén azonban egy rácsegyenesen két különböző nethez tartozó terminál is lehet, ezért a feladat sűrűségének meghatározásához a rácsegyenesek terhelését kell vizsgálni. A 3.2. ábrán az e egyenes terhelése 4, a terminálok közötti függőleges egyeneseké minden esetben ennél kevesebb (2, 3, 3, 2).



3.2. ábra. Egy csatornahuzalozási feladat, aminek 4 a sűrűsége.

3.2.3. Definíció. Egy csatornahuzalozási feladat Manhattan-modellbeli megoldásában vízszintes rétegeknek nevezzük azokat a rétegeket, amelyeken a vízszintes huzalszakaszok helyezkednek el, és függőleges rétegeknek azokat, amelyeken a függőleges huzalszakaszok. A vízszintes rétegek számát jelölje v , a függőleges rétegek számát f .

Megjegyzés. Ha a rétegek száma k , akkor triviálisan igaz, hogy $k = v + f$, és annak is teljesülnie kell, hogy $|v - f| \leq 1$. (Nyilván egyenlőség abban az esetben van, ha k páratlan.)

A következő két tétel egy alsó és egy felső korlátot ad az optimális szélességre.

3.2.4. Tétel. Egy csatornahuzalozási feladat megoldásának minimális szélessége legalább $\left\lceil \frac{d}{v} \right\rceil$ a Manhattan-modellben.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy adott egy w szélességű huzalozás. A vízszintes rétegek száma v , minden rétegen egy függőleges egyenest legfeljebb w vízszintes huzalszakasz metsz, így teljesülnie kell a $vw \geq d$ egyenlőtlenségnek. Ezt átrendezve pedig megkapjuk a tétel állítását. \square

3.2.5. Tétel. Manhattan-modellben minden csatornahuzalozási feladat megoldható $\left\lceil \frac{d}{f-1} \right\rceil$ szélességben (ha $f \geq 2$). Egy ilyen szélességű huzalozás lineáris időben található.

Bizonyítás. A bizonyításhoz a mohó intervallumpakolást használjuk, minden netet a lehető legegyszerűbben huzalozunk meg: kijelölünk az egyik vízszintes rétegen egy sort, ebben fut majd a nethez tartozó vízszintes huzalszakasz, és egy szomszédos függőleges rétegen kötjük be a net termináljait. Ha a rétegek száma páros, akkor a szélső vízszintes réteget nem használjuk a huzalozáshoz. Ha k páratlan és $v > f$, akkor az első és utolsó vízszintes réteg marad üresen. Tegyük fel, hogy $v = f - 1$ és $w = \left\lceil \frac{d}{f-1} \right\rceil$. Legyen minden páros sorszámú réteg vízszintes réteg, és minden páratlan sorszámú függőleges réteg.

Haladjunk végig a terminálok sorain, és minden nethez jegyezzük fel a bal szélső és külön a jobb szélső terminálját. Készítsünk egy listát, amelyben a vízszintes rétegek szabad sorait tartjuk számon (tehát azokat, amelyeken nincs a terminál oszlopát keresztező huzalszakasz). Egy sort két adattal jellemezünk: hányadik sorban és melyik rétegen foglal helyet. Ezután vegyük sorban a terminálokat, mindig azzal kezdjük, amelyik a rács felső szélén van. Ha olyan terminálhoz érünk, amely a feljegyzett bal terminálok közül való (vagyis ő egy net bal szélső terminálja), akkor ennek a netnek jelöljük ki a szabad sorok listájáról a legkisebb indexű sort, ami a legkisebb sorszámú rétegen van. Ha olyan terminálhoz érünk, ami jobb szélső terminálja egy netnek, akkor a net sorát vegyük vissza a szabad sorok közé.

Mivel a vízszintes rétegeken összesen $vw = (f-1) \cdot \left\lceil \frac{d}{f-1} \right\rceil \geq d$ sor van, ezért mindig létezik a soroknak egy jó kiosztása. Miután a sorok kiosztását elvégeztük, a netek vízszintes huzalszakaszait tegyük be a hozzájuk választott sorba, értelemszerűen a bal szélső termináltól jobb szélső terminálig tartó szakaszba.

Ezután következnek a függőleges rétegeken futó huzalszakaszok. Megint végighaladunk a terminálok sorain úgy, hogy először a lap felső szélén lévőket vesszük sorba. Ezeket a $4l+1$ alakú, tehát az első, ötödik, kilencedik, stb. indexű rétegeken kötjük be. Minden terminál esetén éppen azon, ami szomszédos a terminál netjének vízszintes rétegével. Ezen egy függőleges huzalszakaszt vezetünk a net soráig. Hasonlóan járunk el a lap alsó szélén lévő terminálok esetén is, de a függőleges huzalszakaszok ekkor a $4l+3$ alakú, vagyis harmadik, hetedik, tizenegyedik, stb. indexű rétegre fognak kerülni. Természetesen megint arra a rétegre, amely szomszédos a terminál netjéhez kijelölt vízszintes réteggel.

Ezután már csak a vízszintes és függőleges huzalszakaszok összekötése van hátra, ezt átmenetek segítségével könnyen elvégezhetjük. \square

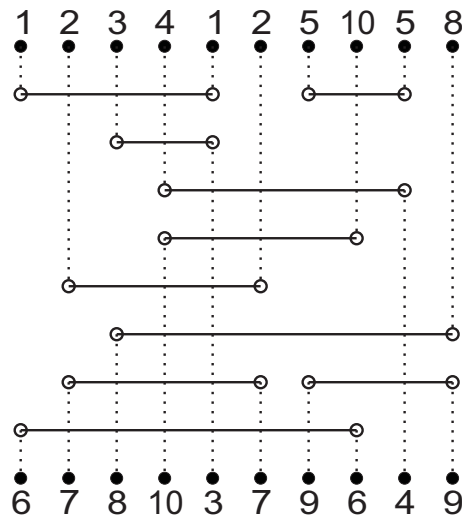
A fenti konstrukció abban az esetben ad optimális megoldást, ha k páratlan, és előre megmondtuk, hogy a függőleges rétegek száma a nagyobb. Ekkor ugyanis a huzalozás szélessége megegyezik a 3.2.4. tétel alsó becslésével. Általánosságban annyit kaptunk meg, hogy $k=2m+1$ esetben $\left\lceil \frac{d}{m+1} \right\rceil \leq w \leq \left\lceil \frac{d}{m-1} \right\rceil$, ha pedig $k=2m$, akkor $\left\lceil \frac{d}{m} \right\rceil \leq w \leq \left\lceil \frac{d}{m-1} \right\rceil$. Annak eldöntése azonban, hogy egy huzalozás megvalósítható-e $\left\lceil \frac{d}{v} \right\rceil$ szélességben NP-nehéz.

Most azzal a speciális feladattal foglalkozunk, amikor egy csatornahuzalozási feladatot három rétegen szeretnénk megoldani a Manhattan-modellben. Ennek két esete közül vizsgáljuk a $v=2$, $f=1$ lehetőséget, hiszen láttuk, hogy $v=1$, $f=2$ modellben létezik optimális megoldást szolgáltató algoritmus. Ugyanakkor, ha mi dönthetünk arról, hogy a vízszintes vagy a függőleges rétegek száma legyen nagyobb, előfordulhat, hogy az elsőként említett esetet érdemes választani, hiszen a szélességre vonatkozó alsó becslés akkor d helyett $\left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil$.

Tegyük fel, hogy $v=2$, $f=1$ és induljunk ki egy konkrét három rétegű megoldásból. Ebből készíthető egy kétrétegű megoldás, ha a megoldás vízszintes rétegeinek sorait egyet-

len rétegre tesszük. Felváltva rakjuk sorba az első és a harmadik réteg sorait: elsőként az első réteg első sorát, majd a harmadik réteg első sorát, ezután az első réteg második sorát, és így tovább. (Ha üres sorhoz érünk, azt ugorjuk át.) Kapunk egy kétrétegű megoldást, melynek szélessége legfeljebb kétszerese a három rétegű megoldás szélességének.

Mivel a kétrétegű megoldások megtalálására, ahogy azt már említettük, jól működő heurisztikus algoritmusok léteznek, érdemes egy ilyen megoldásból kiindulva három rétegű megoldást konstruálni. Ehhez azt kell megvizsgálni, hogy az előbbi átalakítást visszafelé is el tudjuk-e végezni.

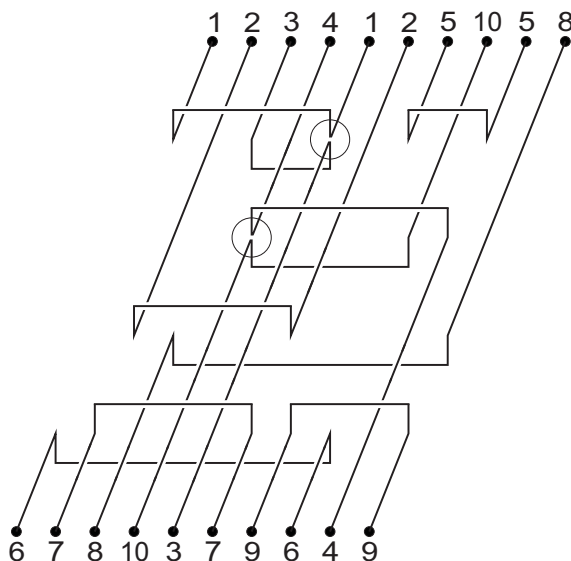


3.3. ábra.

Megjegyzés. A 3.3. ábrán egy csatornahuzalozási feladat és annak egy megoldása látható a kétrétegű Manhattan-modellben. Erre visszafelé alkalmazva az előző eljárást a 3.4. ábra szerinti huzalozást kapjuk. A átkonvertálást szemléletesen úgy is elképzelhetjük, hogy a kétrétegű megoldás sorait felváltva fel- és lehajtogatjuk a három rétegű modell első és harmadik rétegére. Az 1 és 5, 2, 4, 7 és 9 netek sora az első rétegre, a 3, 6, 8, 10 netek sora a harmadik rétegre kerül. Látható a 3.4. ábrán, hogy nem feltétlenül jutunk így helyes huzalozáshoz. Az 1 és 3 netek, valamint a 4 és 10 netek huzalai is használják ugyanazt a rácspontot a körrel jelölt helyen.

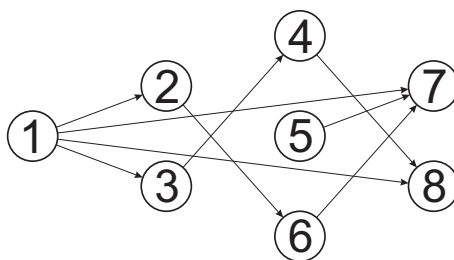
Ahogy a példa mutatja, a transzformálás visszafelé nem működik olyan egyszerűen, mint három rétegről két rétegre. Látni fogjuk azonban, hogy a probléma átfogalmazható egy olyan ütemezési feladattá, amiről tudjuk, hogy polinomiális időben megoldható.

