Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Gere Nikoletta

Optimális portfólió választás bizonytalan paraméterek mellett

Szakdolgozat
Matematika BSc
Alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető:

Prőhle Tamás
tanársegéd

Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

Budapest, 2014

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, **Prőhle Tamás**nak, a témához tartozó szakirodalom kereséséért, tanácsaiért, magyarázataiért vagyis azért a rengeteg segítségért, melyet a konzultációk során kaptam tőle.

Külön köszönet illeti őt azért, mert a választott témám nem tartozik szorosan a szakterületéhez, ennek ellenére vállalta, hogy a témavezetőm lesz. Ezzel együtt vállalta azt a nem kevés rászánt időt és utánajárást, melyet a téma megismerése igényelt.

Emellett hálával tartozom valamennyi volt oktatómnak és gyakorlatvezetőmnek.

Nélkülük ez a szakdolgozat nem jöhetett volna létre.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A valószínűségszámítás egyik alkalmazási területe a közgazdaságtan, azon belül is a különböző pénzügyi folyamatok.

A pénzügyek iránti érdeklődésem már a szakközépiskolában kialakult, ezért is esett a válsztásom erre a témára, azaz az optimális portfólió kialakítására. Gyakran lehet talákozni olyan hirdetésekkel és reklámokkal, melyek különböző befektetési lehetőségeket kínálnak. Szerettem volna kicsit jobban megérteni, hogy mitől függ a különböző befektetések hozama és kockázata.

Számos cikk és tanulmány foglalkozik ezzel a témával a matematika különböző ágait felhasználva. Ilyenek például a lineáris programozási eljárások, a magasabb momentumokkal való jellemzés és a bizonytalan paramétereken alapuló becslések. Az én választásom ez utóbbira esett.

A most következő fejezetekben be fogom mutatni az optimális portfólió meghatározásának alapgondolatait, valamint néhány olyan eljárást, melyeknek segítségével megbecsülhetők a hozamok és a kockázatok. Ezek a különböző becslési eljárások különböző szabályokhoz vezetnek majd, melyeket össze is hasonlítok.

Az optimális portfólió kialakítás a dolgozatomban a különböző becslési eljárásokra épül és ezeken keresztül mutatja be, hogy hogyan változik a várható hozam és a hozzá tartozó kockázat.

1. fejezet

A portfólókialakítás alapfogalmai

1.1. Közgazdasági alapfogalmak

A közgazdaságtanban a különböző fogalmaknak többféle definíciója létezik és használatos a gyakorlatban. Ebben a fejezetben azok a definíciók kerülnek majd bemutatásra, melyek nélkülözhetetlenek az optimális portfólió kialakításának megértéséhez. Ugyanakkor mivel a definícióknak több változata is használatos, itt csak néhányat fogok ismertetni közülük. [1] [2] [3]

Portfólió
A portfólió szűkebb értelemben értékpapír-, míg tágabb értelemben pénzbefektetési kombináicót jelent.
Többféle befektetési eszközből összeállított "csomag".
A piacon elérhető értékpapírokból választunk néhányat és megadjuk, hogy a rendelkezésre álló vagyonunk mekkora részét szeretnénk az adott értékpapírba fektetni. Azt hogy milyen módon osztjuk fel a pénzünket az adott értékpapírok múltbéli viselkedése alapján határozzuk meg. Minnél több adat áll rendelkezésünkre annál eredményesebben lehet meghatározni az arányokat.
A későbbiekben ezt a felosztást nevezzük majd **súlyfüggvény**nek és ezt szeretnénk a lehető legjobban megválasztani. Ezt a legjobb választást nevezzük optimális portfóliónak.

Hatékony portfólió (efficient portfolio)
A portfólióknak olyan csoportja, mely adott szórás mellett az elérhető legnagyobb hozamot eredményezi.

Optimáls portfólió (optimal portfolio)
Meghatározzuk a hatékony portfóliók halmazát és ezek közül minden befektető a saját preferenciáinak megfelelően dönt.
Például lehet a minimális kockázatra törekedni, ugyanakkor vannak olyan befektetők, akik a magasabb várható hozam reményében hajlandóak a minimálisnál nagyobb kockázatvállalásra is. Így az optimális portfólió minden befektetőnek mást és mást jelent.

Kockázatos befektetés
A befektetések várható hozamának pontos értéke nem ismert. Amikor befektetünk egy értékpapírba csak elképzelésünk van róla, hogy mekkora lesz a hozama. Emiatt eltérés mutatkozhat a várható hozam és a tényleges hozam között. Minél nagyobb ez az eltérés (vagy az eltérés valószínűsége), annál kockázatosabb az adott értékpapír.

Határportfólió (frontier portfolio)
A várható hozam különböző szintjeihez tartozó minimális kockázatú portfóliók.

Minimális szórású portfólió (minimal variance portfolio)
Adott várható érték mellett a lehető legkisebb szórással rendelkező portfólió.

Kockázat menetes értékpapír
A közgazdaságtanban az állampapírokat kockázat menetes ($\sigma = 0$) értékpapírnak tekintjük. Persze a valóságban ezeknek is van egy minimális kockázata, de ennek a mértéke elhanyagolható.

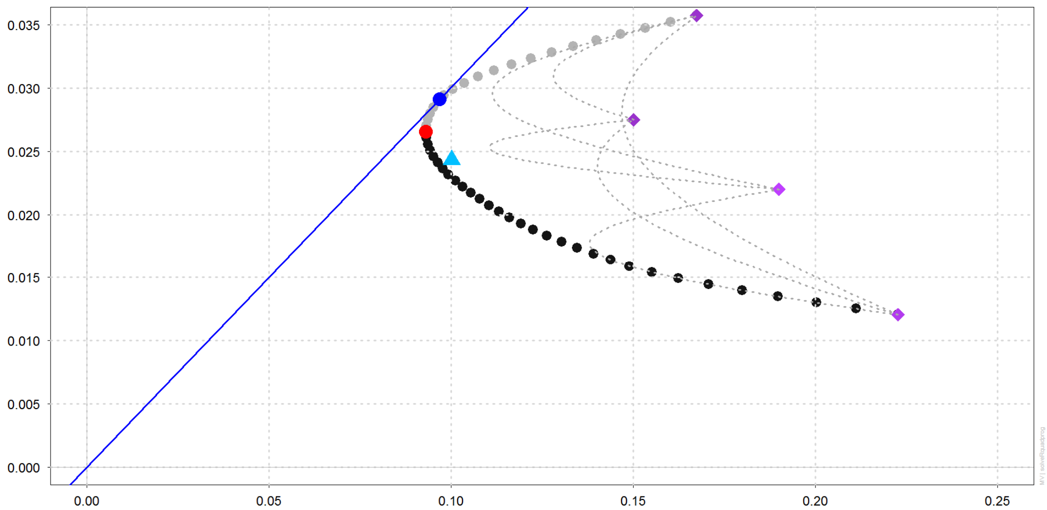
Hatékony-határ vagy Markowitz-féle határ (efficient frontier)
A kizárólag kockázatos értékpapírokat tartalmazó optimális portfóliók várható hozama minden kockázati szintre. A határ alatt található pontok nem hatékonyak, mivel kisebb várható érték tartozik ugyanahhoz a szórás értékhez.

Tőkepiaci egyenes - CML (Capital Market Line)
A kockázatmentes befektetésekből a hatékony portfóliók görbéjéhez húzott értintő. Ezen az egyenesen elhelyezkedő pontoknak a hozama maximális minden kockázati szinten.
Vagyis a hatékony portfóliók halmaza, ha van kockázatmentes értékpapír is.

A tőkepiaci egyenes meredekségét **Sharpe-mutatónak**[1] [4] nevezzük. Ez az egységnyi kockázatra jutó többlethozam értéke.

Érintési portfólió (tangency portfolio)
A kockázatos értékpapírok olyan kombinációja, ahol a CML érinti a hatékony-határt. Azaz a CML görbét az érintési portfólió és a kockázatmentes értékpapír alkotja.

Ahhoz, hogy az imént bemutatott fogalmak szemléletesebbek legyenek bemutatom őket egy példán[5] keresztül.[2]



A lila négyszögek a példához tartozó értékpapírokat ábrázolják.
A képen látható szürke pontok a határportfóliókat ábrázolják, melyek közül világos szürkével jelöltem a hatékony portfóliókat. A CML görbénk az origóból indul, ami azt jelenti, hogy a példa csak kockázatos értékpapírokkal dolgozik. A kék pont az érintési portfólió.
A piros pont a minimális szórású portfólió. A kék háromszög a portfóliónk abban az esetben, ha egyenlő súlyokat választunk.
A szürke vonalak pedig két értékpapír lineáris kombinációit mutatják.

[1] William F. Sharpe (1934 - napjainkig) - a Stanford Egyetem professzora, aki munkásságáért 1990-ben Nobel emlékdíjat kapott.
[2] A példához az R program egyik alap adathalmazát a SMALLCAP.RET -t használtam.

