Antimagic gráfok

Szakdolgozat

Írta: Herczeg Bonifác

Matematika BSc
Alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető:

Bérczi Kristóf
Operációkutatási Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Termeszettudományi Kar
2013

Köszönetnyilvánítás

Elsősorban szeretnék köszönetet mondani a témavezetőmnek, Bérczi Kristófnak, hogy kérdéseimmel mindig bizalommal fordulhattam hozzá, ötleteivel támogatta a dolgozatom elkészültét és végig felhívta a figyelmem az esetleges hibákra. Szeretném megköszönni Klimaj Bettinának a LaTeX program használatához nyújtott segítségét és hogy mindig mindenben mellettem állt. Köszönettel tartozom a családomnak, akiktől rengeteg biztatást és támogatást kaptam tanulmányaim során.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A dolgozat témája gráfok éleinek antimagic címkézése. A címkézés azt jelenti, hogy a gráf éleihez számokat rendelünk egy adott halmazból. Az élszámozásoktól különböző tulajdonságokat várhatunk el: legyen antimagic, magic, edge-graceful, gyengén antimagic, gyengén magic vagy egyiptomi címkézés. Vizsgálhatjuk a pontok és élek egyidejű számozását is, így jutunk a graceful és a totálisan magic gráfok témaköréhez. Az előbbiek közül a dolgozat fő témája az antimagic címkézés lesz, melynek lényege, hogy úgy írunk számokat a gráf éleire, hogy bármely két pontban különböző legyen az illeszkedő éleken a számok összege. Egy tetszőleges gráfot antimagicnek hívunk, ha létezik az éleinek ilyen címkézése.

Az antimagic címkézés kérdésköre 1990-ben merült fel, ám az általános sejtésre, miszerint K_2 kivételével minden összefüggő gráf antimagic, még senkinek sem sikerült bizonyítást találnia. Meglepő módon a kérdés még fákra is nyitott. Több speciális gráfosztályra viszont igazolták az állítást, ezeket fogjuk áttekinteni a dolgozatban.

Az első fejezetben kimondjuk az antimagic címkézés definícióját, majd bemutatjuk a fentebb említett kapcsolódó él- és pontszámozásokat, valamint a köztük adódó összefüggéseket. Először a magic gráfokkal foglalkozunk, mely az antimagic címkézés ellentéte olyan értelemben, hogy itt azt követeljük meg, hogy minden pontban azonos legyen az illeszkedő éleken a számok összege. Ez igen ritkán teljesíthető, ám azt belátjuk, hogy a teljes gráfok élei a természetes számokkal címkézhetők magic módon. Ezután az egyiptomi címkézéseket vizsgáljuk meg, ahol a természetes számok reciprokait írjuk az élekre. Ezen számozások megoldhatósága szorosan összefügg az összes temészetes számot használó, úgynevezett gyengén magic és gyengén antimagic számozásokkal. A következő érintett téma a totális magic címkézések lesznek, ahol éleket és pontokat is számozunk. Végül áttekintjük a graceful és edge-graceful gráfokat. Az antimagic címkézéshez hasonlóan ezekkel kapcsolatban is számos nyitott kérdés vár még válaszra.

A második fejezetben ismertetjük az antimagic címkézéssel kapcsolatos fontosabb eredményeket. Először a sűrű gráfokat vizsgáljuk. A téma eddigi egyik legjelentősebb eredményének bizonyítása is szerepelni fog, mely szerint az egyenletesen sűrű gráfok címkézhetők antimagic módon. A magas, legalább $n-2$ fokszámú ponttal rendelkező, valamint a teljes páros gráfokra is bizonyították már a címkézés létezését. Ezután a speciális tulajdonságú klikket tartalmazó gráfokra koncentrálunk és rájuk is belátjuk az antimagic tulajdonság teljesülését, majd megmutatjuk, hogy ez a klikk létezése ekvivalens a gráf bizonyos módon való felbonthatóságával. A harmadik vizsgált csoport pedig a reguláris páros gráfok lesznek. A párosítások elméletének segítségével a fokszámok paritása szerint szétbontva mindkét csoportra belátjuk az antimagic címkézés létezését.

A harmadik fejezetben a kombinatorikus nullhelytétel alkalmazására térünk ki, az antimagic tulajdonság követelményeit egy polinomként felírva a tétel felhasználásával nyerhetünk érdekes eredményeket. Végül definiáljuk a halmaz-antimagic tulajdonságot és megfogalmazunk egy sejtést a fákra, melyet a kombinatorikus nullhelytétel segítségével egy polinom maximális fokú tagjára vezetünk vissza.

1. fejezet

Gráfok címkézése

A következőkben a $G = (V, E)$-vel gráfokat, $m = |E|$-vel a gráf éleinek, $n = |V|$-vel a gráf pontjainak számát, $\delta(u)$-val az u pontra illeszkedő élek halmazát fogjuk jelölni. Az élszámozáson egy olyan függvényt értünk, mely a gráf éleihez egy adott halmazból választott számokat rendel. A címkézés megadása után $w(v)$ egy adott $v \in V$ csúcsra a v-re illeszkedő éleken a számok összegét, azaz a pont súlyát fogja jelölni. Élek és pontok egyidejű számozása során pedig $w(e)$ egy $e \in E$ élnél az élre és a végpontjaira írt számok összegét, míg $w(v)$ egy $v \in V$ csúcsnál a rá illeszkedő élekre és v-re írt számok öszegét fogja jelenteni. A következőkben gráfon mindig irányítatlan és egyszerű, azaz többszörös és hurokélmentes gráfokat fogunk érteni.

1.1. Antimagic gráfok

1.1.1. Definíció. *Egy $G = (V, E)$ gráfot antimagicnek hívunk, ha létezik olyan $\varphi : E \to \{1, \dots, m\}$ bijekció, hogy minden $u, v \in V$ esetén*

$$\sum_{e\in\delta(u)} \varphi(e) \neq \sum_{e\in\delta(v)} \varphi(e).$$

A következő sejtést Ringel és Hartsfield fogalmazták meg 1990-ben.

1.1.1. Sejtés. *Minden összefüggő gráf antimagic, kivéve $K_2 - t$.*

A sejtés egyelőre makacsul ellenáll mindenféle bizonyítási próbálkozásnak, sőt még fákra sem sikerült igazolni. A következőkben definiálunk néhány, az antimagic tulajdonsághoz kötődő más címkézést és áttekintjük az ezekkel kapcsolatos tételeket és összefüggéseket. A dolgozat fő témája az antimagic számozás, így azzal később bővebben foglalkozunk.

1.1.2. Definíció. *Egy $G = (V, E)$ gráfot gyengén antimagicnek hívunk, ha létezik olyan $\varphi : E \to \mathbf{N}$ injektív függvény, hogy minden $u, v \in V$ esetén*

$$\sum_{e\in\delta(u)} \varphi(e) \neq \sum_{e\in\delta(v)} \varphi(e).$$

Az antimagic tulajdonsággal ellentétben a gyenge antimagic számozás létezése könnyen bizonyítható minden összefüggő, K_2-től különböző gráf esetén.

1.1.1. Tétel. *Minden összefüggő gráf gyengén antimagic, kivéve $K_2 - t$.*

Bizonyítás: Legyen $G = (V, E)$ összefüggő gráf, éleinek száma m, pontjainak száma legalább 3. Tetszőleges módon rendezzük sorba G éleit, majd legyen a hozzárendelés a következő: $e_i \to 2^{i-1}$ $(i = 1, \dots, m)$. Ekkor minden pontban különböző a befutó éleken a számok összege, hiszen így az illeszkedő élek sorszámai által meghatározott kettes számrendszerbeli számokat kaptunk, melyek csak akkor egyeznének meg két különböző pont esetén, ha mindkettőbe ugyanazon élek futnának be. Ez a két pont azonban egy K_2-t alkotna, de mivel a gráf összefüggő és különbözik K_2-től, ez ellentmondás, így gyengén antimagic. ■

1.2. Magic gráfok

1.2.1. Definíció. *Egy $G = (V, E)$ gráfot magicnek hívunk, ha létezik olyan $\varphi : E \to \{1, \dots, m\}$ bijekció, hogy minden $u, v \in V$ esetén*

$$\sum_{e \in \delta(u)} \varphi(e) = \sum_{e \in \delta(v)} \varphi(e).$$

Az antimagic gráfokkal ellentétben a magic gráfok ritkák, az 5-nél kevesebb pontból álló gráfok közül csak K_2 ilyen. A nagyobb pontszámúak közül például $K_{3,3}$ magic. A teljes páros gráfok esetén a magic tulajdonság követelménye megfeleltethető a klasszikus bűvös négyzet feladatnak. Az ekvivalens forma az, hogy egy $m \times n$-es mátrixot töltünk fel 1 és mn közötti számokkal úgy, hogy minden számot egyszer használunk és minden sorösszeg és oszlopösszeg megegyezik.

Az antimagic tulajdonsághoz hasonlóan a magic esetben is definiálhatjuk a gyengített változatot.

1.2.2. Definíció. *Egy $G = (V, E)$ gráfot gyengén magicnek hívunk, ha létezik olyan $\varphi : E \to \mathbf{N}$ injektív függvény, hogy minden $u, v \in V$ esetén*

$$\sum_{e \in \delta(u)} \varphi(e) = \sum_{e \in \delta(v)} \varphi(e).$$

A gyengén magic tulajdonság lényegesen gyakrabban teljesül, néhány egyszerűbb gráfosztály minden tagjára igazolható. A következő tétel a [9]-es cikk eredményét mutatja be.

1.2.1. Tétel. *Legyen G legalább 5 pontú teljes gráf. Ekkor G gyengén magic.*

Bizonyítás: Keressük meg az összes páros hosszú kört a gráfban, majd soroljuk fel őket 1-től N-ig, ahol N a páros körök száma a gráfban. Minden k-ra írjunk a felsorolásban k-adik kör éleire váltakozva $\pm 3^k$ értékeket. Ezután minden élre összegezzük a rájuk írt számokat.

Ahhoz, hogy a kapott számozás gyengén magic legyen, teljesülnie kell, hogy minden pontban azonos legyen a befutó éleken a számok összege és bármely két élen különböző címke szerepeljen. Az első követelmény a konstrukcióból adódóan triviálisan teljesül, hiszen bármely kör hozzájárulása egy adott ponton vett összeghez 0. A második tulajdonság ellenőrzéséhez minden élre listázzuk azon köröket, melyek tartalmazzák az adott élt. Világos, hogy bármely két élre van olyan páros kör, mely közülük csak egyiket tartalmazza. Így nincs két olyan él, melyekre a hozzájuk tartozó lista megegyezne, ezért az körök által meghatározott összegek is különbözőek. Ezt úgy láthatjuk be, hogy az összegeket olyan hármas számrendszerben írjuk fel, ahol a számjegyek $0, +1, -1$. Mivel minden lista különbözik, az általuk meghatározott hármas számrendszerbeli számok is különbözőek lesznek, vagyis a második tulajdonság is teljesül. Végül mivel a teljes gráfok regulárisak, tetszőlegesen nagy konstanst adhatunk minden él címkéjéhez, ezzel egyik követelmény teljesülését sem rontjuk el. Így már nem használunk negatív címkéket, vagyis a gráf gyengén magic. ■

1.2.2. Tétel. *Legyen $G = K_{n,n}$ teljes páros gráf. Ekkor minden $n > 2$-re G gyengén magic.*

A bizonyítás az előző konstrukcióhoz hasonló módon történik.

1.2.3. Tétel. *Legyen G legalább 5 pontú gráf, melynek minden pontjának fokszáma legalább $\frac{n}{2} + 1$. Ekkor G gyengén magic.*

1.2.1. Következmény. *Minden legalább 5 pontú teljes gráf gyengén magic.*

Bizonyítás: A teljes gráfokra teljesül, hogy minden pont fokszáma legalább $\frac{n}{2} + 1$, így alkalmazható az előző tétel. ■

A kisebb pontszámú teljes gráfok közül K_2 gyengén magic, K_3 és K_4 azonban nem.

1.3. Egyiptomi címkézések

A következőkben a gráfok egyiptomi számozásáról lesz szó. Természetes számok helyett ezek reciprokait fogjuk használni a gráfok éleinek címkézésére. A fejezet az [1]-es cikk eredményeit mutatja be.

1.3.1. Definíció. *Jelölje az U halmaz az 1-nél nagyobb természetes számok reciprokainak halmazát, azaz $U = \{\frac{1}{n} : \quad n \in \mathbf{N}, \quad n \geq 2\}$.*

1.3.2. Definíció. *Egy $G = (V, E)$ gráfot egyiptomi magicnek hívunk, ha létezik olyan $\varphi : E \to U$ injektív függvény, hogy minden $u, v \in V$ esetén*

$$\sum_{e \in \delta(u)} \varphi(e) = \sum_{e \in \delta(v)} \varphi(e).$$

1.3.1. Tétel. *Egy $G = (V, E)$ gráfnak akkor és csak akkor van gyengén magic számozása, ha van egyiptomi magic számozása.*

Bizonyítás: Legyen $G = (V, E)$ gráf egy $f : E(G) \to \mathbf{Q}$ címkézéssel. Egy $k \in \{U \cup \mathbf{N}\}$ számra legyen $f^{(k)} : E(G) \to \mathbf{Q}$ számozás az f-címkézés k-kiterjesztése, melyet úgy értelmezünk, hogy $f^{(k)}(e) = kf(e)$ minden $e \in E$-re.

Tegyük fel, hogy az f függvény egy egyiptomi magic számozás. Vegyük a következő k számot:

$$k = [\frac{1}{f(e_1)}, \frac{1}{f(e_2)}, \ldots, \frac{1}{f(e_m)}],$$

ahol $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ az x_i számok legkisebb közös többszörösét jelöli. Tekintsük most erre a k-ra és az f egyiptomi magic számozásra az $f^{(k)}$ kiterjesztést. Mivel f injektív, ezért $f^{(k)}$ is injektív, mert $f^k(e) = kf(e)$. A k szám választása miatt minden $f^{(k)}(e)$ egész. Továbbá w_f konstans G pontjain, mivel f egyiptomi magic számozás, így kw_f is konstans, azaz $f^{(k)}$ G gyengén magic számozása.

Legyen most f a G gráf éleinek gyengén magic számozása. Legyen

$$k' = 2[f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_m), w_f(v_1)],$$

majd tekintsük az f függvény k-kiterjesztését, ahol $k = \frac{1}{k'}$. Mivel k' minden $f(e_i)$-nek többszöröse, így $f^{(k)}(e) = kf(e) = \frac{f(e)}{k'} \in U$ minden $e \in E$-re. Az f számozás gyengén magic, ezért injektív és a $w_f(v)$ konstans a pontokon, így $f^{(k)} = fk$ is injektív és $kw_f(v)$ konstans marad a pontokon, vagyis $f^{(k)}$ egyiptomi magic számozás. ■

1.3.1. Következmény. *Minden magic gráf egyiptomi magic is.*

Bizonyítás: A magic gráfok gyengén magicek is, így az előző tétel alapján egyiptomi magic számozásuk is van. ■

1.3.3. Definíció. *Egy $G = (V, E)$ gráfot egyiptominak hívunk, ha létezik olyan $\varphi : E \to U$ injektív függvény, hogy minden $u, v \in V$ esetén*

$$\sum_{e \in \delta(u)} \varphi(e) \neq \sum_{e \in \delta(v)} \varphi(e).$$

1.3.2. Tétel. *Minden összefüggő gráf egyiptomi, kivéve $K_2 - t$.*

Bizonyítás: Azt fogjuk megmutatni, hogy a gyengén antimagic tulajdonságból levezethető az egyiptomi. Az előzőekben már beláttuk, hogy minden összefüggő gráf (kivéve $K_2 - t$) gyengén antimagic, így ebből következik a tétel.