Célunk tehát az, hogy kétrétegű Manhattan-modellbeli csatornahuzalozási feladat egy adott w szélességű huzalozását átalakítsuk három rétegű Manhattan-modellbeli ($v = 2$, $f = 1$) megoldássá, amelynek w' szélessége minimális. Mindezt úgy, hogy a kétrétegű megoldás sorait teljesen megtartjuk, tehát azoknak a neteknek, amiknek ugyanabban a sorban volt a vízszintes huzalszakasza, ezután is egy sorban maradnak. Ebből azonnal következik, hogy $\lceil \frac{w}{2} \rceil \leq w' \leq w$.



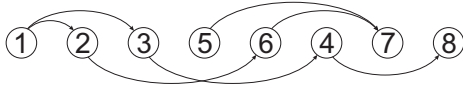
3.4. ábra. Példa egy rossz három rétegű modellbe transzformálásra.

Számozzuk meg a megoldás sorait 1-től w -ig felülről lefelé. Definiáljunk egy G irányított gráfot, melynek csúcsai legyenek a sorok, és $\vec{e} = w_i w_j$, ha a három rétegű megoldásban az i -edik sornak kisebb indexű sorba kell kerülnie, mint a j -edik sornak. Ezt azért szükséges valahogy tárolni, hogy majd a három rétegű megoldásban a függőleges rétegen mindkét sorhoz be tudjuk kötni a terminálokat. A G gráf elkészítéséhez vegyünk fel w csúcsot, haladjunk végig a kétrétegű megoldás oszlopain, egy adott oszlopban keressük meg, hogy az oszlopban lévő átmenetek melyik sorokban vannak. Tegyük fel, hogy ez egy oszlop esetében az i -edik és a j -edik sor. Vegyük be G gráfba az $\vec{e} = w_i w_j$ élet, ha $i < j$, vagy az $\vec{e} = w_j w_i$ élet, ha $j < i$.

3.5. ábra. A fenti feladathoz definiált G irányított gráf.

Ezután a feladat a következőképpen fogalmazható meg: G csúcsait írjuk két sorozatba úgy, hogy minden csúcs pontosan az egyik sorozatba kerüljön. Ezen kívül teljesüljön az is, hogy minden él kezdőpontja előbb szerepel a felírásban, mint a végpontja, függetlenül attól, hogy ugyanabban a sorozatban vannak vagy sem. Tegyük fel még azt is, hogy az első sorozatba legalább annyi csúcs kerül, mint a másodikba. Mivel az eredeti három rétegű huzalozást a lehető legkisebb szélességben szeretnénk megoldani, ezért a G gráf csúcsainak két sorozatba osztásánál az a célunk, hogy az első sorozat hossza a lehető legkisebb legyen.

Ez egy ütemezési feladatra vezethető, amelyet a Coffman–Graham-algoritmussal polinom-időben meg tudunk oldani. Ennek lépéseit nem részletezzük, a fenti példára alkalmazva a következő eredményt kapjuk:

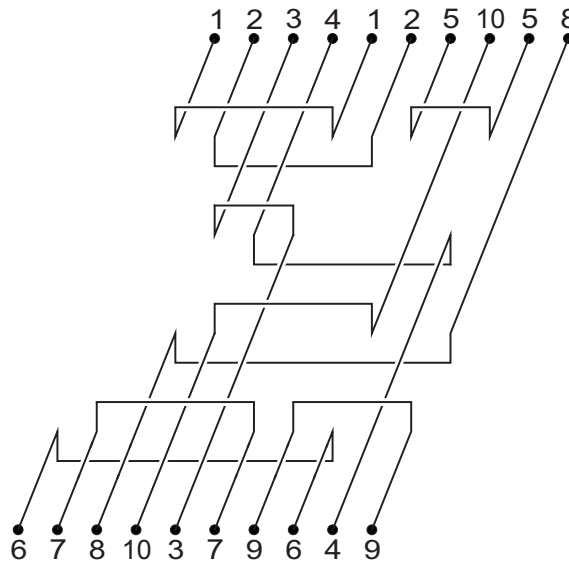


3.6. ábra.

1	2	4	7
5	3	6	8

3.7. ábra. A csúcsok két sorozatba osztása.

Ezután az első sorozatba került csúcsoknak megfelelő sorokat tegyük az első vízszintes rétegre, a második sorozatba került csúcsoknak megfelelő sorokat a másik vízszintes rétegre. A függőleges rétegen a terminálokból indított huzalszakaszok foglalnak helyet, melyeket ugyanúgy, mint a kétrétegű megoldásban, átmenetek segítségével kötjük a vízszintes réteghez. Az így kapott huzalozás szélessége megegyezik az első sorozat hosszával.



3.8. ábra. A fenti kétrétegű csatornahuzalozási feladat helyes átkonvertálása a három rétegű Manhattan-modellbe.

3.3. Csatornahuzalozás a megszorítás nélküli modellben

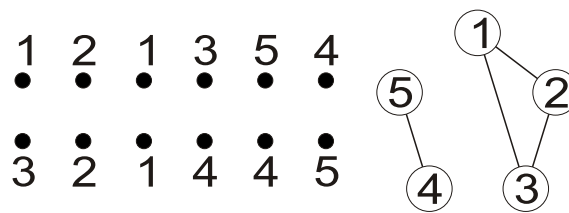
Vizsgáljuk meg a csatornahuzalozási feladatot a megszorítás nélküli modellben (vagyis megengedjük, hogy vízszintes és függőleges huzalszakaszok is legyenek ugyanazon a rétegen). Idézzük fel az 1.2.8. definíciót, és az $u = v = 1$ esetre vezessük be az $N = \{t, b\}$ jelölést.

3.3.1. Definíció. Egy csatornahuzalozási feladat sűrű, ha a lap mindkét szélén az összes rácspontban vannak terminálok.

Ahogy az egysoros huzalozás esetében, most is szükségünk van a keresztező netek és a feladat kereszteződés grájának fogalmára. Ezeket az egysoros huzalozási feladatnál leírtakhoz hasonlóan definiáljuk.

3.3.2. Definíció. Az $N = \{(t_1, \dots, t_u), (b_1, \dots, b_v)\}$ és az $N' = \{(t'_1, \dots, t'_{u'}), (b'_1, \dots, b'_{v'})\}$ neteket keresztezőnek nevezzük, ha van olyan i, j, i', j' ($1 \leq i \leq u, 1 \leq i' \leq u', 1 \leq j \leq v, 1 \leq j' \leq v'$), hogy $(t_i - t'_{i'}) \cdot (b_j - b'_{j'}) < 0$.

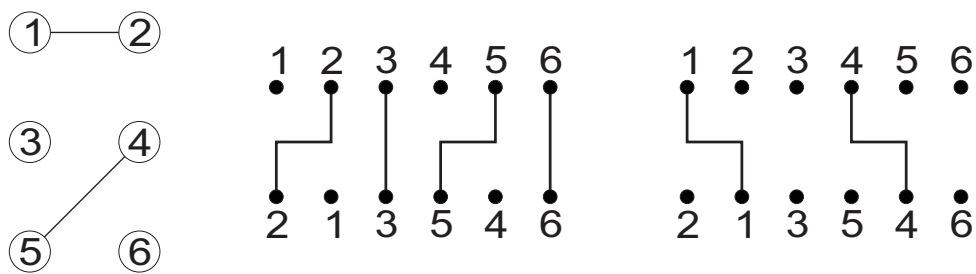
3.3.3. Definíció. A csatornahuzalozási feladat netjeit feleltessük meg a gráf pontjainak, kössünk össze két csúcsot, ha a megfelelő netek keresztező kapcsolatban állnak egymással. Az így keletkező G_C gráfot a csatornahuzalozási feladat kereszteződés grájának nevezzük.



3.9. ábra. Egy sűrű csatornahuzalozási feladat és a feladat kereszteződés grájja.

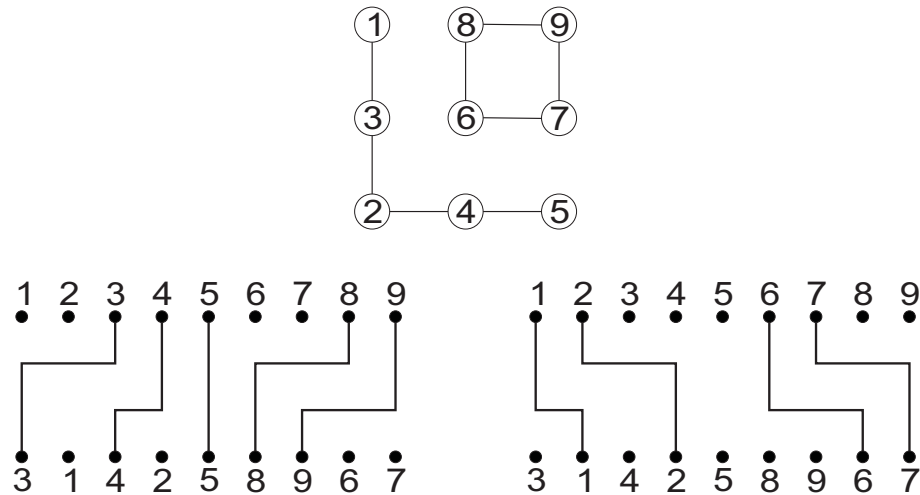
A következő tételek szükséges és elégséges feltételeket adnak arra, hogy egy sűrű két-terminálos csatornahuzalozási feladat mikor oldható meg kis (1 vagy 2) szélességben. A közölt eredmények Recski Andrásról és Frank Strzyzewskitől származnak [10].

3.3.4. Tétel. Egy sűrű két-terminálos csatornahuzalozási feladat akkor és csak akkor oldható meg 1 szélességben a kétrétegű megszorítás nélküli modellben, ha a feladat G_C grájja csak izolált pontokat és csúcdiszjunkt éleket tartalmaz.



3.10. ábra. Sűrű két-terminálos csatornahuzalozási feladat kereszteződés grájja és megoldása 1 szélességben. A két réteg külön ábrán látható.

3.3.5. Tétel. Egy sűrű két-terminálos csatornahuzalozási feladat akkor és csak akkor oldható meg 2 szélességben a kétrétegű megszorítás nélküli modellben, ha a feladat G_C grájja csak csúcdiszjunkt utakból és négy hosszú körökből áll (izolált pontok lehetnek).



3.11. ábra. Sűrű két-terminálós csatornahuzalozási feladat kereszteződés gráfja és megoldása 2 szélességben. A két réteg külön ábrán látható.

Térjünk vissza az általános csatornahuzalozási feladatra. Ahogy azt már a fejezet elején említettük, a megszorítás nélküli modellben két rétegen minden feladat megoldható. Erre először 1983-ban Malgorzata Marek-Sadowska és Ernest S. Kuh adott polinomiális idejű algoritmust [8], majd 1990-ben Recski András és Frank Strzyzewski lineáris idejű algoritmust is találtak [10].

3.3.6. Definíció. *Nevezzünk egy $N = \{t, b\}$ netet / alakúnak, ha $b < t$, | alakúnak, ha $b = t$, és \ alakúnak, ha $t < b$.*

Megjegyzés. A $b < t$ azt jelenti, hogy ha balról jobbra haladunk a terminálok sorain az $N = \{t, b\}$ net alsó terminálja előbb sorra kerül, mint a felső terminál. Analóg módon értelmezzük a $b = t$ és a $t < b$ jelölést.