1.2. Matematikai ismeretek

Most, hogy már ismerjük a témához kapcsolódó közgazdasági alapfogalmakat ismerkedjünk meg azokkal az eloszlásokkal, melyekre szükségünk lesz az optimális portfólió kialakítása során.

Wishart eloszlás [6]
A Wishart eloszlás egy már ismert eloszlásnak a χ^2 eloszlásnak az általánosítása vagy más szóval többdimenziós kiterjesztése. Megjegyzem, hogy a Wishart eloszlást lehetne úgy is definiálni, mint a Gamma eloszlás általánosítását.

Definíció:
Legyen X egy $(n \times p)$-es mátrix, melynek minden sora független, p-változós, 0 várható értékű normális eloszlásokból áll. Azaz: $X_j \sim N_p(0, V)$ $(j = 1, 2, ..., n)$. Ekkor Wishart eloszlásnak nevezzük a $p \times p$-es véletlen mátrix: $S = X^T X$ eloszlását. Azaz

$$S \sim W_p(n, V)$$

ahol n szabadságfok, V egy $(p \times p)$-es pozitív definit mátrix. Megjegyzem, hogy ha $n \geq p$, akkor az S mátrix 1-valószínűséggel invertálható, ha V invertálható.
A Wishart eloszlás várható értéke: nV és szórása: $(n-p-1)V$ (ha $n \geq p-1$).
A Wishart eloszlás sűrűségfüggvénye:

$$f(S) = \frac{|S|^{\frac{n-p-1}{2}}}{2^{\frac{np}{2}} |V|^{\frac{n}{2}} \Gamma_p\left(\frac{n}{2}\right)} exp\left[-\frac{1}{2} tr(V^{-1}S)\right]$$

ahol $|S|$ az S mátrix determinánsa és $tr(S)$ az S mátrix nyoma.

Inverz-Wishart eloszlás / Invertált-Wishart eloszlás [6]
A Wishart eloszláshoz hasonlóan, az inverz-Wishart eloszlás is tekinthető, mint általánosítása az inverz-χ^2 eloszlásnak (vagy inverz-Gamma eloszlásnak).
Legyen T inverz-Wishart eloszlású mátrix, azaz $T \sim IW_p(\Psi, m)$. Ekkor T sűrűségfüggvénye:

$$f(T) = \frac{|\Psi|^{\frac{m}{2}}}{2^{\frac{mp}{2}} |T|^{\frac{m+p+1}{2}} \Gamma_p\left(\frac{m}{2}\right)} exp\left[-\frac{1}{2} tr(\Psi T^{-1})\right]$$

ahol $|\Psi|$ az Ψ mátrix determinánsa és $tr(\Psi)$ az Ψ mátrix nyoma.

Kapcsolata a Wishart eloszlással:
Legyen S Wishart eloszlású azaz $S \sim W_p(n, V)$, ekkor $S^{-1} \sim IW_p(n, V^{-1})$ vagyis S^{-1} inverz-Wishart eloszlású.

Elliptikus eloszlás [7]
Legyen ψ_n a $\psi(t) : [0, \infty) \to (R)$ függvényeknek az osztálya. Tekintsünk egy n-dimenziós véletlen vektort $X = (X_1, X_2, ..., X_n)^T$. Ekkor X többváltozós elliptikus eloszlású, azaz $X \sim E_n(\mu, \Sigma, \psi)$, ha karakterisztikus függvénye felírható az alábbi alakban:

$$\varphi_X(t) = e^{(it^T\mu)}\psi\left(\frac{1}{2}t^T\Sigma t\right)$$

2. fejezet

A portfólió kiválasztás alaptételei

2.1. A modern portfólió klasszikus elméletének feltevései

A modell elméleti megalkotásához meg kell adnunk a piacra és a befektetőre vonatkozó alaptulajdonságokat, melyek az egész modell során érvényben vannak. Ezek a valóságnak nem mindig felelnek meg, de szükségesek ahhoz, hogy a modell működjön. [8]

1. Nincsenek adók és tranzakciós költségek: vagyis egyetlen értékpapír eladását és vételét sem terheli semmiféle költség. Ha lennének tranzakciós költségek, akkor a hozamokat ennek függvényében kellene megadni és a portfóliók összeállításakor figyelembe kellene venni, hogy a befektető milyen értékpapírokkal rendelkezik jelenleg. Ezzel együtt egy olyan komplex rendszert kapnánk, amelynél másodlagos szempont lenne a tranzakciós költségek alacsonyan tartása. Ez pedig nagyon összetetté és nehezen átláthatóvá tenné a modellünket.

2. Az értékpapírok korlátlanul oszthatóak: ami azt jelenti, hogy a befektető a súlyfüggvénynek megfelelően tetszőleges összeget fektethet az egyes értékpapírokba. Azaz nem feltétlenül fog egész számú értékpapírt birtokolni.

3. A személyi jövedelemadó hiánya: itt nem is igazán az SZJA hiányát feltételezzük, hanem azt, hogy az adórendszer egykulcsos, lineáris és senkit sem illetnek meg adókedvezmények, így az SZJA mértéke ugyanakkora függetlenül a befektető személytől. Emiatt a modellnek nem kell figyelembe vennie ennek értékét, mert ez azonos minden befektető esetén.

4. Egyetlen személy nem tudja befolyásolni az értékpapírok piaci árát: ez a tulajdonság hasonlít a tökéletes versenyhez, vagyis az értékpapír ára független egyetlen személy döntésétől. Az ár csak az egész piacon jelenlevő befektetők együttes döntésének függvényében változik.

5. A befektető saját maga hozza meg a döntéseket a portfólió hozamának várható értékét és szórását figyelembe véve.

6. A befektető számára nem megengedettek a rövid eladások. [1]

7. A befektető korlátlan mértékben fektetheti pénzét kockázatmentes értékpapírokba.

8. Minden befektető ugyanazokkal az információkkal rendelkezik ugyanabban az időpillanatban.

9. Minden értékpapír forgalmazható a piacon: azaz bármely értékpapír tulajdonosa lehet magánember és ezek az értékpapírok a piacon szabadon eladhatók és megvehetők.

10. Minden befektető racionális és kockázatkerülő. Vagyis a befektetők célja, hogy maximalizálják a várható hozamot és minimalizálják a kockázatot.

11. A korreláció a különböző értékpapírok között konstans és az idő múlásával sem változik.

12. Az értékpapírok hozama normális eloszlású, véletlen valószínűségi változó. A modellek egy része ehelyett általánosabb eloszlásokkal dolgozik, ezek az elliptikus eloszlások. Az elliptikus eloszlások szimmetrikusak, ugyanakkor a valóságban a hozamok eloszlása nem az.

2.2. Markowitz-modell

A modern portfólió klasszikus elméletének első modelljét Harry Markowitz[2] [9] dolgozta ki. Az ő modellje az előző részben felsorolt feltételeken alapszik. A modell két tulajdonság alapján rangsorolja a portfóliókat, ezek a

[1]short sales vagy shortolás: az eladó véleménye szerint az adott értékpapírt a piac túlértékeli, a jövőben árfolyamcsökkenésre lehet számítani. Ígéretet tesz, hogy a mostani áron, egy későbbi időpontban eladja az értékpapírt. Kezdetben az eladó még nem birtokolja azt, csak akkor fogja megvenni, mikor majd teljesítenie kell.

[2]Harry Markowitz (1927 - napjainkig) - A modern portfólió klasszikus elméletének kidolgozója (1952). Munkásságáért Nobel emlékdíjat kapott 1990-ben.

várható hozam és a variancia.
A Markowitz-féle portfólió elemzés két szakaszból áll:

- Megfigyeljük a piacon jelenlevő értékpapírokat és adatokat gyűjtünk róluk. Ezek segítségével megjósoljuk az értékpapírok jövőbeni teljesítményét. Minnél több adatunk van, a becslésünk annál pontosabb lesz.
- A becslések alapján meghatározzuk a számunkra optimális portfólió összetételét.