Legyen G gyengén antimagic, f az élein értelmezett gyengén antimagic számozás. Legyen

$$k' = 2[f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_m), w_f(v_1), w_f(v_{2,}), \ldots, w_f(v_m)].$$

Tekintsük az f függvény k-kiterjesztését, ahol $k = \frac{1}{k'}$. Mivel k' minden $f(e_i)$-nek többszöröse, így $f^{(k)}(e) = kf(e) = \frac{f(e)}{k'} \in U$ minden $e \in E$-re. Továbbá $f^{(k)}$ injektív, mivel f is injektív, valamint $w^{(k)}$ is injektív a pontokon, mert $w_{f^{(k)}} = kw_f$ és w_f injektív volt G gyengén antimagic tulajdonsága miatt, azaz $f^{(k)}$ egyiptomi számozás. ■

1.4. Totálisan magic gráfok

Ebben a fejezetben a totális címkézéseket tekintjük át az [5]-ös és [6]-os cikk alapján. A totális azt jelenti, hogy éleket és pontokat egyszerre számozunk.

1.4.1. Definíció. *Egy $G = (V, E)$ n pontú, m élű gráfot totálisan él-magicnek hívunk, ha létezik olyan $\varphi : E \cup V \to \{1, \ldots, m+n\}$ bijekció és olyan k magic konstans, hogy minden $e = uv \in E$ élre*

$$\varphi(u) + \varphi(v) + \varphi(e) = k.$$

Látható, hogy ha φ számozás a pontokon, akkor az már meghatározza az élek számozását is, mert bármely (x, y) élre - ha a magic konstans k - $\varphi(e) = k - \varphi(x) - \varphi(y)$. Mivel a címkék összege az első $m + n$ szám összege, ezért k a pontok címkézése után már meghatározott, így az élek számozása valóban egyértelmű. Természetesen nem minden pontszámozás fog él-magic címkézésre vezetni, lehetséges, hogy k-ra nem egész értéket kapnánk vagy az élek között ismétlődő szám lép fel.

1.4.1. Tétel. *A K_n teljes gráfnak akkor és csak akkor van totálisan él-magic számozása, ha $n = 2, 3, 5$ vagy 6.*

A teljes gráfok a lehető legsűrűbb gráfok, a sok él miatt nagyon sok összegnek kellene megegyeznie, nagy k értékekre ezt nem lehet elérni. A teljes páros gráfokra és a körökre azonban megoldható a címkézés.

1.4.2. Tétel. *Minden teljes páros gráfnak van totálisan él-magic számozása.*

1.4.3. Tétel. *Minden n hosszú körnek, ahol n páratlan, van totálisan él-magic számozása $k = \frac{1}{2}(5n + 3)$ magic konstanssal.*

1.4.4. Tétel. *Minden n hosszú körnek, ahol n páros, van totálisan él-magic számozása $k = \frac{1}{2}(5n + 4)$ magic konstanssal.*

A totálisan él-magic címkézéshez hasonló módon bevezethetjük a totálisan pont-magic címkézést is.

1.4.2. Definíció. *Egy $G = (V, E)$ n pontú, m élű gráfot totálisan pont-magicnek hívunk, ha létezik olyan $\varphi : E \cup V \to \{1, \dots, m + n\}$ bijekció, hogy minden $u, v \in V$ esetén*

$$\sum_{e\in\delta(u)} \varphi(e) + \varphi(u) = \sum_{e\in\delta(v)} \varphi(e) + \varphi(v).$$

Tekintsünk néhány egyszerű gráfosztályt, melyeknek ismert a totálisan pont-magic tulajdonsága.

1.4.5. Tétel. *Minden körnek létezik totálisan pont-magic számozása.*

1.4.6. Tétel. *Minden legalább 3 hosszú útnak létezik totálisan pont-magic számozása.*

A teljes páros gráfokra viszont már nem teljesül minden esetben a totálisan pont-magic tulajdonság.

1.4.7. Tétel. *A $K_{n,m}$ teljes páros gráfnak nincs totálisan pont-magic számozása, ha $n > m + 1$.*

1.4.8. Tétel. *A $K_{n,n}$ teljes páros gráfnak van totálisan pont-magic számozása, ha $n > 1$.*

Ismert tehát, hogy teljes páros gráfok esetén a pont-magic tulajdonság teljesül, ha a két pontosztályba egyforma számú pont tartozik, és nem teljesül, ha 1-nél nagyobb a különbség. Azonban azt nem tudjuk, hogy a tulajdonság fennáll-e akkor, ha pontosan 1 a pontok számának különbsége.

1.4.1. Sejtés. *Minden $K_{n,n+1}$ teljes páros gráfnak van totálisan pont-magic számozása.*

A teljes gráfok esetén az eredmény a pontok számának paritásától függ, páros esetben a kérdés még nyitott.

1.4.9. Tétel. *Páratlan n-re a K_n teljes gráfnak van totálisan pont-magic számozása.*

1.4.2. Sejtés. *Minden legalább 3 pontú teljes gráfnak létezik totálisan pont-magic számozása.*

Definiálhatjuk a totálisan magic címkézést is. Ez egy olyan pont- és élszámozás, ahol egyszerre követeljük meg a pontokra és élekre is az egyezést.

1.4.3. Definíció. *Egy $G = (V, E)$ n pontú, m élű gráfot totálisan magicnek hívunk, ha létezik olyan $\varphi : E \cup V \to \{1, \dots, m+n\}$ bijekció, és k magic konstans, hogy minden $u \in V$ esetén*

$$\sum_{e \in \delta(u)} \varphi(e) + \varphi(u) = k$$

valamint minden $e = uv \in E$ élre

$$\varphi(u) + \varphi(v) + \varphi(e) = k.$$

Jelenleg összesen három összefüggő totálisan magic gráfot ismerünk, ezek a K_1, K_3 és P_3 gráfok. Nem összefüggő totálisan magic gráfból viszont végtelen sok létezik, például $2k+1$ darab diszjunkt K_3 uniója mindig totálisan magic.

1.5. Graceful gráfok

1.5.1. Definíció. *Egy $G = (V, E)$ gráfot gracefulnak hívunk, ha létezik olyan $\varphi : V \to \{0, \dots, m\}$ injektív függvény és $\psi : E \to \{1, \dots, m\}$ bijekció, hogy minden $e = uv \in E$ esetén*

$$\varphi(u) - \varphi(v) = \psi(e).$$

A problémát A. Rosa 1967-es cikkében vetette fel. Néhány egyszerűbb gráfosztály minden tagjára igazolták már a graceful címkézés létezését, itt azonban fel sem merül a sejtés, mely szerint minden gráf graceful lenne. A legfeljebb 5 pontúak közül erre K_5, C_5 és két, egy pontjukkal érintkező K_3 is ellenpéldát szolgáltat. Ezen három eset kivételével azonban minden legfeljebb 5 pontú gráf graceful.

1.5.1. Tétel. *Minden P_n út és S_n csillag graceful.*

1.5.2. Tétel. *Egy K_n teljes gráf akkor és csak akkor graceful, ha $n \leq 4$.*

1.5.3. Tétel. *Egy n hosszú kör akkor és csak akkor graceful, ha n vagy n-1 osztható 4-gyel.*

A témában legismertebb sejtés Ringel és Kotzig nevéhez kötődik.

1.5.1. Sejtés (Ringel-Kotzig). *Minden fa graceful.*

Számítógép segítségével igazolták, hogy minden fa graceful, melynek legfeljebb 35 pontja van.

1.5.2. Definíció. *Egy $G = (V, E)$ n pontú és m élű gráfot edge-gracefulnak hívunk, ha létezik olyan $\varphi : E \to \{1, \dots, m\}$ bijekció, hogy minden $u, v \in V$ esetén*

$$\sum_{e \in \delta(u)} \varphi(e) \not\equiv \sum_{e \in \delta(v)} \varphi(e) \pmod{n}.$$

Az edge-graceful címkézést S. Lo vezette be 1985-ben, a témában az eddigi legjelentősebb eredmény is az ő nevéhez kötődik.

Egy edge-graceful számozás biztosan antimagic is, mert a különböző maradékosztályba tartozó összegek szükségképpen nem egyenlőek. Egy antimagic számozás esetén az edge-graceful tulajdonság teljesüléséhez viszont azt is ellenőrizni kell, hogy a kapott összegek különböző modulo n maradékosztályba tartoznak-e, így az edge-graceful tulajdonság erősebb az antimagicnél. A következő két tétel a [3]-as cikk eredményeit mutatja be.

1.5.4. Tétel. *Legyen $G = (V, E)$ n pontú és m élű gráf, mely előáll $G = H \cup f_1 \cup \ldots \cup f_r$ alakban, ahol $H = (V, E')$ edge-graceful és f_i-k 2-faktorok. Ekkor G edge-graceful.*

Bizonyítás: Legyen $G = H \cup f_1 \cup \ldots \cup f_r$ és $|V(G)| = |V(H)| = n$ és legyen ω edge graceful címkézése H-nak. A bizonyítás r-szerinti indukcióval történik.

Ha $r = 0$, akkor $G = H$, így ω edge graceful címkézése G-nek is. Legyen most $r > 0$, majd távolítsunk el egy 2-faktort, f_r-et G-ből. Az indukciós feltevés szerint $G' = G - f_r$ edge graceful, legyen ω' edge-graceful címkézése $G' = (V, E')$-nek. Megalkotunk egy edge-graceful címkézését G-nek, felhasználva az $|E'| + 1, |E'| + 2, \ldots, |E'| + n$ számokat, melyek modulo n azonosak a $0, 1, \ldots, n-1$ címkékkel. Ha a pontokon vett összegek G'-ben az f_r-ben lévő $v_1e_1v_2e_2 \ldots v_ke_kv_1$ körre $a_1, a_2, \ldots, a_k$, akkor $1 \leq i \leq k$-ra címkézzük az e_i élt b_i-vel, ami az a_i inverze a $< \mathbf{Z}_n, + >$ csoportban. Az új összeg a v_i ponton $(1 \leq i \leq k)$-ra $b_{(i-1)}$ modulo k, ezek különbözőek minden i-re. Ezt minden f_r-beli körre elvégezve G-nek egy edge-graceful címkézését kapjuk. ■

Ismert, hogy minden $2d$-reguláris gráf felbontható 2-faktorokra, így az alábbi következik az előző tételből.

1.5.5. Tétel. *Legyen $G = (V, E)$ $2d$-reguláris gráf. Ha G tartalmaz 2-faktort, mely t körből áll és minden kör hossza k, ahol k és t páratlan számok, akkor G edge-graceful.*

Bizonyítás: A bizonyításhoz elég megmutatni, hogy a t darab k hosszú körből álló G gráf edge graceful minden páratlan k, t-re. Az i-edik kört, ahol $(1 \leq i \leq t)$ címkézzük $i-1, t+i-1, 2t+i-1, \ldots, (k-1)t+i-1$-gyel ebben a sorrendben, így G-nek edge-graceful címkézését kapjuk. ■

Látható, hogy egy 2-faktor páros számú ponton nem lehet edge-graceful, mivel ha n páros, akkor $\sum_{i=0}^{n-1} i \neq 0 \pmod n$, ugyanakkor $2\sum_{i=0}^{n-1} i = 0 \pmod n$, ezért a pontokon vett összegek nem lehet mind különbözőek *modulo* n.

A következő tétel Lo-feltételként ismert.

1.5.6. Tétel (Lo). *Legyen G egy n pontú és m élű gráf. Ekkor G csak akkor lehet edge-graceful, ha*

$$m(m+1) \equiv \frac{n(n-1)}{2} \pmod{n}.$$

Lo igazolta, hogy a feltétel szükséges ahhoz, hogy egy gráf edge-graceful legyen. Azonban a mai napig nyitott kérdés, hogy az elégségesség is teljesül-e.

1.5.2. Sejtés. *Tegyük fel, hogy G gráfra teljesül a Lo-feltétel. Ekkor G edge-graceful.*

Körök, utak és teljes gráfok esetén az edge-graceful tulajdonság teljesülését a pontok számának paritása és néggyel való osztási maradéka befolyásolja.

1.5.7. Tétel. *C_n és P_n edge-graceful, ha n páratlan, és nem edge-graceful, ha n páros.*

1.5.8. Tétel. *Az n pontú teljes gráf edge-graceful, ha $n \not\equiv 2 \pmod{4}$.*

2. fejezet

Tételek az antimagic tulajdonságra

Ahogy az előzőkben láttuk, nyitott kérdés, hogy minden összefüggő gráfra teljesül-e, hogy létezik antimagic címkézése. Ebben a fejezetben olyan gráfosztályokat fogunk áttekinteni, melyekre már ismert az antimagic tulajdonság létezése.

2.1. Sűrű gráfok

A sűrű és a nagy maximális fokszámú ponttal rendelkező gráfok vizsgálata során a [4]-es cikk eredményeit mutatjuk be.

A következő tétel azt mondja ki, hogy ha a gráf minden pontjának elég nagy a fokszáma, akkor a gráf antimagic. Ez megfelel a természetes intuíciónak is, vagyis sok él esetén többféleképpen, rugalmasan címkézhetünk, így nagyobb eséllyel találhatunk antimagic számozást.

2.1.1. Tétel. *Létezik olyan C abszolút konstans, hogy minden n pontú gráf, melyben minden pont foka legalább $C \cdot \log n$, antimagic.*

Valójában ennél egy kicsivel erősebb korlát is igaz, elég ugyanis, ha minden pont foka legalább $\Omega(\frac{\log n}{\log \log n})$. A bizonyítás valószínűségszámítási eszközökön alapul, továbbá néhány analitikus számelméleti és kombinatorikus technikán. A következő négy lemma a bizonyítás alapját adja. Az első kettőre a harmadik bizonyításához van szükség, melyet itt nem közlünk. A harmadik és negyedik lemmát felhasználjuk a tétel bizonyítása során.