3.3.7. Tétel. *Minden csatornahuzalozási feladat megoldható a kétrétegű megszorítás nélküli modellben. Egy huzalozás lineáris időben található.*

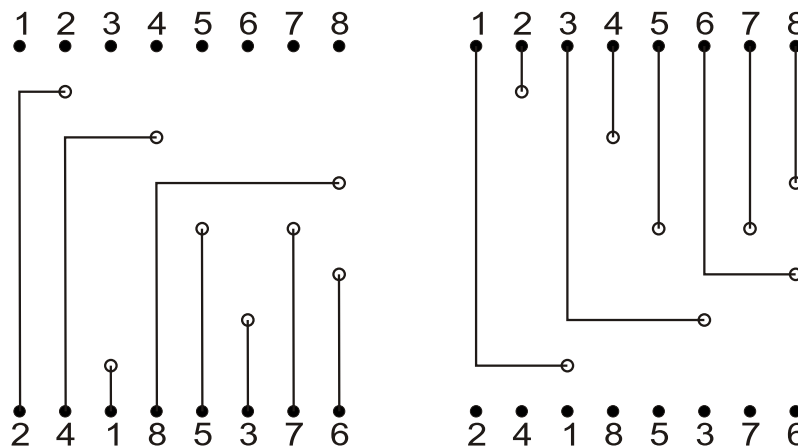
Bizonyítás. Először azt az esetet bizonyítjuk, amikor csak $N = \{t, b\}$ netek kerülnek a csatorna két szélére. Vagyis minden netnek két terminálja van: egy a lap felső és egy a lap alsó oldalán. A huzalozás során minden netnek kijelölünk egy sort, az elsőként huzalozott netnek a legfelsőt, a másodikként huzalozottnak az alatta lévő, és így tovább. Minden netet úgy huzalozunk meg, hogy a hozzá kijelölt sorig egy-egy függőleges szakasszal bekötjük a termináljait, és ebben a sorban egy vízszintes szakasszal összekötjük. Hogy melyik rétegen, és hol vezetjük át a huzalokat, azt a későbbiekben mondjuk meg. A huzalozás szélessége tehát nem lesz nagyobb a csatorna hosszúságánál.

Elsőként a / alakú netek közül azt huzalozzuk meg, melyre b a legkisebb, vagyis az alsó szélén elhelyezkedő terminálja minden másik / alakú net alsó termináljától balra van. Ennek a netnek a legfelső sort jelöljük ki. Haladjunk az alsó szélén végig, és minden / alakú

netnek jelöljük ki egy új szabad sort felülről kezdve. A huzalokat az első rétegen indítsuk minden net b termináljából a net soráig, ebben a sorban vezessünk egy vízszintes huzalrészét a t oszlopáig, majd térjünk át a második rétegre, és kössük be a net t terminálját.

Ezután a $|$ alakú neteket huzalozzuk. Nekik nem lesz vízszintes huzalszakaszuk, így elegendő egy közös sort választani hozzájuk. Az alsó terminálból indulva az első rétegen huzalozunk a kijelölt sorig, majd egy átvezetéssel a második rétegen bekapcsoljuk a net felső terminálját.

Ezután következnek a \setminus alakú netek. Ezekkel a t , vagyis a felső szélén elhelyezkedő termináljaik által meghatározott fordított sorrend szerint foglalkozunk. Vagyis először az a nettel, amelynek a t terminálja minden másik \setminus alakú net felső termináljától jobbra van. Ennek sora legyen a legnagyobb indexű sor, amelyhez még nincs net kijelölve. A huzalozást itt is a net alsó termináljától indítsuk az első rétegen, de a vízszintes huzalrészét már a második rétegen vezessük, ahogy a felső terminál bekötéséhez szükséges függőleges szakaszt is.

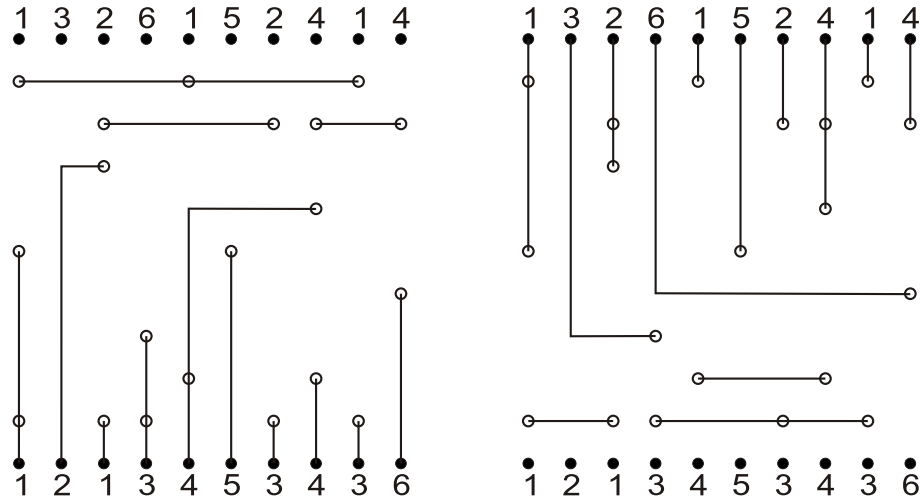


3.12. ábra. Csak $N = \{t, b\}$ alakú neteket tartalmazó csatornahuzalozási feladat megoldása a megszorítás nélküli modellben.

A bal oldali ábrán az első réteg, a jobb oldalin a második réteg látható. A 2, 4, 8 netek $/$ alakúak, az 5, 7 netek $|$ alakúak, az 1, 3, 6 netek \setminus alakúak.

Tehát sikerült megoldani a feladatot speciálisan arra az esetre, ha minden netnek pontosan egy terminálja van a lap alsó és egy a felső szélén. Látható, hogy minden b alsó terminálhoz az első rétegen, míg minden t felső terminálhoz a második rétegen kapcsolódik huzal. Ezt kihasználjuk majd az általános eset megoldásához. A lap mindkét oldalát külön-külön mint egysoros feladatot oldjuk meg a kétrétegű egysoros huzalozáshoz használt Gallai-féle algoritmussal. Az alsó sor függőleges huzalszakaszai az első rétegre, a felső sor függőleges huzalszakaszai a második rétegre kerüljenek. Ezután válasszuk ki minden netnek (amelynek mindkét szélén van terminálja) egy tetszőleges terminálját az alsó és a felső rétegen, majd az előbb ismertetett módon kapcsoljuk össze az alsó és felső szélek megfelelő termináljait.

Az egysoros huzalozásról tudjuk, hogy lineáris, elég tehát megmutatni, hogy a bizonyítás első felében bemutatott algoritmus is az. Könnyű meggondolni, hogy a rendezések lineáris idejűek, mert tudjuk, hogy 1 és n közötti egész számokat kell rendezni. \square



3.13. ábra. Egy csatornahuzalozási feladat megoldása a megszorítás nélküli modellben.

A fenti algoritmus általában nem ad optimális szélességű megoldást. Belátható azonban, hogy az így kapott huzalozás szélessége nem több a lap hosszúságának $\frac{3}{2}$ -szeresénél. Sőt, ha minden net pontosan egy-egy terminált tartalmaz mindkét oldalon, akkor a szélességre felső korlát a netek száma.

Arra a kérdésre, hogy a minimális szélesség meghatározása mennyire nehéz, még nem sikerült választ adnia senkinek. D. S. Johnson széleskörűen elfogadott sejtése szerint ez NP-nehez [5], [6], de a probléma megoldatlan.

4. fejezet

Switchboxhuzalozási feladat

A huzalozási feladat általunk vizsgált legáltalánosabb esete, amikor a lapnak mind a négy szélén helyezkednek el terminálok. Ezt switchboxhuzalozási feladatnak hívjuk, és a csatornahuzalozási feladathoz hasonlóan azt vizsgáljuk, hogy mikor oldható meg egy feladat. Mivel az n hosszúság és a w szélesség előre rögzített, ezért megoldható feladat esetén célunk a huzalozáshoz szükséges rétegek számának minimalizálása.

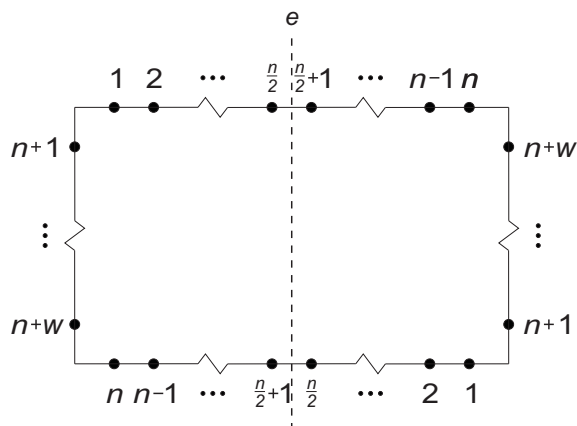
4.1. Switchboxhuzalozás a megszorítás nélküli modellben

Láttuk korábban, hogy az egysoros és a csatornahuzalozási feladat mindig megoldható a kétrétegű megszorítás nélküli modellben. Switchboxhuzalozási feladat esetében ez már nem igaz, sőt, semmilyen rögzített számú réteg nem elegendő tetszőleges switchboxhuzalozási feladat megoldásához. Erre Susanne E. Hambruch adott 1985-ben bizonyítást [4].

4.1.1. Tétel. *Tetszőleges pozitív k egészhez található olyan switchboxhuzalozási feladat, amely nem oldható meg k rétegen a megszorítás nélküli modellben.*

Bizonyítás. Tekintsük a következő példát: legyen adott egy $w \times n$ méretű lap, ennek szélein összesen $n + w$ net. Minden netnek két terminálja van, melyek a lap középpontjára szimmetrikusan helyezkednek el. Ezt a 4.1. ábra szemlélteti. Látható, hogy a függőleges szimmetriatengely (e egyenes) minden net termináljait elválasztja egymástól. Ha létezik huzalozás, ami megoldja a feladatot, akkor teljesülnie kell a $w + n \leq kw$ egyenlőtlenségnek, hiszen minden rétegen w sor metszi el az e egyenest. Ebből kapjuk, hogy $1 + \frac{n}{w} \leq k$, ahol n és w értékét tetszőlegesen megválaszthatjuk. Vagyis minden k -hoz tudunk úgy választani, hogy az egyenlőtlenség ne teljesüljön, ami bizonyítja a tételt. \square

Látható, hogy a bizonyítás azon múlik, hogy az $\frac{n}{w}$ hányadost milyen nagynak választjuk, vagyis hogy a lap mennyire nyújtott. Az is megfigyelhető, hogy a switchboxhuzalozási feladtnál n és w szerepe teljesen szimmetrikus. Célszerű ezért bevezetni az $m = \max\left(\frac{n}{w}, \frac{w}{n}\right)$ jelölést. Ezután természetes módon merül fel a kérdés, hogy rögzített m érték mellett



4.1. ábra. Példa olyan switchboxhuzalozási feladatra, ahol n és w értékeket mindig tudjuk úgy választani, hogy a feladatot ne lehessen megoldani előre rögzített k rétegen.

létezik-e olyan rétegszám, amelyen már minden feladat megoldható. Erre Boros Endre, Recski András és Wettl Ferenc adott választ 1995-ben [1].