Jelölések:

- N: a piacon elérhető kockázatos értékpapírok száma
- r_{it}: az i. értékpapír várható hozama a t. időpontban
- d_{it}: a jelentértékszámítás diszkontrátája az i. értékpapír t. pillanatában
- a_i: az az összeg, melyet az i. értékpapírba fektettünk

A folyamat során nem engedjük meg a rövid eladásokat, így

$$\sum_{i=1}^{N} a_i = 1 \qquad a_i \geq 0 \quad \forall i$$

A portfólió egységnyi befektetésre jutó diszkontált előre látható hozamát az alábbi módon definiáljuk:

$$R = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{N} d_{it} r_{it} a = \sum_{i=1}^{N} a_i \left(\sum_{t=1}^{\infty} d_{it} r_{it} \right) = \sum_{i=1}^{N} a_i R_i$$

2.3. Az E-V szabály

[9] Az ebben a részben bemutatott portfólióalkotási szabály a **várható hozam-hozamok varianciája** vagyis az **E-V szabály**. Első lépésben a befektetőnek el kell döntenie, hogy mekkora haszonért mekkora kockázatot hajlandó vállalni. Ha úgy dönt, hogy csökkenti a kockázatát (vagyis a szórást), akkor ennek következtében csökkeni fog a várható hozam is.
Tegyük fel, hogy $R_1, R_2, ..., R_N$ véletlen valószínűségi változók. Ekkor ha

$$R = \sum_{i=1}^{N} a_i R_i$$

az R_i-k lineáris kombinációja, akkor R véletlen valószínűségi változó. A lényeg számunkra, hogy R várható értéke és szórása hogyan függ R_i eloszlásától, melyet az első két momentum segítségével jellemezhetünk. Ezek a következők:

$$\mu = E(R) = \sum_{i=1}^{N} a_i E(R_i)$$

$$\begin{aligned} V = Var(R) &= \sum_{i=1}^{N} a_i^2 Var(R_i) + 2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j>1}^{N} a_i a_j Cov(R_i, R_j) = \\ &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_i a_j Cov(R_i, R_j) \end{aligned}$$

A modern portfólió elmélet alapelvei szerint a racionális befektető minimalizálni szeretné a kockázatát (szórást) és maximalizálni a várható hozamot. Ezt a két elvárást egyszerre nem tudjuk megvalósítani, így arra törekszünk, hogy minél nagyobb legyen a várható hozam lehetőleg minél kisebb szórás mellett. Ezért van az, hogy a befektető diverzifikál, vagyis egyszerre több különböző értékpapír között osztja meg a vagyonát. Ez az előbb definiált értékek segítségével az alábbi módon adható meg:

$$\max \sum_{i=1}^{N} a_i E(R_i) - \gamma \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_i a_j Cov(R_i, R_j)$$

$$\sum_{i=1}^{N} X_i = 1 \qquad X_i \geq 0 \quad \forall i$$

ahol $\gamma > 0$ a kockázatkerülési együttható.
Ha γ értéke nagy, akkor csökkentjük a kockázatot és ezáltal csökken az elérhető várható hozam nagysága is. Ha pedig γ értéke kicsi, akkor nagyobb kockázatot vállalunk a nagyobb várható hozam elérése érdekében.

Az előző fejezetben láttuk, hogy az optimális portfólió minden befektetőnek mást és mást jelent. Az egyéni preferenciájuk alapján választanak a hatékony portfóliók közül. Ugyanakkor közös bennük, hogy a tőkepiaci egyenesről választanak portfóliót maguknak, mivel adott kockázati szinten ezek a kombinációk rendelkeznek maximális várható hozammal.

Tétel (Szepariációs tulajdonság)[3] [10]
Az optimális portfólió minden esetben az érintési portfóliók és a kockázatmentes értékpapír valamilyen kombinációjaként áll elő.

2.4. A különböző szabályok összehasonlítása

[11] Az optimális súlyra kapott becslés felírható a minta valamilyen függvényeként: $w_M = f(R_1, R_2, ..., R_T)$, ahol $R_1, R_2, ..., R_T$ a kockázatmentes értékpapírhoz viszonyított hozamtöbbletet jelöli. Így a portfólió várható hozamának értéke: $\mu_M = w_M^T \mu$, míg a varianciája: $V_M = w_M^T V w_M$.
Ezekkel a minta alapján készült becslésekkel már megadható a **hasznosságfüggvény**:

$$U(w_M) = \mu_M - \frac{\gamma}{2} V_M = w_M^T \mu - \frac{\gamma}{2} w_M^T V w_M$$

ami véletlen változó, mivel w_M is véletlen változó.

Az optimális súly, amelyre ez a hasznosságfüggvény minimális, az alábbi módon adható meg:

$$w_* = \frac{1}{\gamma} V^{-1} \mu$$

A **veszteségfüggvény**t definiálhatjuk az alábbi módon:

$$L(w_*, w_M) = U(w_*) - U(w_M)$$

Mivel w_M csak becslése az optimális súlynak és általában nem egyenlő vele, ezért a veszteségfüggvényünk szigorúan pozitív. Emellett a becslés értéke függ az előzetesen megfigyelt minta értékeitől $(R_1, R_2, ..., R_T)$, vagyis a portfólió hozama függ az előző időszakokban megfigyelt hozamok nagyságától.
Így már definiálható az a függvény, mely lehetővé teszi a különböző porfólió készítési szabályok összehasonlítását. Ez a függvény a **várhatóveszteség-** vagy másnéven **rizikófüggvény**:

$$\rho(w_*, w_M) = E\left[L(w_*, w_M)\right] = U(w_*) - E\left[U(w_M)\right]$$

Egy szabály annál jobb, minél közelebb van a becsült értéke az igazi értékekhez. Vagyis a befektető számára ez azt jelenti, hogy azt a szabályt fogja használni, amelyiknek a rizikófüggvénye a legkisebb.

[3] James Tobin (1918 - 2002) - Nobel díjas közgazdász (1981). Az ő nevéhez fűződik a Szeparációs tulajdonság tétele (1958).

2.5. Becslési kockázatok

[11] A modern portfólió klasszikus elméletének megfelelően azzal a feltételezéssel élünk, hogy $R_t \sim N(\mu, \Sigma)$ i.i.d. $(t = 1, 2, ..., T)$.
A minta alapján a várható hozam és a varinancia maximum-likelihood becslései az alábbi módon írhatók fel:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} R_t$$

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} (R_t - \hat{\mu})(R_t - \hat{\mu})^T$$

Ezek elégséges statisztikái a mintának. Ez pedig azt jelenti, hogy a portfólióalkotási szabályokat elegendő $\hat{\mu}$ és $\hat{\Sigma}$ a függvényében megadni.
A továbbiakban feltesszük, hogy $N > T$, ekkor ugyanis $\hat{\Sigma}$ invertálható 1-valószínűséggel! Így ha $\hat{\mu}$-t és $\hat{\Sigma}$-t behelyettesítjük az U-t optimalizáló w_* képletbe kapjuk, hogy:

$$\hat{w} = \frac{1}{\gamma} \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\mu}$$

Mivel $\hat{\mu}$ és $\hat{\Sigma}$ maximum-likelihood becslései az eredeti paramétereknek, így $\hat{w}$ is maximum-likelihood becslése az eredeti w_* súlynak.
Ahhoz, hogy megértsük a becslésben rejlő kockázatokat hasonlítsuk össze a most kapott $\hat{w}$ súlyt a valóságban nem ismert, ténylegesen optimális w_* súllyal. Mivel a feladatunkat a modern portfólió klasszikus elméletének keretei között vizsgáljuk, ezért azzal a feltétellel élünk, hogy az értékpapírok hozama normális eloszlású. Így tudjuk, hogy $\hat{\mu}$ és $\hat{\Sigma}$ függetlenek egymástól és az eloszlásuk:

$$\hat{\mu} \sim N\left(\mu, \frac{\Sigma}{T}\right)$$

$$\hat{\Sigma} \sim \frac{W_N(T-1, \Sigma)}{T}$$

Tudhatjuk, hogy $E[\hat{\Sigma}^{-1}] = \frac{T\Sigma^{-1}}{T-N-2}$[4], így azt kapjuk, hogy ha $T > N + 2$, akkor:

$$E[\hat{w}] = \frac{T}{T-N-2} w_*$$

Ebből a várható értékből látszik, hogy $|\hat{w}_i| > |w_{*,i}|$, vagyis ha a befektető nem ismeri az optimális súlyokat és a most bemutatott maximum-likelihood

[4] Ennek bizonyítása megtalálható Robb J.Muirhead (1946 - napjainkig) ausztrál matematikus cikkében (1982)

becslést használja, akkor nagyobb részt fog fektetni az egyes kockázatos értékpapírokba, mint ha azt az eredeti optimális súly ismeretében tenné.

A becslési kockázat bemutatását három részre osztom. Először megvizsgáljuk azt az esetet, amikor a Σ kovariancia mátrixot ismertnek tekintjük és a $\hat{w}$ értéke csak μ becsült értékétől függ. Ezután tekintjük a fordított esetet, amikor μ az ismert és Σ a becsült paraméter. Végül pedig azt, a valóságban tipikusan fennálló esetet vizsgáljuk, amikor μ és Σ egyaránt becsült paraméterek.

