Eötvös Lóránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Elekes Ábel

A π szám

BSc szakdolgozat

Alkalmazott Matematikus szakirány

Témavezető:

Fialowski Alice

Számelméleti és Algebra Tanszék

Budapest 2013

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Fialowski Alice-nak, hogy mindig szakított időt arra, hogy a felmerülő problémák megoldásához értékes útmutatást adjon, valamint a dolgozat stiláris, formai és fogalmi hibáit kijavítsa.
Köszönettel tartozom a családomnak és a barátaimnak a szeretetért, támogatásért és bíztatásért, amit tőlük kaptam az évek évek során.

Budapest, 2013 január.

Elekes Ábel

Bevezető

[3]„How I wish a drink, alcoholic of course, after the heavy lectures involving quantum mechanics”[1]

Dolgozatom témája a π szám.

Az első fejezetben úgy definiáljuk a π számot, mint a komplex exponenciális homomorfizmus magterében szereplő speciális valós számot. Ezután a második részben megnézzük, hogy az így definiált szám tényleg úgy viselkedik, és olyan tulajdonságokkal rendelkezik, mint amiket elvárunk tőle, majd tüzetesebben is megvizsgáljuk két fontosabb tulajdonságát, nevezetesen az irracionalitását, és a transzcendenciáját.
A harmadik fejezetben történelmi áttekintést adunk a π szám megismeréséről. Az ókori gyakorlatias közelítésektől kezdve eljutunk egészen a modern analitikus matematikai formulákig. Majd a negyedik fejezetben ezeknek a közelítéseknek, formuláknak a konvergencia-sebességét vizsgáljuk számítógépes programok segítségével, és értékeljük a kapott eredményeket.

[3] „Nem a régi s durva közelítés,
Mi szótól szóig így kijön
Betűiket számlálva.
Ludolph eredménye már,
Ha itt végezzük húsz jegyen.
De rendre kijő még tíz pontosan,
Azt is bízvást ígérhetem.”
-Szász Pál (1952)

[1] Figyeljük a betűk számát a szavakban!

1. A π definíciója

Az exponenciális sort

$$\exp z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{i!}$$

először *Newton* használta egy *Leibniz*nek írott levelében, de ő még csak valós esetben. Tudjuk, azonban, hogy ez a sorösszeg abszolút konvergens minden $z \in \mathbb{C}$-re is.[4] Így definiálhatjuk az egész $\mathbb{C}$-n értelmezett komplex függvényt: $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, ami az úgynevezett komplex exponenciális függvény, ez a valós exponenciális függvény természetes kiterjesztése a komplex térre.

Az exponenciális függvény értelmezéséhez alapvető fontosságú lesz az összegzési tétel, melynek bizonyításához felhasználjuk *Cauchy* végtelen sorok szorzatáról szóló tételét[5]:

Tétel: Legyenek $\sum_0^\infty a_i$ *és* $\sum_0^\infty b_j$ abszolút konvergens sorok. Ezeknek a „Cauchy szorzata”, $\sum_0^\infty c_k$ is abszolút konvergens, ahol $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$, és

$$\left(\sum\nolimits_0^\infty a_i\right)\left(\sum\nolimits_0^\infty b_j\right) = \sum\nolimits_0^\infty c_k.$$

Összegzési Tétel: $(\exp w)(\exp z) = \exp(w + z)$.

Bizonyítás:

$$(\exp w)(\exp z) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{w^i}{i!}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k,$$

ahol a Cauchy-szorzat szerint

$$c_k = \sum\nolimits_{i+j=k} \frac{w^i}{i!} \cdot \frac{z^j}{j!} = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{(k-j)!\,j!} w^{k-j} z^j.$$

Tudjuk továbbá:

$$\frac{1}{(k-j)!\,j!} = \frac{1}{k!}\binom{k}{j}.$$

Innen a binomiális tételt felhasználva:

$$c_k = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{j} w^{k-j} z^j = \frac{1}{k!}(w+z)^k,$$

azaz

$$(\exp w)(\exp z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(w+z)^k}{k!} = \exp(w+z) \blacksquare$$

Speciális esetben, ha az addíciós tételbe $w \coloneqq -z$-t írunk, mivel $\exp 0 = 1$, kapjuk, hogy:

$$(\exp z)^{-1} = \exp(-z) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Ebből látszik, hogy az exponenciális függvény sehol sem vesz fel nullát, azaz az

$$exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{\times}, \quad z \longmapsto \exp z$$

leképezés homomorfizmus a komplex számok additív csoportjából ($\mathbb{C}$) a komplex számok multiplikatív csoportjába ($\mathbb{C}^{\times}$).

Ha *Euler* mindenki által jól ismert jelölését használjuk, azaz

$$e^z \coloneqq \exp z, \text{ ahol } e \coloneqq 1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} + \cdots,$$

akkor az alábbi alakban kapjuk meg az összegzési tételt:

$$e^w e^z = e^{w+z} \quad \forall w, z \in \mathbb{C}.$$

Nézzük ennek a tételnek a következményeit:

Állítás: $|\exp z| = \exp(Re\ z) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$

Bizonyítás: Felhasználva, hogy $z + \bar{z} = 2Re\ z$, és az előbb igazolt összegzési tételt, valamint, hogy a konjugálás konvergens sorok esetében kiterjeszthető a határértékre, kapjuk:

$$|\exp z| = \left|\exp\frac{1}{2}z\right|^2 = \left(\exp\frac{1}{2}z\right)\overline{\left(\exp\frac{1}{2}z\right)} = \left(\exp\frac{1}{2}z\right)\left(\exp\frac{1}{2}\bar{z}\right) = \exp\left[\frac{1}{2}(z+\bar{z})\right] =$$
$$= \exp(Re\ z) \blacksquare$$

Az exponenciális sor alakjából nyilvánvaló, hogy $\exp x > 1$, ha $x > 0$, ebből következően $\exp x = (\exp(-x))^{-1} < 1$, ha $x < 0$. Azaz az előző állításból

$$|\exp z| = 1 \iff z \in \mathbb{R}i,$$

tehát speciálisan az $x \longmapsto \exp(ix)$ leképzés a valós számok halmazából ($\mathbb{R}$) az egységkörre (S^1) képez.

Vizsgáljuk meg kicsit jobban ezt a leképzést:

Állítás: $\operatorname{Im}(\exp(iy)) > 0$, ha $0 < y < \sqrt{6}$.

Bizonyítás: Mivel $\exp(iy) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}(iy)^i$ és $(ix)^{2n} \in \mathbb{R}$, ezért :

$$\operatorname{Im}(\exp(iy)) = y - \frac{1}{3!}y^3 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}y^{2n+1} - \cdots =$$

$$= y\left(1 - \frac{1}{6}y^2\right) + \frac{1}{5!}y^5\left(1 - \frac{1}{6 \cdot 7}y^2\right) + \cdots$$

amiből az állítás már adódik, hiszen $0 < y < \sqrt{6}$ esetén minden tag nemnegatív. ■

Ebből - $\exp(-iy) = (\exp(iy))^{-1}$ miatt -, következik az alábbi lemma:

Lemma: az $y = 0$ az egyetlen olyan érték, ahol a $\mathbb{R} \to S^1$, $y \longmapsto \exp(iy)$ függvény a $(-1, +1)$ nyílt intervallumon valós értéket vesz fel.

Bizonyítás: Az $\exp z$ függvéy folytonossága is könnyen adódik az összegzési tételből. Legyen $q \coloneqq 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$; ekkor

$$|\exp w - 1| \leq |w|\left|1 + \frac{w}{2!} + \frac{w^2}{3!} + \cdots\right| \leq |w||q| \quad w \in \mathbb{C}, \quad |w| \leq 1.$$

Ebből következően bármely $c \in \mathbb{C}$-hez minden olyan $z \in \mathbb{C}$-re, amelyre $|z - c| \leq 1$:

$$|\exp z - \exp c| = |\exp c||\exp(z - c) - 1| \leq |\exp c|q|z - c|$$

és így $|\exp z - \exp c| \leq \varepsilon$ esetén: $|z - c| \leq min(1, |\mathrm{q} \exp c|^{-1}\varepsilon)$. ■

Mivel $\exp s > 1 + s$, ha $s > 0$ és $\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$, az exponenciális függvénynek most belátott folytonosságából, és a köztesérték tételből[6], kapjuk, hogy

$$\exp \mathbb{R} = \{x \in \mathbb{R} : r > 0\}$$

Epimorfizmus Tétel: Az $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$exponenciális homomorfizmus epimorfizmus, azaz szürjektív.

A tétel bizonyításához felhasználunk két lemmát.

1. Lemma: Az $1 \in \mathbb{C}$ pontnak létezik olyan U környezete, amire $U \subset \exp(\mathbb{C})$.

Bizonyítás: Alkalmazzuk az alábbi két jól ismert komplex függvénytani állítást[7]:

1) Minden $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ hatványsor holomorf a konvergencia körén belül, és itt $f'(z) = \sum_{j=1}^{\infty} j a_j z^{j-1}$.