4.1.2. Tétel. Minden switchboxhuzalozási feladat $\max\{18, 2m + 14\}$ rétegen lineáris időben megoldható a megszorítás nélküli modellben.

Megjegyzés. A cikk szerzői azt is megfogalmazták, hogy már $\lceil m \rceil + 3$ réteg is elegendő, az optimális rétegszám megtalálásának problémája azonban máig megoldatlan.

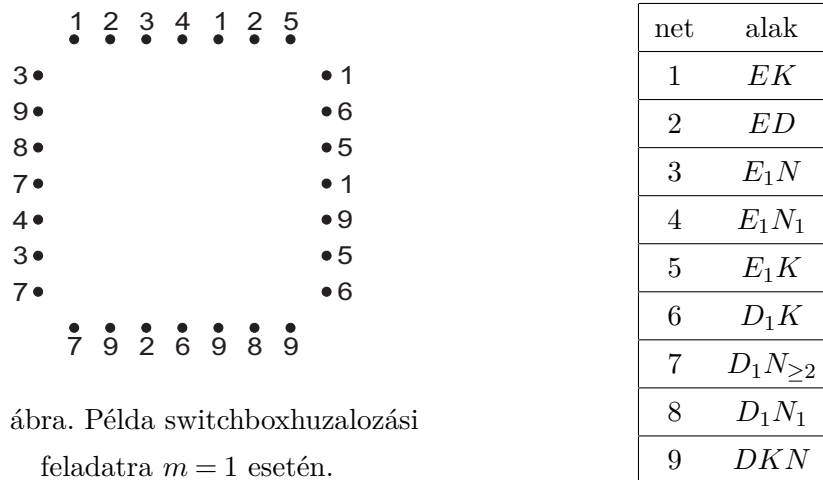
4.2. Switchboxhuzalozás a Manhattan-modellben

Ebben a szakaszban először a switchboxhuzalozási feladatnak azt a Manhattan-modellbeli speciális esetét vizsgáljuk részletesen, amikor a switchbox négyzet alakú, tehát az előzőekben bevezetett m értéke 1. Látni fogjuk, hogy a legrosszabb esetben is viszonylag kevés réteg elegendő a feladat megoldására, kevesebb, mint a 4.1.2. tételben. Ezután rátérünk az általános esetre, vagyis tetszőleges alakú switchboxhuzalozási feladat megoldását keressük. A továbbiakban Szeszlér Dávid 1997-ben erre a problémára adott bizonyítását [15] ismertetjük.

4.2.1. Tétel. Minden switchboxhuzalozási feladat megoldható lineáris időben $2\lceil m \rceil + 4$ rétegen a Manhattan-modellben.

Bizonyítás. A bizonyítást az $m = 1$ esettel kezdjük, tehát négyzet alakú a switchbox, és 6 rétegen fogjuk a huzalozást elvégezni. Idézzük fel az 1.2.7. definíciót, és vezessünk be néhány jelölést. Minden netre aszerint hivatkozunk, hogy a lap melyik oldalán vagy oldalain helyezkednek el a termináljai. Jelölje E azokat a neteket, amelyeknek csak északi termináljuk van, hasonlóan K , D vagy N rendre a csak keleti, déli vagy nyugati terminálokat tartalmazó neteket. Egy net például EK alakú, ha tetszőleges számú terminálja

van az északi és a keleti oldalon is, de a déli és a nyugati oldalon nincs terminálja; EKN alakú, ha van északi, keleti és nyugati terminálja, de nincs déli, stb. Egy netet D_1N_1 alakúnak hívunk, ha pontosan két terminálja van: egy déli és egy nyugati; E_1D alakúnak, ha pontosan egy északi és néhány (lehet, hogy egy) déli terminálja van, de keleti és nyugati nincs. Nevezzük egy netet $D_1N_{\geq 2}$ alakúnak, ha pontosan egy déli, és legalább kettő nyugati terminálja van, de északi és keleti nincs, stb.



4.2. ábra. Példa switchboxhuzalozási feladatra $m = 1$ esetén.

Tegyük fel, hogy minden net legalább két terminált tartalmaz és az EK, EN, DK, DN alakú netek közül az EK alakúak száma az egyik legnagyobb. Az első rétegen déli, a harmadik rétegen északi, a negyedik rétegen keleti, a hatodik rétegen nyugati terminálokat kötünk be a huzalozásba. Mivel a Manhattan-modellben vagyunk, ezért a második réteg vízszintes, az ötödik réteg függőleges réteg. Az egyes netekhez osszuk ki a második réteg sorait és az ötödik réteg oszlopait (ez azt jelenti, hogy a szóban forgó sorban vagy oszlopban csak annak a netnek fut huzalszakasza, amelyikhez ezt a sort vagy oszlopot rendeltük).

Kapjanak egy-egy sort a második rétegen

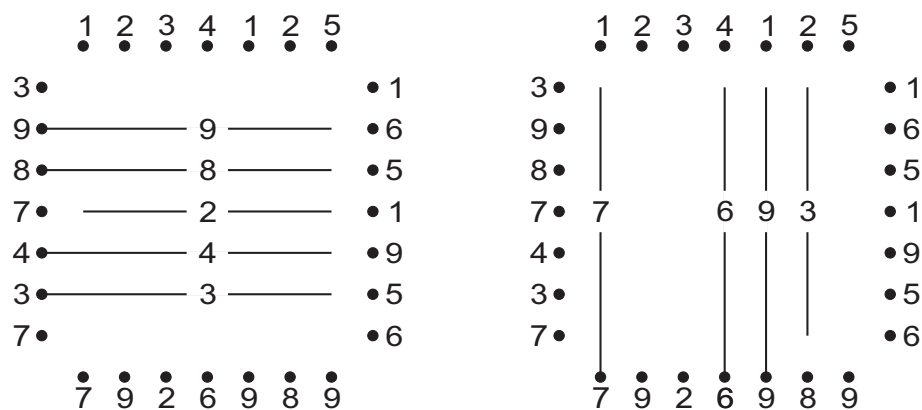
- az olyan netek, melyeknek legalább két terminálja van az északi és a déli oldalon (összesen), de nem EK alakú netek;
- az E_1N alakú netek;
- a D_1N_1 alakú netek fele (páratlan számú esetben ennek felső egészrészé).

Hasonlóan, rendeljünk az ötödik rétegen egy-egy oszlopot:

- az olyan netekhez, melyeknek legalább két terminálja van a keleti és a nyugati oldalon (összesen), de nem EK alakú netek;
- a DK_1 alakú netekhez;
- azokhoz a D_1N_1 alakú netekhez, amelyeknek nem osztottunk sort a második rétegen.

A sorok és oszlopok kiosztását mindig el tudjuk végezni, ezt az állítást a második réteg esetére részletezzük. A bizonyítás hasonlóan megy az ötödik rétegre is. Jelölje x azon netek számát, amelyeknek legalább két terminálja van az északi és a déli oldalon, de nem EK alakú netek, jelölje y az E_1N alakú netek számát, legyen a D_1N_1 alakú netek száma z , az EK alakú netek száma t . Azt kell belátnunk, hogy $x + y + \lceil \frac{z}{2} \rceil \leq w$ teljesül. Mivel az északi és déli oldalon $2n$ terminál van, ezért igaz az $2x + y + z + t \leq 2n = 2w$ egyenlőtlenség. Feltettük, hogy az EK alakú netek száma legalább annyi, mint az EN és így az E_1N alakú netek száma, ezért $y \leq t$ teljesül. Így $2x + y + z + t \leq 2x + 2y + t \leq 2w$, amiből $x + y + \lceil \frac{z}{2} \rceil \leq w$ állítás következik.

Most megmondjuk, hogy melyik nethez melyik sort és oszlopot jelöljük ki. Ha egy netnek van sora a második rétegen és a nyugati oldalon is van terminálja, akkor válasszuk azt a sort, amiben a net (egyik) nyugati terminálja van. Ezeket a sorokat a továbbiakban rögzített soroknak hívjuk. Minden más nethez tetszőleges sort választunk. Hasonlóan, ha egy netnek van oszlopa az ötödik rétegen és a déli oldalon is van terminálja, akkor válasszuk azt az oszlopot, amiben a net (egyik) déli terminálja van. Ezeket az oszlopokat a továbbiakban rögzített oszlopoknak hívjuk. Minden más nethez tetszőleges oszlopot választunk. A 4.3. ábrán rögzített sora van a 3, 4, 8, 9 neteknek a második rétegen, és rögzített oszlopa van a 6, 7, 9 neteknek az ötödik rétegen.

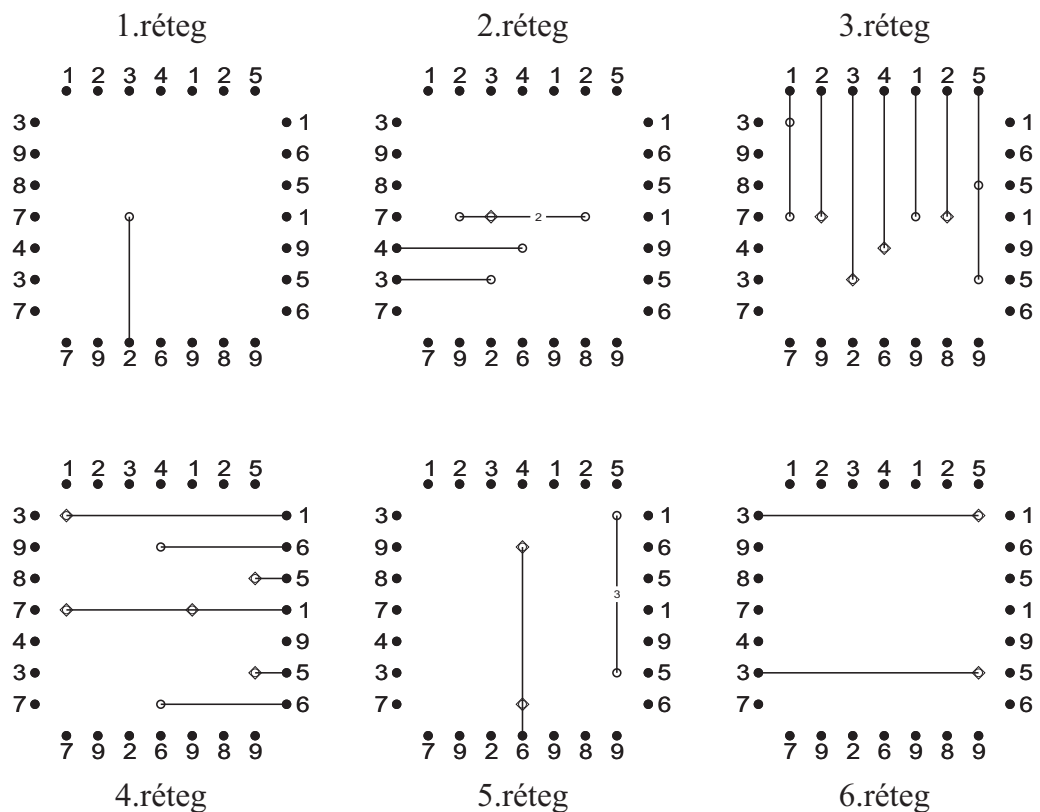


4.3. ábra. A második réteg sorainak és az ötödik réteg oszlopainak kiosztása.