Kezdjük az első esettel: Σ ismert és μ becsült paraméter. Ekkor a $\hat{w} = \frac{1}{\gamma}\Sigma^{-1}\hat{\mu}$ becslési hibája kizárólag μ becsléséből adódik. Ekkor

$$\hat{\mu}^T\Sigma^{-1}\hat{\mu} \sim \frac{\chi^2_N(T\mu^T\Sigma^{-1}\mu)}{T}$$

így a következő igaz:

$$E\left[U(\hat{w})|\Sigma\right] = E\left[\hat{w}\right]^T\mu - \frac{\gamma}{2}E\left[\hat{w}^T\Sigma\hat{w}\right] = \frac{1}{\gamma}\mu^T\Sigma^{-1}\mu - \frac{1}{2\gamma}E\left[\hat{\mu}^T\Sigma^{-1}\hat{\mu}\right] =$$

$$= \frac{1}{\gamma}\mu^T\Sigma^{-1}\mu - \frac{1}{2\gamma}\left(\frac{N + T\mu^T\Sigma^{-1}\mu}{T}\right) = \frac{\theta^2}{2\gamma} - \frac{N}{2\gamma T}$$

Így feltéve, hogy ismerjük Σ pontos értékét az átlagos veszteség, azaz a rizikófüggvény értéke a következő:

$$\rho(w_*, \hat{w}|\Sigma) \equiv U(w_*) - E\left[U\left(\hat{w}\right)|\Sigma\right] = \frac{N}{2\gamma T}$$

Ebből látszik, hogyha nő a minta nagysága (T) akkor μ értéke pontosabban megbcsülhető. Ez nyilvánvaló, hiszen minél több adat áll a rendelkezésünkre a becslésünk annál pontosabb lesz. Elméletben, ha $T \to \infty$ akkor Σ már "nem lesz paraméter", mert értéke "pontosan" ismert.
Másrészről, ha nő a piacon elérhető értékpapírok száma (N), akkor nő a μ vektor dimenziószáma, vagyis egyre több értéket kell megbecsülnünk, így nyilván a becslési hiba is egyre nagyobb lesz az érintési portfólió megállapítása során.
Valamint a befektetőnek minél inkább kockázatkerülő a magatartása, annál kisebb részt fog a kockázatos értékpapírba fektetni.

A második eset: μ értéke ismert és Σ a becsült paraméter. Ekkor a $\hat{w} = \frac{1}{\gamma}\hat{\Sigma}^{-1}\mu$ becslési hibája kizárólag Σ becsléséből adódik. Legyen

$$W = \Sigma^{-\frac{1}{2}}\hat{\Sigma}\Sigma^{-\frac{1}{2}} \sim \frac{W_N(T-1, I_N)}{T}$$

Kihasználva a Wishart eloszlás inverz tulajdonságát, kapjuk hogy $T > N+4$ esetén:

$$\begin{aligned}
E\left[U(\hat{w})|\mu\right] &= \frac{1}{\gamma}E\left[\mu^T\hat{\Sigma}^{-1}\mu\right] - \frac{1}{2\gamma}E\left[\mu^T\hat{\Sigma}^{-1}\Sigma\hat{\Sigma}^{-1}\mu\right] = \\
&= \frac{1}{\gamma}E\left[\mu^T\Sigma^{-\frac{1}{2}}W^{-1}\Sigma^{-\frac{1}{2}}\mu\right] - \frac{1}{2\gamma}E\left[\mu^T\Sigma^{-\frac{1}{2}}W^{-2}\Sigma^{-\frac{1}{2}}\mu\right] = \\
&= \kappa_1\frac{\theta^2}{2\gamma}
\end{aligned}$$

ahol

$$\kappa_1 = \left(\frac{T}{T-N-2}\right)\left(2 - \frac{T(T-2)}{(T-N-1)(T-N-4)}\right)$$

Ebben az esetben $1-\kappa_1$ a várható mintából vett hatékonyság veszteségének százalékos aránya, melynek értéke $\hat{\Sigma}$ becslési hibájából adódik és $\kappa_1 < 1$. Ekkor igazak az előző esetben megállapítottak, vagyis $\hat{\Sigma}$ becslési hibája csökken, ha nő a megfigyelt periódusok száma (T) és a becsléis hiba nő, ha nő a piacon elérhető értékpapírok száma (N).
Ha N értéke relatíve nagy T értékéhez képest, akkor a befektető nem fog akkora részt fektetni kockázatos értékpapírokba, mert κ_1 értéke negatív lesz.

A harmadik eset: μ és Σ egyaránt becsült paraméterek. Ekkor a $\hat{w} = \frac{1}{\gamma}\hat{\Sigma}^{-1}\hat{\mu}$ becslési hibája mindkét paraméter becsléséből adódik. Itt is felhasználva a Wishart eloszlás inverz tulajdonságát és azt a tényt, hogy $\hat{\mu}$ és $\hat{\Sigma}$ függetlenek:

$$\begin{aligned}
E\left[U(\hat{w})\right] &= \frac{1}{\gamma}E\left[\hat{\mu}^T\hat{\Sigma}^{-1}\mu\right] - \frac{1}{2\gamma}E\left[\hat{\mu}^T\hat{\Sigma}^{-1}\Sigma\hat{\Sigma}^{-1}\hat{\mu}\right] = \\
&= \frac{1}{\gamma}E\left[\hat{\mu}^T\Sigma^{-\frac{1}{2}}W^{-1}\Sigma^{-\frac{1}{2}}\mu\right] - \frac{1}{2\gamma}E\left[\hat{\mu}^T\Sigma^{-\frac{1}{2}}W^{-2}\Sigma^{-\frac{1}{2}}\hat{\mu}\right] = \\
&= \kappa_1\frac{\theta^2}{2\gamma} - \frac{NT(T-2)}{2\gamma(T-N-1)(T-N-2)(T-N-4)}
\end{aligned}$$

Ezek alapján a rizikófüggvény $T > N+4$ esetén:

$$\rho(w_*, \hat{w}) = (1-\kappa_1)\frac{\theta^2}{2\gamma} + \frac{NT(T-2)}{2\gamma(T-N-1)(T-N-2)(T-N-4)}$$

Ebből a formulából leolvasható, hogy az előzőekhez hasonlóan, ha nő N vagy θ^2 értéke akkor a veszteség nő, ha pedig nő T vagy γ értéke, akkor a veszteség csökken. Megfigyelhetjük, hogy $\rho(w_*, \hat{w})$ második tagja mindig nagyobb, mint $\rho(w_*, \hat{w}|\Sigma)$, így a becslési hiba nem additív, vagyis

$$\rho(w_*, \hat{w}) \neq \rho(w_*, \hat{w}|\Sigma) + \rho(w_*, \hat{w}|\mu)$$

Számos korábbi tanulmány és cikk fordított nagy hangsúlyt arra, hogy megbecsülje μ értékét, mert úgy vélték, hogy a Σ becslésében rejlő hiba ehhez képest elhanyagolható mértékű. Így Σ értékét ismertnek tekintették. Mára persze már tudjuk, hogy ez a feltevés nem igaz, így a továbbiakban Σ értékére próbálunk minél jobb becslést adni.

3. fejezet

Becslési módszerek

3.1. Plug-in módszerek

Az előző fejezetben ismertetett Markowitz-modell az alapja a továbbiakban tárgyalt portfóliókészítési szabályoknak. Mivel a modell olyan értékeket használ, melyek nem ismertek (várható hozam és variancia) ezért a legfontosabb dolgunk a különböző szabályok megalkotása során, hogy ezeket a paramétereket a lehető legpontosabbban megbecsüljük. Így a különböző becslések alapján különböző szabályok fognak kialakulni. Most ebből mutatok be néhányat. [11]

3.1.1. A klasszikus beillesztési szabály

A befektető ebben az esetben a piacon elérhető összesen N darab kockázatos és egy kockázatmentes értékpapír közül válogathat a portfóliója kialakítása során. Ezek között a lehetséges portfóliók között keressük az optimálisat. Az alábbi jelöléseket használom majd a továbbiakban, melyek mind a t-edik időpontra vonatkoznak:

- r_{ft}: a kockázatmenetes értékpapír hozama
- r_t: a kockázatos értékpapírok hozam (egy N dimenziós vektor)
- R_t: többlethozam, melyről tudjuk, hogy i.i.d. és a modern portfólió klasszikus elméletének megfelelően $R_t \sim N(\mu, \Sigma)$

$$R_t \equiv r_t - r_{ft} 1_N$$

- w: egy a kockázatos értékpapírokon értelemzett $N \times 1$-es súlyvektor

- γ: kockázatkerülési együttható

Ekkor az egész portfólióra vonatkozóan a többlethozam: $R = w^T R_t$, a várható hozam: $\mu = w^T \mu_t$ és a variancia: $V = w^T \Sigma w$.
A befektető szeretné maximalizálni a hozamát mégpedig úgy, hogy a variancia se legyen túl magas, vagyis az előző fejezet végén megadott maximalizálási feladat megfelelője erre az esetre:

$$U(w) = \mu - \frac{\gamma}{2} V$$

Ez a hasznosságfüggvény. Ennek az értékét szeretnénk optimalizálni w függvényében.
Amennyiben a várható hozam és a szórás ismertek, úgy megadható az optimális portfólió súlya:

$$w_* = \frac{1}{\gamma} \Sigma^{-1} \mu$$

és az ezzel a súllyal elért haszon maximális lesz:

$$U(w_*) = \frac{1}{2\gamma} \mu^T \Sigma^{-1} \mu = \frac{\theta^2}{2\gamma}$$

ahol a $\theta^2 = \mu^T \Sigma^{-1} \mu$ a négyzetes Sharpe-mutató értéke a kockázatos értékpapírok érintési portfóliójának.
Elméletben már meg is határoztuk az optimális portfóliónkban a súlyát a kockázatos értékapíroknak, de a gyakorlatban ez nem megvalósítható mivel sem μ sem pedig Σ értéke nem ismert. Ahogy a Markowitz-modell esetén láthattuk a gyakorlatban az optimális portfólió meghatározása egy kétlépcsős döntési folyamat végeredménye. Először megfigyeléseket végzünk a piacon T perióduson keresztül. Jelölje ezeket a megfigyeléseket: $R_1, R_2, ..., R_T$. Ez alapján a T elemű minta alapján szeretnénk meghatározni a portfóliónkat a $T+1$-edik periódusra, azaz meg kell becsülnünk valamilyen módon a várható hozam és a variancia értékét a már ismert értékek alapján. Második lépésként pedig a minta alapján megbecsült értékeket behelyettesítjük a paraméterek helyére. Ezért nevezik az így kapott eljárásokat **plug-in** vagy **beillesztési szabályoknak.**

