Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Bősz Péter

Sokk-modellek

BSc Szakdolgozat

Témavezető:

Móri Tamás

Valószínűségelméleti és Statisztika tanszék

Budapest, 2013

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Móri Tamásnak, hogy elvállalta a konzulensi teendőket. Köszönöm, hogy mindig rendelkezésemre állt és szakmai tanácsaival hozzájárult a szakdolgozatom elkészüléséhez.

Valamint köszönöm családomnak és barátaimnak, hogy mindig mellettem álltak és segítették a munkámat.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Sokk-modellek alatt olyan rendszereket értünk, amelyeket sokkok érnek valamilyen Poisson-folyamat szerint (ez lehet más is) és ezen rendszerek élettartamát vizsgáljuk úgy, hogy hányadik sokk után megy tönkre. Feltesszük, hogy ez véges időn belül bekövetkezik.

Az első fejezetben bevezetünk néhány alapdefiníciót, ami szükséges a sokk-modellek vizsgálatához. Például túlélésfüggvény, néhány öregedő eloszláscsalád és koherens függvény. Láthatunk tételeket is a különböző osztályokkal kapcsolatban.

A második fejezetben sokk-modelleket vizsgálunk két, illetve többváltozós esetben. Ez azt jelenti, hogy nem csak egy rendszert érnek sokkok, hanem kettőt vagy akár többet is. Meghatározzuk a rendszerek együttes túlélésfüggvényét a első fejezethez hasonló módon. Ezt három öregedő eloszláscsalád esetén vizsgáljuk. Feltételeket adunk, amelyek elegendőek ahhoz, hogy a rendszereinket besoroljuk egy többváltozós öregedő osztályba. Ilyen tételeknek néhány bizonyítását is bemutatjuk.

A harmadik és egyben utolsó fejezetben néhány mondatban említést teszünk a dolgozatban nem vizsgált osztályokról is. Áttekintjük a teljesség igénye nélkül, hogy mely kutatók foglalkoztak ezzel a témával és milyen cikkek, könyvek jelentek meg.

1. fejezet

Élettartam-vizsgálat

Ebben a fejezetben az élettartam-eloszlások vizsgálatához szükséges alapfogalmakat tekintjük át, [8] és [6] alapján. Az élettartamadatok nemnegatív valószínűségi változók. Sokféle alkalmazást találhatunk, például klinikai esetben a betegség diagnosztizálásától a halálig, tünetmentessé válástól a betegség kiújulásáig eltelt idő. Megbízhatóságelméleti modellekben bonyolult rendszerek hibamentes működését tekinthetjük, nem feltétlen valódi időben, pl. egy gép esetén csak a használati időt (kumulatív terhelési idő) vesszük figyelembe, személygépkocsiknál a már megtett kilométert, vagy a repülőgépek futóművei leggyakrabban landolásnál hibásodnak meg, ezért a landolások számát tekintjük az élettartam-vizsgálatnál.

1.1. Alapdefiníciók

Az élettartam-változókat T-vel jelöljük. $H(t) = P(T < t)$ jelöli T eloszlásfüggvényét, legyen $\overline{H}(t) = 1 - H(t) = P(T \geq t)$ a túlélésfüggvény. Amennyiben az eloszlás folytonos, $h(t)$ a sűrűségfüggvény. Az eloszlás felső végpontja $\omega_H = \sup\{t : H(t) < 1\}$. Legyen $R(t) = -\log \overline{H}(t)$ a hazárdfüggvény, $R(t) = +\infty$, ha $\overline{H}(t) = 0$, pl. $t > \omega_H$ esetén). Abszolút folytonos eloszlás hazárdfüggvénye is abszolút folytonos. Hazárdráta vagy meghibásodási tényező az $r(t) = \dfrac{h(t)}{\overline{H}(t)}$ mennyiség. Ekkor majdnem minden t-re $r(t) = R'(t)$.

A Lebesgue-tétel szerint m.m. t-re igaz, hogy

$$P(T < t + \varepsilon | T \geq t) = r(t)\varepsilon + o(\varepsilon), \tag{1.1}$$

azaz feltételes valószínűsége annak, hogy a $(t, t + \varepsilon)$ időintervallumban a rendszer meghibásodik, feltéve, hogy a t időpillanatban még működött, arányos ε-nal és az arányossági tényező $r(t)$.

1.1.1. Tétel. *Legyenek $T_1, T_2, \ldots, T_n$ függetlenek rendre $r_1, \ldots, r_n$ hazárdrátával és $T_{\min} = \min\{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$. Ekkor a következő állítások igazak:*

(i) $T_{\min}$ hazárdrátája $r_1 + \ldots + r_n$,

(ii) $P(T_{\min} = T_1 \mid T_{\min} = t) = \dfrac{r_1(t)}{r_1(t) + \ldots + r_n(t)}$.

Ha változóink diszkrét eloszlásúak, a lehetséges értékek $0 \leq a_1 < a_2 < \ldots$ rendre $p_1, p_2, \ldots$ valószínűségekkel, akkor a hazárdráta megfelelője

$$P(T = a_i | T \geq a_i) = \frac{p_i}{p_i + p_{i+1} + \ldots} \tag{1.2}$$

1.2. Öregedő eloszláscsaládok

Az öregedés fogalmának sok matematikai megközelítése ismeretes. Ezeknek a modelleknek az adja meg a jelentőségét, hogy bizonyos öregedési tulajdonságok feltételezésével az általánosnál jobb becslést tudunk adni pl. a túlélésfüggvényre, a momentumokra vagy a felújítási függvényre. Három ilyen osztály ismertetünk, ezek nvéte az angol rövidítésből vesszük át.

IFR (Increasing Failure Rate, azaz növekedő meghibásodási tényező)

1.2.1. Definíció. *$H \in IFR$, ha $\forall s > 0$-ra $t \longrightarrow \dfrac{\overline{H}(t+s)}{\overline{H}(s)}$ monoton csökkenő $\forall 0 \leq t < \omega_H$ esetén.*

Mivel definíció szerint $\dfrac{\overline{H}(t+s)}{\overline{H}(s)} = P(T \geq t + s | T \geq t)$, tehát azt mondhatjuk, hogy minél idősebb az egyed, annál rosszabbak az életkilátásai.

1.2.2. Tétel.

(i) $H \in IFR \Leftrightarrow R(t)$ konvex

(ii) Ha van sűrűségfüggvény, akkor $H \in IFR \Leftrightarrow r(t)$ monoton növő

(iii) $H \in IFR \Rightarrow H$ abszolút folytonos $t < \omega_H$-ra.

Definiálhatjuk az ún, „fiatalodó" eloszlások osztályát. A különbség annyi, hogy a $t \mapsto \dfrac{\overline{H}(t+s)}{\overline{H}(s)}$ $\forall s > 0$-ra monoton növő, azaz R konkáv. Ekkor $\omega_H{=}\infty$ és az eloszlás abszolút folytonos, valamint a meghibásodási tényező monoton fogyó. Ezt DFR-nek nevezzük (Decreasing Failure Rate).

Vizsgáljunk néhány nevezetest eloszlást, hogy DFR-be vagy IFR-be tartoznak-e.

Exponenciális eloszlás: természetesen mindkét osztályba beletartoznak, ezek képezik a két osztály metszetét.

Gamma-eloszlás: Ebben az esetben a rendtől függ, segítségképpen tekintsük a következő lemmát.

1.2.3. Lemma. *Tegyük fel, hogy a sűrűségfüggvény létezik, ekkor*

(i) ha $t \mapsto \dfrac{h(t+s)}{h(s)}$ $\forall s > 0$*-ra monoton fogyó, akkor* $H \in IFR$,

(ii) ha $t \mapsto \dfrac{h(t+s)}{h(s)}$ $\forall s > 0$*-ra monoton növő, akkor* $H \in DFR$.

Gamma eloszlás esetén $\dfrac{h(t+s)}{h(s)} = \left(1+\dfrac{s}{t}\right)^{\alpha-1} e^{-\lambda s}$, ez monoton nő, ha $\alpha \leq 1$ és monoton fogy, ha $\alpha \geq 1$.