Ezen előkészületek után készítsük el a huzalozást. Indítsunk függőleges huzalszakaszokat az első rétegen a déli, a harmadik rétegen az északi oldalon minden olyan terminálból, amelyhez nem tartozik rögzített oszlop az ötödik rétegen. Ezek a huzalok a szóban forgó nethez kijelölt sorig vezessenek, és a második rétegen ebben a sorban kapcsolják össze a nethez tartozó terminálokat. Így az E , D és ED alakú netek huzalozása elkészült. Ezzel analóg módon a K , N és KN alakú netek huzalozását is elvégezhetjük. Indítsuk a huzalokat a negyedik rétegen a keleti, a hatodik rétegen a nyugati oldalon elhelyezkedő terminálokból az ötödik rétegen kijelölt oszlopig, vezessük át a huzalokat az ötödik rétegre, majd kössük össze őket a net oszlopában.

Az EN alakú netek északi termináljainak összekötéséhez indítsunk függőleges huzal-

szakaszt a harmadik rétegen, a második rétegen értelemszerűen használjuk a nethez kijelölt sort. Mivel ez a sor rögzített (a net egy nyugati termináljának sora), ezért az északi terminálok egy nyugati terminállal összekapcsolhatók. Ha a netnek több nyugati terminálja is van, akkor az ötödik rétegen van a netnek kijelölt oszlopa, így a nyugati terminálokat egymással ebben az oszlopban kapcsoljuk össze. Az északi és nyugati terminálok összekapcsolása pedig a rögzített sorban lévő nyugati terminál segítségével valósult meg. Hasonlóan készül a DK alakú netek huzalozása. Egy EK alakú net huzalozásakor jelöljük ki a net egy északi és egy keleti terminálját. Az északi terminál oszlopáig vezessük a keleti terminálok vízszintes huzalszakaszát a negyedik rétegen, a kijelölt keleti terminál soráig vezessük az északi terminálok függőleges huzalszakaszát a harmadik rétegen, átmenetek segítségével a huzalozás könnyen befejezhető.



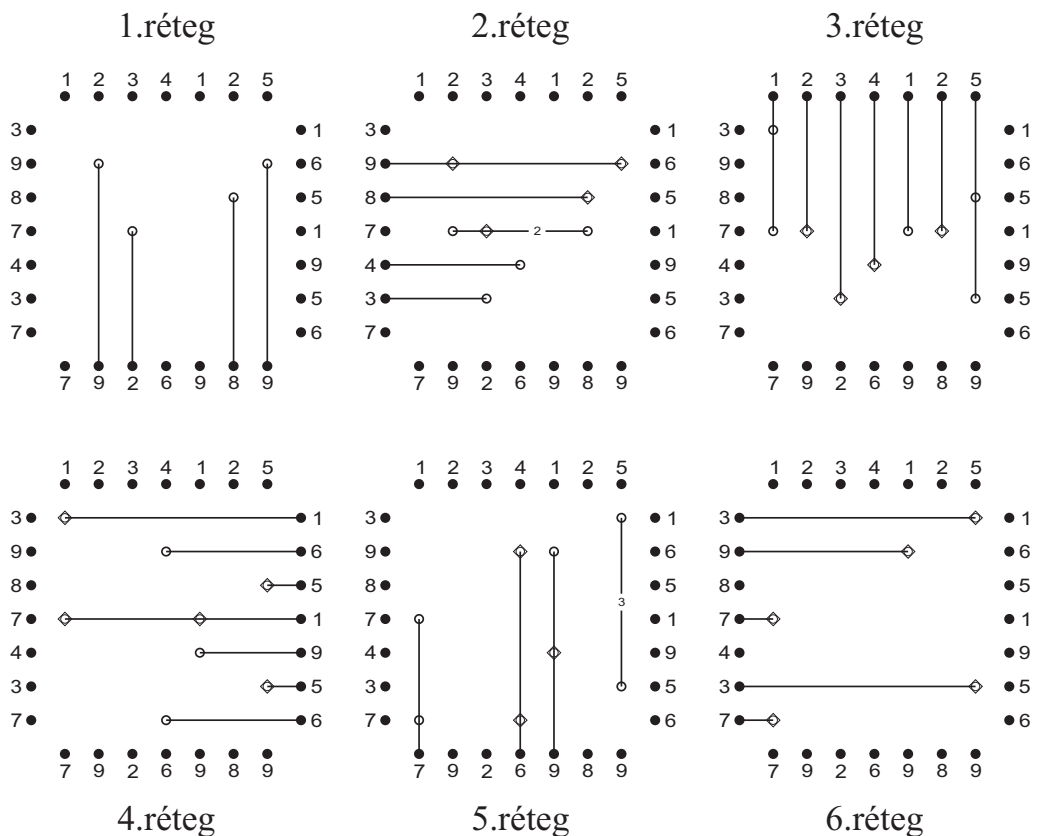
4.4. ábra. A fenti példa megoldásának egy szakasza.

Hátra van még a DN alakú netek huzalozása. A $D_{\geq 2}N_{\geq 2}$ alakú netek déli termináljaiból függőleges huzalszakaszt vezetünk a net rögzített soráig, majd átmenetekkel összekapcsoljuk őket a második rétegen lévő vízszintes huzalszakasszal. A nyugati terminálok egymás közötti kapcsolódását az ötödik rétegen lévő rögzített oszlopban futó huzalszakasz fogja biztosítani. A két csoportot a rögzített sorban lévő nyugati terminálon keresztül, vagy a rögzített oszlopban lévő déli terminálon keresztül kapcsoljuk egymáshoz. A $D_1N_{\geq 2}$ alakú netek huzalozását analóg módon készítjük el. Egy D_1N_1 alakú netnek a második rétegen van egy rögzített sora vagy az ötödik rétegen van egy rögzített oszlopa, így a

huzalozás módja visszavezethető az előbb tárgyalt két eset valamelyikére.

Az *EDN* alakú netek északi és déli termináljainak összekapcsolását a második rétegen lévő rögzített sorban végezzük, ha a netnek egy nyugati terminálja van, akkor éppen annak sorában. Ha több nyugati terminál is tartozik a nethez, akkor korábban kijelöltünk az ötödik rétegen egy oszlopot, eddig vezetjük a hatodik rétegen a nyugati terminálok huzalszakaszát, és átmenetekkel kapcsoljuk össze őket. A nyugati neteket a rögzített sorban lévő nyugati terminál kapcsolja össze. Az *EDK* alakú netek esetén annyi a különbség az előző esethez képest, hogy a második rétegen kijelölt sor nem rögzített, a keleti terminálok összekapcsolása úgy oldható meg, mint az *EK* alakú netek esetén. Ugyanezeket a konstrukciókat alkalmazva a *DKN* és az *EKN* alakú netek huzalozását is elvégezhetjük.

Végül az *EDKN* alakú netek huzalozása következik. Mivel egy ilyen netnek a második és az ötödik rétegen is van rögzített sora illetve oszlopa, így az északi és a déli terminálokat a második, a keleti és a nyugati terminálokat az ötödik rétegen összekapcsoljuk, és a két csoportot egymással az $D_{\geq 2}N_{\geq 2}$ alakú neteknél leírt módon.



4.5. ábra. A fenti példa megoldása.

Tekintsük most az általános esetet, vagyis m tetszőleges, és tegyük fel, hogy $w \geq h$ teljesül. Egészítsük ki az előző konstrukciót: az első réteg fölé tegyünk felváltva vízszintes és függőleges rétegeket. A vízszintes rétegek a fentiekben tárgyalt „második” réteg szerepét töltik be, a függőleges rétegek pedig felváltva az „első” és „harmadik” réteget. Ezután a

bizonyítás ugyanúgy megy, mint az $m = 1$ esetre. Már csak azt kell meggondolnunk, hogy hány darab „második” réteget kell használni, hogy a sorok kiosztását el tudjuk végezni. A fenti jelöléseket használva teljesülnie kell a $x + y + \lceil \frac{z}{2} \rceil \leq s \cdot w$ egyenlőtlenségnek, ahol s a szükséges „második” rétegek száma. Tudjuk, hogy $2x + y + z + t \leq 2x + 2y + t \leq 2n$ és ebből $x + y + \lceil \frac{z}{2} \rceil \leq n$, vagyis $s = \lceil \frac{n}{w} \rceil$ választás jó lesz. Tehát $2 \lceil m \rceil + 4$ réteg biztosan elegendő a huzalozáshoz.

A linearitás bizonyítására nem térünk ki. □

5. fejezet

Egy aktív rétegű huzalozási feladat

Kezdetben a VLSI áramkörök részletes huzalozását két dimenziós problémának tekintették, amelyet fokozatosan több rétegre is ki tudtak terjeszteni. A huzalozási technikák fejlődése azonban lehetővé tette, hogy valódi három dimenziós feladatot is meg tudjunk fogalmazni. Ebben a fejezetben a részletes huzalozásnak azt az esetét tárgyaljuk, amikor a terminálokat egy síkbeli $w \times n$ méretű téglalap rácspontjaiba helyezzük el. Az egyes netek termináljai között az összeköttetést csúcsdiszjunkt utakkal valósítjuk meg. Ezek a huzalok a síkrács feletti h magasságú kockarács éleit használják. Ez az egy aktív rétegű huzalozási probléma, rövidítve SALRP (single active layer routing problem). A fő cél, hogy adott w, n értékek mellett optimalizáljuk a h magasságot. Külön foglalkozunk azzal az esettel, amikor minden net két terminált tartalmaz, majd áttérünk a többterminálos esetre.[14]

5.1. Definíciók

5.1.1. Definíció. *Adott egy $w \times n$ méretű síkrács, amely w sort és n oszlopot tartalmaz. Ezen lap néhány rácspontján (esetleg az összesen) helyezkednek el a terminálok. Az egy aktív rétegű huzalozási feladat páronként diszjunkt $N = \{N_1, N_2, \dots, N_t\}$ netek halmazából áll. Azt mondjuk, hogy a huzalozási feladat w szélességű és n hosszúságú.*



5.1. ábra. Két egyszerű példa megoldhatatlan feladatra.

Már egészen kis példán is látható, hogy egy probléma nem mindig oldható meg (tetszőlegesen nagy magasságot megengedve sem). Az 5.1. ábrán látható példák mutatják, hogy nagyon egyszerű megoldhatatlan feladatot konstruálni. Éppen ezért célszerű bevezetni egy további fogalmat, amely már biztosítja azt, hogy minden feladatot meg tudjunk oldani.