2) Ha f holomorf és a deriváltja minden pontban eltűnik a konvergenciakörén belül, akkor f konstans.

A $l(x) = z - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} \mp \cdots$ logaritmikus sor konvergens, ha $|z| < 1$, így az 1) állítás szerint holomorf és $l'(z) = 1 - z + z^2 - z^3 \pm \cdots = (1+z)^{-1}$ ebben a körben. Ugyanígy az exponenciális függvény holomorf, és $(\exp z)' = \exp z$ az egész komplex téren. Ezekből következően $f(z) = (1+z)\exp(-l(z))$ is holomorf az egységkörön belül, és itt:

$$\begin{aligned} f'(z) &= (1+z)' \exp(-l(z)) + (1+z) \exp'(-l(z)) \\ &= \exp(-l(z)) - (1+z) \exp\big(-l(z)\big)(1+z)^{-1} = 0. \end{aligned}$$

Ekkor a 2) állítás szerint $f(z)$ konstans, és mivel $f(0) = 1$, ezért $\exp(-x) = (\exp x)^{-1}$ miatt $\exp(l(z)) = 1 + z$ minden $|z| < 1$-re.
Innen már következik, hogy az $U \coloneqq \{z \in \mathbb{C}: |z - 1| < 1\}$ környezet benne van $\exp(\mathbb{C})$-ben, hiszen bármely $a \in \mathbb{C}$ esetén, amire $|a - 1| < 1$ teljesül, a $b \coloneqq l(a-1)$ jól definiált, és $\exp b = a$. ■

Konvergencia Lemma: Minden $w \in \mathbb{C}^\times$ számhoz létezik olyan $w_n \in \mathbb{C}^\times$ sorozat, amire: $w_n^{2^n} = w$ és $\lim_{n\to\infty} w_n = 1$.

Bizonyítás: Legyen $w \in \mathbb{C}^\times$ tetszőleges. Írjuk fel $w = |w|c$ alakban, ahol $c \in S^1$, azaz c a komplex egységkör eleme. Ekkor létezik $c_1 = a_1 + ib_1 \in S^1$, ahol $a_1 > 0$ és ${c_1}^2 = c$. Létezik olyan $c_n = a_n + ib_n \in S^1$ sorozat, amire ${c_n}^2 = c_{n-1}$, $a_n > 0$ és $|b_n| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}|b_{n-1}|$. Nyilván

$$c_n{}^{2^n} = c, \quad |b_n| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}, \quad |b_1| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}.$$

Ebből következik, hogy $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, és mivel az egységkörön vagyunk, azaz $a_n{}^2 + b_n{}^2 = 1$, ezért $\lim_{n\to\infty} a_n{}^2 = \lim_{n\to\infty}(1 - b_n{}^2) = 1$. Továbbá tudjuk, hogy $a_n \geq 0$, tehát $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. Innen $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}(a_n + ib_n) = 1$.

Vegyük a $w_n := \sqrt[2^n]{|w|}c_n$ sorozatot. Erre a sorozatra teljesülnek a lemmában megfogalmazott feltételek, hiszen $w_n^{2^n} = \left(\sqrt[2^n]{|w|}c_n\right)^{2^n} = |w|c = w$ és $\lim_{n\to\infty} w_n = 1$, mert $c_n \to 1$, és minden rögzített $x > 0$-ra $\sqrt[n]{x} \to 1$.■

Innen már könnyen adódik a tétel bizonyítása. Az előbb igazolt konvergencia lemma szerint minden $w \in \mathbb{C}^\times$-hez létezik olyan $w_n \in \mathbb{C}^\times$ sorozat, amire: $w_n^{2^n} = w$ és $\lim_{n\to\infty} w_n = 1$. Továbbá az 1. Lemma szerint léteznie kell egy olyan $m \geq 1$ indexnek és $\hat{z} \in \mathbb{C}$ számnak, amikre: $w_m = \exp \hat{z}$. Ekkor $z := 2^m\hat{z}$ -re az öszegzési tétel alapján: $\exp z = (\exp \hat{z})^{2^m} = w$, valamint: $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times$.■

Most már tudjuk, hogy $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times$. Vizsgáljuk most ennek a leképezésnek a magterét:

$$\mathrm{Ker}(\exp) = \{\, w \in \mathbb{C} : \exp w = 1\}.$$

Tétel: Létezik egy olyan egyértelműen meghatározott pozitív valós szám, nevezzük π-nek, amelyre:

$$\mathrm{Ker}(\exp) = 2\pi i\mathbb{Z}.$$

Bizonyítás: Jelöljük az exponenciális leképzés magját K-val: $K :=$ Ker(exp). Tudjuk, hogy $K \neq 0$, hiszen exp: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ nem izomorfizmus, mert például $\mathbb{C}^\times$-ben a $-1 \in \mathbb{C}^\times$ másodrendű elem, míg $\mathbb{C}$-ben még véges rendű elem sincs. Nyilván minden $c \in K$-ra $|\exp c| = 1$, így egy régebbi állításunk alapján $K \subset \mathbb{R}i$. Tudjuk, hogy ha $c \in K$, akkor $-c \in K$. Így létezik $s > 0$, amire $si \in K$. Azt is tudjuk egy korábbi lemmából, hogy nincs olyan nemnulla iy szám, ahol $y \in (-1, +1)$, ami eleme lenne a K-nak. Viszont az exponenciális függvény folytonossága miatt kell legyen egy olyan legkisebb pozitív valós szám, nevezzük π-nek, amire $2\pi i \in K$. Az exponenciális függvény tulajdonságai alapján nyilvánvaló, hogy K a komplex számoknak egy összeadásra zárt részcsoportja, így $2\pi i\mathbb{Z} \subset K$.

Indirekt tegyük fel, hogy létezik $r \in \mathbb{R}$, amire $ri \in K$. Ekkor léteznie kell egy n természetes számnak, amelyre: $2n\pi \leq r < 2(n+1)\pi$. Mivel K zárt az összeadásra, így $i(r - 2n\pi) \in K$, és mivel $0 \leq r - 2n\pi < 2\pi$, ezért $r = 2n\pi$, hiszen π-t a legkisebb ilyen tulajdonságú számnak választottuk. Tehát $K = 2\pi i\mathbb{Z}$, és a π választása nyilvánvalóan egyértelmű. ■

Ezentúl a π számra ezt a tételben megfogalmazott definíciót fogjuk használni.

Mivel $e^{2\pi i} = 1$ és $\pi i \notin \mathrm{Ker}(exp)$, ezért $e^{\pi i} = -1$ kell legyen. Azaz fennáll az alábbi érdekes egyenlőség, amely mind az öt, a matematikában talán legfontosabb szám szerepel:

$$1 + e^{\pi i} = 0.$$

2. A π tulajdonságai

i. A π klasszikus tulajdonságai

Ebben a részben megmutatjuk, hogy az előző fejezetben definiált π szám tényleg azokkal a tulajdonságokkal rendelkezik, mint amiket elvárunk tőle.

Először is definiáljuk a komplex sinus és cosinus függvényeket:

$$\sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Legyen $s_n(z) = \sum_{i=0}^{n} \frac{z^i}{i!}$. Ekkor minden m természetes számra

$$s_{2m+1}(iz) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \frac{z^{2j}}{(2j)!} + i \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \frac{z^{2j+1}}{(2j+1)!},$$

$$s_{2m+1}(-iz) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \frac{z^{2j}}{(2j)!} - i \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \frac{z^{2j+1}}{(2j+1)!}.$$

Tudjuk, hogy $\lim_{n\to\infty} s_n(z) = e^z$. Innen a sinus és cosinus függvények definíciója alapján

$$\sin z = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} z^{2i+1}, \quad \cos z = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!} z^{2i}, \;\; z \in \mathbb{C}.$$

Láthatóan ezek az általunk is jól ismert trigonometrikus függvények, amiket eddig így, a hatványsorukkal definiáltunk. ■

Szintén a definíciókból egyből következik az Euler-formula, azaz:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Ha csak valós esetben nézzük, akkor természetesen $x \in \mathbb{R}$ esetén, $\cos x, \sin x \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad x \in \mathbb{R}$$

az exponenciális függvény valós és képzetes részre való bontása. A felvett függvényértékek is - az elvártaknak megfelelően - mivel $e^{2\pi i} = 1$ és $e^{\pi i} = -1$:

$$\cos 2\pi = 1, \quad \sin 2\pi = 0, \quad \cos \pi = -1, \quad \sin \pi = 0.$$

Továbbá a definícióból következően látjuk, hogy

$$\cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z,$$

azaz a cosinus függvény páros, míg a sinus függvény páratlan függvény.