3.1.2. A két klasszikus plug-in szabály

Az előző részben a paraméterek becslésére a maximum-likelihood módszert alkalmaztuk és ezeket az értékeket helyettesítettük be a súlyfüggvénybe. Persze a paramétereink nem pusztán ezzel az egy statisztikai módszerrel becsülhetők meg. Ebben a részben ismertetek kettőt ezek közül. A most következő szabályok azért is lényegesek, mert nagyobb hasznot fognak eredményezni, mint a $\hat{w}$-pal meghatározott optimális portfólió.

Először is tekintsük azt a becslést, mely csak kicsit tér el az előző maximum-likelihood becsléstől. Ez a becslés *torzítatlan becslés*t ad Σ értékére.

$$\bar{\Sigma} = \frac{T}{T-1}\hat{\Sigma}$$

Valóban ez csak egy konstans szorzóban tér el a maximum-likelihood becsléstől. Mivel $\frac{T}{T-1} > 1$ ezért $\bar{\Sigma} > \hat{\Sigma}$. Ebben az esetben az optimális portfólió kisebb részt fog a kockázatos értékpapírokba fektetni, mint ahogyan azt a $\hat{w}$ súlynál láttuk. Ez a súly pontosan:

$$\bar{w} = \frac{T-1}{T}\hat{w}$$

Ekkor

$$E\left[\bar{w}\right] = \frac{T-1}{T-N-2}w_*$$

egy olyan portfólió szabályt eredményez, mely relatíve nagyobb tőkerészt fog a kockázatos értékpapírokba fektetni, mint a valós optimális portfólió. Feltéve, hogy $T > N+4$

$$E[U\left(\bar{w}\right)] = \kappa_2\frac{\theta^2}{2\gamma} - \frac{N\left(T-1\right)^2\left(T-2\right)}{2\gamma T\left(T-N-1\right)\left(T-N-2\right)\left(T-N-4\right)}$$

ahol

$$\kappa_2 = \frac{T-1}{T-N-2}\left[2 - \frac{\left(T-1\right)\left(T-2\right)}{\left(T-N-1\right)\left(T-N-4\right)}\right]$$

Ebből a kifejezésből adódik, hogy $E[U\left(\bar{w}\right)] > E[U\left(\hat{w}\right)]$ vagyis a $\hat{w}$-nál jobb választást eredményez a $\bar{w}$ súly.

Másodszor Σ-t a következő módon becsüljük:

$$\tilde{\Sigma} = \frac{T}{T-N-2}\hat{\Sigma}$$

Ezesetben az optimális súly:

$$\tilde{w} = \frac{T-N-2}{T}\hat{w}$$

Habár ez a $\tilde{\Sigma}$ nem torzítatlan becslése Σ-nak, ugyanakkor ez a módszer mégis eredményes lesz, mivel $\tilde{\Sigma}^{-1}$ *torzítatlan becslése* Σ^{-1}*-nek*. Tehát $\tilde{w}$ torzítatlan

becslése w_*-nak ($E[\tilde{w}] = w_*$). Vagyis ha a befektető ezen szabály segítségével határozza meg az optimális portfólióját, akkor abban a kockázatos értékpapírok aránya pont akkora lesz, mint amekkorát az eredeti optimális súlyozás ad.
Ha $T > N + 4$

$$E[U(\tilde{w})] = \kappa_3 \frac{\theta^2}{2\gamma} - \frac{N(T-2)(T-N-2)}{2\gamma T(T-N-1)(T-N-4)}$$

ahol

$$\kappa_3 = 2 - \frac{(T-2)(T-N-2)}{(T-N-1)(T-N-4)}$$

És mivel $E[U(\tilde{w})] > E[U(\bar{w})]$, így $\tilde{w}$ jobb választás lesz mint $\bar{w}$ és nyilvánvalóan jobb lesz mint $\hat{w}$.

3.1.3. A Bayes-i módszer

A Bayes-féle megközelítés a preditív eloszláson[1] alapszik, melyet Zellner[2] és Chetty[3] használt először arra, hogy felépítsenek belőle egy általános rendszert, mely figyelembe veszi a becslési kockázatot. Ebben a rendszerben a hasznosságfüggvény nem csupán közelítő konstans értékként kezeli μ-t és Σ-t, hanem paraméteresen függ tőlük. Vagyis a Bayes-i közelítés bizonytalan paraméterekkel dolgozik és azzal a feltételezéssel él, hogy a befektető figyelembe veszi a várható hasznosságot, mely a prediktív valószínűséggel van meghatározva $P(R_{T+1}|R_1, R_2, ..., R_T)$ és függ a mintától valamint az a priori eloszlástól. Ha jól választunk a priori eloszlást, akkor a Bayes-féle portfólióalkotási szabály hatékonyabb lesz, mint a klasszikus beillesztési szabály. Ugyanakkor az a priori eloszlás meghatározása nagyon nehéz, mivel nincs rá általános módszer.
A Bayes-féle optimális portfólió súlya:

$$\hat{w}_{Bayes} = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{T-N-2}{T+1}\right)\hat{\Sigma}^{-1}\hat{\mu}$$

ahol μ és Σ a prediktív momentumaikkal van helyettesítve. Ez a $\hat{w}_{Bayes}$ súly csak konstansban tér el az előbbiekben látott $\tilde{w}$ súlytól. Valamint ugyanazt javasolja, hogy legyen a portfóliónk két tőkéjű, azaz a rendelkezésre álló vagyonunk egyik részét a kockázatmentes értékpapírba, míg a másik részét a

[1] a már megfigyelt minta alapján meghatározott eloszlás
[2] Arnold Zellner (1927-2010) - amerikai közgazdász, statisztikus (1965)
[3] V.K. Chetty - közgazdász, statisztikus, a Bostoni Egyetem professzora (1965)

megvalósítható határportfóliókba kell fektetni, csak más lesz a két rész aránya.
A Bayes-féle megközelítés fontosnak tartja a becslési kockázatok figyelembe vételét, emiatt a kockázatos értékpapírokat még kockázatosabbnak, míg a kockázatmentes értékpapírt biztosan ismertnek tekinti. Ez a valóságosnál konzervatívabb optimális portfólió összetételt eredményez, azaz kisebb arányban fektet a befektető kockázatos értékpapírokba, mint ahogyan azt a pontos adatok ismeretében tenné.
Vagyis láthattuk, hogy a Bayes-féle portfólióalkotási szabály optimális és a prediktív eloszlás hozamain alapszik. A kérdés már csak az, hogy a mintából vett hatékonysága is jobb-e, mint a klasszikus beillesztési szabályoknak. Brown[4] és Stambaught[5] szimulációkra alapozva úgy vélték, hogy jobb, mára pedig már analitikus bizonyítás is létezik rá.

$$E\left[\hat{w}_{Bayes}\right] = \frac{T}{T+1} w_*$$

Tegyük fel, hogy $T > N + 4$, ekkor:

$$E\left[U\left(\hat{w}_{Bayes}\right)\right] = \kappa_4 \frac{\theta^2}{2\gamma} - \frac{NT\left(T-2\right)\left(T-N-2\right)}{2\gamma\left(T+1\right)^2\left(T-N-1\right)\left(T-N-4\right)}$$

ahol

$$\kappa_4 = \left(\frac{T}{T+1}\right)\left[2 - \frac{T\left(T-2\right)\left(T-N-2\right)}{\left(T+1\right)\left(T-N-1\right)\left(T-N-4\right)}\right]$$

Vagyis

$$\begin{aligned} E\left[U\left(\hat{w}_{Bayes}\right)\right] &- E\left[U\left(\tilde{w}\right)\right] = \left(\kappa_4 - \kappa_3\right)\frac{\theta^2}{2\gamma} + \\ &+ \frac{N\left(T-2\right)\left(T-N-2\right)\left(2T+1\right)}{2\gamma T\left(T+1\right)^2\left(T-N-1\right)\left(T-N-4\right)} \end{aligned}$$

Könnyen látható, hogy ha $T > N + 4$, akkor $(\kappa_4 - \kappa_3) > 0$. A Bayes-szabály mindig felülmúlja a korábbi klasszikus beillesztési szabályokat azáltal, hogy megenged magasabb várható mintabeli hatékonyságot és nem veszi figyelembe a paraméterek igazi értékét. Ennek az az oka, hogy van egy "beépített" optimalizálás a várható érték és a variancia között. Tehát a Bayes-féle portfólióalkotási szabály jobb, mint az előzőekben bemutatott beillesztési szabály.