2.1.1. Lemma. *Legyen $t > 0$ egész, $A \subset \{1, 2, \ldots, t\}$, $\mid A \mid > t - 2d$, ahol $d \leq \frac{t}{30}$ és legyen $p = \lfloor t \cdot \sqrt{d} \rfloor$. Legyen $\omega = e^{\frac{2\pi i}{p}}$ p-dik egységgyök, a_1, a_2 véletlenszerű elemek A-ból egyenletes valószínűséggel választva. Ekkor léteznek olyan c_1 és c_2 pozitív abszolút konstansok, hogy a következők teljesülnek:*

1. Legyen x olyan, hogy $0 < x < \sqrt{d}$ vagy $p - \sqrt{d} < x < p$ egész, ekkor legalább c_1 valószínűséggel

$$\mid \frac{\omega^{a_1}x + \omega^{a_2x}}{2} \mid \leq 1 - c_2 \frac{\min(x, p-x)^2}{d}.$$

2. legyen x olyan, hogy $\sqrt{d} < x < p - \sqrt{d}$ egész, ekkor legalább c_1 valószínűséggel

$$\mid \frac{\omega^{a_1}x + \omega^{a_2x}}{2} \mid \leq 1 - c_2.$$

2.1.2. Lemma. *Létezik olyan c_1 pozitív abszolút konstans, melyre teljesülnek a következők. Legyenek t és d egészek, $\lfloor c_1 \cdot \log d \rfloor \leq d \leq \frac{t}{30}$, és legyenek p és ω mint a 2.1.1 lemmában. Legyenek a_{i1}, a_{i2} $(1 \leq i \leq d)$ páronként különböző elemei a $\{1, 2, \ldots, t\}$ halmaznak egyenletes valószínűséggel választva. Legyen továbbá*

$$T(x) = \prod_{i=1}^{d} \frac{\omega^{a_{i1}}x + \omega^{a_{i2}x}}{2}$$

.

1. legyen x olyan, hogy $0 < x < \sqrt{d}$ vagy $p - \sqrt{d} < x < p$ egész, ekkor

$$\mid T(x) \mid \leq e^{\min(x, p-x)^2}$$

legalább $1 - \frac{1}{t^2}$ valószínűséggel

2. legyen x olyan, hogy $\sqrt{d} < x < p - \sqrt{d}$ egész, ekkor

$$\mid T(x) \mid \leq \frac{1}{t^2}.$$

legalább $1 - \frac{1}{t^2}$ valószínűséggel.

2.1.3. Lemma. *Létezik olyan c_1 és c_2 pozitív abszolút konstans, melyre teljesülnek a következők. Legyenek t és d egészek, $\lfloor c_1 \cdot \log d \rfloor \leq d \leq \frac{t}{30}$. Legyenek a_{i1}, a_{i2} $(1 \leq i \leq d)$ páronként különböző elemei a $\{1, 2, \ldots, t\}$ halmaznak egyenletes valószínűséggel választva. Minden i-re $((1 \leq i \leq d)$ válasszunk j_i-t $(i \in \{1, 2\})$ függetlenül és egyenletes valószínűséggel és legyen*

$$Q = \sum_{i=1}^{d} a_{ij_i}$$

Ekkor minden $S \in \mathbf{N}$-re a valószínűsége, hogy $Q = S$ legfeljebb $\frac{c_2}{t\sqrt{d}}$ legalább $1 - \frac{1}{t^2}$ valószínűséggel.

A következő tétel Lovász lokális lemmaként ismert.

2.1.4. Lemma (Lovász). *Legyenek p és r pozitív konstansok és $p(r+1) \leq \frac{1}{3}$. Legyenek A_i-k olyan események, hogy minden i-re A_i legfeljebb r másik eseménytől nem független és $P(A_i) \leq p$ minden i-re, akkor $P(\overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots, \overline{A_r}) > 0$*

A lemmák kimondása után már következhet a tétel bizonyítása.

Bizonyítás: Legyen c megfelelően nagy pozitív konstans olyan, hogy minden elegendően nagy pozitív egész n-re és minden $t \in [\frac{dn}{2}, dn]$-re, ahol $d = \lfloor c \log n \rfloor$ teljesül, hogy

$$\lfloor c \log t \rfloor + 1 \leq d \leq \frac{t}{30} - 1,$$

ahol c_1 a konstans a 2.1.3 lemmából. A bizonyításhoz az kell, hogy minden elegendően nagy n-re, ha G gráf n pontú, m élű és minden pont foka legalább d, akkor G antimagic.

Első fázis: Keressünk két olyan szomszédos pontot, melyek foka legalább $d+1$, majd az őket összekötő élhez rendeljük hozzá a legnagyobb, eddig még nem használt számot és töröljük az élt. Jelöljük G'-vel azt a gráfot, mely mely ezen lépés addig történő ismétlésével keletkezik, amíg már nem marad törölhető él. Jelöljük a pontosan d fokú pontokat G'-ben A-val és legyen a legalább $d+1$ fokú pontok halmaza B. Lehetséges, hogy a B halmaz üres, de mindenképp független ponthalmazt alkot G'-ben. Ekkor minden $v \in V$-re adódik egy részösszeg, jelöljük $r(v)$-vel, amely a törölt élekre írt számok összege. Jelölje $t \leq m$ a G' részgráf éleinek számát. Ekkor $t \in \lfloor \frac{dn}{2}, dn \rfloor$. A további célunk az $\{1, 2, \ldots, t\}$ halmaz elemeit hozzárendelni G' éleihez úgy, hogy minden pontban különböző legyen a befutó élekhez rendelt számok összege, $r(v)$ értékét is beleértve.

Második fázis: Bontsuk fel G' éleit $\frac{t}{2}$ párra (feltehetjük, hogy t páros) a következőképpen: jelölje v fokát $d'(v)$ a G' gráfban. Ezután minden $v \in B$-re válasszunk tetszőlegesen egy $F(v)$ halmazt a v-vel szomszédos élek közül úgy, hogy $|F(v)|$ páros és

$$|(d'(v) - |F(v)|) - d| \leq 1.$$

Ekkor bármely két különböző $u, v \in B$-re $F(u) \cap F(v) = \emptyset$. Bontsunk fel minden $F(v)$-t párokra, tetszőleges módon. Legyen

$$k = \frac{(t - |\bigcup_{v \in B} F(v)|)}{2}.$$

Bontsuk fel G' maradék éleit (melyek nincsenek $\bigcup_{v \in B} F(v)$-ben) k párra úgy, hogy semelyik két párban lévő élnek ne legyen közös végpontja. Ezt meg tudjuk tenni, mert a gráfban elengendően magas a minimum fokszám, így van teljes párosítása. Végül jelöljük minden $e \in G'$-re $p(e)$-vel azt az élt, mely e párja.

Harmadik fázis: Véletlenszerűen osszuk fel a meglévő t címkénket $\frac{t}{2}$ párra. Ezután a véletlenszerűen választott párokat rendeljük hozzá tetszőleges módon az előző fázisban készített élpárokhoz. Jelölje minden $e \in G'$-re $L(e)$ azt a számpárt, melyet hozzárendeltünk a $\{e, p(e)\}$ párhoz. Világos, hogy $L(p(e)) = L(e)$.

Negyedik fázis: Minden $v \in B$-re $f(v)$ jelölje az $F(v)$ élekhez rendelt számok összegét. Vegyük észre, hogy ugyan még nem jelöltük ki, hogy melyik él melyik számot kapja (két választás lehetséges), $f(v)$ mégis jól definiált. Jelölje most minden $v \in B$-re $H(v)$ azon élek halmazát G'-ben, melyek szomszédosak v-vel, de nincsenek benne $F(v)$-ben. Azon élekre, melyek A-ban vannak, jelölje $H(v)$ azon élek halmazát, melyek szomszédosak v-vel G'-ben. Vegyük észre, hogy $d + 1 \geq |H(v)| \geq d - 1$ minden $v \in V$-re és $|H(v)| = d$ minden $v \in A$-ra. Valamint minden $v \in V$-re jelölje a számpárok halmazát $\{L(e) : e \in H(v)\}$. Ekkor összesen $2^{|H(v)|}$ különböző választás létezik a címkézésre és minden lehetséges választáshoz tartozik egy összeg. Jelölje a lehetséges összegeket $Q(v)$, ekkor $|Q(v)| \leq 2^{|H(v)|}$. Ekkor a 2.1.3. lemma miatt egy megfelelő C_1 konstansra legalább $1 - \frac{1}{t^2}$ valószínűséggel egyik konkrét $Q(v)$ érték sem áll fenn $\frac{C_1}{t\sqrt{d}}$ (vagy nagyobb) valószínűséggel a $2^{|H(v)|}$ lehetséges esetből.

Ötödik fázis: Minden $\{e, p(e)\}$ párnál feldobunk egy érmét, hogy eldöntsük, az élek melyik számot kapják $L(e)$-ből. Mind a $\frac{t}{2}$ választás egymástól függetlenül történik. Vegyük észre, hogy a minden $v \in B$-beli pont végső súlya egy véletlen változó, melyet $r(v) + f(v)$-hez adunk és eleme $Q(v)$-nek, továbbá az érmedobástól függ. Hasonlóan, minden $v \in A$-beli pont végső súlya szintén egy véletlen változó, melyet úgy kapunk, hogy $r(v)$-hez hozzáadjuk $Q(v)$ egy elemét. Azt szeretnénk látni, hogy pozitív valószínűség adódik arra, hogy minden pont végső súlya különböző. Egy (u, v) pontpárra legyen $B(u, v)$ az az esemény, amikor u és v végső súlya megegyezik. Azt kell belátnunk, hogy pozitív a valószínűsége, hogy egyik $B(u, v)$ sem következik be. A negyedik fázisban kapottak szerint:

$$P(B(u, v)) \leq \frac{C_1}{t\sqrt{d}} \leq 2\frac{C_1}{n\sqrt{d^3}}.$$

Belátjuk, hogy a $B(u, v)$-k legfeljebb $O(nd)$ eseményt kivéve minden más eseménytől függetlenek. Jelölje Z azon pontok halmazát, melyek $H(v) \cup H(u)$-ban lévő élek végpontjai, valamint az őket összekötő éleket. Világos, hogy $|Z| \leq 6(d + 1) + 2$. Azok a $B(x, y)$ események, ahol sem x, sem y nem eleme Z-nek, függetlenek $B(u, v)$-tól. Ekkor $B(u, v)$ független minden más eseménytől, kivéve legfeljebb $(6(d + 1) + 2)n$ másik eseményt. Továbbá

$$\frac{2C_1}{n\sqrt{d^3}}((6(d + 1) + 2)n + 1) < \frac{1}{3}$$

megfelelően nagy n-re. Használjuk a Lovász-féle lokális lemmát, amiből következik, hogy pozitív a valószínűsége, hogy egyik $B(u, v)$ sem következik be. Ez éppen azt jelenti, hogy nincs két olyan pont, melyek végső súlya megegyezik, azaz létezik antimagic számozás. ■

A vázolt bizonyítás nem konstruktív, nem tudunk megadni egy valóban megfelelő címkézést, ám beláttuk, hogy létezik ilyen.

2.1.1. Következmény. *Minden 2-nél több pontú teljes gráf antimagic.*

Bizonyítás: A teljes gráfokra teljesül a 2.1.1. tétel feltétele $c = 1$ konstanssal, így valóban teljesül az antimagic tulajdonság. ∎

2.2. Nagy maximális fokszámú gráfok

2.2.1. Tétel. *Legyen G legalább 4 pontú gráf és $\Delta(G) \geq n - 2$. Ekkor G antimagic.*

A tétel bizonyításához négy lemmát használunk fel. A tételt egy lemma keretében először $\Delta(G) = n - 1$-re bizonyítjuk.

2.2.1. Lemma. *Legyen G legalább 3 pontú gráf és $\Delta(G) = n - 1$. Ekkor G antimagic.*

Bizonyítás: Jelölje m G éleinek számát és legyen $v \in V$ az a pont, melynek foka $n - 1$. Rendeljük a különböző $1, 2, \ldots, m - n + 1$ számokat tetszőleges módon azon $m - n + 1$ élhez, melyek egyik végpontja sem v. Jelölje v pont $n - 1$ szomszédját $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ úgy, hogy $w'(v_i) \leq w'(v_{i+1})$ minden $i = 1, 2, \ldots, n-2$, ahol $w'(v_i)$ a már meglévő számoknak az összege azon éleken, melyek befutnak v_i-be. Ezután rendeljük az $m - n + 1 + i$ számot a (v, v_i) élhez minden $i = 1, 2, \ldots, n - 1$-re. Ekkor a végső számozásban $w(v_i) = w'(v_i) + m - n + 1 + i$, így minden $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ súlya különböző. Továbbá $w(v) = (n - 1)(m - n + 1) + \frac{n(n-1)}{2}$, így $w(v)$ nagyobb minden más $w(v_i)$-nél. Ebből következik, hogy G antimagic. ∎

2.2.1. Definíció. *Legyen S pozitív egész számok egy halmaza, $G = (V, E)$ gráf, valamint $H \subseteq E$ a G éleinek részhalmaza. A G gráf S-részleges címkézése egy $\varphi : H \to S$ injektív leképezés.*

Egy S-részleges címkézés kiegészítésén azt értjük, hogy azon élekhez is rendelünk S-beli számot, melyek még nem kaptak címkét.

2.2.2. Lemma. *Legyen $G = (V, E)$ n pontú és m élű gráf. Legyen S a pozitív egész számok egy részhalmaza úgy, hogy $|S| = m + 2$. Legyen φ S-részleges címkézés, melyre igaz, hogy nincs $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ pont, melyeknek azonos a súlya. Ekkor megadható φ S-részleges címkézés olyan kiegészítése, hogy továbbra se legyen $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ azonos súlyú pont.*

2.2.3. Lemma. *Legyen $G = (V, E)$ n pontú gráf, és legyen $\Delta(G) = n - 2$. Ha $|E| = m \geq 2n - 4$, akkor G antimagic.*

Bizonyítás: Feltehetjük, hogy $n \geq 5$, mivel $n \leq 4$-re az egyetlen gráf, mely kielégíti a feltételeket, $K_{2,2}$, ez pedig antimagic. Jelölje v_n azt a pontot, melynek fokszáma $n - 2$.

Legyen v_{n-1} az egyetlen csúcs, amely nem szomszédos v_n-nel. Tekintsük azt a G^* részgráfot, melyet úgy kapunk, hogy G pontjai közül kihúzzuk v_n-et. Ekkor G^*-nak $n-1$ csúcsa van. Jelölje F az éleknek egy olyan halmazát G^*-ban, melyek egy erdőt alkotnak. Töröljük F éleit G^*-ból, majd az így kapott részgráfot jelöljük G'-vel. Világos, hogy $|F| \leq (n-1)-1 = n-2$. Rendeljük hozzá tetszőleges módon F éleihez a lehető legkisebb páros számokat, azaz $2, 4, \ldots, 2|F|$-et. Ezt meg tudjuk tenni, hiszen $2|F| \leq 2n-4 \leq m$. Ezután bontsuk fel G' éleit éldiszjunkt körökre, jelöljék ezeket $C_1, C_2, \ldots, C_p$. Címkézzük C_i éleit sorrendben $i = 1$-től $i = p$-ig. Először használjuk a maradék páros súlyokat, majd ahogy azok elfogytak, váltsunk át a páratlan számok használatára sorrendben a legkisebbel kezdve. Ekkor minden kör minden éle címkézésre került a körön belül azonos paritással, legfeljebb egy kör tartalmaz páros és páratlan élsúlyokat is, a páros és a páratlan súlyú élek is egy-egy utat alkotnak ebben a körben. Az utóbbi esetben pontosan két pont rendelkezik G^*-ban páratlan súllyal, őket tudjuk úgy jelölni, hogy közülük egyik sem v_{n-1}, hiszen C_i-nek legalább három pontja van. Az első esetben minden G^*-beli pont összsúlya páros. Megmaradt még az $n-2$ legnagyobb páratlan címke a v_n-re illeszkedő élekre. A megmaradt címkék a $t, t+2, \ldots, t+2n-6$, ahol $t+2n-6$ vagy m vagy $m-1$, az m paritásától függően. Feltehetjük az áltanosság elvesztése nélkül, hogy G^* címkézése után $w_{G^*}(v_1) \leq w_{G*}(v_2) \leq \ldots \leq w_{G^*}(v_{n-2})$. Ha minden $w_{G^*}(v_i)$ páros, akkor miután megcímkéztük (v_i, v_n)-et $t+2i-2$-vel minden $i = 1, 2, \ldots, n-2$-re, akkor $v_1, v_2, \ldots, v_{n-2}$ összsúlya különböző és páratlan, míg v_{n-1} összsúlya páros. Továbbá v_n összsúlya egyértelműen a legnagyobb az összes pont közül. Ezekből következik, hogy G antimagic.