5.1.2. Definíció. *Osszunk fel minden egymást követő oszlop közötti részt s_n egyenlő részre. Vezessünk be $s_n - 1$ extra oszlopot minden szomszédos oszlop közé és a jobb szélső oszlop jobb oldalára is. Hasonlóan definiáljuk az s_w felosztást a sorok között. Így kibővítettük a rácsot $w' \times n' = (w \cdot s_w) \times (n \cdot s_n)$ méretűre.*

Megjegyzés. Látni fogjuk (5.1.5. lemma), hogy ha megengedjük az extra sorok és oszlopok bevezetését, vagyis $s_n \geq 2, s_w \geq 2$, akkor minden egy aktív rétegű huzalozási feladatot meg tudunk oldani. Felmerül a kérdés, hogy mit tudunk abban az esetben, ha $s_n = 1$ és $s_w \geq 2$ (terjeszkedni csak a lap szélességében tudunk, a hosszúság rögzített.). Ezzel most nem foglalkozunk, részletesen lásd [13].

5.1.3. Definíció. *Egy $N = \{N_1, N_2, \dots, N_t\}$ egy aktív rétegű huzalozási feladat megoldása adott s_w és s_n értékekre páronként pontdiszjunkt $T = \{T_1, T_2, \dots, T_t\}$ összefüggő részgráfok (Steiner-fák) rendszere egy $(w \cdot s_w) \times (n \cdot s_n) \times h$ méretű kockarácson. Továbbá teljesül, hogy a terminálokat csak az eredeti síkrács tartalmazza és T_i pontosan N_i net termináljait köti össze ($N_i \subset V(T_i)$ minden $1 \leq i \leq t$).*

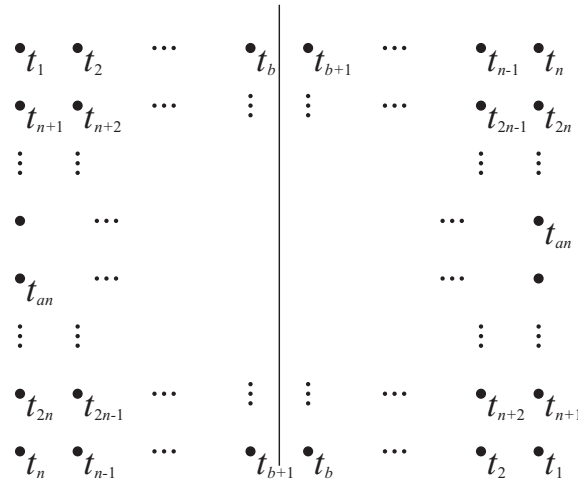
A célunk az, hogy minél kisebb magasságban oldjunk meg egy huzalozási feladatot. Tehát az eredeti lappal párhuzamos, a magasságra merőleges $(w \cdot s_w) \times (n \cdot s_n)$ méretű rétegek számát szeretnénk minimalizálni. A következő két lemmában egy alsó és egy felső becslést adunk h -ra.

5.1.4. Lemma. *Minden n -hez létezik olyan egy aktív rétegű huzalozási feladat, amely nem oldható meg $\frac{n}{2s_w}$ -nél kisebb magasságban.*

Bizonyítás. Legyen $w=2a$ és $n=2b$. Tekintsük a következő példát: minden net két terminált tartalmaz, melyek a lap középpontjára szimmetrikusan helyezkednek el (5.2. ábra). A netek száma tehát $a \cdot n$. A függőleges szimmetriatengely minden net termináljait elválasztja egymástól. Ezért akármelyik $s_w \cdot w$ szélességű és h magasságú huzalozás eleget tesz az $s_w \cdot w \cdot h \geq a \cdot n$ egyenlőtlenségnek. Mivel $s_w \cdot w \cdot h = s_w \cdot 2a \cdot h$, így átrendezéssel kapjuk, hogy $h \geq \frac{n}{2s_w}$. \square

5.1.5. Lemma. *Ha $s_w \geq 2$ és $s_n \geq 2$, akkor minden egy aktív rétegű huzalozási feladat megoldható legfeljebb $h \leq \frac{wn}{2}$ magasságban.*

Bizonyítás. Jelöljük ki minden nethez egy réteget. Minden terminálból indítsunk egy huzalt a hozzá kijelölt rétegig. Egy-egy net termináljainak összekapcsolása az egyes rétegeken triviálisan megvalósítható, ha csak az extra sorokat és oszlopokat használjuk. Így biztosan nem keresztezzük egy másik net huzalrészét. Ha figyelmen kívül hagyjuk az olyan neteket, amelyeknek egy terminálja van, akkor a netek száma legfeljebb $\frac{wn}{2}$, mivel minden nethez legalább két terminál tartozik. Ebből következik, hogy a magasság is legfeljebb $\frac{wn}{2}$. \square



5.2. ábra. Példa olyan egy aktív rétegű huzalozási feladatra, amely nem oldható meg $\frac{n}{2s_w}$ -nél kisebb magasságban, ahol n előre rögzített.

5.2. Két-terminálos netek huzalozása

Először azzal az esettel foglalkozunk, amikor minden net pontosan két terminálból áll. A tételek bizonyításában bemutatott ötleteket és konstrukciókat később felhasználjuk a többterminálos neteket tartalmazó probléma megoldásában. A továbbiakban az egy aktív rétegű huzalozási feladatra a SALRP rövidítést használjuk.

5.2.1. Definíció. *A kockarács w szélességével párhuzamos huzalt a továbbiakban w irányú huzalszakasznak nevezzük. Hasonlóan, a hosszúsággal párhuzamos huzalt n irányú huzalszakasznak, az eredeti lapra merőlegeset pedig h irányú huzalszakasznak hívjuk.*

5.2.2. Definíció. *Egy két terminálból álló netet triviálisnak hívunk, ha mindkét terminálja ugyanabban a sorban van. Ha ez egy netre nem teljesül, akkor az nemtriviális.*

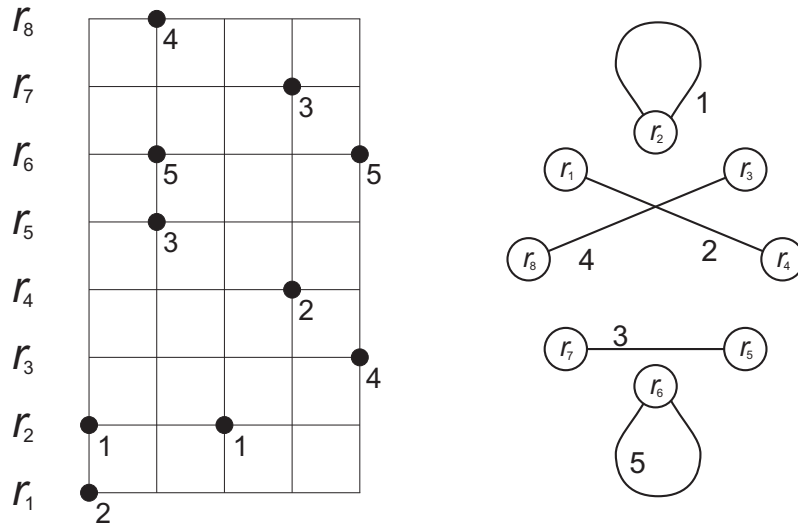
Megjegyzés. Az 5.3. ábrán 1 és 5 triviális netek, 2, 3, 4 nemtriviális netek.

5.2.3. Tétel. *Ha bármely net két terminált tartalmaz, akkor a SALRP netjei $\left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor$ osztályba sorolhatók úgy, hogy minden osztály mint SALRP meghuzalozható $s_n = \left\lceil \frac{w}{2n} \right\rceil$ és $h=2$ magasságban.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy adott egy SALRP w sorral és n oszloppal. Legyenek a sorok r_1, r_2, \dots, r_w . Definiáljunk egy G gráfot a következőképpen: csúcsai legyenek r_1, r_2, \dots, r_w , élei feleljenek meg a neteknek. Ha egy net két terminálja r_i és r_j sorokban van, adjuk hozzá az $r_i r_j$ élet G -hez. Persze G tartalmazhat hurokélet, ami abban az esetben fordul elő, ha egy net két terminálja ugyanabban a sorban van, és párhuzamos éleket, ez akkor lehetséges, ha van két net, amelyeknek termináljai ugyanabban a sorokban vannak.

A G gráf definíciójából következik, hogy minden pont foka legfeljebb n , hiszen minden sorban legfeljebb n különböző nethez tartozó terminál lehet. Shannon tétele miatt a gráf

éleit ki tudjuk színezni $\lfloor \frac{3n}{2} \rfloor$ színnel (vagyis semelyik csúcsban sem találkozik két azonos színű él). Mivel minden él egy-egy netnek felel meg, ezért a színezés a netek egy jó partícióját adja. Szükséges még, hogy egy ilyen osztály meghuzalozható $s_n = \lfloor \frac{w}{2n} \rfloor$ és $h = 2$ magasságban.

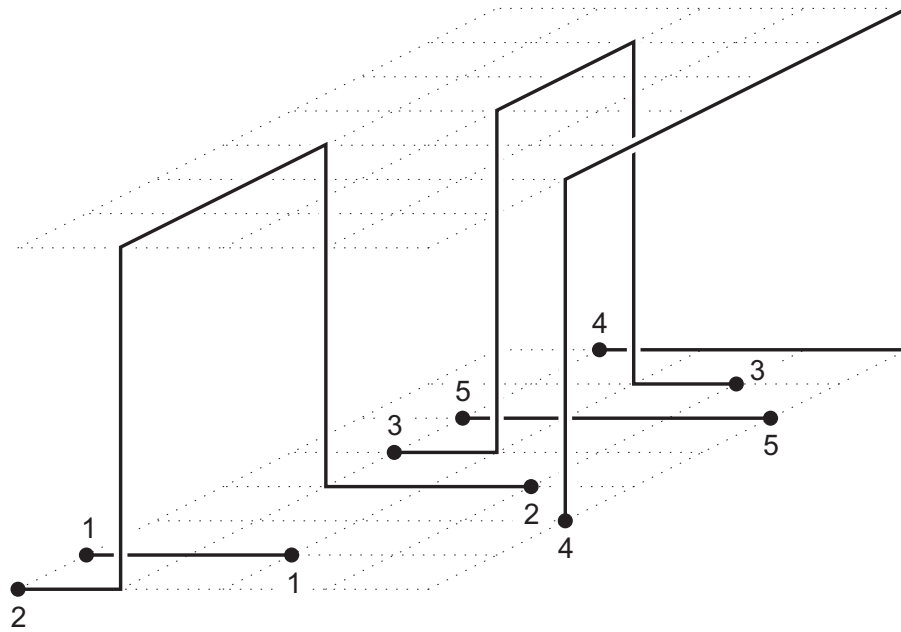


5.3. ábra. Egy aktív rétegű huzalozási feladat $w = 8$, $n = 5$ értékekkel és a hozzá definiált G gráf. A gráf élein annak a netnek a száma szerepel, amelyiknek termináljai az él két végpontjának megfelelő sorokban vannak.