1.2.4. Következmény. Az α rendű gamma-eloszlás IFR, ha $\alpha \geq 1$ és DFR, ha $\alpha \leq 1$

IFRA (Increasing Failure Rate Average)

1.2.5. Definíció. *$H \in IFRA$, ha $(\overline{H}(s))^{1/t}$ monoton fogyó függvénye t-nek.*

1.2.6. Tétel. *A következő állítások ekvivalensek:*

(i) $H \in IFRA$,

(ii) $\dfrac{R(t)}{t}$ *monoton fogyó függvénye t-nek,*

(iii) $\forall 0 < \alpha < 1$ *és* $t > 0$ *esetén* $\overline{H}(\alpha t) \geq (\overline{H}(t))^{\alpha}$,

(iv) Legyen $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ nemnegatív, monoton növő, jobbról folytonos, korlátos függvény, amelyre $\lim_{x\to\infty} h(x) = 0$ (nevezzük az ilyen függvényeket megengedettnek). Ekkor tetszőleges $0 < \alpha < 1$ számra $E^{\alpha}(g(T)) \leq E(g(T/\alpha)^{\alpha})$,

(v) $\forall\lambda > 0$ esetén $\overline{H}(t) - e^{-\lambda t}$ legfeljebb egyszer vált előjelet, mégpedig pozitívból negatívba.

Ha van sűrűségfüggvény, akkor $\dfrac{R(t)}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t r(s)ds$, ez a meghibásodási tényező integrálközepe a $(0, t)$ intervallumon és ez (ii) szerint monoton növő. Innen az osztály elnevezése.

DMRL (Decreasing Mean Residual Life)

1.2.7. Definíció. *$H \in DMRL$, ha*

$$m(t) = \int_0^{\infty} \overline{H}_t(x)dx \tag{1.3}$$

csökkenő $\forall t \geq 0$-ra, ahol $\overline{H}_t(x) = P(T - t \geq x | T \geq t) = \overline{H}(x + t)/\overline{H}(t)$. Itt $m(t) = E(T - t \mid T \geq t)$, ezt nevezik átlagos hátralevő élettartamnak.
Ugyanígy definiálható az $IMRL$ (Increasing Mean Residual Life), ekkor $m(t)$ növekvő $t \geq 0$-ra.

1.2.8. Állítás. *Ha $H \in IFR$, akkor $H \in DMRL$ és $H \in IFRA$, de az $IFRA$ és a $DMRL$ osztály egyike sem tartalmazza a másikat.*

1.3. Sokk-modellek

Egy rendszert sokkok érnek, a sokkok érkezése λ paraméterű Poisson-folyamat szerint történik. Jelölje $\overline{P}(k)$ azt a valószínűséget, hogy a k-adik sokkot túléli a rendszer. Ekkor $1 := \overline{P}(0) \geq \overline{P}(1) \geq \ldots \geq 0$. Tegyük fel, hogy a rendszer véges időn belül tönkremegy, tehát $\overline{P}(n) \to 0$. Mit mondhatunk az élettartamról?

Ennek a modellnek egy speciális esete a *víztározó modell*. Egy x kapacitású víztartályt esőzések érnek, méghozzá Poisson-folyamat szerint. Az esőzések alkalmával lehulló csapadékmennyiség független és azonos eloszlású valószínűségi változók sorozata, G eloszlásfüggvénnyel. Jelölje G^{*k} a G-nek önmagával való k-szoros konvolúcióját és legyen $G^{*0} \equiv 1$, ekkor annak a valószínűsége, hogy a k-adik esőzésnél csordul túl, $G^{*k}(x)$. A rendszer élettartama a túlcsordulásig eltelt idő.

A rendszer élettartamának eloszlásfüggvényét jelölje H. A t időpontig bekövetkezett sokkok száma λt paraméterű Poisson-eloszlású. Ennek az értékei szerint írjuk fel a teljes valószínűség tételét:

$$\overline{H}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{P}(k) \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}. \tag{1.4}$$

Jelölje $q_k = \overline{P}(k-1) - \overline{P}(k)$, ez az a valószínűség, hogy a rendszer éppen a k-adik sokknál hibásodik meg. Ezek a számok diszkrét valószínűségi eloszlást alkotnak, tehát az összegük 1. A sokkok között eltelt idők függetlenek és exponenciális eloszlásúak, így a rendszer élettartama független exponenciálisok véletlen tagszámú összege, de felfogható gamma-eloszlások keverékeként is, hisz a k-adik sokk időpontja $\Gamma_{k,\lambda}$ eloszlású. Tehát van sűrűségfüggvény, ami így áll elő:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \frac{\lambda^k t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} q_{k+1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}. \tag{1.5}$$

A következőkben úgynevezett megőrződési tételeket mutatunk be, ezek közös alakja, hogy ha a (q_k) eloszlás valamelyik öregedő tulajdonság diszkrét megfelelőjével rendelkezik, akkor a rendszer élettartama az adott öregedő osztályba esik.

Ezeknek a tételeknek a bizonyítása megtalálható a [8]-ben. Most az 1.3.2, 1.3.5 és 1.3.4 Tételekre mutatunk bizonyítást, a legelső kicsit különbözik az [8]-ben leírtaktól.

1.3.1. Definíció. $(q_k) \in dIFR$ *(diszkrét IFR), ha a* $\overline{P}(k) = q_{k+1} + q_{k+2} + \dots$ *túlélési valószínűségeke* $\dfrac{\overline{P}(k)}{\overline{P}(k-1)}$ *monoton fogyó, azaz, ha az* $r_k = \dfrac{q_k}{\overline{P}(k-1)}$ *diszkrét meghibásodási tényező monoton nő.*

1.3.2. Tétel. *Ha* $(q_k) \in dIFR$*, akkor* $H \in IFR$*.*

Bizonyítás. Be kell látnunk, hogy $\forall x \geq 0$ esetén $\forall t$-re, amelyre a $\overline{H}(t) > 0$, a $\overline{H}(x+t)/\overline{H}(t)$ függvény nem növekvő t-ben, $\forall x \geq 0$-ra. Megmutatjuk, hogy $t' > t$ esetén

$$\overline{H}(x+t)\overline{H}(t') - \overline{H}(x+t')\overline{H}(t) \geq 0. \tag{1.6}$$

Írjunk $z_k(t)$-t a $P(N(t) = k)$ helyett és jelölje k a t, illetve k' a t' időpillanatig beérkező sokkok számát, ekkor (1.6) bal oldala

$$= \sum_{k=0}^{\infty} z_k(x+t)\overline{P}(k) \sum_{k'=0}^{\infty} z_k(t')\overline{P}(k') - \sum_{k=0}^{\infty} z_k(x+t')\overline{P}(k) \sum_{k'=0}^{\infty} z_k(t)\overline{P}(k')$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} z_j(x) z_{k-j}(t)\overline{P}(k) \sum_{k'=0}^{\infty} z_{k'}(t')\overline{P}(k')$$

$$- \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} z_j(x) z_{k-j}(t')\overline{P}(k) \sum_{k'=0}^{\infty} z_{k'}(t)\overline{P}(k'),$$

hiszen felbontjuk a $z_k(x+t)$-t és a $z_k(x+t')$-t aszerint, hogy hány sokk van x-ig (ezt jelöljük j-vel). Ezek után egy egyszerű kiemelést teszünk:

$$= \sum_{j=0}^{k} z_j(x) \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k'=0}^{\infty} [z_k(t) z_{k'}(t') - z_k(t') z_{k'}(t)]\overline{P}(k+j)\overline{P}(k').$$

A továbbiakban elegendő a $k < k'$-re nézni az összeget, hisz a $k' < k$ eset a szummációs változók felcserélésével hasonlóképpen megkapható és a $k < k'$ összeg (-1)-szerese adódik, míg a $k = k'$ részösszeg 0-val egyenlő.

$$= \sum_{j=0}^{k} z_j(x) \sum_{k<k'} [z_k(t) z_{k'}(t') - z_k(t') z_{k'}(t)][\overline{P}(k+j)\overline{P}(k') - \overline{P}(k'+j)\overline{P}(k)]$$

$$= \sum_{j=0}^{k} z_j(x) \sum_{k<k'} [z_k(t) z_{k'}(t') - z_k(t') z_{k'}(t)]\times$$

$$\times [\{\overline{P}(k')/\overline{P}(k'+j)\} - \{\overline{P}(k)/\overline{P}(k+j)\}]\overline{P}(k+j)\overline{P}(k'+j).$$

Ez a tétel feltételei szerint ≥ 0. □

1.3.3. Definíció. $(q_k) \in dIFRA$ *(diszkrét) IFRA, ha* $\overline{P}(k)^{1/k}$ *monoton fogyó.*

1.3.4. Tétel. *Ha* $(q_k) \in dIFRA$*, akkor* $H \in IFRA$*.*

Bizonyítás. A 1.2.6 Tétel (e) pontjából kiindulva lássuk be, hogy minden $\alpha > 0$ esetén a $\overline{H}(t) - e^{-\alpha t}$ legfeljebb egyszer vált előjelet, méghozzá pozitívból negatívba.