Addíciós Tételek:

$$\cos(w+z) = \cos w \cos z - \sin w \sin z$$

$$\sin(w+z) = \sin w \cos z + \cos w \sin z$$

Bizonyítás: Tudjuk, hogy $e^{i(w+z)} = e^{iw} \cdot e^{iz}$. Tehát felírhatjuk:

$$\cos(w+z) + i\sin(w+z) = e^{i(w+z)} = e^{iw} \cdot e^{iz} = (\cos w + i \sin w)(\cos z + i \sin z)$$
$$= \cos w \cos z - \sin w \sin z + i(\sin w \cos z + \cos w \sin z)$$

és már készen vagyunk, hiszen az egyenlőségben a valós és képzetes résznek is meg kell egyezni. ■

Ebből a formulából vezethetők le más ismert formulák, úgy mint például:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

valamint a felező formula:

$$\sin z = 2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}, \quad \cos^2\frac{z}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos z).$$

Továbbá igaz a későbbiekben felhasználandó két egyenlőség:

$$\cos w - \cos z = -2\sin\frac{1}{2}(w+z)\sin\frac{1}{2}(w-z)$$

$$\sin w - \sin z = 2\cos\frac{1}{2}(w+z)\sin\frac{1}{2}(w-z)$$

Bizonyítás: Az addíciós tételekből:

$$\cos(w+z) - \cos(w-z) = -2\sin w\sin z$$
$$\sin(w+z) - \sin(w-z) = 2\cos w\sin z\,,$$

ahová w helyére $\frac{1}{2}(w+z)$-t, z helyére pedig $\frac{1}{2}(w-z)$-t helyettesítve kapjuk az egyenlőségeket. ■

Vizsgáljuk meg most a sinus és cosinus függvények zérushelyeit.

Tétel: A sinus függvény zérushelyei pontosan az $n\pi \in \mathbb{R}$ számok, ahol $n \in \mathbb{Z}$, míg a cosinus függvény zérushelyei pontosan a $\frac{1}{2}\pi + n\pi \in \mathbb{R}$ számok, ahol $n \in \mathbb{Z}$.

Bizonyítás: A definícióból átalakításokkal kapjuk, hogy

$$2i\sin z = e^{-iz}\left(e^{2iz} - 1\right).$$

Ebből $\sin z = 0 \iff e^{2iz} = 1 \iff 2iz \in Ker(\exp) = 2\pi i\mathbb{Z} \iff z = n\pi$, ahol $n \in \mathbb{Z}$. Ugyanígy az $e^{-\pi i} = -1$ felhasználásával felírható, hogy

$$2\cos x = e^{i(\pi - z)}\left(e^{2i(z-\frac{\pi}{2})} - 1\right),$$

amiből, ugyanilyen okoskodással, $2i\left(z - \frac{\pi}{2}\right) \in Ker(\exp) = 2\pi i\mathbb{Z} \iff z = \frac{1}{2}\pi + n\pi$, ahol $n \in \mathbb{Z}$. ■

Megint csak azt kaptuk, amit vártunk. Láthatjuk, hogy a π, illetve a $\frac{1}{2}\pi$ a a sinus ill. a cosinus függvények legkisebb pozitív zérushelye.

A következőkben az exponenciális, és ezzel együtt a sinus és cosinus függvények periodicitását vizsgáljuk.

Azt mondjuk, hogy egy $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex függvény periodikus, ha létezik egy $w \neq 0 \in \mathbb{C}$ szám, amire $f(z) = f(z+w)$ minden $z \in \mathbb{C}$ esetén. Ekkor a w szám az f függvénynek egy periódusa, valamint $\mathrm{Per}(f) \coloneqq \{w \in \mathbb{C}: w \text{ az } f \text{ függvény periódusa}\} \cup \{0\}$ a komplex számoknak a periódusokat tartalmazó additív részcsoportja.

Tétel: A komplex exponenciális, sinus és cosinus függvény is periodikus, és

$$\mathrm{Per}(\exp) = \mathrm{Ker}(\exp) = 2\pi i\mathbb{Z}, \quad \mathrm{Per}(\cos) = \mathrm{Per}(\sin) = 2\pi\mathbb{Z}$$

Bizonyítás: $\exp(z+w) = (\exp z)(\exp w) = \exp z \iff \exp w = 1$, azaz $w \in \mathrm{Ker}(\exp)$, ami a tétel első felét igazolja.

Használjuk fel a már látott addíciós tételt, és annak az egyik bizonyított következményét, amiből:

$$\cos(z+w) - \cos z = -2\sin(z+\frac{w}{2})\sin\frac{w}{2}.$$

Innen azt kapjuk, hogy w pontosan akkor periódusa a cosinus függvénynek, ha $\sin\frac{w}{2} = 0$, azaz $w = 2\pi\mathbb{Z}$. Ugyanígy kapjuk a sinus függvénynél a

$$\sin(z+w) - \sin z = 2\cos(z+\frac{w}{2})\sin\frac{w}{2}$$

egyenlőségből az eredményt. ■

Látjuk tehát, hogy a 2π az a legkisebb pozitív szám, amely a sinus és cosinus függvénynek is periódusa.

Állítás: $\sin x > 0$, ha $0 < x < \pi$

Bizonyítás: Azt már láttuk, hogy a valós sinus függvény folytonos, és $\sin x > 0$, ha $x \in (0, \sqrt{6})$. Azaz, ha $\sin x$ negatív valahol a $(0, \pi)$ intervallumon, akkor a köztesérték tétel miatt léteznie kell itt gyökének, amit már láttunk, hogy nem lehet, hiszen π a sinus függvény legkisebb nemnulla valós gyöke. ■

Ennek az állításnak a segítségével szeretnénk meghatározni a $\propto = e^{i\frac{\pi}{2}}$ értékét. Mivel $\propto^2 = e^{i\pi} = -1$, ezért $\propto$ vagy i vagy $-i$ kell hogy legyen. Viszont az előző állításból tudjuk, hogy $\sin\frac{\pi}{2} > 0$, és így $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$ lehet csak. Ugyanezzel az okoskodással jutunk, a lehetséges $e^{i\frac{\pi}{4}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i)$ értékek közül az $e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$ eredményre.

Ezen eredmények alapján kapjuk a sinus és cosinus függvények nevezetes értékeit:

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0, \quad \sin\frac{\pi}{2} = 1, \quad \cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ismét a köztesérték tételt, és a $\cos 0 = 1$ egyenlőséget felhasználva kapjuk, hogy

$$\cos x > 0, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Történeti érdekesség, hogy *Bernoulli* már 1702-ben tudta, hogy

$$\ln i = i\frac{\pi}{2} \quad azaz \quad \pi = \frac{2\ln i}{i}.$$

Ezt az eredményt azonban *Leibniz* nem fogadta el, akivel *Bernoulli* hosszas levelezést folytatott a természetes logaritmus tulajdonságairól. A történelem, mint láthatjuk, *Bernoullit* igazolta ebben a kérdésben.

Már csak egyetlen lépés választ el minket attól, hogy visszatérjünk a π számnak a legelemibb megközelítéséhez, azaz a kör kerületének és területének az átmérőhöz viszonyított arányához.

Az előzőekben már látott epimorfizmus tételből, és abból, hogy $|\exp z| = 1$ akkor és csak akkor, ha $z \in \mathbb{R}i$, következik, hogy $\exp i\mathbb{R} = S^1$, ahol S^1 a multiplikatív egységkör csoport. Innen már következik az

Epimorfizmus tétel: A $p: \mathbb{R} \to S^1$, $p(\varphi) = e^{i\varphi}$ egy csoport epimorfizmus, aminek a magja a $2\pi\mathbb{Z}$ csoport.

Bizonyítás: Minden $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$-re $p(\psi + \varphi) = \exp(i\varphi + i\psi) = (\exp i\varphi)(\exp i\psi) = p(\varphi)p(\psi)$. Ebből következően p epimorfizmus, hiszen $p(\mathbb{R}) = \exp i\mathbb{R} = S^1$. Továbbá $Ker\, p = \{t \in \mathbb{R}: it \in Ker(\exp)\} = \{t \in \mathbb{R}: t \in 2\pi\mathbb{Z}\}$, ami abból a már bizonyított állításból következik, hogy $Ker(\exp) = 2\pi i\mathbb{Z}$. ■

Definíció: A $\gamma: [a, b] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto z(t) = x(t) + iy(t)$ leképezést, ahol $[a, b] \subset \mathbb{R}$, folytonosan differenciálható útnak hívjuk a komplex síkon, ha $x(t)$ és $y(t)$ is folytonosan differenciálható függvény az $[a, b]$ intervallumon. Egy ilyen γ útnál létezik az alábbi mennyiség:

$$L(\gamma) \coloneqq \int_a^b |z'(t)|dt \text{, ahol } z'(t) \coloneqq x'(t) + iy'(t)$$

Itt $L(\gamma)$ a γ út euklideszi hosszát jelöli.