[4] Stephen J. Brown - a New York-i Egyetem professzora (1976)
[5] Robert F. Stambaught - a Pennsylvania-i Egyetem professzora (1997)

3.2. További módszerek

3.2.1. Optimalitási kritérium

Legyenek $X_1, X_2, ..., X_n$ véletlen $N_p(0, \Sigma)$ eloszlású valószínűségi változók $(n \geq p)$, ekkor az S mennyiség Wishart eloszlású:

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i X_i^T \sim W_p(\Sigma, n)$$

A becsléseket Lin[6] és Perlman[7] nyomán két veszteségfüggvény szerint vizsgáljuk. [12]

- Az egyik veszteségfüggvény:

  $$L_1\left(\hat{\Sigma}, \Sigma\right) = tr\left(\hat{\Sigma}\Sigma^{-1}\right) - log|\hat{\Sigma}\Sigma^{-1}| - p$$

  és a hozzá tartozó rizikófüggvény:

  $$R_1\left(\hat{\Sigma}, \Sigma\right) = E_\Sigma\left(L_1\left(\hat{\Sigma}, \Sigma\right)\right)$$

  Ekkor a mintából számított kovariancia mátrix (ami torzítatlan becslés) optimális lesz az L_1 veszteségfüggvény mellett:

  $$\hat{\Sigma}_{ub}^{(1)} = \frac{1}{n} S$$

- A másik alternatív veszteségfüggvény:

  $$L_2\left(\hat{\Sigma}, \Sigma\right) = tr\left(\hat{\Sigma}\Sigma^{-1} - I\right)^2$$

  és az ehhez tartozó rizikófüggvény:

  $$R_2\left(\hat{\Sigma}, \Sigma\right) = E_\Sigma\left(L_2\left(\hat{\Sigma}, \Sigma\right)\right)$$

  Mivel L_2 egyes értékeket túlbecsül, más értékeket pedig alulbecsül, ezért ebben az esetben nem lesz optimális a $\hat{\Sigma}_{ub}^{(1)}$ becslés. Ugyanakkor ezt felhasználva kapjuk, hogy az optimális becslés:

  $$\hat{\Sigma}_{ub}^{(2)} = \frac{1}{n+p+1} S$$

[6]Shang P. Lin - A Chicago-i Egyetem professzora (1977 és 1982)
[7]Michael D. Perlman - a Washingtoni Egyetem professzora (1982)

(Ezek a veszteség- és rizikófüggvények tetszőleges $\hat{\Sigma}$ becslésekre értendőek.) Fontos megjegyezni, hogy a fent definiált $\hat{\Sigma}_{ub}^{(i)}$ és L_i $(i = 1, 2)$ függvények invariánsak, azaz:

$$\hat{\Sigma}_{ub}^{(i)}\left(ASA^T\right) = A\hat{\Sigma}_{ub}^{(i)}(S)A^T$$

és

$$L_i\left(A\hat{\Sigma}_{ub}^{(i)}A^T, A\Sigma A^T\right) = L_i\left(\hat{\Sigma}_{ub}^{(i)}, \Sigma\right)$$

minden $p \times p$-es nem szinguláris A mátrix esetén. Így minden ilyan A-ra

$$R_i\left(\hat{\Sigma}_{ub}^{(i)}, A\Sigma A^T\right) = R_i\left(\hat{\Sigma}_{ub}^{(i)}, \Sigma\right)$$

A továbbiakban minden becslés két módon lesz megadva, nagyobb méretben mely az L_1 és kisebb méretben mely az L_2 veszteségfüggvény esetén lesz optimális.

3.2.2. Három alternatív becslési módszer

1. Empirikus Bayes eljárás

Ezt az eljárást Haff[8] dolgozta ki és a Bayes-i analízisen alapszik, a következő konjugált a priori eloszlást feltételezve:

$$\Sigma^{-1} \sim W_p\left(\eta^{-1}C^{-1}, m\right)$$

ahol $\eta > 0$ konstans, C speciális pozitív definit mátrix és m pozitív egész. Ekkor az a posterriori eloszlás:

$$\Sigma^{-1}|S \sim W_p\left((S + \eta C)^{-1}, n + m\right)$$

Ezek mellett a feltevések mellett a két empirikus Bayes-féle becslés a következő:

$$\hat{\Sigma}_{Be}^{(1)} = \frac{1}{n}\left(S + \frac{p-1}{n}\left(trS^{-1}C\right)^{-1}C\right)$$

és

$$\hat{\Sigma}_{Be}^{(2)} = \frac{1}{n+p+1}\left(S + \frac{p-1}{n-p+3}\left(trS^{-1}C\right)^{-1}C\right)$$

Ezek mellett a becslések mellett minden Σ-ra fennáll $(i = 1, 2)$, hogy

$$R_i\left(\hat{\Sigma}_{Be}^{(i)}, \Sigma\right) \leq R_i\left(\hat{\Sigma}_{ub}^{(i)}, \Sigma\right)$$

[8]Leonard Haff - a California-i Egyetem professzora (San Diego) (1980)

Ez a módszer akkor eredményezi a legjobb közelítést, amikor $\Sigma \approx kC$ (C egy konstans többszöröse). Ennek oka az, hogy az a priori eloszlás Wishart eloszlás.
A Lin és Perlman féle cikkben az eljárás során a $C = I$ mátrixot használják. Ez azt eredményezi, hogy a $\hat{\Sigma}^{(i)}_{Be}$ ortogonálisan invariánsak (minden A ortogonális $p \times p$-es mátrixra) és skála invariánsak (minden $A = kI$, $k \neq 0$-ra).

2. Stein-féle karakterisztikus gyökök eljárás

Stein[9] tanulmányozta az ortogonálisan invariáns becslések osztályát, mely felírható az alábbi általános alakban:

$$\hat{\Sigma} = B\Phi(l)B^T$$

ahol $l = (l_1, l_2, ..., l_p)$ és $l_1 > l_2 > ... > l_p > 0$ a rendezett karakterisztikus gyökei S-nek és a B mátrix j. oszlopa az l_j karakterisztikus gyökhöz tartozó karakterisztikus vektor, $\Phi(l)$ pedig egy olyan diagonális mátrix, melynek átlójában $\varphi_j(l)$ Σ j-edik legnagyobb karakterisztikus gyökének becsült értéke áll.
Ekkor a rizikófüggvény az ortogonálisan ekvivalens becslés $\hat{\Sigma}$ esetén:

$$\begin{aligned} R_1\left(\hat{\Sigma}, \Sigma\right) &= E_\Sigma\left(\sum_{j=1}^{p}\left[\left(n - p + 1 + 2l_j\sum_{i\neq j}\frac{1}{l_j - l_i}\right)\psi_j\right.\right. \\ &- \left.\left. log\psi_j + 2l_j\frac{\partial\psi_j}{\partial l_j}\right] - c_{p,n}\right) \end{aligned}$$

ahol

$$\psi_j = \frac{\varphi_j(l)}{l_j}$$

$$c_{p,n} = E\left(\sum_{j=1}^{p} log\chi^2_{n-j+1}\right) + p = \sum_{j=1}^{p}\frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}(n-i+1)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(n-i+1)\right)} + plog2 + p$$

A rizikófüggvény a várható érték nélkül akkor lesz minimális, ha

$$\hat{\psi}_j = \frac{1}{\alpha_j}$$

ahol

$$\alpha_j \equiv \alpha_j(l) = n - p + 1 + 2l_j\sum_{i\neq j}\frac{1}{l_j - l_i}$$

[9]Charles M. Stein (1920 - napjainkig) - a Stanford Egyetem professzora (1975 és 1977)

Ez pedig a karakterisztikus értékek alábbi becsléséhez vezet:

$$\hat{\varphi}_j = \frac{l_j}{\alpha_j}$$

Ezek a gyökök már nem elégítik ki a sorrendiséget, sőt lehetnek közte negatív értékek is. Erre a problémára dolgozott ki Stein egy úgynevezett *izotonizáló eljárás*t (*isotonizing procedure*).

Stein-féle izotonizáló algoritmus

Rendezzük párokba az értékeket $(l_1, \alpha_1), (l_2, \alpha_2), ..., (l_{p-1}, \alpha_{p-1}), (l_p, \alpha_p)$.