A (1.3.1) szerint $\overline{H}(t) \geq e^{-\lambda t}$, így $\alpha \geq \lambda$ esetén a vizsgált függvény nem negatív, tehát nem vált előjelet. Legyen ezért $\alpha < \lambda$, tehát $\alpha = (1-z)\lambda$ valamilyen $0 < z < 1$-re. Ekkor

$$\overline{H}(t) \geq e^{-(1-z)\lambda t} = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} (\overline{P}(k) - z^k)\frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

Legyen $a_k = \overline{P}(k) - z^k$ együtthatók sorozata, ez a (q_k) sorozat $dIFRA$ tulajdonsága miatt csak egyszer válthat előjelet, akkor is pozitívból negatívba. Belátjuk, hogy ezen feltételek mellett a

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{(\lambda t)^k}{k!},\ t \geq 0$$

függvényre is teljesül ez a tulajdonság.
Ha mindegyik a_k nemnegatív, vagy mindegyik nem pozitív, akkor $h(t)$ is állandó előjelű. Ezért tegyük fel, hogy $a_0, \ldots, a_{m-1} \geq 0$ és $a_m, a_{m+1} \ldots \leq 0$. Az m értéke szerinti teljes indukcióval bizonyítunk. m=0-ra már láttuk. Az indukciós lépés abból következik, hogy

$$h(t) = a_0 + \lambda \int_0^t \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} \frac{(\lambda s)^k}{k!} \right) ds.$$

Itt az integrandusra alkalmazható az indukciós feltevés, tehát egy ideig nemnegatív, aztán nempozitív. Így $h(t)$ nő, azután (esetleg) csökken. Legfeljebb egyszer válthat előjelet (pozitívból negatívba), ugyanis $h(0) \geq 0$. □

1.3.5. Tétel. $\overline{P}(k) = G^{*k}(x)$ *esetén* $(q_k) \in dIFRA$.

Bizonyítás. Belátjuk k szerinti teljes indukcióval, hogy $[G^{*k}(x)]^{k+1} \geq [G^{*k+1}(x)]^k$. Az egyenlőtlenség igaz $k = 1$-re:

$$G^{*2}(x) = \int_0^x G(x-z) dG(z) \leq \int_0^x G(x) dG(z) = G^2(z).$$

Tehát feltesszük, hogy

$$[G^{*k-1}(x)]^k \geq [G^{*k}(x)]^{k-1} \tag{1.7}$$

teljesül. Így megkapjuk az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned}
[G^{*k}(x)]^{k+1} &= G^{*k}(x) \left[\int_0^x G^{*(k-1)}(x-z) dG(z) \right]^k \geq \\
&\geq G^{*k}(x) \left[\int_0^x [G^{*(k)}(x-z)]^{\frac{k-1}{k}} dG(z) \right]^k = \\
&= \left[\int_0^x [G^{*k}(x)]^{\frac{1}{k}} [G^{*k}(x-z)]^{1-\frac{1}{k}} dG(z) \right]^k \geq \\
&\geq \left[\int_0^x G^{*k}(x-z) dG(z) \right]^k = [G^{*k+1}(x)]^k.
\end{aligned}$$

A (1.7)-beli indukciós feltevést a második egyenlőtlenségnél használtuk fel.

□

1.3.6. Következmény. A víztározó-modellben a rendszer élettartama $IFRA$ eloszlású.

1.4. Koherens rendszer

Tekintsünk egy rendszert, pl. egy készüléket, amely n alkatrészből áll. Ezeknek két állapota van, vagy működik (1) vagy hibás (0). A készülék attól függően működik, hogy melyik alkatrész (más néven elem) milyen tulajdonságú. Ez egy n-változós Boole-függvénnyel leírható, ezt a rendszer *struktúrafüggvényének* nevezzük: $\varphi : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$.

Jelöljük vastag betűkkel az n dimenziós vektorokat. Így az $\mathbf{1}$ és a $\mathbf{0}$ azok a vektorok, amelyeknek a koordinátái csak 1-esekből illetve 0-ból állnak. Amikor a vektorokra skalárműveleteket alkalmazunk, koordinátánként értjük. Például $(x_1, \ldots, x_n)^\alpha = x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha$ vagy $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (x_1 y_1, \ldots, x_n y_n)$. Vezessük be a *produktum* és *koproduktum* operátorokat:

$$\prod x_i = x_1 x_2 \ldots x_n, \ \coprod x_i = 1 - \prod (1 - x_i).$$

A következő jelöléseket behelyettesítésre alkalmazhatjuk: legyen $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$, akkor

$$\begin{aligned}(1_i, \mathbf{x}) &= (x_1, \ldots x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n),\\ (0_i, \mathbf{x}) &= (x_1, \ldots x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n),\\ (\bullet_i, \mathbf{x}) &= (x_1, \ldots x_{i-1}, \bullet, x_{i+1}, \ldots, x_n).\end{aligned}$$

Nézzünk példát néhány egyszerű rendszerre:
soros kapcsolás: $\varphi(x) = \min x_1, \ldots, x_n = \prod x_i$,
párhuzamos kapcsolás: $\varphi(x) = \max x_1, \ldots, x_n = \coprod x_i$,
„n-ből k” struktúra: $\varphi(x) = \coprod\limits_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} (\prod\limits_{j=1}^{k} x_{i_j})$
(a rendszer akkor működik, ha a legalább k alkatrész működik).

1.4.1. Definíció. *A rendszer i-edik eleme nem lényeges, ha* $\forall \mathbf{x} \in \{0,1\}^n$ *esetén* $\varphi(1_i, \mathbf{x}) = \varphi(0_i, \mathbf{x})$*, egyébként lényeges.*
φ *monoton rendszer, ha a struktúrafüggvény minden változójában monoton növő:* $\varphi(0_i, \mathbf{x}) \le \varphi(1_i, \mathbf{x})$*, tehát egy jól működő rendszer nem romolhat el, ha egy alkatrész*

megjavul, vagy egy rosszul működő rendszer nem javulhat meg, ha egy alkatrész elromlik.
Ha egy monoton rendszerben minden elem lényeges, akkor koherens rendszernek nevezzük.

1.4.2. Definíció. *A φ rendszer duálisa a $\varphi^D(\mathbf{x}) = 1 - \varphi(\mathbf{1} - \mathbf{x})$ struktúrafüggvényű rendszer.*

Világos, hogy duális duálisa az eredeti rendszer, valamint, hogy monoton rendszer duálisa is monoton. Például a soros és a párhuzamos rendszerek duálisok.

1.4.3. Tétel. *A következő állítások nyilvánvalóak:*

(i) $\varphi(\mathbf{x}) = x_i\varphi(1_i, \mathbf{x}) + (1 - x_i)\varphi(0_i, \mathbf{x})$.

(ii) $\varphi(\mathbf{x}) = ok \sum_{\mathbf{y}\in\{0,1\}^n} \varphi(\mathbf{y}) \prod x_i^{y_i}(1 - x_i)^{1-y_i}$.

(iii) Koherens rendszer esetén $\prod x_i \le \varphi(\mathbf{x}) \le \coprod x_i$.

(iv) Monoton rendszer esetén $\varphi(\mathbf{x} \prod \mathbf{y}) \le \varphi(\mathbf{x}) \prod \varphi(\mathbf{y})$, $\varphi(\mathbf{x}) \coprod \varphi(\mathbf{y}) \ge \varphi(\mathbf{x} \coprod \mathbf{y})$.

1.4.4. Definíció. *Független elemekből álló rendszer megbízhatósága.*
A rendszer alkatrészei egymástól függetlenül, véletlenszerűen működnek. Az i-edik elem működésének indikátora legyen X_i, az alkatrész megbízhatósága a működés valószínűsége: $p_i = EX_i$. Ekkor a rendszer megbízhatósága: $\varphi(\mathbf{p}) = E\varphi(\mathbf{X})$. Így φ-t kiterjesztettük egy $[0,1]^n \to [0,1]$ függvénnyé.

Ha $\mathbf{p} = (p, p, \ldots, p)$, akkor $\varphi(\mathbf{p})$ helyett írjunk $\varphi(p)$-t.

Nézzük a korábban megadott egyszerű példák megbízhatóságát. Soros rendszer esetén $\varphi(\mathbf{p}) = \prod x_i$, $\varphi(p) = p^n$, párhuzamos rendszer esetén $\varphi(\mathbf{p}) = \coprod x_i$, $\varphi(p) = 1 - (1 - p)^n$, míg „$n$-ből k” rendszerre $\varphi(p) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} p^i (1 - p)^{n-i}$.