Legyen $c \in \mathbb{C}$ egy pont a komplex síkon, illetve $r > 0$. Ekkor a folytonosan differenciálható $\gamma_\psi: [0, \psi] \to \mathbb{C}$, $\varphi \longmapsto z(\varphi) \coloneqq c + re^{i\varphi}$, $0 < \varphi < 2\pi$ út egy körív, aminek a középpontja c, és a sugara r, és $c + r$-től megy $c + re^{i\psi}$-ig. Mivel $z'(t) = rie^{i\varphi}$, ezért $|z'(t)| = r$, és ebből következően $L(\gamma) = \int_0^\psi |z'(\varphi)|d\varphi = r\psi$. Azaz a körív hossza $r\psi$, amiből, mivel $\gamma_{2\pi}$ a teljes körív, egy r sugarú kör kerülete $2r\pi$.

Ha az $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, akkor létezik $\int_a^b f(x)dx$, és ennek az értéke pontosan az f függvény alatti területet adja meg. Nézzük az origó középpontú $r > 0$ sugarú félkört, amit az $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in [-r, r]$ függvény határoz meg. Az r sugarú kör területe nyilván ennek a függvény alatti területnek a kétszerese, azaz T-vel jelölve a függvény alatti területet:

$$2T = \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx.$$

Itt x helyére $r \cos x$-et helyettesítve, és felhasználva, hogy $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, kapjuk:

$$2T = r\int_{-\pi}^{0} \sin t \cdot (-r\sin t)\, dt = 2r^2 \int_{0}^{\pi} \sin^2 t\, dt = r^2 \left[t - \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\pi} = r^2\pi.$$

Azaz az r sugarú kör területe $r^2\pi$.

ii. A π irracionalitása

Az a sejtés, hogy a kör kerületének és átmérőjének a hányadosa nem írható fel két egész szám hányadosaként, azaz nem racionális, már nagyon rég felvetődött az emberekben ennek a számnak a kutatása során. Ennek a feltételezésnek az első írásos nyoma Arisztotelésztől származik, aki alsó és felső racionális korlátot is adott ennek, az általunk π-vel jelölt számnak. Ahogy azt a π-nél megszokhattuk, amilyen régi a probléma, annyira nehéz, és annyira későn bizonyították be a feltételezést. A π irracionalitása esetében az első teljes bizonyítás 1806-ban fejeződött be, de a fő részét *Johann Heinrich Lambert* svájci matematikus már 1766-ben publikálta. Ebből azonban hiányzott egy, a bizonyítás során felhasznált és elfogadott, lemma bizonyítása. A bizonyítást *Adrian-Marie Legendre* tette teljessé, a már említett 1806-os esztendőben. Lambert bizonyításának a lényege a tangens függvény

$$\tan x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \cfrac{x^2}{\dots}}}}}$$

végtelen tört alakja, melyből belátta, hogy a tangens függvény minden racionális helyen irracionális értéket vesz fel. És mivel $\tan\frac{1}{4}\pi = 1$, ezért $\pi \notin \mathbb{Q}$. A hiányzó lemma az ilyen speciális végtelen törtek irracionalitására vonatkozott, ami egyáltalán nem nyilvánvaló.

Mi egy másik, 1961-ben Ivan *Morton Niven* kanadai matematikus által publikált bizonyítást vezetünk itt le.[10]

Tétel: π irracionális.

Bizonyítás: Indirekt bizonyítunk. Tegyük fel, hogy $\pi = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{N}$, $a > b$, $b \neq 0$. Definiáljuk a következő polinomokat:

$$p_n(x) \coloneqq \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}$$

$$P_n(x) = p_n(x) - {p_n}^{(2)}(x) + {p_n}^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n {p_n}^{(2n)}(x),$$

ahol $p_n(x)$ és $P_n(x)$ $2n$-ed fokú polinom. A $p_n(x)$-ben a legkisebb előforduló nem nulla x hatvány $\geq n$. Így igaz az az állítás, hogy ${p_n}^{(j)}(0) \in \mathbb{Z}$, sőt mivel $p_n(x) = p_n\left(\frac{a}{b} - x\right)$, azaz $p_n(x)$ szimmetrikus a $\left[0, \frac{a}{b}\right]$ intervallumon, ${p_n}^{(j)}\left(\frac{a}{b}\right) = {p_n}^{(j)}(\pi) \in \mathbb{Z}$, hiszen ha $j < n$, akkor ${p_n}^{(j)}(x)$-ben nincs konstans tag, tehát ${p_n}^{(j)}(0) = 0$, ha pedig $j \geq 0$, akkor ${p_n}^{(j)}(x)$-ből a legalább n-szeres deriválás miatt minden tag együtthatójában van egy $n!$ szorzó, tehát minden együttható egész.

Érvényes továbbá:

$$\begin{aligned}
[{P_n}'(x)\sin x - P_n(x)\cos x]' = \\
&= {P_n}''(x)\sin x + {P_n}'(x)\cos x - {P_n}'(x)\cos x + P_n(x)\sin x = \\
&= {P_n}''(x)\sin x + P_n(x)\sin x = p_n(x)\sin x
\end{aligned}$$

és

$$\int_0^\pi p_n(x)\sin x \; dx = [{P_n}'(x)\sin x - P_n(x)\cos x]_0^\pi = P_n(\pi) + P_n(0).$$

Itt az egyenlet jobb oldalán álló $P_n(\pi) + P_n(0)$-ről tudjuk, hogy egész, hiszen minden ${p_n}^{(j)}(x)$ egész volt ezekben a pontokban.

Ekkor $0 < x < \pi$-re:

$$0 < p_n(x)\sin x < \frac{\pi^n a^n}{n!},$$

mert ezen az intervallumon $0 < \sin x < 1$, és $0 < x^n < \pi^n, 0 < (a-bx)^n < a^n$. Tehát $\int_0^\pi p_n(x)\sin x \; dx > 0$, de elég nagy n-re már kisebb, mint 1, azaz nem lehet egész, és ezzel ellentmondásra jutottunk.

Tehát π nem racionális, azaz irracionális. ■

iii. A π transzcendenciája

Azzal, hogy már tudjuk, hogy a π szám irracionális, már közelebb jutottunk a megismeréséhez, de továbbra is nagyon messze vagyunk attól, hogy mindent tudjunk erről a csodálatos számról. Az irracionalitással együtt már az ókorban (még a görögök előtt) felvetődött ugyanis egy másik, még ennél is érdekesebb, és mint utólag kiderült nehezebb, probléma, aminek a megoldása is a π tulajdonságaiban rejtőzik, nevezetesen a kör négyszögesítésének problémája. A probléma igen egyszerűen megfogalmazható: az a szerkesztési feladat, melynek lényege egy adott kör területével megegyező területű négyzet szerkesztése csupán körző és vonalzó segítségével. Ezzel ekvivalens feladat a kör kiegyenesítése, azaz egy adott kör kerületével megegyező hosszúságú szakasz szerkesztése körző és vonalzó segítségével. A probléma első megfogalmazásától kezdve igen nagy népszerűségnek örvendett, a megértésének egyszerűsége és kézzelfoghatósága miatt, a laikus, hobbi-matematikusok, valamint őrült tudósok, és az ezzel a csoporttal igen népes metszetet mutató szenzációhajhász pszichopaták körében. Ezek az emberek, a „négyszögesítők", lettek a matematika alkimistái, örökmozgó keresői, akik nemegyszer, jó esetben a saját, rosszabb esetben mások, életét áldozták a felfedezésnek. Minden korban, minden pillanatban „gondolkodók" ezrei állították, és a szkepticizmus első jelére ölre mentek, hogy ők megtalálták a megoldást, és megszerkesztették a szakaszt, vagy a négyzetet, a feltételeknek megfelelően. Levelek százai, ezrei érkeztek (és érkeztek a múlt század elején) különböző akadémiákhoz, tudományos körökhöz a hosszadalmasabbnál hosszadalmasabb „bizonyításokkal". A nagy „érdeklődés" miatt a Magyar Tudományos Akadémia közleményt volt kénytelen kiadni a 20. század elején, hogy minden, a kör négyszögesítésével, vagy örökmozgóval foglalkozó levelet elolvasás nélkül kidobnak.