Tegyük fel, hogy az i . osztályt az $N_{i_1}, N_{i_2}, \dots, N_{i_k}$ netek alkotják. G konstrukciójából és a színezésből következik, hogy minden sor legfeljebb egy terminált tartalmaz az $N_{i_1}, N_{i_2}, \dots, N_{i_k}$ netek termináljai közül, vagy ha egy net mindkét terminálját, akkor az egy triviális net.

A triviális netek huzalozását az alsó rétegen végezzük el abban a sorban, amelyikben a net elhelyezkedik. A nemtriviális neteknek jelöljük ki egy tetszőleges oszlopot a felső rétegen. Ez legyen a net oszlopa. Mivel a nemtriviális netek száma legfeljebb $\frac{w}{2}$, és az oszlopok száma pedig $n \cdot s_n \geq n \cdot \frac{w}{2n} = \frac{w}{2}$, ezért ilyen kiosztás létezik. A huzalozást végezzük a következőképpen: az N_{i_j} net két termináljából az alsó rétegen vezessünk egy-egy n irányú huzalszakaszt a terminálok sorában a nethez kijelölt oszlopig. Ebben az oszlopban a két sort a felső rétegen kössük össze egy w irányú huzalszakasszal, a rétegek között pedig egység hosszú h irányú huzalrész használgunk. \square

Megjegyzés. Az 5.3. ábrán látható feladat G gráf élei egy színnel színezhetők, ezért az összes net egy osztályt alkot. Ennek huzalozása $s_n = \lfloor \frac{w}{2n} \rfloor = \lfloor \frac{8}{10} \rfloor = 1$ és $h = 2$ értékek mellett az 5.4. ábrán látható. A triviális neteket az alsó rétegen abban a sorban huzalozzuk, amelyiken helyet foglalnak, a nemtriviális netek termináljait a felső rétegen a nethez kiosztott oszlopban kötjük össze.



5.4. ábra. A fenti feladat megoldása.

5.2.4. Definíció. *Elsődleges soroknak nevezzük azokat a sorokat, amelyek a terminálokat tartalmazzák. Azokat a sorokat, amelyek nem elsődleges sorok másodlagos soroknak hívjuk. Hasonlóan definiáljuk az elsődleges és másodlagos oszlopokat.*

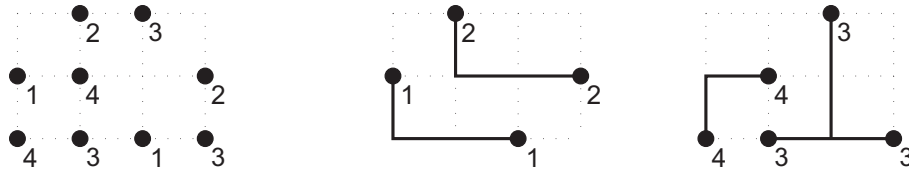
5.2.5. Tétel. *Tegyük fel, hogy adott egy SALRP, amelynek netjei h_1 csoportra oszthatók úgy, hogy minden egyes csoport mint SALRP megoldható egy adott s_w , s_n és h_0 magasságra. Ekkor az eredeti SALPR megoldható $s_w + 1$, $s_n + 1$ és $h = h_1 \cdot h_0$ magasságban.*

Bizonyítás. Minden terminálból vezessünk egy „hosszú” h irányú huzalszakaszt. Az egyes osztályokat külön-külön h_0 egymást követő rétegen huzalozzunk majd meg. Mivel összesen h_1 osztály van, így a huzalozás $h_1 \cdot h_0$ rétegen megvalósítható.

Egy osztály huzalozását a következőképpen végezzük: a huzalozásra kijelölt rétegek közül a legalsóra virtuális terminálokat helyezünk. Ezek a virtuális terminálok egy egységgel jobbra és hátra (tehát átlósan jobbra) helyezkednek el az eredetiekhez képest. Mivel a másodlagos sorok száma $((s_w + 1) - 1) \cdot w = s_w \cdot w$, ugyanígy a másodlagos oszlopok száma $((s_n + 1) - 1) \cdot n = s_n \cdot n$, ezért egy csoport huzalozása a tétel feltételei szerint elvégezhető az elsődleges sorokat és oszlopokat nem használva. Ha így huzalozunk, akkor ebben az esetben biztosan elkerüljük, hogy egy másik csoportba tartozó net h irányú huzalszakaszát keresztezzük, hiszen ebben a térrészben az csak elsődleges oszlopot használ. \square

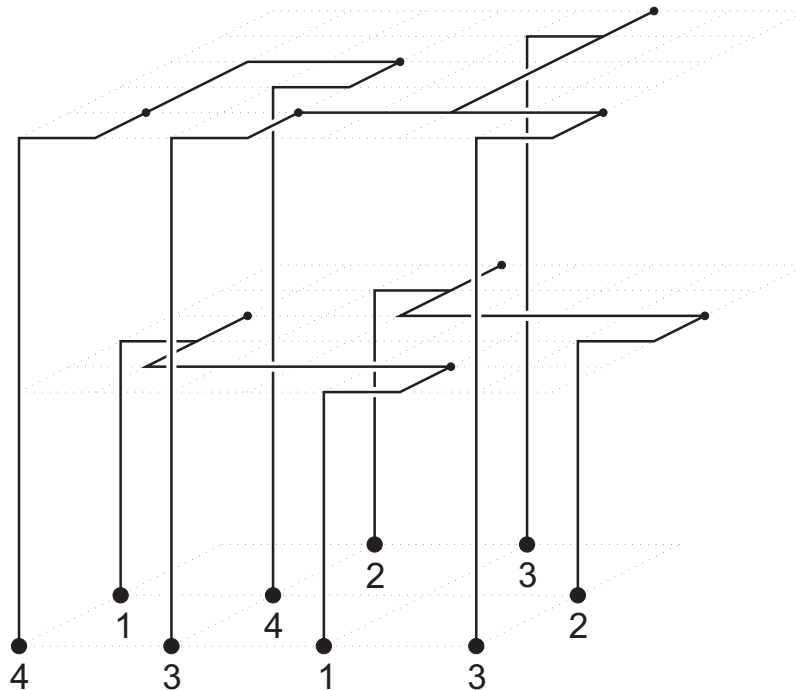
Megjegyzés. Érdemes megfigyelni, hogy az előző tételben nem követeltük meg, hogy a SALRP két-terminálos neteket tartalmazzon.

Megjegyzés. Az 5.5. ábrán adott SALRP netjeit két csoportba tudjuk osztani ($h_1 = 2$), mindkét csoport megoldható $s_w = 1$, $s_n = 1$, $h_0 = 1$ magasságban. Az 5.2.5. tétel szerint a



5.5. ábra. Példafeladat.

feladatot $s_w = 1 + 1 = 2$, $s_n = 1 + 1 = 2$, $h = 2 \cdot 1 = 2$ meg lehet oldani. Egy ilyen huzalozás látható az 5.6. ábrán. A középső és felső rétegen lévő kisebb pöttyök a virtuális terminálok helyeit jelölik.



5.6. ábra. A példafeladat megoldása.

5.2.6. Tétel. *Ha a SALRP két-terminálos neteket tartalmaz, akkor a feladat megoldható $s_n = \lceil \frac{w}{2n} \rceil + 1$, $s_w = 2$ és $h = 3n$ magasságban.*

Bizonyítás. Az 5.2.3. tétel szerint a neteket csoportosíthatjuk $\lceil \frac{3n}{2} \rceil$ részre, minden csoportot $s_n = \lceil \frac{w}{2n} \rceil$ mellett $h=2$ magasságban meg tudunk huzalozni. Alkalmazzuk az 5.2.5. tételt $h_1 = \lceil \frac{3n}{2} \rceil$ és $h_0=2$. Tehát a huzalozási feladat $h=h_1 \cdot h_0=3n$ magasságban megoldható. \square

5.2.7. Következmény. *Ha minden net két terminált tartalmaz, akkor a SALRP megoldható $s_w = s_n = 2$ és $h = 3 \max(n, w)$ magasságban.*

Bizonyítás. Szimmetria okok miatt feltehetjük, hogy $n \geq w$. Az állítás következik az 5.2.6. tételből. \square

Ha n és w értéke nagyon eltér egymástól, vagyis a lap egy nyújtott téglalap, akkor két szélsőséges eset fordulhat elő. Láthatjuk, hogy az 5.2.6. tétel szerint $n \gg w$ esetén

$s_n = s_w = 2$, viszont a magasság nagy ($h = 3n$). (Ugyanezt fogalmazzuk meg az előző következményben is.) Ellenkező esetben, ha $w \gg n$, akkor s_n lesz nagy és $h = 3n$ viszonylag kicsi. A következő tétel az ilyen rendkívüli esetekre kínál kompromisszumot.

5.2.8. Tétel. *Ha a SALRP netjei két terminált tartalmaznak, akkor a feladat megoldható $s_n \geq \lceil \frac{w}{4n} \rceil + 1$, $s_w = 2$ és $h = \lfloor \frac{9n}{2} \rfloor$ magasságban.*

Bizonyítás. A tétel bizonyításához felhasználunk néhány eddigi konstrukciót. Vegyük a netek az 5.2.3. tételben megadott felosztását. Tehát azt a konstrukciót, amely a neteket $\lfloor \frac{3}{2n} \rfloor$ osztályba osztja. Ezt az osztályozást használva bizonyítjuk a tételt. Minden osztályt $s_n \geq \lceil \frac{w}{4n} \rceil$ és $h = 3$ fogunk meghuzalozni. Ha ez sikerül, akkor az 5.2.5. tétel miatt bizonyítottuk az állítást.

Tehát minden osztály huzalozását most három rétegen a következőképpen végezzük. Minden terminálból egy hosszú h irányú huzalszakaszt vezetünk. Az osztályhoz tartozó három réteg közül a középsőn helyezük el a virtuális terminálokat. A triviális neteket (vagyis azon neteket, amelyeknek mindkét terminálja ugyanabban a sorban van) ezen a középső lapon huzalozzuk, ahogy az 5.2.3. tétel bizonyításában. Minden nemtriviális nethez kiválasztjuk a felső és az alsó lap közül az egyiket tetszőlegesen, ezen fogjuk a termináljait összekötni. Ezen kívül választunk egy tetszőleges oszlopot is, minden netnek különbözőt. Mivel összesen legfeljebb $\frac{w}{2}$ net van egy osztályban, és az oszlopok száma $2n \cdot \lceil \frac{w}{4n} \rceil \geq \frac{w}{2}$, ezért ezt meg tudjuk tenni. Egy net két termináljának összekötéséhez indítsunk egy-egy n irányú huzalszakaszt a két terminálból a nethez tartozó oszlopig, vezessük át a hozzá választott alsó vagy felső rétegre h irányú huzalszakasszal, majd egy w irányú huzalszakasszal kössük össze őket. \square

Megjegyzés. Érdemes megfigyelni, hogy a feladatok megoldásában egy net termináljainak összekötésekor a huzalokban legfeljebb 10 kanyar van: a termináloktól a virtuális terminálokig 2-2, a kijelölt oszlopig 1-1, a szomszédos rétegre lépéskor 2-2. Két huzalozás „jóságának” összehasonlításánál ezt is figyelembe vehetjük.