1.4.5. Tétel. *A kiterjesztett $\varphi(\mathbf{p})$ függvényre is igazak a 1.4.3 tételhez hasonló állítások, ahol az eredeti struktúrafüggvényt tekintettük.*

(i) $\varphi(\mathbf{p}) = p_i\varphi(1_i, \mathbf{p}) + (1 - p_i)\varphi(0_i, \mathbf{p})$.

(ii) $\varphi(\mathbf{p}) = \sum_{\mathbf{y}\in\{0,1\}^n} \varphi(\mathbf{y}) \prod p_i^{y_i}(1-p_i)^{1-y_i}$, *tehát* φ *egy* n*-változós polinom.*

(iii) *Koherens rendszer esetén* $\varphi(\mathbf{p})$ *minden változójában szigorúan monoton nő, ha* $\mathbf{p} \in (0,1)^n$.

(iv) *Monoton rendszer esetén* $\varphi(\mathbf{p} \prod \mathbf{p}^{'}) \leq \varphi(\mathbf{p}) \prod \varphi(\mathbf{p}^{'})$, $\varphi(\mathbf{p}) \coprod \varphi(\mathbf{p}^{'}) \geq \varphi(\mathbf{p} \coprod \mathbf{p}^{'})$.

1.4.6. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az* S *eloszlásosztály zárt a koherens rendszer-képzésre, ha minden olyan koherens rendszer élettartama* S*-beli, amelynek az elemei függetlenek és* S*-beli élettartamúak.*

1.4.7. Tétel. *Az* $IFRA$ *osztály zárt a koherens rendszer-képzésre.*

2. fejezet

Sokk-modellek többváltozós esetben

Ebben a fejezetben a korábban definiált eloszláscsaládokat vizsgáljuk két- vagy több változóban a [3], [9] és [7] cikkek alapján.

2.1. Kétváltozós IFR

Marshall (1975) definiált néhány többváltozós modellt, amely analóg az IFR-rel (illetve a DFR-rel), ezek közül tekintsünk három speciális esetet két változóban.

Jelölje $\overline{H}(t_1, t_2)$ a T_1, T_2 nemnegatív valószínűségi változók együttes túlélésfüggvényét, azaz legyen $\overline{H}(t_1, t_2) = P(T_1 \geq t_1, T_2 \geq t_2)$.

2.1.1. Definíció.

I. $\overline{H}$ *kétváltozós* IFR*-1 (*$BIFR$*-1), ha bármely* (t_1, t_2)*-re, melyre teljesül* $\overline{H}(t_1, t_2) > 0$*, a* $\overline{H}(t_1+x_1, t_2+x_2)/\overline{H}(t_1, t_2)$ *hányados nem növekvő* (t_1, t_2)*-ben,* $\forall x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ *esetén.*

II. $\overline{H}$ $BIFR$*-2, ha bármely* t*-re, melyre teljesül* $\overline{H}(t, t) > 0$*, a* $\overline{H}(t + x_1, t + x_2)/\overline{H}(t, t)$ *hányados nem növekvő* t*-ben,* $\forall x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ *esetén.*

III. $\overline{H}$ $BIFR$*-3, ha bármely* t*-re, melyre teljesül* $\overline{H}(t, t) > 0$*, a* $\overline{H}(t+x, t+x)/\overline{H}(t, t)$ *hányados nem növekvő* t*-ben,* $\forall x \geq 0$ *esetén.*

Ezekben a B a „bivariate” kezdőbetűje.

Világos, hogy ugyanezt megtehetjük több változóban, és így megkapjuk az $MIFR$-1, $MIFR$-2, $MIFR$-3 osztályokat, valamint hasonlóképpen $MDFR$-1, $MDFR$-2, $MDFR$-3 is megkapható, ha az I., II., III. pontokban a „nem növekvő” helyett, „nem csökkenőt” írunk (M, mint „multivariate”).

Tekintsünk két rendszert, amit egyidejűleg sokkok érnek valamilyen véletlen időpontokban. A sokkok időpontját egy általános pontfolyamat írja le: $N = \{N(t), t \geq 0\}$, ez nem feltétlen Poisson. Legyen $\overline{P}(k_1, k_2)$ annak a valószínűsége, hogy a rendszereink túlélik a k_1-edik és a k_2-edik sokkot, $k_1 = 0, 1, \ldots$ és $k_2 = 0, 1, \ldots$. Feltesszük, hogy $\overline{P}(0, 0) = 1$. Nézzük a együttes túlélésfüggvényt a bekövetkezett sokkok száma szerint bontva.

$$\begin{aligned}
\overline{H}(t_1, t_2) &= \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} P(N(t_1) = k_1, N(t_2) - N(t_1) = k_2)\overline{P}(k_1, k_1 + k_2), \text{ ha } t_1 < t_2; \\
\overline{H}(t_1, t_2) &= \sum_{k_2=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^{\infty} P(N(t_2) = k_2, N(t_1) - N(t_2) = k_1)\overline{P}(k_1 + k_2, k_2), \text{ ha } t_2 < t_1;
\end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\overline{H}(t, t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N(t) = k)\overline{P}(k, k).$$

2.1.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy*

(i) $\overline{P}(k+1, k+1)/\overline{P}(k, k)$ *nem növekvő (nem csökkenő)* $k = 0, 1, \ldots$*;*

(ii) $\overline{P}(k+1, 0)/\overline{P}(k, 0)$ *nem növekvő (nem csökkenő)* $k = 0, 1, \ldots$*;*

(iii) $\overline{P}(0, k+1)/\overline{P}(0, k)$ *nem növekvő (nem csökkenő)* $k = 0, 1, \ldots$*;*

és teljesül, hogy N *egy Poisson-folyamat. Ekkor a* (2.1)*-ben megadott* $\overline{H}$ *túlélésfüggvény* $BIFR$*-3* ($BDFR$*-3*) *tulajdonságú.*

Ezt a tételt nem bizonyítjuk.

2.1.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy minden rögzített* $m \geq 0$*,* $n \geq 0$ *esetén*

(i) $\overline{P}(k+m, k+n)/\overline{P}(k, k)$ *nem növekvő* $k = 0, 1, \ldots$;

(ii) $\overline{P}(k+m, 0)/\overline{P}(k, 0)$ *nem növekvő* $k = 0, 1, \ldots$;

(iii) $\overline{P}(0,k+n)/\overline{P}(0,k)$ *nem növekvő* $k=0,1,\ldots$.

Ha N *egy Poisson-folyamat, akkor a* (2.1)*-ben megadott* $\overline{H}$ *túlélésfüggvény* $BIFR$*-2 tulajdonságú.*

Bizonyítás. Azt a technikát alkalmazzuk, amit az 1.3.2 Tételnél láttunk. Tételünk bizonyításához be kell látni $\forall t^{'} > t \geq 0$-ra $\overline{H}(t^{'},t^{'}) > 0$ esetén, hogy

$$\overline{H}(x_1+t,x_2+t)\overline{H}(t^{'},t^{'}) - \overline{H}(x_1+t^{'},x_2+t^{'})\overline{H}(t,t) \geq 0, \tag{2.2}$$

ahol $x_1, x_2 \geq 0$. A bizonyításhoz csak az $x_1 > x_2$ esetet vesszük figyelembe, hiszen az $x_1 < x_2$ eset teljesen hasonlóképpen belátható, valamint az $x_1 = x_2$ eset a 2.1.2 Tétel miatt nyilvánvaló. A következőkben felhasználjuk az 1.3.2 Tétel bizonyítását és az (i)—(iii) feltételeket. Emlékeztetőül: $z_k(t)$ jelöli a $P(N(t)=k)$ valószínűséget. Ezekből következik, hogy $t^{'} \geq t > 0$-ra (2.2) bal oldala

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=0}^{\infty} z_j(x_2) \sum_{k_1=0}^{\infty} z_{k_1}(x_1-x_2) \sum_{k_2<k_2^{'}} [z_{k_2}(t)z_{k_2^{'}}(t^{'}) - z_{k_2}(t^{'})z_{k_2^{'}}(t)]\times \\ &\quad \times \overline{P}(k_1+k_2+j,k_2+j)\overline{P}(k_1+k_2^{'}+j,k_2^{'}+j)\times \\ &\quad \times \left\{ \frac{\overline{P}(k_2^{'},k_2^{'})}{\overline{P}(k_1+k_2^{'}+j,k_2^{'}+j)} - \frac{\overline{P}(k_,k_2)}{\overline{P}(k_1+k_2+j,k_2+j)} \right\}, \end{aligned}$$

ami a feltételek szerint ≥ 0, ugyanis

$$z_{k_2}(t)z_{k_2^{'}}(t^{'}) - z_{k_2}(t^{'})z_{k_2^{'}}(t) = e^{-\lambda(t+t^{'})}\frac{\lambda^{k_2+k_2^{'}}}{k_2!k_2^{'}!}(t^{k_2}(t^{'})^{k_2^{'}} - (t^{'})^{k_2}t^{k_2^{'}}) \geq 0.$$