A „körzővel és vonalzóval való szerkesztés" nem épp a legprecízebbnek tűnő matematikai megfogalmazás, ezért szükség volt az ilyen szerkesztéseknek egy matematikailag kézzelfoghatóbb leírására. A geometriából úgy kapunk algebrát, ha felírjuk a pontoknak, egyeneseknek és köröknek az egyenleteit és ezekkel számolunk tovább. A legnagyobb előrelépést ezen a téren a francia *Évariste Galois* érte el 1832-ben, aki közvetlenül, igen fiatalon, 21 évesen, bekövetkezett halála előtt (egy párbajra indult aznap este) vetette papírra a gondolatait, melyek igen nagy mértékben befolyásolták a matematika jövőjét. Ezek a gondolatok voltak a róla elnevezett Galois-elmélet alapjai, és nagy részben ennek a segítségével tudták később megoldani ezt a többezer éves problémát a 19. század végén. Eszerint azok a valós számok, melyek megszerkeszthetők körzővel és vonalzóval, pontosan azok, melyek előállnak egy, a racionális számok teste feletti polinom gyökeként, másnéven algebrai számok. Azaz a körnégyszögesítési probléma ekvivalens azzal, hogy π algebrai szám-e. Olyan neves matematikusok, mint *Euler*, *Lambert* és *Legendre* már felvetették, hogy a π nem algebrai, azaz transzcendens. Figyelemre méltó gondolat ez akkor, amikor még nem tudták, hogy léteznek-e egyáltalán ilyen transzcendens számok.

Az első lépést 1844-ben *Joseph Liouville* francia matematikus tette meg, aki bebizonyította, hogy a

$$10^{-1!} + 10^{-2!} + 10^{-3!} + \cdots = 0{,}1100010000\ldots$$

szám transzcendens. 30 évvel később *Georg Cantor* publikálta annak bizonyítását, miszerint csak megszámlálhatóan sok algebrai szám van, és megszámlálhatatlanul végtelen sok transzcendens! Az igazi áttörést azonban *Charles Hermite* francia matematikus érte el egy évvel korábban, 1873-ban, aki bebizonyította, hogy az Euler-féle szám,az e transzcendens! Ennek a bizonyításnak a segítségével aztán 1882-ben érkezett a végzetes ütés a négyszögesítők népes csoportjára, amikor is *Carl Louis Ferdinand von Lindemann* kiadta az „Über die Zahl π" című rövid munkáját, amiben bebizonyítja, hogy a π szám transzcendens! Hely, és ismeretanyag hiányában a bizonyítást csak nagyvonalakban közöljük.

Tétel (Lindemann-Wierstrass):[8] Legyenek $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$, páronként különböző komplex algebrai számok. Ekkor nem létezik olyan

$$a_1 e^{c_1} + a_2 e^{c_2} + \cdots + a_n e^{c_n} = 0$$

egyenlet, ahol $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ algebrai számok, és nem mindegyikük 0.

Ebben a tételben, ha $n \coloneqq 2,\ c_1 = c,\ c_2 = 0$ akkor következik, hogy: minden algebrai $c \in \mathbb{C}$ -re $a \coloneqq e^c$ transzcendens.

Ekkor a $c = 1$ eset bizonyítja az e szám transzcendenciáját, a $1 = e^{2\pi i}$egyenlet pedig a π-ét.

Ezt a problémát ugyan megoldottuk, de még mindig igen keveset tudunk a transzcendens számokról általánosságban. 1925-ben *Alexander Gelfond* orosz matematikus bebizonyította, hogy az e^{π} szám transzcendens, viszont semmi biztosat nem mondhatunk a π^{e}-ről. Azt is tudjuk, hogy nem lehet mind az $e\pi$ és $e+\pi$ algebrai, de ezekről például még azt sem tudjuk, hogy egyáltalán racionálisak-e.

3. A π közelítései és formulái

i. A π gyakorlati közelítései

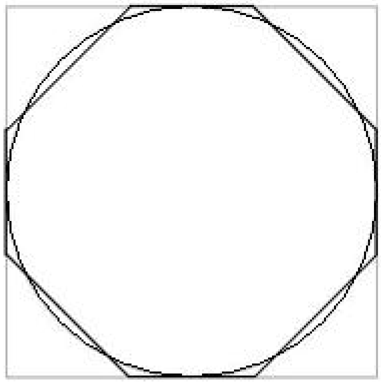
Egyiptom, i.e. 1800

Az egyiptomi csillagászok és tudósok, azaz a papság messze földön híres a természettudományokban elért eredményeiről. Piramisokat emelnek, naptárat készítenek, és a nép lenyűgözése érdekében előre kiszámolják mikor lesz napfogyatkozás. Egyetlen probléma van, hogy néha tévednek… Például csúszik annak a bizonyos gonosz szellemnek az eljövetele, ami eltakarja a napot, vagy megroskad egy épület szerkezete, aminek stabilan kellene állnia. Azt is tudják a papok, hogy ez számolási hiba eredménye, nem pedig a gonosz játéka, így folyamatosan pontosítani szeretnék a tudásukat, melynek egy elég fontos szelete, hogy az ősi tudás szerint *egy kör alapú oszlop átmérőjének háromszorosa az oszlop kerülete*, valamint, hogy *a kör területe egyenlő az átmérő négyzetének* $\frac{3}{4}$*-ed részével*. Ezek, ahogy egyre dőlnek össze a kör alapú építmények, nem tűnnek igaznak. Próbálkoztak tehát pontosítani az eredményeiken, lássuk hogyan.

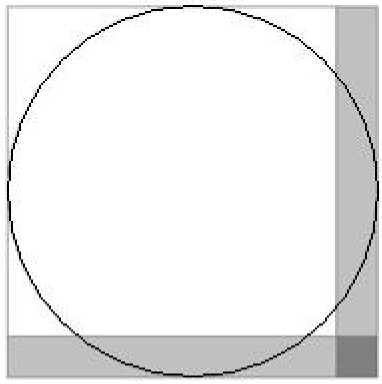
Vegyünk egy 9 khet[2] oldalhossszúságú négyzetet és rajzoljunk be a beleírt körét! Osszuk 3 egyenlő részre a négyzet minden oldalát, majd a sarkokkal szomszédos pontokat kössük össze. Így kapjuk az 1.ábrán látható nyolcszöget. Próbáljuk meg ennek a területével közelíteni a kör területét. Keressünk ennek a nyolcszögnek a területével egyenlő területű négyzetet. Az eredeti négyzetből úgy kapjuk meg a nyolcszög területét, ha levonjuk a 4 sarkában lévő háromszögek területét. Ezeknek a területe egyenlő két 3 khet oldalú négyzet

[2] Ókori egyiptomi hosszmérték, 1Khet≈91méter

területével, tehát helyettesíthetők 2 darab 1 khet széles 9 khet hosszú téglalappal. (Lásd 2. ábra.) Az egyetlen probléma, hogy így azt a kis négyzetet az alsó sarokban kétszer számoltuk, de ez olyan csekély különbség, hogy nem foglalkozunk vele. Így azt kaptuk, hogy egy 9 khet



1. ábra



2. ábra

átmérőjű kör területe nagyjából 8^2 khet területtel egyenlő. És igaz ez az okoskodás minden körre, legyen az bármilyen kicsi vagy bármilyen nagy, hogy a kör területe nagyjából egyenlő a köré szerkesztett négyzet területének a $\left(\frac{8}{9}\right)^2$-ed részével, azaz az átmérő négyzetének $\left(\frac{8}{9}\right)^2$-ed részével.

Ugyanilyen módon keressük azt a négyzetet, aminek a kerülete nagyjából egyenlő a beírt nyolcszög kerületével. Ezt úgy keressük, hogy alkalmazzuk az előző területben használt módszert az ott kapott kisebb négyzetre, és ennek az oldalát nézzük. Ekkor ez:

$$1-\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{9}\right)=\frac{8}{9}-\frac{1}{9}\left(\frac{8}{9}\right)=\left(\frac{8}{9}\right)^2.$$

Így tehát az új négyzet kerülete, illetve a kör hossza nagyjából egyenlő $4\left(\frac{8}{9}\right)^2$-vel. Ha tehát π-nek nevezzük a kör kerületének és átmérőjének, vagy területének és a sugara négyzetének hányadosát, akkor azt kapjuk, hogy a $\pi \approx 4\left(\frac{8}{9}\right)^2 \approx 3{,}16$-al egyenlő.

Athén, i.e. 325

A görögök mindig is büszkék voltak a természettudományos műveltségükre, és munkásságukra. Már jóval Krisztus születése előtt elképesztő kultúrájukról voltak híresek, olyan építészeti remekműveket hagytak maguk után, melyeket ma is csodálunk. Ebben nem kis szerepe volt annak a geometriai tudásnak, melynek az absztrakt alapjait szinte egyedül tőlük származtathatónak tekinthetjük. Ezen belül is kiemelkedő fontosságú volt már akkor is számukra, az akkor még nem így nevezett, de általunk már csak megszokásból is π-vel jelölt szám keresése, és minél pontosabb meghatározása. Nézzük, ők hogyan próbálkoztak.

Rajzoljunk egy kört, majd vegyük ennek a köré írt szabályos háromszögét, és a beírt szabályos háromszöget. Számoljuk ki mindkét háromszögnek a területét, majd vegyük a számtani közepüket. Ezzel közelíthetjük a kör területét. Ha ugyanezt megcsináljuk a be-, és köréírható négyzettel, majd egyre nagyobb oldalszámú szabályos sokszöggel, egyre pontosabb eredményt kapunk.