Most tegyük fel, hogy pontosan kettő, j és k indexű $w_{G^*}(v_j)$ és $w_{G^*}(v_k)$ páratlanok úgy, hogy $1 \leq j < k \leq n-2$. Mivel $n-2 \geq 3$, így a 3 páratlan címke legalább $t, t+2, t+4$. Rendeljünk hozzá közülük kettőt (v_n, v_j)-hez és (v_n, v_k)-hoz, így garantáljuk, hogy v_j és v_k összsúlya páros, de különböző v_{n-1}-től, ami szintén páros és különböző az összes többitől is. A harmadik megmaradt páratlan címkét $t, t+2, t+4$ közül a többi $n-5$ páratlan címkével együtt rendeljük hozzá sorrendben a többi ponthoz $\{v_1, \ldots, v_{n-2}\}$, kivéve $\{v_j, v_k\}$-t. Mivel a teljes súlya ezeknek a pontoknak páratlan és különböző, és v_n súlya az összes pont közül a legnagyobb, G antimagic. ■

2.2.4. Lemma. *Legyen $G = (V, E)$ n pontú gráf, és legyen $\Delta(G) = n-2$. Ha $|E| = m \leq 2n-5$, akkor G antimagic.*

Bizonyítás: Úgyanúgy, mint az előző bizonyítás kezdeti lépésében, ezúttal is feltehetjük, hogy $n \geq 5$, az $n = 4$ esetet könnyen ellenőrizhetjük. Az előző bizonyításhoz hasonlóan jelöljük v_n-nel az $n-2$ fokú pontot és legyen v_{n-1} az az egyetlen pont, amely nem szomszédos v_n-nel. Ha v_{n-1} izolált pont, akkor vegyük azt a részgráfot, melyet v_{n-1} kivételével a többi pont alkot, így az első lemma szerint a részgráfnak van antimagic számozása, v_{n-1} összsúlya pedig 0, így a gráf antimagic. Tegyük fel most, hogy v_{n-1} nem izolált pont. Ahogy az előbb, G^* legyen az összes pont által alkotott részgráf, kivéve v_n-et. Jelölje G^* éleinek számát s. Ekkor $s = m - (n-2) \leq (2n-5) - (n-2) = n-3$. Vegyük észre, hogy $s < \frac{m}{2}$. Ez alapján G^* minden élét címkézhetjük páros súlyokkal. Három esetet különböztethetünk meg.

Első eset: ha $m = 2n-5$, és $s = n-3$ és felhasználjuk az összes páros súlyt G^* címkézése során. Ezután használjuk az $n-2$ páratlan súlyt a v_n-re illeszkedő élekre. Rendeljük úgy az élekhez a számokat, hogy minden $v_1, v_2, \ldots, v_{n-2}$-nek különböző és páratlan legyen a teljes súlya, v_{n-1} súlya páros, v_n-nek pedig a legmagasabb a súlya az összes pont közül. Így G antimagic.

Második eset: legyen most $m = 2n-6$ vagy $m = 2n-7$, ekkor $n-3$ páratlan címkénk van és $m-n+3 = s+1$ páros címkénk. Rendeljük hozzá az első $s-1$ páros számot G^* éleihez egy kivételével, ezt jelölje $e = (x, y)$. Feltehetjük, hogy v_1 nem eleme $\{x, y\}$-nak, mert $n \geq 5$, így $n-2 \geq 3$. Legyen r_1 és r_2 a két legnagyobb páros súly. Válasszuk közülük az egyiket az e él címkézéséhez. Jelölje a_1 a v_1 csúcs jelenlegi teljes súlyát és a_2 a v_{n-1} jelenlegi teljes súlyát. Ha v_{n-1}-re illeszkedik $\{x, y\}$, akkor válasszuk r_1-et az e él súlyának akkor és csak akkor, ha $r_2 + a_1$ nem egyenlő $a_2 + r_1$-gyel. Egyéb esetben válasszuk r_2-t az e él címkézéséhez, így $r_1 + a_1$ nem egyenlő $a_2 + r_2$-vel. Ha v_{n-1}-re nem illeszkedik $\{x, y\}$, akkor és csak akkor válasszuk r_1-et az e él súlyának, ha $r_2 + a_1$ nem egyenlő a_2-vel. Egyéb esetben válasszuk r_2-t az e él címkézésére, így ebben az esetben $r_1 + a_1$ nem egyenlő a_2-vel. Az összes előző esetben megmutattuk, hogy tudunk e-nek olyan súlyt választani, hogy (v_n, v_1) -hez választva egy másik súlyt v_1 teljes súlya páros és különbözik v_{n-1} teljes súlyától, mely szintén páros. A többi $n-3$ él, amelyek illeszkednek v_n-re megkapják a páratlan címkéket így garantáljuk, hogy $v_2, v_3, \ldots, v_{n-2}$ súlyaik páratlanok és különbözők. Végezetül látszik, hogy v_n teljes súlya a legnagyobb minden pont közül, így G antimagic.

Harmadik eset: ha $m \leq 2n-8$, akkor legalább $s+2$ páros súlyunk van. Jelölje S az $s+2$ legnagyobb páros súlyt. Rendeljük hozzá a legnagyobb páros címkét egy v_{n-1}-re illeszkedő élhez. Ez lehet m vagy $m-1$, m paritásától függően. A 2.2.2. lemma alapján ezt a hozzárendelést kiegészíthetjük G^* egy teljes címkézésére, amely csak S elemeit használja úgy, hogy nincs olyan $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 1$ darab pont, melyek teljes súlya pozitív és megegyezik. Tekintsük most a maradék $n-2$ súlyt. Tudjuk, hogy közülük x páros és $n-2-x$ páratlan, és $s + x \leq n-2-x \leq s+x+1$ Ebből adódik, hogy $x \leq \frac{n-3}{2}$ minden esetben. Feltehetjük az általánosság elvesztése nélkül, hogy $w_{G^*}(v_1) \leq w_{G^*}(v_2), \leq, \ldots, \leq w_{G^*}(v_{n-1})$. Jelöljük a maradék x páros címkét $\{r_1, r_2, \ldots, r_x\}$-vel. A páratlan címkék az $1, 3, 5, \ldots, 2n-5-2x$. Rendeljük hozzá a v_i, v_n élhez r_i-t minden $i = 1, 2, \ldots, x$-re. Rendeljük hozzá a v_i, v_n élhez a páratlan $2i - 2x - 1$ címkét, ahol $i = x+1, x+2, \ldots, n-2$. Itt két eset lehetséges. Ha az összes $i = 1, 2, \ldots, x$-re $w_{G^*}(v_i) + r_i \neq w_{G^*}(v_{n-1})$, akkor $v_1, v_2, \ldots, v_x, v_{n-1}$ teljes súlya páros és különböző, ugyanakkor $v_{x+1}, v_{x+2}, \ldots, v_{n-2}$ páratlanok és különbözők. Végül v_n súlya a legnagyobb minden pont közül, így G antimagic.

A másik esetben feltehetjük, hogy néhány i-re $w_{G*}(v_i) + r_i = w_{G*}(v_{n-1})$. Tegyük fel, hogy i minimális ezzel a tulajdonsággal. Tudjuk, hogy $w_{G*}(v_i) > 0$. Valóban, hiszen más esetben $w_{G*}(v_{n-1}) = r_i$, de ez lehetetlen, mert van egy olyan v_{n-1}-re illeszkedő él, melyhez a lehető legnagyobb páros címkét rendeltük hozzá, amely nagyobb r_i-nél. Legyen $Z = \{j\ :\ j \geq i,\quad w_{G*}(v_i) = w_{G*}(v_j)\}$. Fentebb szerepelt, hogy G^*-ban nincsen $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 1$ darab pont, melyeknek azonos pozitív összsúlyuk van. Ez alapján $|Z| \leq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$. Jelölje k a Z halmaz legnagyobb elemét. Vegyük észre, hogy $k + x - i + 1 = |Z| + x \leq n - 2$. Módosítsuk a (v_j, v_n) él címkézését minden $j = i, \ldots, k + (x - i + 1)$-re. Címkézzük (v_{k+j}, v_n)-et az r_{i+j-1} páros számmal minden $j = 1, \ldots, x - i + 1$-re, valamint címkézzük (v_j, v_n)-et a páratlan $2(j - i) + 1$ számmal minden $j = i, \ldots, k$-ra. Vegyük észre, hogy most minden $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{k+1}, \ldots, v_{k+x-i+1}$ pont különböző páros teljes súllyal rendelkezik és ezek v_{n-1}-től is különböznek, mely szintén páros, $w_{G*}(v_{n-1})$. Továbbá minden $v_i, \ldots, v_k$-ra és $v_{k+x-i+2}, \ldots, v_{n-2}$ teljes súlya páratlan és különbözőek. Végül v_n teljes súlya a legnagyobb minden pont közül. Így G antimagic. ■

A 2.2.1., 2.2.3. és 2.2.4. lemmák lefednek minden esetet, így ezekből már automatikusan következik a 2.2.1. tétel.

Ezzel beláttuk, hogy azok az n pontú gráfok, melyeknek a maximális fokú pontjának fokszáma legalább $n - 2$, antimagicek. Kérdés, hogy valamilyen n-től függő k-ra igaz-e, hogy ha egy gráf maximális fokszáma $n - k$, akkor a gráf antimagic. A következő tétel nem az antimagic címkézés létezését mondja ki, hanem egy annál kicsivel gyengébb állítást. Az antimagic tulajdonságot gyengíthetjük, ha az m élre m-nél több szám közül válaszhatunk. A 2.2.2. tétel a [3]-as cikk eredményét mutatja be.

2.2.2. Definíció. *Egy $G = (V, E)$ gráfot k-antimagicnek nevezünk, ha létezik olyan $\varphi : E \to \{1, \ldots, m + k\}$ bijekció, hogy minden $u, v \in V$ esetén*

$$\sum_{e \in \delta(u)} \varphi(e) \neq \sum_{e \in \delta(v)} \varphi(e).$$

Ezzel a jelöléssel az antimagic gráfokat 0-antimagicnek tekinthetjük.

2.2.2. Tétel. *Legyen $G = (V, E)$ n pontú gráf és $\Delta(G) \geq n - k$, ahol $k \geq 3$ függvénye n-nek. Ekkor a következők teljesülnek:*

1. *G $(3k - 7)$-antimagic.*

2. *Ha $n \geq 6k^2$, akkor G $(k - 1)$-antimagic.*

Bizonyítás: Az első állítást bizonyítjuk. Legyen $G = (V, E)$ gráf és $|V| = n$, $|E| = m$, a maximális fokszámú pont foka pedig $n - k$, ahol $k \geq 3$. Legyen $v \in V$ az $n - k$ fokú pont, $v_1, v_2, \ldots, v_{n-k}$ a szomszédjai, valamint $A = \{u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}\}$ a többi pont halmaza, melyek nem szomszédosak v-vel. Osszuk fel G éleit három halmazra, azaz legyen $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$, ahol $E_1 = \{(v, v_i)| \, 1 \leq i \leq n - k\}$, legyen E_2 azon élek halmaza, melyeknek legalább egy végpontja az A halmazban van, és legyen $E_3 = E - E_1 - E_2$, ez lehet akár üres halmaz is. Először címkézzük E_2 éleit a legkisebb számokkal oly módon, hogy az $u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}$-hez tartozó összegek különbözőek legyenek. Amikor az (u_i, u_j) élt címkézzük, akkor $2k-6$ tiltott érték van, az (u_i, v_j) él címkézésénél pedig $k-2$ tiltott címke van u_i-re. A művelet során $|E_2|$ címkét használunk az $\{1, 2, \ldots, |E_2| + 2k - 6\}$ halmazból. Ha $k \geq 4$, akkor $2k - 6 \geq k - 2$ és ha $k = 3$, akkor igazolhatjuk azt, hogy $|E_2|$ címke elégséges az esetek átnézésével. Jegyezzük meg, hogy a pontokon kapott $u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}$ összegek a pontok végleges súlyai, a további címkézés során már nem fognak változni. Jelöljük ezeket a végső összegeket az u_i pont esetén a_i-vel.

Következzen most az E_3-beli élek címkézése, használjuk a lehető legkisebb rendelkezésre álló számokat, majd címkézzük ezekkel E_3 éleit tetszőleges módon. Jelöljük a kapott részösszegeket a v_i pontokon $\omega(v_i)$-vel, feltehetjük, hogy $\omega(v_1) \leq \omega(v_2) \leq \ldots \leq \omega(v_{n-k})$.

Ezután címkézzük az E_1-beli éleket az $n-1$ legnagyobb szám használatával, ezek legyenek $b_1 < b_2 < \ldots < b_{n-1}$. Ez lehetséges (hiszen $m + 3k - 7$ címkénk van még) a következő módon: címkézzük a (v, v_1) élt b_{i_1}-gyel, ahol $1 \leq i_1 \leq n - 1$ a legkisebb olyan egész, melyre $\omega(v_1) + b_{i_1} \neq a_t$ minden $1 \leq t \leq k-1$-re. Tudjuk, hogy i_1 létezik, mivel $n-1$ címkénk van és csak $k - 1$ feltételünk. Ezután tegyük ugyanezt a (v, v_2) éllel és b_{i_2}-vel, ahol $i_1 < i_2 \leq n - 1$ a legkisebb egész úgy, hogy $\omega(v_2) + b_{i_2} \neq a_t$ minden $1 \leq t \leq k - 1$ -ra. Ekkor $n - k - 1$ még nem címkézett él, $n - 1 - i_1$ címke és legfeljebb $k - 1 - (i_1 - 1)$ feltételünk van, mégpedig $\omega(v_1) + b_{i_1} > a_t$ valamennyi $1 \leq t \leq k - 1$-re és $\omega(v_2) + b_{i_2} > a_t$. Folytassuk ezt az összes E_1-beli élre, azaz (v, v_j) él címkézése után van még $n - k - j$ címkézetlen él, valamint $n - 1 - i_j$ címke és legfeljebb $k - 1 + (j - i_j)$ feltétel. Így kapunk egy ω' címkézést, melyre $\omega'(v_1) < \omega'(v_2) < \ldots < \omega'(v_{n-k})$ és $\omega'(v_i) \neq \omega'(u_j)$ minden $1 \leq i \leq n-k$-ra és $1 \leq j \leq k-1$-re. Végül látszik, hogy v a maximális fokszámú pont és a szomszédai kapták a legnagyobb címkéket, így v összsúlya a legnagyobb. Ebből következik, hogy G antimagic.