- 1. lépés: Pozitívvá tesszük az α_j értékeket az alábbi módon:

    1. Induljunk a legnagyobb (p) indextől és keressük meg az első olyan (l_j, α_j) párt, ahol α_j negatív.

    2. Adjuk hozzá a párhoz a kisebb indexű szomszédját: $(l_j + l_{j-1}, \alpha_j + \alpha_{j-1})$. Töröljük az (l_j, α_j) és a (l_{j-1}, α_{j-1}) párt. Így a listánk eggyel rövidebb lesz.

    3. Ezt addig ismételjük, amíg minden α_j pozitív nem lesz.

- 2. lépés: Rendezzük újra a listát az alábbi módon, hogy az $\frac{l_j}{\alpha_j}$ csökkenő legyen.

    1. Kezdjük a legnagyobb indextől és addig haladunk, amíg meg nem találjuk az első olyan párt, melyre igaz, hogy $\frac{l_j}{\alpha_j} \leq \frac{l_{j+1}}{\alpha_{j+1}}$.

    2. Helyettesítsük ezt a két párt $(l_j + l_{j+1}, \alpha_j + \alpha_{j+1})$ párral. Így eggyel lecsökken a listánk mérete.

    3. Folytassuk az új pár alatti pártól (vagy az új pártól, ha ez a lista utolsó eleme). Lépjünk előre addig, amíg meg nem találjuk az első olyan párt, melyre $\frac{l_j}{\alpha_j} \leq \frac{l_{j+1}}{\alpha_{j+1}}$ teljesül. Hajtsuk végre a (2)-es pontot.

    4. Addig ismételjük a (3)-as pontot, amíg a listánk csökkenő sorba rendezett nem lesz.

- 3. lépés: Az így kapott listánk egyes elemei egy vagy több pár összege lesz az eredeti listából. Azok a listában szereplő (l_j, α_j) párok melyeket összevontunk az első és/vagy a második lépés során annyiszor fognak szerepelni a végleges listában, ahány tagból összevontuk őket.

Az eljárás végén kapott értékekere már teljesülni fog, hogy: $\varphi_1^* \geq \varphi_2^* \geq ... \geq \varphi_p^* \geq 0$. Jelölje $\Phi^*(l) = diag(\varphi_1^*, \varphi_2^*, ..., \varphi_p^*)$.
Ezek alapján a két kapott becslés:

$$\hat{\Sigma}_{Se}^{(1)} = B\Phi^*(l)B^T$$

Ekkor a másik becsléshez használt φ_j értékek meghatározása nagyon bonyolult lenne és az értékek nem feltétlen lennének pozitívak. Ezért ahelyett egy egyszerűbb becslést tekintünk. Mivel az L_2 a kisebb becslések esetén lesz optimális ezért, legyen a második veszteségfüggvényhez tartozó becslés:

$$\hat{\Sigma}_{Se}^{(2)} = \frac{n}{n+p+1}\hat{\Sigma}_{Se}^{(1)}$$

Habár ez egy durva becslés, mégis jelentősen leredukálja a kockázatot az L_2 veszteségfüggvény esetén.
Mint a Bayes-eljárás esetén itt is igaz, hogy $\hat{\Sigma}_{Se}^{(i)}$ ortogonálisan invariáns és skálainvariáns.
A Stein becslés φ_j^* csökkenti a torzítását az $\frac{S}{n}$ karakterisztikus gyökeinek azáltal, hogy zsugorító (shrinking) becslést végez valamilyen középponti érték körül.

3. Korrelációs mátrix eljárás

Legyen $\rho \equiv (\rho_{21}; \rho_{31}, \rho_{32}; ..., \rho_{p(p-1)})$ egy $\frac{p(p-1)}{2}$ dimenziós vektor a Σ-hoz tartozó korrelációs együtthatók és legyen $\sigma \equiv (\sigma_1, ..., \sigma_p)$ a standard szórás vektor. Mivel $\Sigma \equiv (\sigma_i\sigma_j\rho_{ij})$, ezért

$$\Sigma = D(\sigma)R(\rho)D(\sigma)$$

ahol $D(\sigma) = diag(\sigma_1, ..., \sigma_p)$ és $R(\rho) \equiv (\rho_{ij})$ ezért a becslésünket is ilyen alakban szeretnénk meghatározni, vagyis:

$$\hat{\Sigma} = D\left(\hat{\sigma}(s)\right) R\left(\hat{\rho}(r)\right) D\left(\hat{\sigma}(s)\right)$$

ahol $r \equiv (r_{21}; r_{31}, r_{32}; ..., r_{p(p-1)})$ a mintából származó korrelációs együtthatók és s a mintből származó standard szórás ($ns_i^2 \sim \sigma_i^2\chi_n^2$). A torzítatlan becslések: $\hat{\rho}(r) = r$ és $\hat{\sigma}(s) = s$.

Lin és Perlman megalkottak egy alternatív becslést $\hat{\rho}_{JSe}$[10], mely a következő. Legyen $z = (z_{21}; z_{31}, z_{32}; ..., z_{p(p-1)})$ és $\zeta = (\zeta_{21}; \zeta_{31}, \zeta_{32}; ..., \zeta_{p(p-1)})$, ahol

$$z_{ij} \equiv \frac{1}{2} log\left(\frac{1+r_{ij}}{1-r_{ij}}\right), \qquad \zeta_{ij} \equiv \frac{1}{2} log\left(\frac{1+\rho_{ij}}{1-\rho_{ij}}\right)$$

A fent bemutatott eljárást szokás az r_{ij}-re és ρ_{ij}-re vonatkozó **Fisher-féle z-transzformáció**nak.
Ekkor asszimptotikusan igazak a következők:

$$\sqrt{n}(r-\rho) \sim N_{\frac{p(p-1)}{2}}\left(0, \Psi(\rho)\right), \qquad \sqrt{n}(z-\zeta) \sim N_{\frac{p((p-1)}{2}}\left(0, \Lambda(\rho)\right)$$

ahol $\Psi \equiv (\Psi_{ij,kl})$ az alábbi módon van megadva[11]:

$$\begin{aligned} \Psi_{ij,kl} &= \frac{1}{2}\rho_{ij}\rho_{kl}\left(\rho_{ik}^2 + \rho_{jk}^2 + \rho_{il}^2 + \rho_{jl}^2\right) \\ &- \left(\rho_{ik}\rho_{jk}\rho_{kl} + \rho_{il}\rho_{jl}\rho_{kl} + \rho_{ij}\rho_{il}\rho_{ik} + \rho_{ij}\rho_{jk}\rho_{jl}\right) \\ &+ \left(\rho_{il}\rho_{jk} + \rho_{ik}\rho_{jl}\right) \end{aligned}$$

és ahol $\Lambda \equiv (\Lambda_{ij,kl})$ a Ψ-vel kapcsolatos korrelációs mátrix. Ekkor z értéke az alábbi módon közelíthető[12]:

$$z^* \equiv z - (2n-3)^{-1} \sim N_{\frac{p(p-1)}{2}}\left(\zeta, \Lambda^*(\rho)\right)$$

ahol $\Lambda^* = \left(n - \frac{5}{3}\right)^{-1} \Lambda$. Ebből a képletből adódik, hogy $\hat{\zeta}_{JSe}$ értéke megkapható z^* értékéből James-Stein közelítéssel. Most az Efron[13] és Morris[14] által javasolt közelítést alkalmazzuk:

$$\hat{\zeta}_{JSe} = \left\{1 - \frac{\frac{p(p-1)}{2} - 1.66}{(z^* - \bar{z}^*)\left(\Lambda^*(r)\right)^{-1}(z^* - \bar{z}^*)^T}\right\}^+ (z^* - \bar{z}^*) + \bar{z}^*$$

ami összehúzza z^*-ot a $\bar{z}^* \equiv (\bar{z}^*, ..., \bar{z}^*)$ vektor körül, ahol $\bar{z}^* \equiv \frac{2}{p(p-1)} \sum z_{ij}^*$ a z^* komponenseinek átlaga. A $\hat{\rho}_{JSe}$ becslés értéke úgy kapható meg, hogy a fenti kifejezésre alkalmazzuk az inverz z-transzformációt $\hat{\zeta}_{JSe}$ minden komponensére.
Az eljárás végére a következő két becslést kapjuk:

$$\hat{\Sigma}_{JSe}^{(1)} = D(s)R\left(\hat{\rho}_{JSe}\right)D(s)$$

[10] JSe: James - Stein becslés

[11] Ingram Olkin (1924 - napjainkig) - a Stanford Egyetem professzora;
Minoru Siotani - a Meise-i Egyetem professzora (Tokyo) (1976)

[12] Harold Hotelling (1895 - 1973) amerikai matematikus

[13] Bradley Efron (1938 - napjainkig) - a Stanford Egyetem professzora (1973 és 1975)

[14] Carl N. Morris - a Harvard Egyetem professzora (1973 és 1975)