Ezt variálhatjuk úgy, hogy a két terület mértani közepét vesszük, hátha úgy jobb eredményt kaphatunk. Vagy egyszerűbb módon (ahogy később nagyon sokan csinálták) csak a beírható körrel számolunk.

Így okoskodott *Archimedes* is, aki először adott alsó és felső korlátot π-re, úgy, hogy kiszámolta a 96 oldalú beírt és köréírt szabályos oldalú sokszög területét. *Archimedes* megállapította, hogy $3\,\frac{10}{71} < \pi < 3\,\frac{1}{7}$.

A világ többi része, i.u. 5-15.század

Elismerésre méltó eredmény ez, de szerte a világon tehetségesebbnél tehetségesebb emberek próbálkoztak ugyanezzel a közelítéssel, és mondhatjuk, hogy hasonlóan szép sikerrel. Így Indiában a π-nek szájhagyomány útján a 3,06, máshol 3,08 értéket tulajdonították egészen egy bizonyos *Ariabhata* nevű csillagászig, aki, számunkra ismeretlen számításokból, a $\pi \approx 3{,}1416$ eredményre jutott. Elképesztő eredmény ez az akkori körülményekhez és fejlettséghez képest.

„Adj 4-et a 100-hoz, szorozd meg 8-al,
és az egészet add hozzá 62000-hez.
Az eredmény megközelítő értéke a kör
hosszának, ha átmérője 20000."
/Ariabhata/

A távol-keleten sem nyugodtak a matematikusok. A kínai *Liu-Hui* például ugyanazzal a módszerrel, mint 500 évvel előtte Archimedes, kiszámolta a beírható 192 oldalú szabályos sokszög területét, és a $\pi = \frac{157}{50} = 3{,}14$ eredményre jutott. Ilyen előzmények után nem csoda, hogy *Tsu Csung Chih,* az 5. századi kínai matematikus, már kimutatja, hogy $3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927$. Szintén hozzá köthető a $\pi = \frac{355}{113}$ arány. Sajnos a feljegyzéseik nem maradtak ránk, „jó" kínai hagyomány szerint titokban kezelték őket, így nem tudhatjuk, milyen módszerekkel jutottak ilyen nagyszerű, pontos eredményekhez.

Sajnos az ókori indiai és kínai matematika a történelem szeszélyessége miatt nem tudott tovább fejlődni, és a természettudományos kultúra gyorsan hanyatlott. Az ő helyüket vették át az arab népek amelyek, nemcsak megismerték a görögök és indiaiak eredményeit, de tovább is fejlesztették. Könyveket fordítottak a nyelvükre, többek között Euklidesz Elemek című munkáját, és nagy hévvel vetették bele magukat a csillagászatba és matematikai kutatások. A 9-10. században az arabok és perzsák így a $\pi = \sqrt{10}$, és $\pi = \frac{22}{7}$ értékeket használták, de nem elégedtek meg ennyivel. Sőt egy bizonyos *Dzsemsid ibn Maszud al-Kasi*, más néven *Giasszeddin*, 1424-ben befejezett munkájában $\pi = 3{,}14159265358979323 71$ értéket adja, aminek az első 17(!) tizedesjegye pontos! Ráadásul ez a tizedesjegyek használatának egyik első megjelenése a történelemben.

Összehasonlításképp ebben az időszakban az európai próbálkozások legjobbja egy bizonyos *Leonardo* nevéhez fűződik aki szintén a 96 oldalú sokszög alapján, a $\pi = \frac{864}{275} \approx 3{,}14182$ közelítést adja. A híres *Fibonacci* pedig az alábbi korlátokat adta:

$$\frac{1440}{458\frac{4}{9}} < \pi < \frac{1448}{458\frac{1}{5}}$$

Újra felismertek bizonyos közelítéseket is, például *Adrian Anthonisz* pontosan meghatározta a π első hat tizedesjegyét a $\pi = \frac{355}{113}$ arányszám megállapításával, melyet, mint már láttuk, Kínában ezer évvel ezelőtt ismertek fel. Természetesen ez semmit nem von le az orvos-matematikus érdemeiből, hiszen nem ismerhette azokat az eredményeket, csupán látható a kontinuitás teljes hiánya.

Nincs változás viszont a módszerekben… *Viéte* 1579-ben 9 pontos tizedesjegyet határoz meg az archimedesi módszerrel, csak ő nem 96, hanem 393.216 oldalú szabályos sokszöget ír a körbe. Azt hinnénk, ez már túlzás, amikor is *Adriaen van Roomen* publikálja a 15 pontos tizedesjegyet, amiket a 2^{30}= 1.073.741.824 oldalú sokszöget ír a körbe és számolja ki a területét. Ez a számolás több évet vett igénybe!! Ebbe az európai kollektív tudásba született bele 1540-ben *Ludolph van Ceulen*, aki egészen kíváló számolóművésznek bizonyult, pedig nem is foglalkozott komolyan matematikával. Ő a π-nek nem kevesebb, mint 35 tizedesjegyét számolta ki élete során, egy nagyjából 32,5 milliárd oldalú szabályos sokszöget írva a körbe. Ez egészen elképesztő eredmény volt ebben a korban. A π-t azóta is e nagy matematikus előtt tisztelegve Ludolph-féle számnak nevezzük.

Ezekután később is rengetegen vállalkoztak az ilyesfajta számolásokra, (például *William Shanks*, aki 30 év munkájával kiszámolta a π első 707 pontos tizedesjegyét. Erről azonban sajnos később kiderült, hogy „csak” az 528. jegyig jó.) de néhányan már érezték, hogy túl nagy erőfeszítés ez, túl kicsi eredménnyel, így más utakat kutattak a π meghódítására. A matematikai analízis megjelenésével csodálatos eszközt kaptak a tehetséges emberek a kezükbe. Lássuk, mennyire tudtak élni vele.

ii. Leibniz sora a π-re

Párizs, 1674

$$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + - \cdots = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\mathrm{i}}}{2\mathrm{i}+1}$$

- jegyzi egy 1500 körüli feljegyzés Indiában. Hogy ők hogyan jutottak erre a következtetésre, nem tudjuk, de azt igen, hogy ugyanezt a végtelen sorösszeget kiszámolta Leibniz is közel két évszázaddal később, olyan matematikai objektumok használatával, amelyeket korábban nem ismertek. Nézzük a gondolatmenetét:

Tudjuk, hogy a tangens függvény szigorúan monoton növekvő a $\left(-\frac{1}{2}\pi,\ \frac{1}{2}\pi\right)$ nyílt intervallumon, ugyanis a deriváltja, ami $\frac{1}{cos^2 x}$, szigorúan pozitív ezen az intervallumon. Ráadásul ezen az intervallumon a tangens függvény minden valós értéket fel is vesz. Ebből a két tulajdonságából következően létezik inverz függvénye: arctan: $\mathbb{R} \to \left(-\frac{1}{2}\pi,\ \frac{1}{2}\pi\right)$, aminek a deriváltja, az inverzfüggvényt deriváló formulából:

$$arctan'(x) = \frac{1}{tan'(\arctan x)} = cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1+\ x^2}.$$

Itt felhasználtuk, hogy:

$$x^2 = \tan^2(\arctan\ x) = \frac{\sin^2(\arctan\ x)}{\cos^2(\arctan\ x)} = \frac{1-\cos^2(\arctan\ x)}{\cos^2(\arctan\ x)} = \frac{1}{\cos^2(\arctan\ x)} - 1.$$

Az $(1+\ x^2)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i x^{2i}$ mértani sorösszeg egyenletesen konvergens, ha $|x| < 1$. Ebből adódik tagonkénti integrálással, a szummázás és integrálás sorrendjét felcserélve, amit megtehetünk ilyen esetben, az arcustangens sorozat:

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+\ t^2}\,dt = \sum_0^{\infty}(-1)^i \int_0^x t^{2i}\,dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots, |x| < 1.$$

Abelnek a hatványsorok határértékére vonatkozó tétele miatt[4] az egyenlőség kiterjeszthető az $x = 1$ esetre is, ahol $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$. Tehát:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i+1}$$

Ez az úgynevezett Leibniz sor π értékére. Majd a fejezet végén látni fogjuk, hogy ez a sorösszeg teljesen alkalmatlan mindenféle számolásra, ugyanis nagyon lassan konvergál π-hez.

iii. Viéte formulája π-re

Párizs, 1561

A királyi udvar ügyészeként *François Viète* el volt halmozva munkával. Fiatal kora ellenére igen nagy megbecsülésnek örvendett állásában, így nem csoda, hogy minden rá bízott feladatot tökéletesen akart elvégezni. Egyetlen hobbija volt, amelyet nem tudott, és nem is akart kizárni az életéből: a matematika. Remek érzéke volt a jelölésekhez, például neki köszönhetjük a mai hatványozást jelölő felső index használatot, és az elsők között használt betűket ismeretlenek jelölésére is. A munkáján kívül mindenféle éppen divatos matematikai problémával is foglalkozott, például a π szám minél jobb megismerésével, amiben igen szép eredményre is jutott: meghatározta pontosan az első 10 számjegyét. Sőt nemcsak meghatározta, valami hosszú számolással, hanem formulát is adott a kiszámítására, amivel csak a számolás nehézsége és hosszúsága miatt nem tudott még több pontos jegyet kiszámolni. Nézzük a formuláját és a megtalálásának a módját.