□

Végül nézzünk meg egy olyan esetet, amikor a két rendszerünket két egymástól független véletlen folyamat szerint érkező sokkok érik. Ezeket a folyamatokat jelölje $N_1 = \{N_1(t), t\geq 0\}$ és $N_2 = \{N_2(t), t \geq 0\}$. A következőkben írjuk fel az együttes télélésfüggvényt,

$$\overline{H}(t_1,t_2) = \sum_{k_2=0}^{\infty}\sum_{k_1=0}^{\infty} z_{k_1}(t_1)z_{k_2}(t_2)\overline{P}(k_1,k_2),\ t_1 \geq 0 \text{ és } \ t_2 \geq 0 \text{ esetén }. \tag{2.3}$$

A 2.1.3 Tétel mintájára az alábbi feltételt írhatjuk fel. Tegyük fel, hogy $0 \leq k_1 < k_1^{'}$, $0 \leq k_2 < k_2^{'}$ és $\forall\ j_1 \geq 0$, $j_2 \geq 0$ egészek esetén teljesül, hogy

$$\begin{aligned} &\overline{P}(k_1+j_1,k_2+j_2)\overline{P}(k_1^{'},k_2^{'}) - \overline{P}(k_1^{'}+j_1,k_2+j_2)\overline{P}(k_1,k_2^{'}) \\ &\quad + \overline{P}(k_1+j_1,k_2^{'}+j_2)\overline{P}(k_1^{'},k_2) - \overline{P}(k_1^{'}+j_1,k_2^{'}+j_2)\overline{P}(k_1,k_2) \geq 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

2.1.4. Tétel. *Ha N_1 és N_2 is Poisson-folyamat, valamint* (2.4) *is teljesül, akkor a* (2.3)*-ben felírt $\overline{H}$ túlélésfüggvény $BIFR$-1 tulajdonságú.*

Bizonyítás. Elegendő belátni, hogy $0 \leq t_1 < t_1^{'}$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ és $t_2 \geq 0$-ra a

$$\overline{H}(x_1 + t_1, x_2 + t_2)\overline{H}(t_1^{'}, t_2) - \overline{H}(x_1 + t_1^{'}, x_2 + t_2)\overline{H}(t_1, t_2) \geq 0, \tag{2.5}$$

továbbá $0 \leq t_2 < t_2^{'}$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ és $t_1 \geq 0$-ra a

$$\overline{H}(x_1 + t_1, x_2 + t_2)\overline{H}(t_1, t_2^{'}) - \overline{H}(x_1 + t_1, x_2 + t_2^{'})\overline{H}(t_1, t_2) \geq 0 \tag{2.6}$$

egyenlőtlenség teljesül.

Csak (2.5)-öt bizonyítjuk, hisz (2.6) teljesen hasonló. A (2.3) előállítás alapján könnyen megkapjuk az alábbi képletet.

$$\overline{H}(x_1 + t_1, x_2 + t_2) = \sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{\infty} z_{j_1}(x_1) z_{j_2}(x_2) \sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty} z_{k_1}(t_1) z_{k_2}(t_2)\overline{P}(k_1 + j_1, k_2 + j_2). \tag{2.7}$$

Ezek után (2.7)-et felhasználva (2.5) bal oldala a következő alakot ölti:

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{\infty} z_{j_1}(x_1) z_{j_2}(x_2) \sum_{k_1<k_1^{'}}\sum_{k_2<k_2^{'}} z_{k_2}(t_2) z_{k_2}(t_2^{'})[z_{k_1}(t_1) z_{k_1}(t_1^{'}) - z_{k_1}(t_1^{'}) z_{k_1}(t_1)]\times \\
&\qquad \times [\overline{P}(k_1 + j_1, k_2 + j_2)\overline{P}(k_1^{'}, k_2^{'}) - \overline{P}(k_1^{'} + j_1, k_2 + j_2)\overline{P}(k_1, k_2^{'}) \\
&\qquad + \overline{P}(k_1 + j_1, k_2^{'} + j_2)\overline{P}(k_1^{'}, k_2)\overline{P}(k_1^{'} + j_1, k_2^{'} + j_2)\overline{P}(k_1, k_2)] \\
&\geq 0,
\end{aligned} \tag{2.8}$$

ahol az első tényező nemnegativitása a Poisson-eloszlás tulajdonságaiból jön, a második a (2.4) feltételből. □

Az $MDFR$-1 tulajdonságra a tétel hasonlóképpen belátható, a megfelelő változtatásokat alkalmazva.

2.2. Kétváltozós DMRL

Definiáljuk a $DMRL$ osztály két speciális esetét két változóban.

2.2.1. Definíció.

I. $\overline{H}$ *kétváltozós* $DMRL-1$ $(BDMRL-1)$, *ha* $\forall t \geq 0$*-ra, amelyre* $\overline{H}(t,t) > 0$ *teljesül,* $\int_t^\infty \int_t^\infty \overline{H}(x_1,x_2)dx_1dx_2/\overline{H}(t,t)$ *nem növekvő.*

II. $\overline{H}$ *kétváltozós* $DMRL-2$ $(BDMRL-2)$, *ha* $\forall t \geq 0$*-ra, amelyre* $\overline{H}(t,t) > 0$ *teljesül,* $\int_t^\infty \overline{H}(x,x)dx/\overline{H}(t,t)$ *nem növekvő.*

2.2.2. Megjegyzés. Definiálhatjuk a kétváltozós $IMRL$-1 és $IMRL$-2 osztályt is az I-es és II-es ponttal analóg módon úgy, hogy a „nem növekvő" helyett „nem csökkenőt" írunk.

Tekintsük a (2.1)-ben felírt $\overline{H}$ túlélésfüggvényt, amikor a sokkok λ intenzitású Poisson-folyamat szerint érkeznek. Jelölje N_1, illetve N_2 a két rendszer meghibásodásához szükséges sokkok (véletlen) számát, vagyis $P(N_1 > k_1, N_2 > k_2) = \overline{P}(k_1,k_2)$. Tegyük fel, hogy

$$N_1, N_2 \text{ és } \min(N_1,N_2) \text{ diszkrét } DMRL. \tag{2.9}$$

2.2.3. Tétel. *Ha* (2.9) *teljesül, akkor a rendszer* $\overline{H}$ *túlélésfüggvénye* $BDMRL$*-2 tulajdonságú.*

2.2.4. Megjegyzés. A tétel a $BIMRL$-2 osztályra is érvényes, ha (2.9)-ben a $DMRL$-t $IMRL$-re cseréljük.

Ezeket a tételeket nem bizonyítjuk. A következőkben belátjuk, hogy a (2.1)-ben megadott $\overline{H}$ túlélésfüggvény $BDMRL$-1, amikor a $\overline{P}(k_1,k_2)$ eleget tesz egy diszkrét $BDMRL$-1 tulajdonságnak. Tegyük fel, hogy $\forall\ j = 0,1,\ldots$-re, amelyre igaz a $\overline{P}(j,j) > 0$ egyenlőtlenség, teljesül, hogy

$$\overline{P}(j+k_1, j+k_2)/\overline{P}(j,j) \text{ nem növekvő } j\text{-ben.} \tag{2.10}$$

2.2.5. Tétel. *Tegyük fel, hogy* (2.9) *és* (2.10) *teljesül, továbbá* $N(t)$ λ *intenzitású Poisson-folyamat. Ekkor a* (2.1)*-beli* $\overline{H}$ $BDMRL$*-1 tulajdonságú.*

Bizonyítás. A tétel bizonyításához elegendő belátni azt, hogy $0 \leq t < t'$-re teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$\overline{H}(t',t')\int_t^\infty\int_t^\infty \overline{H}(t_1,t_2)dt_1dt_2 \geq \overline{H}(t,t)\int_{t'}^\infty\int_{t'}^\infty \overline{H}(t_1,t_2)dt_1dt_2. \tag{2.11}$$

Ennek belátásához számítsuk ki a kétszeres integrált.

$$\int_t^\infty \int_t^\infty \overline{H}(t_1,t_2)dt_1dt_2$$
$$= \int_t^\infty \int_t^{t_2} \overline{H}(t_1,t_2)dt_1dt_2 + \int_t^\infty \int_t^{t_1} \overline{H}(t_1,t_2)dt_1dt_2, \quad (2.12)$$

ahol az összeg első tagja a $t_1 < t_2$ eset, valamint a második tag a $t_2 < t_1$ eset. A bizonyítás további részében csak a $t_1 < t_2$ esettel foglalkozunk, nyilvánvalóan a másik eset teljesen analóg módon kiszámolható.