5.3. Többterminálos netek huzalozása

A két-terminálos netek huzalozásának vizsgálata után térjünk át az általános esetre, vagyis amikor az egy nethez tartozó terminálok száma tetszőleges lehet. Mivel gyakorlati problémákban a sok terminálból álló netek száma viszonylag kicsi, ezért az előző részben tárgyalt megoldások kis módosítással alkalmazhatók. Azokat a neteket – számukat jelölje e –, amelyek kettőnél több terminált tartalmaznak egy-egy külön rétegen huzalozzuk meg. Ekkor például az 5.2.7. következmény szerint a huzalozás $h=3(n, w)+e$ magasságban megoldható.

Térjünk vissza az általános esetre, a továbbiakban a többterminálos netek huzalozását vizsgáljuk. Látni fogjuk, hogy a feladat nagyon könnyen visszavezethető a két-terminálos esetre.

5.3.1. Definíció. Rögzítsük minden N net termináljait $N = \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$ tetszőleges sorrendben. A szomszédos $\{t_i, t_{i+1}\}$ ($i = 1, 2, \dots, k-1$) terminálpárokat nevezzük az N net rész-netjeinek.

Megjegyzés. Világos, hogy minden netnek eggyel kevesebb rész-netje van, mint terminálja.

5.3.2. Tétel. Minden SALRP megoldható $s_n \geq \lceil \frac{w}{2n} \rceil + 1$, $s_w = 2$ és $h = 6n$ magasságban.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy adott egy SALRP w sorral és n oszloppal. Legyenek a sorok r_1, r_2, \dots, r_w . Definiáljunk egy G gráfot a következőképpen: csúcsai legyenek r_1, r_2, \dots, r_w , élei feleljenek meg az rész-neteknek. Ha egy rész-net két terminálja r_i és r_j sorokban van, adjuk hozzá az $r_i r_j$ élet G gráfhoz. Persze G tartalmazhat hurokélet, ami abban az esetben fordul elő, ha egy rész-net két terminálja ugyanabban a sorban van, és párhuzamos éleket, ez akkor lehetséges, ha van két rész-net, amelyeknek termináljai ugyanabban a sorokban vannak.

A G gráf definíciójából következik, hogy minden pont foka legfeljebb $2n$, hiszen minden sorban legfeljebb n terminál lehet, és egy terminál legfeljebb két rész-nethez tartozhat. Shannon tétele szerint a gráf éleit ki tudjuk színezni $\lceil \frac{3}{2} \cdot 2n \rceil = 3n$ színnel.

Tehát az rész-neteket $3n$ csoportba osztottuk. Ezután azt kell megmutatnunk, hogy minden csoportot meg tudunk huzalozni két rétegen. (Vagyis az egész feladat $6n$ magasságban megoldható.)

Minden csoporthoz jelöljük ki két egymást követő réteget, ezen végezzük el a rész-netek huzalozását: minden t terminálból vezessünk egy h irányú huzalszakaszt azoknak a rész-neteknek az osztályához tartozó két réteg közül az alsóig, amelyben t benne van. (Mivel t két rész-nethez is tartozhat, ezért akkor annak az osztálynak az alsó rétegéig, amely feljebb van.) Az alsó rétegen helyezük el a virtuális terminálokat, és a másodlagos sorokat és oszlopokat használva kössük össze őket, ahogy az 5.2.5. tételben is. A konstrukcióból az is kiderül, hogy ha ugyanazon net két rész-netje különböző csoportba kerül, akkor azokat összeköthetjük úgy, hogy más nethez tartozó huzalt nem keresztezünk. \square

5.3.3. Következmény. Minden SALRP megoldható $s_w = 2$, $s_n = 2$, $h = 6 \max(n, w)$ magasságban.

Bizonyítás. Szimmetria okok miatt feltehetjük, hogy $n \geq w$. Az állítás következik az 5.3.2. tételből. \square

5.3.4. Tétel. Minden SALRP megoldható $s_n \geq \lceil \frac{w}{4n} \rceil + 1$, $s_w = 2$, $h = 9n$.

5.4. Összefoglalás

A huzalozás bonyolultságának megállapításához szükségünk van arra, hogy egy gráf él-színezését milyen nagyságrendben tudjuk elvégezni. Minden mást $O(A)$ időben, azaz a

síklap méretében ($A = w \cdot n$) lineáris nagyságban meg tudunk valósítani. A netek számát jelölje t . Ha az éleket Shannon tétele szerint $\left\lfloor \frac{3}{2} \cdot \Delta \right\rfloor$ színnel színezzük, akkor a fent bemutatott algoritmusok futásideje $O(t \cdot (w+n))$, vagy a bemenet részét képező A függvényében $O(A^{3/2})$.

Az élszínezéshez használhatjuk a mohó algoritmust is, ebben az esetben a szükséges színek száma $2\Delta - 1$ is lehet. Ekkor persze a huzalozás magassága növekszik, viszont még mindig lineáris marad $\max(n, w)$ függvényében. Következésképpen a huzalozási algoritmus lineáris A -ban, ami része az inputnak.

Tekintsük át az *egy aktív rétegű huzalozási feladat* bemutatott algoritmusait. Láttuk, hogy $s_n, s_w \geq 2$ esetén a feladat mindig megoldható, és $h = O(\max(n, w))$ magasságú huzalozás lineáris időben található. A konstans szorzó függ attól, hogy a két-terminálos modellben dolgozunk, vagy megengedjük, hogy egy netnek kettőnél több terminálja is legyen, tehát a többterminálos modellt alkalmazzuk, illetve s_n, s_w értékektől.

Egy lehetséges összehasonlítása a konstrukcióknak, ha megvizsgáljuk, hogy a különböző esetekben a huzalozás mekkora térrészt foglal el. Ezt a $(w \cdot s_w) \cdot (n \cdot s_n) \cdot h$ klasszikus térfofogatképlettel számítjuk ki. Ahogy arról már szó volt, szimmetriai okok miatt feltehetjük, hogy $w \geq n$. Vezessük be továbbá a $m = \frac{w}{n}$ jelölést. Az alábbi táblázatban láthatjuk, hogy melyik konstrukció szerinti huzalozással mekkora térrészben tudjuk a feladatot megoldani.

	2-terminálos eset		többterminálos eset	
	5.2.6. tétel	5.2.8. tétel	5.3.2. tétel	5.3.4. tétel
$m \leq 2$	$12wn^2$	$18wn^2$	$24wn^2$	$36wn^2$
$2 < m \leq 4$	$18wn^2$	$18wn^2$	$36wn^2$	$36wn^2$
$4 < m \leq 6$	$24wn^2$	$27wn^2$	$48wn^2$	$54wn^2$
$6 < m \leq 8$	$30wn^2$	$27wn^2$	$60wn^2$	$54wn^2$
$8 < m \leq 10$	$36wn^2$	$36wn^2$	$72wn^2$	$72wn^2$
$10 < m \leq 12$	$42wn^2$	$36wn^2$	$84wn^2$	$72wn^2$
$12 < m \leq 14$	$48wn^2$	$45wn^2$	$96wn^2$	$90wn^2$

Érdemes megfigyelni, hogy az 5.2.6. tétel, az 5.2.7. következmény, az 5.3.2. tétel és az 5.3.3. következmény megoldásai a Manhattan-modellben vannak. Az 5.2.8. tétel és az 5.3.4. tétel megoldásaira csak az teljesül, hogy egy rétegen nincsenek w és n irányú huzalok is, viszont ezek nem felváltva helyezkednek el a szomszédos rétegeken.

Irodalomjegyzék

- [1] E. Boros, A. Recski, F. Wettl: Unconstrained multilayer switchbox routing, *Annals of Operations Research* 58, 1995, pp. 481–491.
- [2] T. Gallai: His unpublished results have been announced in A. Hajnal, J. Surányi (Eds.), Über die Auflösung von Graphen in vollständige Teilgraphen, *Annales Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math.* 1, 1958, pp. 115–123.
- [3] R. Greenberg, J. Jájá, S. Krishnamurty: On the difficulty of Manhattan channel routing, *Information Processing Letters* 44, 1992, pp. 281–284.
- [4] S. E. Hambrusch: Channel routing algorithms for overlap models, *IEEE Trans. Computer-Aided Design of Integrated Circuit Systems CAD-4*, 1985, pp. 23–30.
- [5] D.S. Johnson: The NP-completeness column: an ongoing guide, *J. Algorithms* 3, 1982, pp. 381–395.
- [6] D.S. Johnson: The NP-completeness column: an ongoing guide, *J. Algorithms* 5, 1984, pp. 147–160.
- [7] Jordán Tibor, Recski András, Szeszlér Dávid: *Rendszeroptimalizálás*, Typotex, 2011, 138–155. oldal
- [8] M. Marek-Sadowska, E. S. Kuh: General channel-routing algorithm, *Proc. IEE (GB)* 130, 1983, pp. 83–88.
- [9] M. Middendorf: Manhattan channel routing is NP-complete under truly restricted settings, *Chicago Journal of Theoretical Computer Science*, 1996–6.
- [10] A. Recski, F. Strzyzewski: Vertex-disjoint channel routing on two layers, in: R. Kannan, W. R. Pulleyblank (Eds.), *Integer programming and combinatorial optimization*, University of Waterloo Press, Waterloo, Ontario, 1990, pp. 397–405.
- [11] A. Recski: Minimax results and polynomial algorithms in VLSI routing, in: M. Fiedler, J. Nešetřil (Eds.), *Combinatorics, Graphs and Complexity*, Ann. Discrete Math, 1992, pp. 261–273.

-
- [12] A. Recski: Some polynomially solvable subcases of the detailed routing problem in VLSI design, *Discrete Applied Mathematics* 115, 2001, pp. 199–208.
- [13] A. Recski, D. Szeszlér: 3-dimensional single active layer routing, *Discrete and Computational Geometry*, Lecture Notes in Computer Science 2098, Springer, Berlin, 2001, pp. 318–329.
- [14] A. Recski, D. Szeszlér: Routing vertex disjoint Steiner-trees in a cubic grid and connections to VLSI, *Discrete Applied Mathematics* 155 issue 1, 2007, pp. 44–52.
- [15] D. Szeszlér: Switchbox routing in the multilayer Manhattan model, *Annales Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math* 40, 1997, pp. 155–164.
- [16] T. G. Szymanski: Dogleg channel routing is NP-complete, *IEEE Trans. Computer-Aided Design of Integrated Circuit Systems* CAD-4, 1985, pp. 31–41.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném kifejezni köszönetemet témavezetőmnek, Recski Andrásnak, aki felkeltette érdeklődésemet a téma iránt. Sok hasznos segédanyaggal és tanáccsal látott el, kérdéseimre mindig körültekintően válaszolt és segített a dolgozat tartalmi és stilisztikai hibáinak korrigálásában.

Szeretném megköszönni Szüleimnek a rengeteg biztatást és támogatást, amellyel hozzájárulnak tanulmányaim sikerességéhez. Köszönöm, hogy mindenben mellettem állnak. Köszönettel tartozom Barátaimnak bátorításukért és a sok segítségért, melyet a szakdolgozat írása közben kaptam.