A második állítás bizonyítása az elsőhöz hasonló módon történhet. ∎

2.3. Teljes páros gráfok

A teljes gráfokhoz hasonlóan a teljes páros gráfokra is bizonyítható az antimagic tulajdonság.

2.3.1. Tétel. *Minden teljes páros gráf antimagic, kivéve K_2-t.*

Bizonyítás: A bizonyítás során a gráf helyett a kényelmesebb, ekvivalens mátrixalakot fogjuk használni. A tetel bizonyításához így a következő állítást kell belátni.

Minden m, n egészre, ahol $m + n > 1$, az $m \times n$-es mátrix feltölthető az $1, 2, \ldots, mn$ különböző pozitív egész számokkal úgy, hogy az $m + n$ sorban és oszlopban lévő számok összege páronként különbözőek.

Bizonyítás: Feltehetjük az általánosság elvesztése nélkül, hogy $m \leq n$. Az $m = 1$ eset triviális, így feltehetjük, hogy $2 \leq m \leq n$. Továbbá feltehetjük, hogy $n \geq 4$, mivel könnyen ellenőrizhetjük, hogy $K_{2,2}, K_{2,3}, K_{3,3}$ antimagicek. Ezután megmutatjuk, hogyan rendeljük hozzá a meglévő, különböző $1, 2, \ldots, mn$ számokat az A-val jelölt $m \times n$ mátrix celláihoz. Rendeljük az $(i - 1)n + 1, \ldots, in$ számokat az i-dik sor celláihoz, $i = 1, 2, \ldots, m$. Ez a hozzárendelés a sorokon belül monoton növekvő, ha i páratlan vagy i az utolsó sor. A többi esetben ez monoton csökkenő. Jelölje $R(i)$ az i-dik sorban lévő számok összegét és $C(j)$ a j-dik oszlopban lévő számok összegét. Világos, hogy $R(i) - R(i - 1) = n^2$ minden $i = 2, 3, \ldots, m$. Így a sorösszegek különbözőek és számtani sorozatot alkotnak n^2 különbséggel. Ha m páratlan, akkor $C(j) - C(j - 1) = 1$ minden $j = 2, 3, \ldots, n$-re és ha m páros, akkor $C(j) - C(j - 1) = 2$. Mindkét esetben igaz, hogy $C(n) - C(1) \leq 2(n - 1)$. Mivel $2(n - 1) < n^2$, így legfeljebb egy oszlopösszeg megegyezik egy sorösszeggel. Legyen ez az egy speciális pár $C(j) = R(i)$. Világos, hogy $i < m$, mert a legutolsó sor tartalmazza az n legnagyobb elemet és $n \geq m$.

Tegyük fel, hogy $i > 1$. Ha i páros, akkor $A(i, 1) - A(i - 1, 1) = 2n - 1$. Ha i páratlan, akkor $A(i, n) - A(i - 1, n) = 2n - 1$. Mindkét esetben kicserélhetjük az értékeket két szomszédos cellában az i-edik és az $i - 1$-dik sorban, melyek különbsége pontosan $2n - 1$. Vegyük észre, hogy az oszlopösszegek nem változnak, valamint a sorösszegek sem, kivéve az i-edik és az $i - 1$-edik sort. Az i-edik sor új összege $R(i) - 2n + 1$ és az $i - 1$-edik sor új összege $R(i - 1) + 2n - 1$. Továbbá

$$R(i) - 2n + 1) - (R(i - 1) + 2n - 1) = n^2 - 4n + 2 > 0, \text{ha } n \geq 4.$$

Így minden sorösszeg különböző maradt, de most $R(i) - 2n + 1$ kisebb $C(1)$-nél, így minden sor- és oszlopösszeg különböző.

Tegyük fel most, hogy $i = 1$. Ha $m \geq 3$, akkor $A(2, 1) - A(1, 1) = 2n - 1$, így mikor kicseréljük őket az előzőek szerint, akkor minden sorösszeg különböző marad, míg az első oszlop új összege $R(1) + 2n - 1$-re változik, amely nagyobb $C(n)$-nél. Végezetül ha $i = 1$ és $m = 2$, akkor egyszerűen rendeljük a páratlan számokat sorrendben az első sor elemeihez és az összes páros számot sorrendben a második sor elemeihez, így a legnagyobb oszlopösszeg $4n - 1$, míg a legkisebb sorösszeg n^2, és $n^2 > 4n - 1$. Így a mátrixot meg tudtuk számozni az elvárt módon, vagyis az ekvivalencia miatt minden teljes páros gráf antimagic. ∎

2.4. Split és felbontható gráfok

Ebben a fejezetben egy algoritmust ismertetünk, mellyel antimagic címkézést hozhatunk létre olyan gráfokra, melyek tartalmaznak bizonyos speciális tulajdonságú klikket. Meghatározzuk, melyek ezek a gráfok, majd adunk egy feltételt a gráf pontjainak fokaira, mely garantálja az antimagic tulajdonságot. A split és felbontható gráfok vizsgálata során a [2]-es cikk eredményeit mutatjuk be.

Legyen $G = (V, E)$ gráf, definiáljuk G pontjaira a szomszédok zárt és nyílt halmazát: minden $v \in V$-re $N_G(v) = \{u \in V : uv \in E\}$ a nyílt, $N_G[v] = N_G(v) \cup (v)$ a zárt halmazt jelöli. Ha $W \subseteq V$ a G pontjainak egy részhalmaza, akkor az általuk feszített részgráfot jelölje $G(W)$. A klikk olyan részhalmaza a gráf pontjainak, amely teljes részgráfot feszít. Egy ponthalmaz független, ha a pontok között nem fut él. Egy gráfot split gráfnak nevezünk, ha a pontjainak halmaza felbontható két részre úgy, hogy az egyik halmaz pontjai klikket, a másik pontjai független halmazt alkotnak.

2.4.1. Tétel. *Legyen $G = (V, E)$ legalább 3 pontú összefüggő gráf. Tegyük fel, hogy G tartalmaz egy olyan B klikket, hogy minden $v \in V$-re vagy $N_G(v) \subseteq B$ vagy $B \subseteq N_G[v]$ teljesül. Ekkor G antimagic.*

Bizonyítás: Algoritmikus úton bizonyítunk, megadunk egy konkrét antimagic címkézést. Jelölje A azon $v \in V$ pontok halmazát, melyek nincsenek B-ben és $N_G(v) \subsetneq B$. Jelölje $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{|A|}\}$ és $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_{|B|}\}$ az A illetve B halmaz elemeit, ahol a pontokat a fokszámuk alapján növekvő (nem csökkenő) sorrendben indexeljük. Az A-beli 1 fokszámú pontok közötti sorrendet úgy határozzuk meg, hogy a B-beli szomszédjaik fokszáma alkosson növekvő (nem csökkenő) sorozatot. Legyen továbbá $C = V(G) - A - B$. Vegyük észre, hogy A független ponthalmaz, mivel $B \subseteq N_G[v]$ nem teljesülhet a pontjaira, hiszen A és B diszjunkt, így $N_G(v) \subseteq B$ miatt A pontjainak szomszédai csak B-ben lehetnek. Továbbá C elemei szomszédosak B összes csúcsával a feltételek miatt.

A címkézéshez jelöljük az A és B közötti éleket a_ib_j-vel és rendezzük őket abc-sorrendbe, majd kezdjük el a számozást a legkisebb számmal, sorrendben haladva. Ezután azokat az éleket számozzuk meg tetszőleges módon a még meglévő legkisebb számokkal, melyek mindkét végpontja C-beli. Definiáljuk a g függvényt a C pontjain úgy, hogy $g(v)$ értéke legyen a súlyok összege v C-beli szomszédjain. Indexeljük C pontjait $C_1, C_2, \ldots, C_{|C|}$-vel úgy, hogy a pontok $g(v)$ szerint növekvő (nem csökkenő) sorozatot alkossanak. Rendezzük ezután a c_ib_j éleket is abc-sorrendbe, majd rendeljük hozzájuk sorrendben a még meglévő legkisebb számokat. A B-beli pontokra definiáljuk a $g'(v)$ függvényt, legyen $g'(v)$ értéke azon éleken lévő számok összege, melyek B-n kívülről futnak be a pontba. Mostanra az összes ilyen él kapott címkét. Jelöljük B pontjait $b'_1, b'_2, \ldots, b'_{|B|}$-vel, és rendezzük sorba őket a $g'(v)$ értékük alapján növekvő (nem csökkenő) sorrendbe. Rendezzük a B-ben futó $b'_i b'_j$ éleket abc-sorrendbe és címkézzük őket a megmaradt számokkal a legkisebbtől kezdve.

Ezután bizonyítjuk, hogy a kapott címkézés antimagic. Minden $v \in V$-re $w(v)$ jelölje a befutó éleken a számok összegét. Vegyük észre, hogy $c \in C$-re és $a_i, a_j \in A$-ra, ahol $i < j$, teljesül, hogy $d_G(a_i) \leq d_G(a_j) < d_G(c)$, ahol a $d(v_i)$ a pont fokszámát jelöli. Ha n_1, n_2, n_3 tetszőleges számok olyan éleken, melyek illeszkednek sorrendben a_i, a_j, c csúcsokra, akkor $n_1 < n_2 < n_3$. Ebből következik, hogy $w(a_i) < w(a_j) < w(c)$, így w injektív A-n, sőt w különböző értéket ad bármely $a \in A$ és $c \in C$ pontokra.

Tekintsünk most egy $c \in C$ pontot, $w(c)$ ekkor $g(c)$ és azon élekre írt számok összegéből áll, melyek a c pont és a B halmaz között futnak. Továbbá $c_i, c_j \in C$ pontokra $i < j$ esetén teljesül, hogy $g(c_i) < g(c_j)$ és minden $b \in B$-re a $c_i b$ élre írt szám szigorúan kisebb mint a $c_j b$ él címkéje, így $f(c_i) < f(c_j)$, vagyis f injektív C-n. Továbbá tetszőleges $u \in A \cup C$ és $b \in B$-re legyen v b-től különböző szomszédja u-nak, ekkor v is szomszédos b-vel és az uv él címkéje kisebb, mint a bv él címkéje, így $f(u) < f(b)$. Ha u-nak nincsen b-től különböző szomszédja, akkor szükségképpen b-nek van u-tól különböző szomszédja (mert G összefüggő és nem K_2), így ebben az esetben is $f(u) < f(b)$.

Végül megmutatjuk, hogy w különböző értéket vesz fel B pontjain. Ez triviálisan teljesül, ha $|B| = 1$. Tekintsük először a $|B| = 2$ esetet. Ekkor $A \cup C$ nem üres, mivel G nem K_2. Ha A nem üres, akkor tartalmaz olyan pontot, amely szomszédos b_1-gyel vagy b_2-vel. Mivel $d_G(b_1) \leq d_G(b_2)$, így az A-ból b_1-be érkező élek hozzájárulása $w(b_1)$-hez szigorúan kisebb, mint az A-ból b_2-be érkező élek hozzájárulása $w(b_2)$-höz a konstrukció miatt. Minden C-beli pont esetén, amely szomszédos b_1-gyel és b_2-vel a b_1-be futó él címkéje kisebb, mint a b_2-be futó él címkéje. Mivel $A \cup C$ nem üres, így ebből következik, hogy $f(b_1) < f(b_2)$. Tegyük most fel, hogy $|B| \geq 3$. Legyen b'_i és b'_j B-beli pontok és $i < j$, definíció szerint $g'(b'_i) \leq g'(b'_j)$. Mivel minden más b'_k B-beli pont szomszédos mind b'_i-vel és b'_j-vel és a $b'_i b'_k$ él kisebb címkét kapott, mint $b'_j b'_k$ él, így világos, hogy $w(b'_i) < w(b'_j)$, vagyis G antimagic. ■

Az előző tétel tehát adott egy feltételt, mely szerint ha a gráf tartalmaz bizonyos tulajdonságú klikket, akkor antimagic. A következő tétel karakterizálja a fenti tulajdonságot.

A tétel kimondása előtt szükséges bevezetni egy kétváltozós, gráfokon értelmezett műveletet, melyet $\circ$ fog jelölni. Az első input egy split gráf, melyen meg van adva a pontok kétrészes partíciója. Az egyik részhalmaz független pontokból áll, jelöljük ezt A-val, a másik ponthalmaz pedig egy klikk, ez legyen B. Jelölje ezt a gráfot $S(A, B)$. A másik input egy tetszőleges H gráf. Ekkor $S(A, B)$ és H kompozíciója, melyet $S(A, B) \circ H$-val jelölünk, legyen a következő: vegyük $S(A, B)$ és H diszjunkt unióját, majd húzzuk be az összes lehetséges élt minden B és H-beli pont között.

Ha G tartalmaz H és S nem üres részgráfokat, ahol S felbontható A-ra és B-re az előbbi módon és $G = S(A, B) \circ H$, akkor G-t kanonikusan felbonthatónak nevezzük. Ha ez nem teljesül, akkor G felbonthatatlan. Tyshkievich [8]-ban megmutatta, hogy minden gráf előáll $S_1(A_1, B_1) \circ \ldots \circ S_k(A_k, B_k) \circ H$ felbonthatatlan gráfok kompozíciójaként (a $\circ$ művelet asszociatív). A felbonthatatlan gráfok pontosan azok, melyekre $k = 0$.

2.4.2. Tétel. *A következők ekvivalensek minden G gráfra:*

1. *G tartalmaz egy olyan B klikket, hogy minden $v \in V$-re $N_G(v) \subseteq B$ vagy $B \subseteq N_G[v]$*
2. *G split vagy kanonikusan felbontható.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy teljesül az első tulajdonság. Legyen A azon pontok halmaza, melyek nincsenek a B klikkben és $N_G(v) \subsetneq B$, továbbá legyen $C = V(G) - A - B$. Ekkor A független ponthalmaz. Ha C üres, akkor G split gráf. Ellenkező esetben pedig G előáll $G'(A, B) \circ C$-ként, ahol $G' = G[A \cup B]$.

Tegyük most fel, hogy a második tulajdonság teljesül. Ha G split, akkor G pontjainak halmaza felbontható egy A független ponthalmazra és egy B klikkre. Ha G kanonikusan felbontható, akkor felírható $G = S(A, B) \circ H$ alakba, ahol S és H a G-nek részgráfjai. Mindkét esetben $N_G(v) \subseteq B$ vagy $B \subseteq N_G[v]$ minden $v \in G$ pontra. ■

2.4.3. Tétel. *Minden legalább 3 pontú összefüggő gráf, amely split vagy kanonikusan felbontható, antimagic.*

Bizonyítás: A tétel 2.4.1.-ből és 2.4.2.-ből automatikusan következik. ■

A legalább 3 pontú kanonikusan felbontható gráfok akkor és csak akkor összefüggők, ha nincsen izolált pontjuk. A split ([10]-es cikk) és a kanonikusan felbontható ([11]-es cikk) gráfok pontjainak fokszámait vizsgálva a következő elégséges feltételt kapjuk az antimagic tulajdonságra.