Tegyük fel, hogy $t < t_1 < t_2$.
Jelölje k a t ideig érkező sokkok számát, k_1 a $t_1 - t$ időintervallumon érkező sokkok számát, valamint k_2 a $t_2 - t_1$ időintervallumon érkező sokkok számát.
Ekkor

$$\overline{H}(t_1,t_2) =$$
$$= \sum_{k=0}^\infty \sum_{k_2=0}^\infty \sum_{k_1=0}^\infty P[Poi(\lambda t) = k]P[Poi(\lambda(t_1-t)) = k_1]\times$$
$$\times P[Poi(\lambda(t_2-t_1)) = k_2]\overline{P}(k+k_1,k+k_2)$$
$$= \sum_{k=0}^\infty \sum_{k_2=0}^\infty \sum_{k_1=0}^\infty \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}\frac{e^{-\lambda t_1 - t}(\lambda(t_1-t))^{k_1}}{k_1!}\frac{e^{-\lambda t_2 - t_1}(\lambda(t_2-t_1))^{k_2}}{k_2!}\overline{P}(k+k_1,k+k_2)$$
$$= \sum_{k=0}^\infty \sum_{k_2=0}^\infty \sum_{k_1=0}^\infty \frac{e^{-\lambda t_2}(\lambda t)^k(\lambda(t_1-t))^{k_1}(\lambda(t_2-t_1))^{k_2}}{k!\ k_1!\ k_2!}.$$

Tehát a (2.12)-ben szereplő egyenletet tekintve, a most megadott $\overline{H}$ túlélésfüggvényt kell integrálnunk t_1 és t_2 változók szerint. Az első tag az alábbi módon számítható ki.

$$\int_t^\infty \int_t^\infty \overline{H}(t_1,t_2)dt_1dt_2 =$$
$$= \sum_{k=0}^\infty \sum_{k_2=0}^\infty \sum_{k_1=0}^\infty \int_t^\infty \frac{e^{-\lambda t_2}\lambda^{k+k_1+k_2}t^k}{k!\ k_1!\ k_2!} \int_t^{t_2} (t_1-t)^{k_1}(t_2-t_1)^{k_2}dt_1\overline{P}(k+k_1,k+k_2)dt_2. \quad (2.13)$$

Ezek után, ha az integrálban elvégezzük a $t_1 = t+(t_2-t)y$ helyettesítést, akkor $dt_1 = t_2 - t_1)dy$, és

$$\int_t^{t_2} (t_1-t)^{k_1}(t_2-t_1)^{k_2}dt_1 = (t_2-t)^{k_1+k_2+1}\int_0^1 y^{k_1}(1-y)^{k_2}dy. \quad (2.14)$$

Látszik, hogy $\int_0^1 y^{k_1}(1-y)^{k_2}dy$ egy speciális béta-integrál ($\int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}dy = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$). Ezt felhasználva a (2.14) egyenlet tovább alakítható, nevezetesen,

$$= (t_2-t)^{k_1+k_2+1}\frac{k_1!k_2!}{(k_1+k_2+1)!}.$$

Ezt a számítást helyettesítsük vissza a (2.13) összefüggésbe és akkor a következő egyenlőséget kapjuk meg.

$$\begin{aligned}
&\int_t^\infty \int_t^\infty \overline{H}(t_1,t_2)dt_1dt_2 = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\sum_{k_1=0}^{\infty}\int_t^\infty \frac{e^{-\lambda t_2}\lambda^{k+k_1+k_2}t^k}{k!\ k_1!\ k_2!}(t_2-t)^{k_1+k_2+1}\frac{k_1!k_2!}{(k_1+k_2+1)!}\overline{P}(k+k_1,k+k_2)dt_2 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\sum_{k_1=0}^{\infty}\overline{P}(k+k_1,k+k_2)\frac{\lambda^{k+k_1+k_2}e^{-\lambda t}t^k}{(k_1+k_2+1)!}\int_t^\infty e^{-\lambda(t_2-t)}(t_2-t)^{k_1+k_2+1}.
\end{aligned}$$

Ebben az esetben is helyettesítés integrálszámítással tudunk tovább haladni, méghozzá úgy, hogy legyen $z=t_2-t$. Ismeretes, hogy $\int_0^\infty z^a e^{-\lambda z}dz = \dfrac{a!}{\lambda^{a+1}}$. Ezzel a helyettesítéssel egy ehhez hasonló speciális integrált kapunk.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\sum_{k_1=0}^{\infty}\overline{P}(k+k_1,k+k_2)\frac{t^k}{k!}\ e^{-\lambda t}\ \frac{\lambda^k}{\lambda^2} \\
&= \frac{1}{\lambda^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}\ \sum_{k_2=0}^{\infty}\sum_{k_1=0}^{\infty}\overline{P}(k+k_1,k+k_2)
\end{aligned}$$

Így a (2.12) pontbeli két esetre hivatkozva a $\overline{H}$ túlélésfüggvénye kétszeresen integrálva a következő:

$$\int_t^\infty \int_t^\infty \overline{H}(t_1,t_2)dt_1dt_2 = 2\cdot\frac{1}{\lambda^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}\ \sum_{k_2=0}^{\infty}\sum_{k_1=0}^{\infty}\overline{P}(k+k_1,k+k_2). \tag{2.15}$$

A bizonyítás befejezéséhez térjünk vissza a (2.11)-hez. Tudjuk, hogy a $\overline{H}(t,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}\overline{P}(k,k)$. Rendezzük át az egyenlőtlenséget és helyettesítsük be, amit idáig kiszámoltunk vagy ismertünk.

$$\sum_{k'=0}^{\infty}\frac{(\lambda t')^{k'}}{k'!}e^{-\lambda t'}\overline{P}(k',k')2\cdot\frac{1}{\lambda^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{k}}{k!}e^{-\lambda t}\sum_{k_2=0}^{\infty}\sum_{k_1=0}^{\infty}\overline{P}(k+k_1,k+k_2)-$$
$$-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{k}}{k!}e^{-\lambda t}\overline{P}(k,k)2\cdot\frac{1}{\lambda^2}\sum_{k'=0}^{\infty}\frac{(\lambda t')^{k'}}{k'!}e^{-\lambda t'}\sum_{k_2=0}^{\infty}\sum_{k_1=0}^{\infty}\overline{P}(k+k_1,k+k_2)$$
$$=2\cdot\frac{1}{\lambda^2}\sum\sum_{k<k'}\frac{e^{-\lambda t-\lambda t'}\lambda^{k+k'}}{k!(k')!}t^k(t')^{k'}[\overline{P}(k',k')\sum_{k_2=0}^{\infty}\sum_{k_1=0}^{\infty}\overline{P}(k+k_1,k+k_2)-$$
$$-\overline{P}(k,k)\sum_{k_2=0}^{\infty}\sum_{k_1=0}^{\infty}\overline{P}(k+k_1,k+k_2)]\geq 0.$$

□

Ez a bizonyítás a [3] cikkben hibás, ugyanis a (2.15)-ban egy felesleges tag szerepel, szerencsére ez a gondolatmenet helyességén nem változtat. Az előbb leírt változat már a javított verzió.

2.2.6. Megjegyzés. A tétel igaz $BIMRL$-1-re is, ha (2.9)-ben $IMRL$-t írunk $DMRL$ helyett és (2.10)-ban a „nem növekvőt” „nem csökkenőre” cseréljük.

2.2.7. Megjegyzés. A kétváltozós tételek többváltozós megfelelői is természetesen igazak, mind $MIFR$, mind $MDMRL$ tulajdonságra.

2.3. Többváltozós IFRA

Az n elemű koherens rendszereket leíró φ n-változós Boole-függvényekről megmutatható, hogy mindig felírhatók a következő alakban:

$$\varphi(\mathbf{x})=\coprod_{j=1}^{k}\prod_{i\in P_j}x_i, \tag{2.16}$$

ahol $P_1,P_2,\ldots,P_k$ az $\{1,2,\ldots,n\}$ részhalmazai. Mivel bináris változókra $\coprod x_i=\min x_i$ és $\prod x_i=\max x_i$, ez úgy felírható, hogy

$$\varphi(\mathbf{x})=\max_{1\leq j\leq k}\min_{i\in P_j}x_i.$$

Hasonlóképpen, minden φ koherens struktúrafüggvény felírható

$$\varphi(\mathbf{x})=\min_{1\leq j\leq k}\max_{i\in P_j}x_i$$

alakban is, természetesen a k szám és a P_j halmazok különböznek a (2.16)-beliektől.