Az ismert addíciós képlet alapján tudjuk, hogy $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$. Ebből indukcióval kapjuk a szinusz függvényre:

$$\sin x = 2^n \sin\frac{x}{2^n}\prod_{i=1}^{n}\cos\frac{x}{2^i}, \quad x \in \mathbb{C}, \qquad n = 1,2,\ldots$$

Mivel $\lim_{n\to\infty} 2^n \sin\frac{x}{2^n} = x$, ezért felírható az alábbi végtelen szorzat

$$\sin x = x\prod_{i=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^i}, \quad x \in \mathbb{C}$$

Az x helyére $\frac{1}{2}\pi$-t helyettesítve:

$$\frac{2}{\pi} = \cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{16}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{\pi}{2^{i+1}}\cdot\ldots$$

Használjuk fel, hogy $cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos x)$, amiből: $\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos x}$, ha $0 \le x \le \frac{1}{2}\pi$, mivel ezen az intervallumon a cos függvény nem-negatív. Adódik:

$$\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}};\ \cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}}, \cos\frac{\pi}{16} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}}}\ ;\ \cdots.$$

Ebből már megkapjuk a tényleges Viéte formulát:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdot\cdots.$$

iv. Wallis formulája π-re

Oxford, 1655

John Wallis élete derekán az angol parlamenti kriptográfiai részlegét vezette. Nem véletlenül választották őt erre az igen fontos és nehéz pozícióra. Ő volt korának egyik legnevesebb angol matematikusa, kreatív, újító gondolkodásmódja tökéletessé tette a munkára. Jól mutatja újító készségét, hogy máig használjuk különböző jelöléseit és fogalmait, hogy mást ne említsünk, a végtelen mindenki számára ismert szimbólumát: ∞; vagy a racionális hatványkitevő $x^{\frac{a}{b}} = \sqrt[b]{x^a}$ ilyen formájú használatát. Persze ő is foglalkozott a számunkra legérdekesebb matematikai objektummal, a π számmal. Nézzük hát a Wallis-formulát π-re. (Ezúttal nem Wallis gondolatmenetét követjük a formula felé vezető úton, hanem Euler egy eredményén keresztül jutunk el hozzá.)

„A legrövidebb út mindig a komplex"

/J. Hadamard/[9]

Vegyük Moivre ismert formuláját: $(\cos t + \ i \sin t)^k = \cos kt + i \sin kt$, ahol t valós szám. Bontsuk ki a zárójelet, és válasszuk szét a valós és képzetes részt a bal oldalon. Ebből a képzetes részből:

$$\sin kt = \sin t \left[k\, cos^{k-1} t - \binom{k}{3} cos^{k-3} t\, sin^2 t + \cdots \right], \quad k \in \mathbb{N}$$

Ha k páratlan, akkor minden cosinusos tag páros hatványon szerepel, így $cos^{2k} t = $ $= (1 - sin^2 t)^k$ miatt $\sin kt$ felírható mint $\sin t$ egy k-ad fokú (k = 2n+1), valós együtthatós polinomja.

A $\sin kt = P(\sin t)$ egyenletnek k különböző valós gyöke van, méghozzá $\sin \frac{i\pi}{k}, i =$ $0, \pm 1, \ldots \pm n$ pontokban. Tehát felírható gyöktényezős alakban:

$$\sin kt = C \prod_{i=-n}^{n} \left(\sin t - \sin \frac{i\pi}{k} \right),$$

ahol a C konstans értékét úgy határozhatjuk meg, hogy t-vel végigosztjuk az egyenletet, majd kiszámoljuk mindkét oldal határtékét, ha t-vel tartunk 0-ba:

$$k = C \prod_{i=-n}^{n}{}' \left(- \sin \frac{i\pi}{k} \right).$$

Itt ez az új aposztrófos produktum azt jelöli, hogy az $i = 0$ esetet kihagyjuk belőle. Innen minden kt helyére x-et írva kapjuk:

$$\sin x = k \sin \frac{x}{k} \prod_{i=-n}^{n}{}' \left(- \frac{\sin \frac{x}{k}}{\sin \frac{i\pi}{k}} + 1 \right) = \ k \sin \frac{x}{k} \prod_{i=1}^{n}{}' \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{k}}{\sin^2 \frac{i\pi}{k}} \right).$$

Továbbá, mivel

$$\lim_{k \to \infty} k\, sin \frac{x}{k} = x, \qquad \lim_{k \to \infty} \frac{\sin \frac{x}{k}}{\sin \frac{i\pi}{k}} = \frac{x}{i\pi};$$

Euler formulája adódik:

$$\sin x = x \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{i^2 \pi^2} \right).$$

Ide $x \coloneqq \frac{\pi}{2}$-t helyettesítve, és átrendezve kapjuk a Wallis formulát π-re:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1}.$$

Megjegyzésként tegyük hozzá, hogy ebből a formulából kapta *Lord Brouncker* rá egy évre az alábbi végtelen törtet π-re:

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{\ldots}}}}}$$

Ha már pedig végtelen törteknél tartunk, ugorjunk egy kicsit előre, és nézzük a következő fejezet főszereplőjének, Eulernek végtelen törtes alakját π-re:

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{\ldots}}}}}$$

Ez az úgynevezet reguláris végtelen tört alak, ami azt jelenti, hogy minden számlálóban 1-es szerepel. Tudjuk, hogy minden valós számnak létezik ilyen alakja, bár például a π esetében azt nem tudjuk, hogy mi az összefüggés a számok között a törtben. Euler is csak a π szám pontos tizedesjegyeiből számolta ki egyenként őket.

v. Euler sora π^2-re

Berlin, 1941

Nagy Frigyes porosz király nagy fába vágja a fejszéjét: meg szeretné alapítani a Berlini Tudományos Akadémiát. Nem szeretne lemaradni a tudományos kutatás területén sem a haladó európai birodalmaktól, köztük legfőképp a minden téren nagy rivális oroszoktól. Kit kérjen hát fel ennek a hatalmas munkának a megvalósítására? A választás nem eshetett másra, mint arra a *Leonhard Euler*re akit, nemcsak hogy a Szentpétervári Tudományos Akadémiáról lehetne németföldre csábítani, hanem már ekkor is az egyik legnagyobb és legtehetségesebb matematikusnak számított Európában. A svájci *Euler* kézséggel el is fogadta a lehetőséget, hiszen mindig is szerette a kihívásokat, ráadásul újra anyanyelvén dolgozhatott, neves matematikusok körében.

Mint utólag kiderült, jó döntés volt, hogy vállalta a berlini kihívást. *Euler* nemcsak korának, hanem minden idők egyik (ha nem legnagyobb) alakja a matematikában, itt publikálta a legfontosabb műveit, itt ért tudományos kutatásának a csúcsára. Felsorolni is lehetetlen, mi mindent hagyott ránk örökségül, így csak a számunkra fontos, a π-vel kapcsolatos azonosságait említjük, és azt az apró tényt, hogy ő volt az első, aki ténylegesen π-vel jelölte ezt a bizonyos valós számot, amiről már annyit beszéltünk… Nézzük hát az Euler-féle sort π^2 kifejezésére.

A sinus függvény jól ismert hatványsora:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \cdots.$$

Ebbe x helyére $\pi\mathrm{x}$-et helyettesítve, majd mindkét oldalt πx-el leosztva

$$\frac{\sin \pi \mathrm{x}}{\pi \mathrm{x}} = 1 - \frac{1}{3!}\pi^2 x^2 + \frac{1}{5!}\pi^4 x^4 - \frac{1}{7!}\pi^6 x^6 \pm \cdots$$

alakhoz jutunk. Viszont ennek az egyenletnek a bal oldala nagyon ismerős! Valóban! Az előző Wallis-formulás fejezetből tudjuk, hogy

$$\frac{\sin \mathrm{x}}{\mathrm{x}} = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{i^2 \pi^2}\right)$$

azaz

$$1 - \frac{1}{3!}\pi^2 x^2 + \frac{1}{5!}\pi^4 x^4 - \frac{1}{7!}\pi^6 x^6 \pm \cdots = \frac{\sin \pi \mathrm{x}}{\pi \mathrm{x}} = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{i^2}\right)$$

Megkaptuk tehát a $\frac{\sin \pi \mathrm{x}}{\pi \mathrm{x}}$ két különböző valós együtthatós polinom alakjában történő felírását. Mint tudjuk, két polinom akkor egyenlő, ha minden hatványkitevő együtthatója egyenlő. Ha a jobb oldalon álló végtelen szorzatban kibontjuk a zárójeleket,

$$\prod_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{i^2}\right)=1-\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right)x^2+\cdots,$$

hiszen a végtelen sok tényezőből akkor kapunk x^2-es tagot, ha pontosan egy az, amikor nem az 1-el szorozzuk a zárójelből. Éppúgy, mint a véges esetben, csak most az együttható maga is végtelen összeg lesz.