2.4.4. Tétel. *Legyen $G = (V, E)$ n pontú gráf ($n \geq 3$), a pontok fokszámainak sorozata csökkenő (nem növekvő) sorrendben $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ és $d_n > 0$. Ha létezik p és q egész számok, melyekre $0 < p + q \leq n$ és*

$$\sum_{i=1}^{p} d_i = p(n - q - 1) + \sum_{i=n-q+1}^{n} d_i,$$

akkor G antimagic.

2.5. Reguláris páros gráfok

A következőkben belátjuk, hogy $k \geq 2$ esetén minden k-reguláris páros gráf antimagic. A bizonyítás felhasználja a teljes párosítások elméletét, miszerint minden reguláris páros gráf tartalmaz 1-faktort. Ebből indukcióval következik, hogy minden k-reguláris páros gráf felbontható k darab 1-faktorra. A páros gráf pontosztályait a szokásos módon A-val és B-vel, az egyes pontosztályok eleminek számát pedig n-nel fogjuk jelölni. Az élek egy csoportjának címkézése után az egyes pontokon vett aktuális értéket részösszegnek fogjuk nevezni. A bizonyítás alapötlete az, hogy számozzuk egy kivételével az összes 1-faktort úgy, hogy a kapott részösszegek a pontokon A-ban 3 többszörösei, míg B-ben 3-mal nem osztható számok legyenek. Végül az utolsó 1-faktor segítségével kiküszöböljük, hogy A-n és B-n belüli legyen két olyan pont, melyekre megegyezik a befutó éleken a számok összege. Ezt úgy érjük el, hogy már csak 3 többszöröseiként előálló címkéket használunk, így az előbbi tulajdonságot sem rontjuk el. A tételt külön bizonyítjuk páros és páratlan fokszámú gráfokra, miután megvizsgáltuk a $k = 2$ esetet.

2.5.1. Tétel. *Minden kör antimagic.*

Bizonyítás: Legyen a kör hossza n, majd rendeljük a kör éleihez rendre az $1, 3, \ldots, n, n-1, \ldots, 4, 2$ számokat. Az összegek sorrendben $4, 8, \ldots, 2n-6, 2n-2, 2n-1, 2n-4, \ldots, 10, 6, 3$. Az egymást követő növekvő számok 2 páros számú többszörösei, a csökkenők pedig 2 páratlan számú többszörösei (valamint megjelennek a 3 és a $2n-1$ páratlan számok), így semelyik két pontban nem egyezik meg az összeg, a gráf antimagic. ∎

2.5.2. Tétel. *Legyen G_1 és G_2 reguláris antimagic gráfok. Ekkor G_1 és G_2 diszjunkt uniója is antimagic.*

Bizonyítás: Feltehetjük, hogy G_2 pontjainak fokszáma legalább akkora, mint G_1 pontjainak fokszáma. Legyen $m_1 = |E(G_1)|$. Címkézzük G_1 éleit antimagic módon az m_1 darab legkisebb számot használva, a feltétel alapján ezt megtehetjük. Címkézzük G_2 éleit is antimagic módon úgy, hogy minden élre írt számhoz hozzáadunk m_1 konstanst. Jelölje k a G_2 pontjainak a fokát. Ekkor minden G_2-beli ponton vett összeg km_1-gyel nőtt, így G_2 pontjain továbbra is különböznek az összegek. Így sem G_1, sem G_2 pontjain belül nincs egyezés. Továbbá nem lehet egyezés egy G_1 és egy G_2-beli pont között sem, mivel minden G_1-beli ponton vett összeg km_1-nél szigoruan kisebb, míg ugyanez G_2-beli pontok esetében km_1-nél szigorúan nagyobb. Így az unióként kapott gráf valóban antimagic. ∎

Általánosan is igaz, hogy ha egy reguláris gráfon vett számozás esetén minden címkéhez ugyanazt a konstanst adjuk, akkor változatlanok maradnak azon pontok, melyekre a befutó éleken a számok összege megegyezik. Ebből következik, hogy egy antimagic számozás nem romlik el, ha minden címkéhez ugyanazt a konstanst adjuk.

2.5.3. Tétel. *Minden 2-reguláris páros gráf antimagic.*

Bizonyítás: Minden 2-reguláris páros gráf körök diszjunkt uniójából áll. A 2.5.1. tétel szerint ezek antimagicek, a 2.5.2. tétel szerint pedig a diszjunkt uniójuk is. ■

2.5.1. Reguláris páros gráfok páratlan fokszámmal

Ahogy korábban szerepelt, minden k-reguláris páros gráf felbontható 1-faktorokra. Ha k páratlan és legalább 5, akkor G felbontható egy $(2l+2)$-faktorra és egy 3-faktorra, ahol $l \geq 0$. A cél az lesz, hogy ennek a két gráfnak a speciális címkézését kombinálva kapjunk G-re egy antimagic címkézést. A $k = 3$ eset külön kezelendő, ezt önálló tételként bizonyítjuk.

2.5.4. Tétel. *Minden 3-reguláris páros gráf antimagic.*

Bizonyítás: Mivel G-ben $|E| = 3n$, így minden modulo 3 maradékosztályban ugyanannyi elem van a címkék közül. Kényelmesebb lesz, ha a j-címke jelölést használjuk az első n pozitív számra, ha azok kongruensek j-vel modulo 3. Ekkor $j \in \{0, 1, 2\}$.

Bontsuk fel G-t egy 1-faktorra és egy 2-faktorra, jelöljük ezeket H_1-gyel és H_2-vel. A 0-címkéket H_1 éleire, az 1-címkéket és a 2-címkéket H_2 éleire fogjuk használni oly módon, hogy a részösszeg minden A-beli pontra $3n$ alakú legyen. Ezt úgy érjük el, hogy minden i értékű 1-címkét párba állítunk egy $3n - i$ értékű 2-címkével. Ezen párok összege $3n$ és minden A-beli pont esetén a párok közül vagy egyet sem használunk, vagy mindkettőt. Ezután a H_1-beli élek 0-címkéket kapnak úgy, hogy minden A-beli pontra különbözőek legyenek a pontok súlyai.

Eddig minden A-beli ponthoz a H_2-beli élekre a párok közül választottunk két címkét, de nem döntöttük el, hogy a párokon belül melyik él melyik címkét kapja. Próbáljuk meg ezeket a választásokat úgy megtenni, hogy a B-beli pontokon vett összegek ne legyenek 3 többszörösei. Megmutatjuk, hogy minden H_2-beli komponens esetén ez legfeljebb egyszer nem fog sikerülni.

Jelöljön C egy olyan kört, mely H_2 egy komponensét alkotja. Az A ponthalmaz minden pontjához egy 1-címke és egy 2-címke fut be. Ahogy végigfutunk C élein, egy A-beli pontot érintve egy 1-címkét 2-címkének kell követnie és fordítva, mivel két 1-címke vagy két 2-címke összege nem lenne 3 többszöröse. Ha $|V(C) \cap A|$ páros, akkor tudjuk úgy címkézni a kör éleit, hogy minden B-beli ponton 3-mal nem osztható összeget kapjunk oly módon, hogy a kör élein végigfutva mindig A-beli pontnál változtatjuk az 1- és 2-címkéket. Ha viszont $|V(C) \cap A|$ páratlan, akkor a C körből egy B-beli pont egy 1-címkét és egy 2-címkét fog kapni. Nevezzük ezeket a B-beli pontokat rossznak. Egy H_2-beli körben csak akkor van rossz pont, ha a kör hossza legalább 6, így legfeljebb $\frac{n}{3}$ B-beli pont lehet rossz. Jelölje m a rossz pontok számát.

Hogy elkerüljük az összegek egyezését az A-beli pontok és B-beli rossz pontok között, ezért címkézzünk úgy, hogy a rossz pontokon vett összeg kisebb legyen, mint bármely A-beli ponton vett összeg. Továbbá legyenek az ezen pontokon vett H_2-beli részösszegek egyenlőek. Tekintsük a címkéket 1-től $3m-1$-ig, rendezzük őket j és $3m-j$ párokba. Az összeg így minden pár esetében $3m$, ami legfeljebb n. Jelöljük ki az eredeti párokat A csúcsainál úgy, hogy minden B-beli rossz pont a pár két tagja közül a kisebb értéket kapják és a rossz pontokon a két él címkéjének összege $3m$ legyen az újabb párosítás szerint.

Ezután címkézzük H_1 éleit. Három dolgot kell elérnünk: az összegek egyezésének elkerülését B jó pontjai között, az egyezések elkerülését B rossz pontjai között, valamint A és B rossz pontjai között.

Tekinstük először a harmadik célt. A 0-címkék bármilyen H_1-beli hozzárendelése esetén az összegek A-ban a $\{3n+3, 3n+6, \ldots, 6n-3, 6n\}$ halmaz elemei lesznek. Annak érdekében, hogy a B-beli rossz pontokra vett összegek $3n+3$-nél kisebbek legyenek, használjuk a legkisebb 0-címkéket a rossz pontokra. Mivel legfeljebb $\frac{n}{3}$ rossz pont létezik, így a legnagyobb ehhez használt 0-címke az n lehet. Így minden rossz pontra vett összeg legfeljebb $2n$, vagyis kevesebb $3n$-nél. Továbbá a rossz pontokon vett összegek $3m$ plusz a különböző 0-címkékkel egyenlőek, így ezek is különböznek, vagyis sikerült a második célt is megvalósítani.

Az első cél eléréséhez jelölje $b_1, b_2, b_3, \ldots$ a B-beli jó pontokat oly módon, hogy ezek növekvő (nem csökkenő) sorrendben kövessék egymást a H_2-beli élekre számított részösszeg tekintetében. Rendeljük a hátralévő 0-címkéket a $b_1, b_2, \ldots$ pontokba befutó H_1-beli élekhez növekvő sorrendben. Mivel a 0-címkék mind különbözőek, így a pontokon vett összegek is különbözőek lesznek, vagyis az első célt is sikerült elérni, B jó pontjai között sincsenek olyanok, melyekre az összeg megegyezik, így a gráf antimagic. ∎

A magasabb páratlan fokszámú reguláris gráfokra két részgráf segítségével fogunk antimagic címkézést konstruálni. Az előzőekhez hasonlóan az első címkézés során célunk lesz, hogy az A-beli pontokon a részösszegek megegyezzenek, de ezúttal azt is garantálnunk kell majd, hogy a B-beli összegek ne legyenek az A-beli összegekkel kongruensek modulo 3.

2.5.1. Lemma. *Legyen $G = (A, B, E)$ egy $(2l+2)$-reguláris páros gráf, ahol $|A| = |B| = n$. Ekkor G-nek létezik olyan címkézése, hogy minden A-beli ponton vett összeg t, valamint a B-beli ponton vett összegek nem kongruensek t-vel modulo 3.*

2.5.2. Lemma. *Legyen $G = (A, B, E)$ 3-reguláris páros gráf és $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Ekkor G címkézhető az $\{1, 2, 3, \ldots, 3n\}$ számokkal úgy, hogy minden b_i ponton az összeg $3n+3i$ és minden i-re pontosan egy A-beli élen vett összeg $3n+3i$.*

Bizonyítás: Bontsuk fel G-t három 1-faktorra, jelölje ezeket R, S és T. Rendeljük a $3i-2$ címkét R azon éléhez, mely b_i-re illeszkedik, majd jelölje a_i ezen pontok párját R-ben minden i-re. Rendeljük a $3n+3-3i$ számot azon S-beli élhez, mely a_i-re illeszkedik, majd jelöljük a_i S-beli párját b_i'-vel. Végül T címkézése során írjunk $3i-1$-et a b_i'-re illeszkedő T-beli élre, majd jelöljük az él A-beli végpontját a_i'-vel. Ekkor azonos 1-faktorba tartozó élek azonos *modulo* 3 maradékosztályba tartozó címkét kaptak.

Vizsgájuk meg a pontokhoz tartozó összegeket! Minden B-beli pont esetén az $S \cup T$-hez tartozó részösszeg $3n+2$. Így R címkézésével együtt a b_i ponton kapott teljes összeg $3n+3i$. Hasonlóan adódik, hogy minden A-beli pont esetén az $R \cup S$-beli részösszeg $3n+1$, a végső összeg pedig minden a_i'-re $3n+3i$. ∎

2.5.5. Tétel. *Minden reguláris páros gráf, ahol a pontok fokszáma páratlan, antimagic.*

Bizonyítás: Legyen $G=(A,B,E)$ reguláris páros gráf, ahol a pontok fokszáma k. A $k=3$ esetet már láttuk. Legyen most $k>3$, ekkor k felírható $k=2l+5$ alakban, ahol $l \geq 0$. Ekkor fel tudjuk bontani G-t egy 3 faktorra, jelölje ezt H_3 és egy $(2l+2)$ faktorra, ezt jelölje H_{2l+2}. Címkézzük H_{2l+2}-t a 2.5.1. lemma szerint, ez az 1 és $(2l+2)n$ közötti számokat használja. Adjunk hozzá minden címkéhez $3n$-et, így az 1 és $3n$ közötti címkék megmaradnak H_3 élei számára. Minden ponton vett összeg így $3n(2l+2)$-vel nő, ami 3 többszöröse, így az előző lemmában vizsgált kongruenciakövetelmény igaz marad az új számozásra is.

Jelölje $b_1, b_2, \ldots$ B pontjait, növekvő (nem csökkenő) sorba rendezve őket a H_{2l+2}-beli élekre vett részösszegek szerint. Címkézzük H_3 éleit a 2.5.2. lemma szerint. Mivel minden H_3-beli élekre vett részösszeg a pontokon 3 többszöröse, így H_{2l+2} címkézése megold minden lehetséges egyezést A és B pontjai között. Mivel a b_i pontok a H_{2l+2}-beli részösszeg szerint növekvő sorrendben vannak rendezve, így H_3 címkézése megold minden lehetséges egyezést B pontjai között. Hasonlóan, mivel H_{2l+2}-beli részösszegek A pontjain megegyeznek, így H_3 címkézése megold minden lehetséges egyezést A pontjain belül is. Mivel megkaptuk, hogy minden ponthoz tartozó összeg különböző, minden páratlan fokszámú reguláris páros gráf antimagic. ∎

2.5.2. Reguláris páros gráfok páros fokszámmal

2.5.3. Lemma. *Legyen n pozitív egész szám. Ha n páros, akkor feloszthatjuk az $\{1,2,\ldots,3n\}$ halmaz elemeit olyan számhármasokra, hogy minden hármasban az összeg $6n+3$ vagy $3n$. Ha n páratlan, akkor feloszthatjuk a $\{1,2,\ldots,3n\}$ halmaz elemeit hármasokra úgy, hogy minden hármasban a számok összege $6n$ vagy $3n$. Továbbá minden számhármas pontosan egyet tartalmaz minden modulo 3 maradékosztályból.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy n páros. Osszuk fel a számokat hármasokra úgy, hogy minden hármason belül az összeg $3n$ vagy $6n+3$. Legyenek a hármasok $(3n-3i+3, 3n-3i+2, 6i-2)$

és $(3i, 3i-1, 3n-6i+1)$ minden $1 \leq i \leq \frac{n}{2}$. Az első típusú hármasban lévő számok összege így $6n+3$, a második típusú hármasban lévő számok összege pedig $3n$.