Világos, hogy ha a rendszer elemeinek az élettartama $T_1, T_2, \ldots, T_n$, akkor a rendszer τ élettartamára

$$\tau = \max_{1 \le j \le k} \min_{i \in P_j} T_i,$$

ugyanis $I(.)$-vel jelölve a zárójelben álló esemény indikátorát,

$$\begin{aligned} I(\tau \ge t) &= \varphi(I(T_1 \ge t), \ldots, I(T_n \ge t)) = \\ &= \max_{1 \le j \le k} \min_{i \in P_j} I(T_i \ge t) = \\ &= \max_{1 \le j \le k} I(\min_{i \in P_j} T_i \ge t) = \\ &= I(\max_{1 \le j \le k} \min_{i \in P_j} T_i \ge t). \end{aligned}$$

A továbbiakban a

$$\tau(\mathbf{t}) = \max_{1 \le j \le k} \min_{i \in P_j} t_i \tag{2.17}$$

alakban felírható függvényeket n-ed rendű koherens függvénynek nevezzük. Minden ilyen függvény felírható

$$\tau(\mathbf{t}) = \min_{1 \le j \le m} \max_{i \in K_j} t_i$$

alakban is. Természetes módon definiálható a τ duálisa a (2.17) előállítás segítségével, az alábbi módon:

$$\tau^D(\mathbf{t}) = \min_{1 \le j \le p} \max_{i \in P_j} t_i. \tag{2.18}$$

Legyen $T_1, \ldots, T_n$ élettartamok. Vezessünk be az együttes eloszlásaikra néhány feltételt, amit a későbbi definíciókban is használni fogunk.

A feltétel: $R(\alpha \mathbf{t})/\alpha$ növekvő $\alpha > 0$ esetén, bármilyen $\mathbf{t} \ge 0$-ra, ahol R jelöli az együttes (többváltozós) hazárdfüggvényt.

B feltétel: minden τ koherens függvényre teljesül, hogy $\tau(T_1, \ldots, T_n)$ eloszlása az $IFRA$ osztályba tartozik.

C feltétel: az $\{1, 2, \ldots, n\}$ minden nemüres B részhalmazára teljesül, hogy $\min_{i \in B} T_i$ $IFRA$ tulajdonságú.

Vezessünk be néhány jelölést és fogalmat, továbbá vizsgáljuk meg a $\overline{H}$ együttes túlélésfüggvény alaptulajdonságait.

2.3.1. Definíció. *Egy $(T_1, \ldots, T_n)$ véletlen vektor több változós $IFRA$ ($MIFRA$) eloszlású, ha minden folytonos, nem negatív növekvő h függvényre és $\forall 0 < \alpha \leq 1$ számra teljesül az*

$$\mathbf{E}[h(T_1, \ldots, T_n)] \leq \mathbf{E}^{1/\alpha}[h^\alpha(T_1/\alpha, \ldots, T_n/\alpha)]$$

egyenlőtlenség.

Itt az M a „multivariate" kezdőbetűje.

Ebben a részben is olyan rendszereket tekintünk, amelyeket sokkok érnek. Ezek a sokkok mérhető károsodást okoznak, amely akkumulálódik. Megadunk küszöböket úgy, hogy az élettartam ezek átlépéséig eltelt idő lesz. Ehhez teljesen hasonló a 1.3 részben említett víztározó-modell.

Legyen az i-edik sokk által a j-edik rendszernek okozott kár X_{ij}, $i = 1, 2, \ldots$ és $j = 1, 2, \ldots, n$ esetén. Ekkor $S_j^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} X_{ij}$ a összegzett kárnagyság a j-edik komponensre, k sokk esetén. Legyen

$$F^{[k_1, \ldots, k_n]}(z_1, \ldots, z_n) = P(S_j^{(k_j)} \leq z_j, j = 1, 2, \ldots, n)$$

Az $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, \ldots, X_{in})$ vektorok eloszlását jelölje F_i $i = 1, 2, \ldots$ esetén. A továbbiakban olyan eseteket vizsgálunk, ahol ezek függetlenek és azonos eloszlásúak. Ha a természetes számokból álló $\mathbf{k}$ és $\mathbf{l}$ vektor egyformán rendezett (azaz $(k_\alpha - k_\beta)(l_\alpha - l_\beta) \geq 0$, $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n - re$), akkor

$$F^{[\mathbf{k}+\mathbf{l}]} = F^{[\mathbf{k}]} * F^{[\mathbf{l}]},$$

ahol a $*$ a konvolúciót jelöli.

Jelölje a küszöböket az $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ vektor, tehát $\overline{P}(\mathbf{k}) = F^{[\mathbf{k}]}(\mathbf{x})$, ezek segítségével két változóban a következőképpen tudjuk felírni a túlélésfüggvény kiszámítási módját:

$$\overline{H}(t_1,t_2) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} e^{-\lambda t_1}\frac{(\lambda t_1)^k}{k!}e^{-\lambda(t_2-t_1)}\frac{[\lambda(t_2-t_1)]^l}{l!}F^{[k,k+l]}(x_1,x_2),\ \text{ha } 0 \le t_1 \le t_2,$$
$$\overline{H}(t_1,t_2) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} e^{-\lambda t_2}\frac{(\lambda t_2)^k}{k!}e^{-\lambda(t_1-t_2)}\frac{[\lambda(t_1-t_2)]^l}{l!}F^{[k+l,k]}(x_1,x_2,)\ \text{ha } t_1 \ge t_2 \ge 0. \tag{2.19}$$

Az $n$üváltozós esetben tegyük fel, hogy $0 = t_0 \le t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_n$, és $t_n > 0$, továbbá jelölje $\theta_j = \dfrac{t_j - t_{j-1}}{t_n}$, $j = 1, \ldots, n$ esetén. Ezzel

$$\overline{H}(t_1,\ldots,t_n) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t_n}\frac{(\lambda t_n)^k}{k!}\overline{P}_k(\mathbf{x}), \tag{2.20}$$

ahol az $l_1 = 0$ és $l_n = k$ esetén

$$\overline{P}_k(\mathbf{x}) = \sum_{l_1=0}^{k}\sum_{l_2=l_1}^{k}\cdots\sum_{l_{n-1}=l_{n-2}}^{k}\binom{k}{l_1, l_2-l_1,\ldots,l_n-l_{n-1}}$$
$$\times\prod_{j=1}^{n}\theta_j^{l_j-l_{j-1}}F^{[l_1,\ldots,l_n]}(\mathbf{x}).$$

Itt $l_i - l_{i-1}$ jelöli a (t_{i-1}, t_i) időintervallumban érkező sokkok számát.

2.3.2. Tétel. *A fenti feltételek mellett $(T_1,\ldots,T_n)$ $MIFRA$ tulajdonságú.*

Először mondjunk ki néhány lemmát, amelyek szükségesek lesznek a 2.3.2 Tétel bizonyításához. Az egyszerűség miatt ezeket a kétváltozós esetben mondjuk ki.

2.3.3. Lemma. *Tegyük fel, hogy a (T_1, T_2) együttes túlélésfüggvénye felírható a (2.19)-ben megadott összefüggéssel. Jelöljön τ egy másodrendű koherens függvényt és legyen az $a_1 \ge a_2 > 0$ konstansok. Ekkor $t > 0$-ra teljesül, hogy*

$$P\{\tau(a_1T_1, a_2T_2) > t\} =$$
$$= \sum_{k_1}^{\infty}\sum_{k_2=k_1}^{\infty} e^{-\lambda(t_1)}\cdot\frac{(t_1)^{k_1}}{(k_1)!}\cdot e^{-\lambda(t_2-t_1)}\cdot\frac{(t_2-t_1)^{k_2-k_1}}{(k_2-k_1)!}\times$$
$$\times P\left\{\tau^D\left(\frac{S_1^{(k_1)}}{y_1},\frac{S_2^{(k_2)}}{y_1}\right)\le 1\right\}, \tag{2.21}$$

ahol $j = 1, 2$ esetén $t_j = t/a_j$ és τ^D a (2.18)-ban definiált duális koherens függvény.

2.3.4. Definíció. *Legyen* $0 \leq \theta_1 \leq 1$, $0 \leq \theta_2 \leq 1$, $\theta_1 + \theta_2 = 1$. *Legyen továbbá* $A \subset \mathbb{R}^n$ *olyan Borel-halmaz, amelyre teljesül a következő: ha* $\mathbf{x} \in A$ *és* $\mathbf{v} \leq \mathbf{u}$ *(koordinátánként), akkor* $\mathbf{v} \in A$.
Vezessük be a következő mennyiséget:

$$\overline{P}_k(A) = \sum_{l_1=0}^{k} \sum_{l_2=l_1}^{k} \binom{k}{l_1, l_2 - l_1} \theta_1^{l_1} \cdot \theta_2^{l_2-l_1} \cdot P\{(S_1^{(l_1)}, S_2^{(l_2)}) \in A\}. \tag{2.22}$$

A következő lemmához feltesszük azt, amit a 2.3.2 Tételben is feltettünk, hogy az $\mathbf{X}_i$ vektorok azonos eloszlásúak $\forall i$-re.