Innen a két polinomban az x^2 együtthatóit összehasonlítva kapjuk az Euler sort π^2-re, hiszen:

$$-\frac{\pi^2}{3!}=-\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right)$$

azaz

$$\frac{\pi^2}{6}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}.$$

Érdekességképpen ugyanezzel a gondolatmenettel nézhetjük π minden páros hatványának a sorösszegét, például:

$$\frac{\pi^4}{5!}=\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^{\infty}\frac{1}{i^2}\cdot\frac{1}{j^2}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2}-\frac{1}{i^2}\right)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}\left(\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{i^2}\right)$$

innen

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^4}=2\left(\frac{\pi^2}{6}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}-\frac{\pi^4}{5!}\right)=2\left(\frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^4}{5!}\right)=\frac{\pi^4}{90}$$

továbbá:

$$\frac{\pi^6}{945}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^6};\ \frac{\pi^8}{9450}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^8};\ \ldots$$

4. A közelítések és formulák összehasonlítása konvergenciájuk szerint

Ebben a részben azt nézzük meg, hogy az eddig megismert formulák, és közelítések mennyire gyorsan konvergálnak a π-hez. Ez azért fontos, mert ez alapján eldönthetjük, hogy melyek használhatók, és melyek kevésbé használhatók, amikor számítógéppel akarunk minél pontosabb értéket meghatározni.

Nézzük a közelítéseket:

1. A ***gyakorlati közelítésnél*** egyre nagyobb oldalszámú szabályos sokszögeket írunk az egység sugarú körbe, és ezeknek számoljuk a kerületét a cosinus tétel segítségével. Az így kapott sorozat a következő:

$$GY_n = \frac{n}{2} \cdot \sqrt{2 - 2\cos\frac{2\pi}{n}}$$

Program:

```
for k=1:5
K=10^(k);
x(k)=1/2*K*(2-2*cos(2*pi/K))^(1/2);
end
```

Lássuk az eredményeket:

K	GY_n
10^1	3.090169943749474
10^2	3.141075907812832
10^3	3.141587485880718
10^4	3.141592602240082
10^5	3.141592651753950
π	3.141592653589793

A táblázatból azt láthatjuk, amire az eddigi ismereteink alapján számíthattunk, nevezetesen, hogy elég lassú így a konvergencia. Ahogy *Archimedes*, mi is 3 pontos tizedesjegyet kaptunk a nagyjából 100 oldalú szabály sokszög esetén. *Viéte* 393.216 oldalú sokszöge 9 pontos tizedesjegyre volt elég, ami szintén nagyjából arányban is van azzal, hogy a mi 100.000 oldalú sokszögünk 8 pontosat határozott meg.

2. A ***Leibniz-sor*** esetében az alábbi sorozatot definiáljuk:

$$L_n = 4 \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{2i+1};$$

Program:

```
for k=1:5
K=10^(k);
for n=1:K
    leibnizsor(n)=((-1)^(n+1))*(1/(2*n-1));
end
x(k)=sum(leibnizsor)*4;
end
```

Az eredmények a következő táblázatban foglalhatók össze:

K	L_n
10^1	3.041839618929403
10^2	3.131592903558554
10^3	3.140592653839794
10^4	3.141492653590035
10^5	3.141582653589780
π	3.141592653589793

Ahogy azt említettük, hogy ez a sor alkalmatlan a gyors közelítésre, ezt a tapasztalat is igazolta. Látjuk, hogy a sorozat 100.000 tagja is csupán 4 tizedesjegy pontossággal adja meg π értékét. Persze adhatunk triviális alsó és felső korlátot a közelítésre:

$$\frac{4}{2n+1} < |4\pi - L_n| < \frac{4}{2n-1},$$

hiszen tudjuk, hogy minden páratlan n-re $L_n > \pi$, és minden párosra $L_n < \pi$. Tehát L_{10^i} nagyjából i pontos tizedesjegyet ad meg.

3. Nézzük ***Viéte formulájának*** sorozatos alakját:

$$V_n = 2 \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} \cos\frac{\pi}{4i}\right)^{-1}$$

Program:

```
for k=1:5
K=5*k;
for n=1:K
    vietesor(1)=(1/2)^(1/2);
    vietesor(n+1)=((1/2)+(1/2)*vietesor(n))^(1/2);
end
x(k)=2*((prod(vietesor))^(-1));
end
```

Az eredmények ebben az esetben:

K	V_n
5	3.141277250932773
10	3.141592345570118
15	3.141592653288993
20	3.141592653589500
25	3.141592653589793
π	3.141592653589793

Nem véletlen, hogy a Viete formulájából készített sorozatunkban nemhogy logaritmusos lépésközzel nézzük a tagokat, de a legnagyobb a 25. tag, amit vizsgálunk. Hogy miért? Az kiolvasható a táblázatból, hiszen látható, hogy a V_{25} már 14(!) tizedesjegy pontossággal meghatározza π értékét. De már a 10. tag pontosabb, mint az előzőekben vizsgált Leibniz sorozatnál a 100.000. tag. (Ennél pontosabb közelítést már nehezen számolhatunk a MATLAB-bal a kerekítési hibák miatt.) Ez a leghatásosabb módszerünk eddig, és látni fogjuk, hogy ez is marad a legjobb.

4. A ***Wallis Formulájából*** készített sorozatunk:

$$W_n = 2 \cdot \prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} \frac{2n}{(2n-1)} \cdot \frac{2n}{(2n+1)};$$

Program:

```
for k=1:5
K=10^(k);
```

```
for n=1:(K/2)
    wallissor(n)=(2*n)^2/((2*n-1)*(2*n+1));
end
x(k)=prod(wallissor)*2;
end
```

Az program eredményei:

K	W_n
10^1	3.002175954556906
10^2	3.126078900215411
10^3	3.140023818600600
10^4	3.141435593589904
10^5	3.141576945822890
π	3.141592653589793

Ismét egy nagyon lassan konvergáló sorozat. A 100.000 tag is csak 4 pontos tizedesjegyet tud felmutatni, azaz a konvergenciája hasonló sebességű, mint a Leibniz féle sorozaté.

5. Végül nézzük az ***Euler-féle sorok*** konvergenciájának sebességét:

$$E_n^j = C_j \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^j}, \quad j = 2,4,8; \quad C_2 = 6, C_4 = 90, C_8 = 9450;$$

Programok:

```
for k=1:5
K=10^(k);
for n=1:K
    eulerjsor(n)=(1/n)^j;
end
x(k)=( Cj*sum(eulerjsor))^(1/j);
end
```

A programok eredményei:

K	E_n^2	E_n^4	E_n^8
10^1	3.049361635982070	3.141384622466971	3.141592649701167
10^2	3.132076531809105	3.141592415307368	3.141592653589793
10^3	3.140638056205995	3.141592653348270	3.141592653589793
10^4	3.141497163947215	3.141592653589592	3.141592653589793
10^5	3.141583104326457	3.141592653589791	3.141592653589793
π	3.141592653589793	3.141592653589793	3.141592653589793

Itt három különböző esetről beszélünk. Láthatóan, és várhatóan, minél nagyobb kitevőket használunk, annál gyorsabb a konvergenciánk. Míg a négyzetes Euler sorból készített sorozat olyan lassú, mint a Leibniz, vagy Wallis sorozaté, addig a nyolcadik hatványos verzió már a 100. tagnál 14 pontos tizedesjegyet ad.

Irodalomjegyzék:

[1] Florica T. Cimpan : A π története, Albatrosz Könyvkiadó (1971)

[2] H-D. Ebbinghaus, F. Hirzebruch, K. Mainzer, A. Prestel, H. Hermes, M. Koecher, J. Neukirch, R. Remmert: Numbers (Graduate Texts in Mathematics), Springer (1990)

[3] http://en.wikipedia.org/wiki/Piphilology

[4] http://www.cs.elte.hu/~batka/oktatas/hatvanysorok.pdf

[5] http://www.jgytf.u-szeged.hu/~szalay/analizis/htm/index03.php

[6] http://en.wikipedia.org/wiki/Intermediate_value_theorem

[7] Halász Gábor: Bevezető komplex függvénytan, ELTE Eötvös Kiadó Kft. (2002)

[8] http://en.wikipedia.org/wiki/Lindemann%E2%80%93Weierstrass_theorem

[9] http://www.math.uiowa.edu/~jorgen/hadamardquotesource.html

[10] http://en.wikipedia.org/wiki/Proof_that_%CF%80_is_irrational