Tegyük most fel, hogy n páratlan. Osszuk fel a számokat hármasokra úgy, hogy minden hármason belül az összeg $3n$ vagy $6n$. Legyenek a hármasok $(3n-3i+3, 3n-3i+2, 6i-5)$ minden $1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$-re és $(3i, 3i-1, 3n-6i+1)$ minden $1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$-re. Az első típusú hármasban lévő számok összege így $6n$, a második típusú hármasban lévő számok összege pedig $3n$. ∎

2.5.6. Tétel. *Minden reguláris páros gráf, ahol a pontok fokszáma páros és legalább 8, antimagic.*

Bizonyítás: Legyen $G = (A, B, E)$ reguláris páros gráf, ahol a pontok fokszáma páros és legalább 8. Bontsuk fel G-t két 3-faktorra és egy $(2l+2)$-faktorra, ahol $l \geq 0$, jelöljük ezeket G_3, H_3, H_{2l+2}-vel. Címkézzük H_{2l+2} éleit a 2.5.1. lemma szerint úgy, hogy a legkisebb $6n$ címke kivételével használjuk az összes rendelkezésre álló számot. Ez megold minden egyezést A-beli és B-beli pontokhoz tartozó összegek között.

Osszuk fel most a $\{3n+1, 3n+2, \ldots, 6n\}$ címkéket hármasokra a 2.5.3. lemma szerint. Címkézzük G_3 éleit úgy, hogy minden A-beli pontba befutó G_3-beli éleken egy hármasban szereplő számok legyenek. Biztosítanunk kell, hogy minden B-beli ponton vett összeg 3 többszöröse legyen. Osszuk fel a 3-faktort három 1-faktorra, majd használjuk a 0-címkéket az első 1-faktoron, az 1-címkéket a második 1-faktoron, a 2-címkéket pedig a harmadik 1-faktoron.

Ezután vizsgáljuk a H_{2l+2} és G_3 uniójához tartozó részösszeget a pontokon, jelölje ezeket b_i a B pontjain növekvő (nem csökkenő) sorrendben. Címkézzük H_3-at a 2.5.2. lemma szerint. Ez megold minden egyezést A-n és B-n belül is, vagyis a címkézés antimagic. ∎

2.5.4. Lemma. *Legyen n pozitív egész szám. Legyen H azon pozitív egész számok halmaza, melyek $4n$-nél kisebbek és nem kongruensek 0-val modulo 4, azaz $H = \{1, 2, 3, 5, 6, \ldots, 4n-2, 4n-1\}$. Ha n páros, akkor feloszthatjuk H elemeit hármasokba úgy, hogy az egyes számhármasokon belül az összeg vagy $4n-2$ vagy $8n+2$. Ha n páratlan, akkor feloszthatjuk H elemeit számhármasokba úgy, hogy minden hármason belül az összeg $4n-2$ vagy $8n-2$. Továbbá minden számhármas pontosan egy elemet tartalmaz minden nemnulla modulo 4 maradékosztályból.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy n páros. Osszuk fel a számokat hármasokra úgy, hogy minden hármason belül az összeg $8n+2$ vagy $4n-2$. Legyenek a hármasok $(4n-8i+1, 4i-2, 4i-1)$ és $(8i-3, 4n-4i+2, 4n-4i+3)$ minden $1 \leq i \leq \frac{n}{2}$ esetén. Az első típusú hármasban lévő számok összege így $8n+2$, a második típusú hármasban lévő számok összege pedig $4n-2$.

Tegyük most fel, hogy n páratlan. Osszuk fel a számokat hármasokra úgy, hogy minden hármason belül az összeg $8n-2$ vagy $4n-2$. Legyenek a hármasok $(8i-7, 4n-4i+2, 4n-4i+3)$ minden $1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ és $(4n-8i+1, 4i-2, 4i-1)$ minden $1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ esetén. Az első típusú hármasban lévő számok összege így $8n-2$, a második típusú hármasban lévő számok összege pedig $4n-2$. ∎

2.5.7. Tétel. *Minden 6-reguláris páros gráf antimagic.*

Bizonyítás: A bizonyítás során feltesszük, hogy n páratlan. Az érvelés hasonlóan működik páros esetben is, így a részletektől itt eltekintünk. Bontsuk fel G-t egy 1-faktorra, egy 2-faktorra és egy 3-faktorra, legyenek ezek H_1, H_2, H_3. Címkézzük H_3-at a $4n$-nél kisebb és néggyel nem osztható számokkal úgy, hogy minden B-beli ponton vett részösszeg H_3 éleire kongruens 2-vel modulo 4 és a részösszeg minden A-beli ponton $4n-2$ vagy $8n-2$. Ennek eléréséhez a H_3 éleire szánt címkéket hármas csoportokra osztjuk a 2.3.6. lemma alapján.

Minden A-beli pontra egy hármas elemeit használjuk. Felbontjuk H_3-at három 1-faktorra, az 1-címkéket (modulo 4) használjuk az első 1-faktorra, a 2-címkéket a másodikra, végül a 3-címkéket használjuk a harmadik 1-faktor éleihez. Ez garantálja, hogy minden B-beli ponton a részösszeg 2 legyen modulo 4.

Ezután címkézzük H_2 éleit a $4n+1$ és $6n$ közötti címkékkel úgy, hogy minden A-beli ponton $10n+1$ legyen a részösszeg és minden B-beli ponton nem kongruens $10n+1$-gyel modulo 4. Ehhez felbontjuk a H_2 címkézéséhez szánt számokat párokra úgy, hogy a párokon belül a számok öszege $10n+1$ legyen. Tekintsük a párokat modulo 4. Kétféle pár lehetséges, az egyiken belül lévő számok 1,2, a másikba tartozó számok 0,3 maradékoszályokba tartoznak modulo 4.

El szeretnénk kerülni, hogy két olyan címkét használjunk egy B-beli pontra, melyek összege 3 modulo 4. A körökön használjunk tetszőleges címkepárokat úgy, hogy legalább egy $(1, 2)$ és egy $(0, 3)$ párt használunk. Minden körön úgy címkézzünk, hogy először használjuk a tetszőleges módon kiválasztott $(1, 2)$ párokat, majd alternáljuk őket $(1, 2), (2, 1), (1, 2), \ldots$ módon. Ezután vegyük a kiválasztott $(0, 3)$ párokat és őket is alternáljuk $(0, 3), (3, 0), (0, 3), \ldots$ módon. Mivel legalább egy $(1, 2)$ és legalább egy $(0, 3)$ párt használunk, ennek során nem ütközünk problémába. Ezzel elkerültük, hogy a B pontjain vett részösszegek 3-mal legyenek kongruensek modulo 4.

Tekinstük most a részösszegeket $H_2 \cup H_3$-ban. A részösszeg minden A-beli pontra $14n-1$ vagy $18n-1$ mivel n páratlan, így a részösszeg minden A-beli ponton 1-gyel kongruens modulo 4. A B pontjain vett részösszegek viszont nem kongruensek 1-gyel modulo 4. A H_1 címkézése során használt számok mind 4 többszörösei, így az előző tulajdonságokat nem rontják el, vagyis nem egyezhet meg semelyik két A és B-beli pontokhoz tartozó összeg sem. Hívjunk egy A-beli pontot kicsinek, ha a hozzá tartozó $H_2 \cup H_3$-beli részösszeg $14n-1$, egyéb esetben hívjuk nagynak. H_1 címkézése után semelyik két nagy és semelyik két kis pont között nem egyezhet az összeg, mert ezen pontok különböző címkét kapnak. Továbbá H_1 címkézése után a kis pontok közötti lehető legnagyobb összeg $14n-1+4n = 18n-1$, míg a lehető legkisebb nagy ponton vett összeg $18n-1+4 = 18n+3$, így nem egyezhet az összeg egyetlen nagy és kicsi pont esetén sem, mert minden nagy ponton vett összeg határozottan nagyobb minden kis ponton vett összegnél.

Már csak azt kell biztosítanunk, hogy B-beli pontokon belül ne egyezzenek az összegek. Jelöljük b_i-vel a B-beli pontokat és rendezzük őket növekvő (nem csökkenő) sorrendbe a $H_2 \cup H_3$-beli részösszegük alapján. Használjuk H_1 címkézése során a $4i$ számot a b_i pontra illeszkedő élhez. Ezzel garantálni tudjuk, hogy minden B-beli ponton vett összeg különböző legyen. Így a kapott címkézés antimagic. ∎

Már csak a $k = 4$ eset maradt, ez bonyolultabb a $k = 6$ esetnél is. A 6-reguláris gráfnál a 2-faktort címkéztük úgy, hogy ne legyen egyezés egy A-beli és egy B-beli pont között, majd az 1- és a 3-faktorral oldottuk meg, hogy ne legyenek egyezések sem A-n, sem B-n belül. A 4-reguláris gráfokhoz tartozó bizonyítás hasonló, de itt a 2-faktor hiányzik, így nem tudjuk garantálni, hogy minden B-beli ponthoz tartozó összeg különbözzön minden A-beli ponthoz tartozó összegtől modulo 4. Így a 3-reguláris gráfokhoz hasonlóan be kell vezetni a rossz és a jó pontokat B-ben. A rossz pontokat a 3-reguláris esethez hasonló módon kell majd megoldanunk.

2.5.8. Tétel. *Minden 4-reguláris páros gráf antimagic.*

Bizonyítás: A bizonyítás során feltesszük, hogy n páratlan. A bizonyítás hasonlóan megy páros n esetén is, így most a részletektől eltekintünk. Felbontjuk G-t egy 1-faktorra és egy 3-faktorra, jelöljük ezeket H_1-gyel és H_3-mal. H_3 címkézése során használjuk majd azon címkéket, melyek $4n$-nél kisebbek és nem 4 többszörösei, így a H_3-beli részösszeg minden A-beli pontra $4n-2$ vagy $8n-2$. Ennek eléréséhez partícionáljuk a 3-faktor címkézéséhez szánt számokat hármasokra a 2.5.4. lemma szerint. Minden A-beli pontba befutó 3 élen egy számhármas elemei lesznek. Tekintsük B pontjait, ha a hozzájuk tartozó részösszeg 2 *modulo* 4, akkor hívjuk a pontot rossznak, egyéb esetben jónak. Rendeljük a számhármasokat elemeit A pontjaihoz úgy, hogy elegendően kevés rossz pont legyen B-ben. Kezdetben csak egy *modulo* 4 maradékosztályt rendelünk az élekhez, azaz egyet, kettőt vagy hármat. Ez már meghatározza, hogy mely B-beli pontok lesznek rosszak. Ezután úgy címkézzük az éleket, hogy a rossz pontokon vett legnagyobb részösszeg elegendően kicsi legyen. Mivel minden B-beli rossz ponton és minden A-beli ponton vett összegek azonos modulo 4 maradékosztályba tartoznak, így az összegek egyezésének elkerülése érdekében garantálnunk kell, hogy minden rossz ponton vett összeg kisebb legyen bármely A-beli ponton vett összegnél.

Bontsuk fel H_3-at 1-faktorokra. Az első 1-faktor éleit az 1 (modulo 4) maradékosztályba tartozó számokkal, a második 1-faktor éleit a 2, a harmadik 1-faktor éleit pedig a 3 (modulo 4) maradékosztályba tartozó számokkal címkézzük. Így viszont minden B-beli pont rossz lesz. A javításhoz tekintsünk egy 2-faktort, melyet 1- és 2-címkékkel számoztunk, majd vizsgáljunk egy kört a 2-faktoron belül. Válasszunk egy A-beli pontot a körben, majd válasszuk ki minden második A-beli pontot a körön. Minden kiválaszotott pontnál cseréljük ki az 1 és 2 címkéket az illeszkedő éleken. Ha a kör hossza 4 többszöröse, akkor minden pont jó lesz rajta, egyéb esetben egyetlen rossz pont marad. A körben így csak akkor maradhat rossz pont, ha a hossza legalább 6, így legfeljebb $\frac{n}{3}$ pont marad rossz. Ezután a következők szerint tovább csökkentjük a rossz pontok számát.

Ha egy pont rossz, tekinstük a rá illeszkedő 3-címkével ellátott élt, és egy 2-címkével ellátott élt, mely szomszédos az előzővel. Nevezzük ezt a két élt rossz útnak. Ezután cseréljük meg a címkéket a két élen, hogy ezzel csökkentsük a rossz pontok számát. Tekintsük a rossz utak által meghatározott részgráfot, minden komponens egy út vagy egy kör. Az utakon cseréljük meg a címkéket minden rossz út esetén, így megjavítottuk a rossz pontokat. A köröket hasonlóan kezelhetjük, itt azonban minden körön marad egy rossz pont. Ezután a lépés után legfeljebb a rossz pontok $\frac{1}{3}$ része marad rossz, így a gráf pontjainak legfeljebb $\frac{1}{9}$ részét alkotják. Azt is ellenőrizni kell, hogy a cserékkel egyetlen jó pontot sem rontottunk el.

Ha egy jó ponton vett részösszeg 3 (modulo 4), akkor nevezzük nehéznek, ha 1 (modulo 4), akkor legyen a pont könnyű. Mielőtt végrehajtjuk a cseréket, a könnyű pontokra illeszkedő hármasok $(1, 1, 3)$, a nehéz pontokra illeszkedő hármasok pedig $(2, 2, 3)$ (modulo 4). Így egyetlen könnyű pontnál sem hajtunk végre cserét. A nehéz pontokon a címkék $(2, 3, 3)$-ra vagy $(3, 3, 3)$-ra változhatnak, mindkét esetben megmarad a jó tulajdonság.

Végül minden legalább két rossz ponttal szomszédos A-beli pontra cseréljük meg a szomszédos éleken a címkéket megjavítva ezen pontokat. Ezután legfeljebb $\frac{n}{9}$ rossz pont lehet és minden A-beli pont legfeljebb egy rossz ponttal szomszédos. Ezután címkézzük az éleken a meglévő számokkal, így a rossz pontokon vett összegek kicsik lesznek. Rendeljük az $\frac{n}{9}$ legkisebb 1-címkét rossz pontokra illeszkedő élekhez, így ezen számok közül a legnagyobb is kisebb lesz $\frac{4n}{9}$-nél. Hasonlóan, használjuk az $\frac{n}{9}$ legkisebb 2-címkét a rossz pontokra illeszkedő élekre, így a legnagyobb ismét kisebb lesz $\frac{4n}{9}$-nél. Mivel minden 2-címkével azonos számhármasban van egy 3-címke is, az $\frac{n}{9}$ legkisebb 3-címke már foglalt. Használjuk a következő $\frac{n}{9}$ legkisebb 3-címkét a rossz pontokkal szomszédos éleken, ezen címkék közül a legnagyobb is kisebb $\frac{8n}{9}$-nél. Végül jelöljük ki az $\frac{n}{9}$ legkisebb 0-címkét a rossz pontokkal szomszédos élekhez. Így egy rossz ponton vett összeg kisebb $3(\frac{4n}{9}) + \frac{8n}{9} < 3n$-nél. Így semelyik rossz ponthoz tartozó összeg nem egyezik semelyik A-beli ponton vett összeggel sem.