2.3.5. Lemma. *Ekkor teljesül az alábbi összefüggés:*

$$(\overline{P}_k(A))^{1/k} \text{ csökkenő } k = 0, 1, \ldots. \tag{2.23}$$

Legyen m egy egész szám. A 2.3.2 Tétel bizonyításához tekintsük a korábban már megadott $T_1, \ldots, T_n$ élettartamokat, mégpedig úgy, hogy mindegyik változó m-szer szerepeljen.

$$\underbrace{T_1, \ldots, T_1}_{m-szer}, \underbrace{T_2, \ldots, T_2}_{m-szer}, \ldots, \underbrace{T_n, \ldots, T_n}_{m-szer}.$$

2.3.6. Lemma. *Legyen* $N(t)$ *Poisson-folyamat, az* y_{jl} *küszöbök pedig nemnegatív számok,* $1 \leq j \leq n$ *és* $1 \leq l \leq m$. *Továbbá legyen*

$$T_{jl} = \inf\{t \geq 0 : S_j^{(N(t))} > y_{jl}\}.$$

Ekkor

$$P\{T_{jl} > t_{jl}, 1 \leq j \leq n, 1 \leq l \leq m\} = \overline{H}(t_{11}, \ldots, t_{jl}, \ldots, t_{nm}), \tag{2.24}$$

ahol a $\overline{H}$ *nm-dimenziós együttes túlélésfüggvény a* (2.20) *képlet szerint szerint számolható, és az nm-dimenziós károsodásvektor eloszlásfüggvénye*

$$\widetilde{F}(z_{11}, \ldots, z_{jl}, \ldots, z_{nm}) = F_i\left(\min_{1 \leq l \leq m}(z_{1l}), \ldots, \min_{1 \leq l \leq m}(z_{nl})\right). \tag{2.25}$$

Bizonyítás. (2.24) *könnyen látható, ha felhasználjuk, hogy az nm-dimenziós*

$$\underbrace{Y_{i1}, \ldots, Y_{i1}}_{m-szer}, \underbrace{Y_{i2}, \ldots, Y_{i2}}_{m-szer}, \ldots, \underbrace{Y_{in}, \ldots, Y_{mn}}_{m-szer}.$$

véletlen vektor eloszlása éppen a (2.25) *képlettel adható meg.* □

2.3.7. Megjegyzés. *Most $y_{j1} = \dots = y_{jm} = y_j$, így a 2.3.6 Lemma segítségével felírható a*

$$\underbrace{T_1, \dots, T_1}_{m-szer}, \underbrace{T_2, \dots, T_2}_{m-szer}, \dots, \underbrace{T_n, \dots, T_n}_{m-szer}$$

vektor együttes túlélésfüggvénye a (2.24) *képlet szerint.*

Ezeknek a lemmáknak a bizonyítása megtalálható a [7] cikkben. Most csak a 2.3.6 Lemmát bizonyítottuk, mert az rövid és könnyen meggondolható. A 2.3.2 Tétel bizonyításához szükségünk lesz a lemmákra. A következőkben ezt a bizonyítást ismertetjük.

A 2.3.2 Tétel bizonyítása.

Először megmutatjuk, hogy minden $a_j \geq 0$ konstansra $1 \leq j \leq n$ esetén és minden τ n-edrendű koherens függvényre

$$T := \tau(a_1 T_1, \dots, a_n T_n) \ IFRA \text{ tulajdonságú.} \tag{2.26}$$

Feltehetjük, hogy $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$, ez átszámozva elérhető. Feltehetjük azt is, hogy $a_n > 0$, hiszen ha egyenlő 0-val, akkor egy alacsonyabb dimenziós esethez jutunk. Legyen $A = \{z : \tau^D(z_1/y_1, \dots, z_n/y_n) \leq 1\}$. Ez teljesíti a (2.22) képlet előtt megkövetelt feltételt. A (2.21) képlet alapján némi számolás után következik, hogy

$$P(T > t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t_n)^k}{k!} \overline{P}_k(A), \tag{2.27}$$

ahol $\overline{P}_k(A)$ adott a (2.22)-beli összefüggésből és $\theta_i = (a_i^{-1} - a_{i-1})/a_n^{-1}$ $i = 1, 2, \dots, n$ esetén, továbbá $t_n = t/a_n$. A (2.23) tulajdonság teljesül, ugyanis a feltételek itt is adottak. Az 1.3.4 Tétel és a (2.27)-beli egyenlőség miatt a (2.26)-ban megadott T élettartam $IFRA$ tulajdonságú.

A fenti levezetés mutatja, hogy a $(T_1, \dots, T_n)$ vektor $\overline{H}$ túlélésfüggvényére is teljesül a (2.26) állítás. A 2.3.6 Lemma miatt a

$$\underbrace{T_1, \dots, T_1}_{m-szer}, \underbrace{T_2, \dots, T_2}_{m-szer}, \dots, \underbrace{T_n, \dots, T_n}_{m-szer}$$

véletlen túlélésvektor is felírható ebben a formában. Ezért a (2.26)-beli állításból következik, hogy minden nm-ed rendű τ koherens függvényre és nemnegatív a_{jl} számra $1 \leq j \leq n, 1 \leq l \leq m$ esetén teljesül, hogy

$$\tau(a_{11} T_1, \dots, a_{jl} T_j, \dots, a_{nm} T_n) \in IFRA. \tag{2.28}$$

Erről pedig már Block és Savits a [2] cikkben belátta, hogy ekvivalens azzal, hogy $(T_1, \ldots, T_n)$ együttes túlélésfüggvénye $MIFRA$ tulajdonságú. $\square$

3. fejezet

További osztályok

Természetesen definiáltak az $DMRL$, IFR és $IFRA$ osztályokon kívül számos mást is. Ilyen például az NBU, ami azt jelenti, hogy az új jobb a használtnál. Ezt az osztályt Block és Savits vizsgálta az $NBUE$-vel együtt 1978-ban [1]. Egy további osztály a $HNBUE$, amit Bengt Klefsjö is vizsgált 1981-ben [4]. E hat osztály közötti tartalmazási kapcsolat a következő:

$$\begin{array}{rl} IFR \Rightarrow IFRA \Rightarrow NBU & \\ & \Rightarrow NBUE \Rightarrow HNBUE \\ IFR \Rightarrow DMRL \Rightarrow NBU & \end{array}$$

Az NBU, $NBUE$ és $HNBUE$ osztályok fiatalodó megfelelőik is felírhatóak, úgy, mint ahogy pl. $DMRL$ helyett $IMRL$. Ezeket rendre így jelöljük: NWU(az új rosszabb mint a használt), $NWUE$, illetve $HNWUE$.

Sok ilyen osztályt vezettek be és vizsgáltak tartalmazásra nézve is. Számos példa található Lai és Xie [5] könyvében. Még két név, amelyet érdemes megemlíteni a sokk-modellek témakörében: Esary J. D. és A-Hameed M. S.

Irodalomjegyzék

[1] Block, H. W., and Savits, T. H., Shock models with NBUE survival. *J. Appl. Probab.* **15** (1978), 621–628.

[2] Block, H. W., and Savits, T. H., Multivariate increasing failure rate distributions. *Ann. Probab.* **8** (1980), 703–801.

[3] Ghosh, M., and Ebrahimi, N., Shock models leading to increasing failure rate and decreasing residual life survival. *J. Appl. Probab.* **19** (1982), 158–166.

[4] Klefsjö, B., HNBUE survival under some shock models. *Scand. J. Statist.* **8** (1981), 9–47.

[5] Lai, C., and Xie, M., *Stochastic Ageing and Dependence for Reliability.* Springer, New York, 2006.

[6] Marshall, A. W., and Olkin, I., *Life Distributions.* Springer, New York, 2007.

[7] Marshall, A. W., and Shaked, M., Multivariate shock models for distributions with increasing hazard rate average. *Ann. Probab.* **7** (1979), 343–358.

[8] Móri Tamás, *Élettartam-adatok elemzése.* Typotex, Budapest, 2011.

[9] Savits, T. H., and Shaked, M., Shock models and the MIFRA property. *Stoch. Proc. Appl.* **11** (1981), 273–283.