Most biztosítsuk azt, hogy semelyik két rossz ponthoz tartozó összeg ne egyezzen meg. Rendezzük a rossz pontokat a hozzájuk tartozó részösszeg alapján növekvő sorrendbe, majd az utolsó 1-faktor éleihez a címkéket növekvő sorrendben rendeljük aszerint, hogy mely rossz pontra illeszkednek. Miután minden rossz pontra illeszkedő élt a fenti módon címkéztük, tegyük ugyanezt a jó élekkel és a maradék címkékkel, azaz rendezzük őket növekvő sorrendbe a hozzájuk tartozó részösszeg alapján. Ez garantálja, hogy semelyik két jóhoz tartozó összeg nem egyezik meg. Nevezzünk egy A-beli pontot kicsinek, ha a hozzá tartozó részösszeg $4n-2$, más esetben legyen nagy. Miután az utolsó 1-faktor éleit is címkéztük, a lehető legnagyobb kis ponthoz tartozó összeg $(4n+2)+4n = 8n-2$, míg a lehető legkisebb nagy ponthoz tartozó összeg $(8n-2)+4 = 8n+2$, így nem lehet egyezhet meg egy nagy és egy kis ponthoz tartozó összeg sem. Minden kis ponthoz tartozó összeg és minden nagy ponthoz tartozó összeg is különbözik az utolsó 1-faktor éleinek címkézése miatt. Így a kapott címkézés antimagic. ■

3. fejezet

A kombinatorikus nullhelytétel alkalmazásai

3.1. Az antimagic tulajdonság gyengítése

Korábban szerepelt a k-antimagic címkézés, ahol az élekre az első m természetes szám helyett az első $m+k$ áll rendelkezésre. Ebben a fejezetben a [3]-as cikk eredményeit fogjuk bemutatni.

Az élek címkézését úgy is elvégezhetjük, ha a pontoknak is van súlyuk és így követeljük meg, hogy ha a befutó éleken lévő számok összegéhez ezt az adott súlyt adjuk, akkor a pontokon különbözőek legyenek a kapott összegek.

3.1.1. Definíció. *Legyen $G = (V, E)$ gráf és ω a pontjain értelmezett $\omega : V \to \mathbf{N}$ súlyfüggvény. G gráfot (ω, k)-antimagicnek nevezzük, ha létezik olyan $\varphi : E \to \{1, \dots, m + k\}$ injektív függvény, hogy minden $u, v \in V$ esetén*

$$\sum_{e\in\delta(u)} \varphi(e) + \omega(u) \neq \sum_{e\in\delta(v)} \varphi(e) + \omega(v).$$

Az eddig vizsgált antimagic tulajdonság itt a $(0, 0)$-antimagicnek felel meg, ahol az első nulla az azonosan nulla súlyfüggvényt jelöli.

3.1.1. Tétel. *Legyen $G = (V, E)$ gráf legfeljebb 1 izolált ponttal és izolált él nélkül. Ekkor minden, a pontokon vett ω súlyfüggvényre G $(\omega, 2|V| - 4)$-antimagic.*

Bizonyítás: Legyen $\{e_1, e_2, , \dots, e_m\}$ tetszőleges indexelése G éleinek. Az i-edik lépésben az e_i élt egy eddig még nem használt számmal címkézzük az $\{1, 2, \dots, m + 2n - 4\}$ halmazból úgy, hogy az él végpontjainak a címkézés utáni súlya különbözzön az összes többi pont jelenlegi súlyától. Ez lehetséges mindkét végpontra, mivel legfeljebb $2n-4$ tiltott érték létezik bármely fázisban, de mindig van legalább $2n - 3$ még nem használt címke. Így mivel legfeljebb egy izolált pont létezik és nincsen izolált él, G számozása antimagic. ■

A gráfok antimagic címkézéséhez felhasználható a kombinatorikus nullhelytétel következő változata, mely elégséges feltételt ad arra, hogy egy f polinom ne tűnjön el egy bizonyos halmaz minden pontjában.

3.1.2. Tétel. *Legyen* $\mathbf{F}$ *tetszőleges test,* $f \in \mathbf{F}[x]$ *polinom. Tegyük fel, hogy* $deg(f) = \sum_{i=1}^{n} t_i$*, ahol* t_i *nemnegatív egészek és a* $\prod_{i=1}^{n} x_i^{t_i}$ *együtthatója* f*-ben nem nulla, azaz* $\prod_{i=1}^{n} x_i^{t_i}$ *egy maximális fokú tagja* f*-nek. Ha* $S_i \subseteq \mathbf{F}$ *és* $|S_i| \geq t_i + 1$ *minden* $1 \leq i \leq n$*-re, akkor létezik olyan* $s \in S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$*, melyre* $f(s) \neq 0$*.*

Az antimagic tulajdonság azon követelményét, hogy bármely két pontban különböző a befutó éleken a számok összege és azon elvárást, hogy bármely két élre írt szám is különböző legyen, fel tudjuk írni polinomként, kifejezések szorzataként olyan módon, hogy a címkézés pontosan akkor antimagic, ha a polinom nem nulla. A kombinatorikus nullhelytétel ezen változata garantálni tudja, hogy tudunk így választani számokat az élekre. Ez a bizonyítási forma nem konstruktív, nem tudunk valójában megadni egy ilyen címkézést, de garantálja, hogy létezik ilyen, azaz a gráf antimagic.

3.1.3. Tétel. *Legyen* $G = (V, E)$*, ahol* $|V| > 2$ *és* G *tartalmaz 1-faktort. Ekkor* G $(|V|-2)$*-antimagic.*

A tétel bizonyításához szükség van a következő lemmára, mely a Dyson-sejtés speciális esete.

3.1.1. Lemma. *Minden* k, n *pozitív egészekre legyenek* $c_{k,n}$ *konstansok* $\Pi_{i=1}^{n} x_i^{k(n-1)}$ *együtthatói*

$$V_n^{2k}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j)^{2k}\text{-ban.}$$

Ekkor $c_{k,n} \neq 0$*.*

A 3.1.3. tétel bizonyítása következik.

Bizonyítás: Legyen G $2n$ pontú gráf és $M = \{(u_i, v_i) : 1 \leq i \leq n\}$ 1-faktor G-ben. A $G - M$-beli $m - n$ él címkézhető úgy, hogy minden i-re és j-re u_i és v_j pontokra különböző legyen a befutó éleken a számok összege az $1, 2, \ldots, m - n + 2$ címkéket használva a 3.1.1. tétel alapján. Minden $v \in G$ pontra jelölje az eddigi címkézés szerinti súlyát $\omega(v)$. Ezután számozzuk M éleit. Jelölje x_i az (u_i, v_i) él címkéjét. Azt szeretnénk elérni, hogy az összes pontban különböző legyen a befutó éleken a számok összege, azaz

$$x_i+\omega(u_i) \neq x_j+\omega(u_j), x_i+\omega(u_i) \neq x_j+\omega(v_j), x_i+\omega(v_i) \neq x_j+\omega(u_j), x_i+\omega(v_i) \neq x_j+\omega(v_j)$$

minden $1 \leq i < j \leq n$.-re. Jegyezzük meg, hogy azt is szeretnénk, hogy $\omega(u_i) \neq \omega(v_i)$, de ez teljesül a $G - M$-be tartozó élek címkézése miatt. Továbbá azt szeretnénk, hogy $x_i \neq x_j$ minden $1 \leq i < j \leq n$, ekkor w-re injektív címkézést kapunk. Ehhez elégséges az, hogy létezik egy $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ úgy, hogy minden $1 \leq i \leq n$-re x_i-t a még nem használt címkék $\{1, \ldots, m + 2n - 2\}$ halmazából választjuk és a vektor elemeiből képzett polinomra $P_M(\overline{x}) = \prod_{i>j}(x_i - x_j)(x_i - x_j + \omega(u_i) - \omega(u_j))(x_i - x_j + \omega(u_i) - \omega(v_j))(x_i - x_j + \omega(v_i) - \omega(u_j))(x_i - x_j + \omega(v_i) - \omega(v_j)) \neq 0$. A kombinatorikus nullhelytétel szerint ehhez azt kell megmutatni, hogy a polinom főegyütthatója, $\prod_{i=1}^{n} x_i^{t_i}$ nem tűnik el, azaz nem 0 P_M-ben, ahol $\sum_{i=1}^{n} t_i = deg(P_M)$ és $t_i < 3n - 2$ minden $1 \leq i \leq n$-re. Ez a feltétel ugyanaz, mint hogy főegyüttható $V_n^5(\overline{x}) = \prod_{i>j}(x_i - x_j)^5$-ben nem tűnik el, ez viszont a 3.1.1. lemma miatt teljesül V_n^6-ra is, azaz a feltétel teljesül. Mivel a polinom nem nulla, a vektor elemei épp egy antimagic címkézést adnak meg az éleken. ■

3.2. Halmaz-antimagic tulajdonság és a kombinatorikus nullhelytétel kapcsolata

A k-halmaz-antimagic címkézés a k-antimagic címkézés általánosítása abban az értelemben, hogy nem csak azt várjuk el, hogy az $1, 2, \ldots, m + k$ számokkal tudjuk címkézni a gráf éleit, hanem azt is, hogy ezt akkor is meg tudjuk tenni, ha minden élre egy tetszőleges, $m+k$ darab különböző egész számot tartalmazó listából válaszhatunk címkét, ahol $k \geq 0$. Itt is elvárás, hogy az élek különböző címkéket kapjanak. Ez a követelmény $k = 0$ esetén erősebb az antimagic tulajdonságnál, hiszen ekkor akárhogy adunk meg élenként m egész számot, léteznie kell a címkézésnek.

3.2.1. Definíció. *Legyen $k \geq 0$ egész szám, $G = (V, E)$ gráf, éleinek halmaza $|E| = e_1, e_2, \ldots, e_m$. Legyenek H_i halmazok, melyek minden i-re $m + n$ egész számot tartalmaznak. Ekkor G k-halmaz antimagic, ha tetszőleges H_i halmazokra létezik $\varphi : E \to \cup H_i$ injektív függvény, melyre $\varphi(e_{i)}) \in H_i$ és minden $u, v \in V$ esetén*

$$\sum_{e \in \delta(u)} \varphi(e) \neq \sum_{e \in \delta(v)} \varphi(e).$$

Korábban szerepelt a sejtés, mely szerint K_2 kivételével minden fa antimagic. Könnyen cáfolható azonban, hogy minden fa 0-halmaz-antimagic lenne, vagyis hogy m tetszőleges számmal megoldható a címkézés. Tekinstük ehhez P_4-et, azaz a 4 pontból álló utat. Legyen $H = \{-1, 0, 1\}$ a felhasználható címkék halmaza. Ekkor a két belső ponton lehetséges összegek -1, 0 és 1, az út végpontjaiba futó éleken szintén ugyanez a három szám állhat, így nem fordulhat elő, hogy a 4 pontban 4 különböző összeg jelenjen meg.

Vizsgáljuk most a fákat az 1-halmaz antimagic tulajdonság szemponjából. Legyen G n pontú fa gráf, $H = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ tetszőleges egész számokból álló $n = m + 1$ elemű halmaz. Egy címkézés pontosan akkor megfelelő, ha bármely két él különböző számot kap, és nincs két olyan pont, melyekre az illeszkedő éleken a számok összege megegyezik. Ezt a két követelményt egy m-változós polinom formájában úgy írhatjuk fel, hogy

$$\prod_{i \neq j}(x_i - x_j)\prod_{u \neq v}(\sum_{x_i \in \delta(v)} x_i - \sum_{x_j \in \delta(u)} x_j) \neq 0.$$

A fenti szorzat pontosan akkor nem nulla, ha egyik tényezője sem nulla. Az első produktum garantálja, hogy a címkézés injektív, a második pedig azt, hogy a pontokon különbözőek a befutó élekre írt számok összege, azaz az $x_1, x_2, \ldots, x_m$ vektor G élein épp egy 1-halmaz-antimagic címkézést ad meg.

A kombinatorikus nullhelytétel szerint minden r változós, $\sum_{i=1}^{r} t_i$ fokú polinomra igaz, hogy ha minden i változójának értékeit legalább $t_i + 1$ elemből válaszhatjuk és a főegyüttható nem tűnik el, akkor a polinom nem azonosan nulla, amiből következne az 1-halmaz-antimagic címkézés létezése fákra.

Számítsuk ki a fenti polinom maximális fokszámát! Az első produktum esetén az $n-1$ él közül választunk ki párokat minden lehetséges módon. Ez $\binom{n-1}{2}$ tényezőt jelent, melyek mind 1 fokszámúak. A második produktumban pontpárok szerepelnek, ezek száma $\binom{n}{2}$ és ezen tényezők is 1 fokszámúak. Az előzőekből kapjuk, hogy a polinom teljes fokszáma

$$\binom{n}{2} + \binom{n-1}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} = (n-1)^2.$$

A legmagasabb fokú tag $\prod_{i=1}^{m} x_i^{n-1}$ alakú, azaz minden élhez tartozó változó fokszáma pontosan $n-1$. Az élekre írható értékeket tartalmazó H halmaz elemszáma pontosan n, így a kombinatorikus nullhelytétel első feltétele teljesül. Azt kellene még belátni, hogy $\prod_{i=1}^{m} x_i^{n-1} \neq 0$.

Ha ezt sikerülne belátni, akkor ezzel a lehető legerősebb halmaz-antimagic tulajdonságot érnénk el a fákra, hiszen korábban láttuk, hogy a 0-halmaz antimagic címkézés nem adható meg minden fára.

3.2.1. Sejtés. *Minden fa 1-halmaz-antimagic.*

Ebből az a speciális eset is következne, amikor a H_i halmazok azonos számokat tartalmaznak, vagyis hogy minden n pontú fa címkézhető antimagic módon tetszőlegesen megadott n szám használatával.

Irodalomjegyzék

[1] Bodendiek, R., and G. Walther. "*On the relations between certain graph labelings.*" Discrete Mathematics 134.1 (1994): 9-16.

[2] Barrus, Michael D. "*Antimagic labeling and canonical decomposition of graphs.*" Information Processing Letters 110.7 (2010): 261-263.

[3] Hefetz, Dan. "*Anti-magic graphs via the Combinatorial NullStellenSatz.*" Journal of Graph Theory 50.4 (2005): 263-272.

[4] N. Alon, G. Kaplan, A. Lev, Y. Roditty, R. Yuster. "*Dense graphs are antimagic*" Journal of Graph Theory 47 (2004): 297-309.

[5] Wallis, W. D., E. T. Baskoro, and M. Miller. "*Edge-magic total labelings.*" Australasian Journal of Combinatorics 22 (2000): 177-190.

[6] Lin, Yuqing, and M. Miller. "*Vertex-magic total labelings of complete graphs.*" Bull. Inst. Combin. Appl 33 (2001): 68-76.

[7] Cranston, Daniel W. "*Regular bipartite graphs are antimagic.*" Journal of Graph Theory 60.3 (2009): 173-182.

[8] R. I. Tyshkevich, "*Canonical decomposition of a graph*", Dokl. Akad. Naluk BSSR 24 (8) (1980): 677-679, 763.

[9] K. Kokhas, D. Rostovskiy. *Magic graphs.*

[10] P.L. Hammer, B. Simeone, " *The splittance of a graph*" , Combinatorica 1 (1981) 275–284.

[11] R. Tyshkevich, "*Decomposition of graphical sequences and unigraphs*", Discrete Math. 220 (1–3) (2000) 201–238.