és

$$\hat{\Sigma}^{(2)}_{JSe} = \frac{n}{n+p+1}\hat{\Sigma}^{(1)}_{JSe}$$

Az előzőhöz hasnoló eljárással kapható becslés σ értékére is.
Asszimptotikusan igaz a következő:

$$\sqrt{n}(s-\sigma) \sim N_p\left(0, \Omega(\sigma,\rho)\right)$$

ahol $\Omega \equiv (\omega_{ij})$ és $\omega_{ij} = \frac{1}{2}\omega_i\omega_j\rho_{ij}^2$. Jobb közelítés érhető el a Fisher-korreláció segítségével:

$$s^* \equiv \left(\frac{2n}{2n-1}\right)^{\frac{1}{2}} s \sim N_p\left(\sigma, \Omega^*(\sigma,\rho)\right)$$

ahol $\Omega^* = \left(n-\frac{1}{2}\right)^{-1}\Omega$. Ezáltal kapjuk a következő becslést ω-ra:

$$\hat{\omega}_{JSe} = \left\{1 - \frac{p-1.66}{\left(s^*-\bar{s}^*\right)\left(\Omega^*(s,r)\right)^{-1}\left(s^*-\bar{s}^*\right)^T}\right\}^+ \left(s^*-\bar{s}^*\right) + \bar{s}^*$$

Az ezekből adód becslések pedig:

$$\hat{\Sigma}^{(1)}_{JSd} = D\left(\hat{\sigma}_{JSe}\right) R\left(\hat{\rho}_{JSe}\right) D\left(\hat{\sigma}_{JSe}\right)$$

$$\hat{\Sigma}^{(2)}_{JSd} = \frac{n}{n+p+1}\hat{\Sigma}^{(1)}_{JSd}$$

Legyen $\hat{\rho}_{JSp}$ partícionális becslés ρ -ra. Ekkor:

$$\hat{\Sigma}^{(1)}_{JSpe} = D(s)R\left(\hat{\rho}_{JSp}\right)D(s), \qquad \hat{\Sigma}^{(2)}_{JSp} = \frac{n}{n+p+1}\hat{\Sigma}^{(1)}_{JSpe}$$

$$\hat{\Sigma}^{(1)}_{JSpd} = D\left(\hat{\sigma}_{JSe}\right) R\left(\hat{\rho}_{JSpe}\right) D\left(\hat{\sigma}_{JSe}\right), \qquad \hat{\Sigma}^{(2)}_{JSpd} = \frac{n}{n+p+1}\hat{\Sigma}^{(1)}_{JSpd}$$

Az így kapott $\hat{\Sigma}^{(i)}_{JSe}$ és $\hat{\Sigma}^{(i)}_{JSpe}$ becslések diagonálisan invariánsak tetszőleges $A = diag(a_1, ..., a_p)$ $(a_i \neq 0)$ mátrixra, míg $\hat{\Sigma}^{(i)}_{JSd}$ és $\hat{\Sigma}^{(i)}_{JSpd}$ csak invariánsak.

4. fejezet

Kan és Zhou állításai

4.1. Az optimális kéttőkéjű portfólió

[11] [1] [2] Az optimális súly becslése felírható mint az elégséges statisztikák függvénye: $\hat{w} = f\left(\hat{\mu}, \hat{\Sigma}\right)$. A befeketető számára ekkor az a lényeges, hogy meghatározza ezt az f függvényt méghozzá oly módon, hogy maximális legyen a mintából vett hatékonyság. Mivel ez így ebben a formába egy nagyon összetett, nemlineáris függvénye a két változónak, így meghatározzuk, hogy milyen tulajdonságokat várunk ettől a függvénytől potosan. Kezdetben azt az esetet vizsgáljuk, amikor csak a kockázatmentes értékpapír és a megvalósítható érintőportfóliók állnak a rendelkezésünkre.
Az előző fejezetben ismertetett plug-in módszerek mind azt javasolják, hogy fektessük a rendelkezésre álló vagyonunkat a kockázatmentes és a megvalósítható érintőportfóliók valamilyen kombinációjába. Ez még nem jelenti azt, hogy ez a súly maximalizálja a mintából vett hatékonyságot. Tekintsük az optimális súlyt, mint egy c konstans függvényét:

$$\hat{w} = \frac{c}{\gamma}\hat{\Sigma}^{-1}\hat{\mu}$$

A korábbiakban bemutatott optimális súlyok ennek a formulának speciális esetei, például $c_{Bayes} = \frac{(T-N-2)}{(T+1)}$ -re a Bayes-szabály. Az előzőekhez hasonlóan feltéve, hogy $T > N + 4$ tekintsük az alábbi függvényt:

[1] Raymond Kan - a Joseph L. Rotman School of Management professzora (Torontói Egyetem)

[2] Guofo Zhou - az Olin School of Business professzora (Washington Egyetem - Toronto)

$$E\left[U(\hat{w})\right] = \frac{c\theta^2}{\gamma}\left(\frac{T}{T-N-2}\right) - \frac{c^2}{2\gamma}\left(\theta^2+\frac{N}{T}\right) \left[\frac{T^2(T-2)}{(T-N-1)(T-N-2)(T-N-4)}\right]$$

Egyszerű deriválással adódik, hogy az alábbi esetben lesz maximális a hasznosságunk:

$$c_* = \left[\frac{(T-N-1)(T-N-4)}{T(T-2)}\right]\left(\frac{\theta^2}{\theta^2+\frac{N}{T}}\right)$$

Vizsgáljuk meg kicsit jobban a kapott konstanst. Ekkor ha Σ ismert, akkor a c_* értékét a második tag tudja befolyásolni, ez a $\hat{\mu}$ -ből adódó becslési hiba és ez igaz fordítva is, ha μ ismert, akkor a második tag konstans vagyis az első tag adja a $\hat{\Sigma}$ becslési hibáját. Emellett mindkét tagra egyaránt igaz az, hogy az értéke kisebb mint egy és a második tagnak az értéke függ T -től, N -től és θ^2 -től míg az első tag értéke független θ^2 -től.
Ekkor az optimális $\hat{w}_* = c_*\hat{\Sigma}^{-1}\frac{\hat{\mu}}{\gamma}$ súly mellett a mintából vett hatékonyság:

$$E\left[U(\hat{w}_*)\right] = \frac{\theta^2}{2\gamma}\left[\frac{(T-N-1)(T-N-4)}{(T-2)(T-N-2)}\right]\left(\frac{\theta^2}{\theta^2+\frac{N}{T}}\right)$$

Vagyis az optimális súly hatékonysága nagyobb mint az előzőekben bemutatott klasszikus beillesztési szabályé és a Bayes-szabályé. Habár ez a súly lenne az optimális ezt a gyakorlatban mégsem lehet meghatározni mert θ^2 értéke a valóságban nem ismert. Mégha a pontos értéke nem is ismert c_* -nak ez alapján meghatározható egy egyszerű portfólió alkotási szabály, melyben a Bayes-szabály dominál és optimális, ha $\theta^2 \to \infty$:

$$\hat{w}_* = \frac{(T-N-1)(T-N-4)}{T(T-2)\gamma}\hat{\Sigma}^{-1}\hat{\mu}$$

Ez a szabály a Bayes-szabályhoz hasonlóan szintén paraméter független. Értéke csak N -től és T -től függ. $\hat{w}_*$ tekinthető egyfajta speciális beillesztési szabálynak, ahol Σ értékét a $\hat{\Sigma}_* \equiv \hat{\Sigma}\frac{T(T-2)}{(T-N-1)(T-N-4)}$ értékkel becsüljük.

Mivel $\hat{w}_*$ értéke függ a θ^2 paramétertől, ezért fontos jó becsléssel közelíteni ezt a paramétert. A legkézenfekvőbb dolog a mintából megbecsülni θ értékét:

$$\hat{\theta}^2 = \hat{\mu}^T\hat{\Sigma}^{-1}\hat{\mu}$$

Ekkor $\hat{\theta}^2$ eloszlása:

$$\hat{\theta}^2 \sim \left(\frac{N}{T-N}\right)F_{N,T-N}\left(T\theta^2\right)$$

ahol $F_{N,T-N}(T\theta^2)$ F-eloszlás N és $T-N$ szabadságfokkal és $T\theta^2$ nem-centralitási paraméterrel. Ezek alapján megadható θ^2 torzítatlan becslése, mely a következő:

$$\hat{\theta}^2_{ub} = \frac{(T-N-2)\theta^2 - N}{T}$$

Ez a közelítés felvehet negatív értékeket is, amit nem szeretnénk megengedni, ezért módosítani kell az előző becslésen. Ahhoz, hogy ezen a problémán segíthessünk vegyük figyelembe, hogy θ^2 az F-eloszlás nem-centralitási paramétere és mi ezt szeretnénk megbecsülni. Számos cikk foglalkozik ezzel a becsléssel. Itt most azt a becslést használjuk, melyet Kubokawa[3], Robert[4] és Saleh[5] adtak meg cikkükben. Ez egy torzítatlan becslése θ^2-nek és a négyzetes veszteségfüggvényen alapszik:

$$\hat{\theta}^2_a = \frac{(T-N-2)\hat{\theta}^2 - N}{T} + \frac{2\left(\hat{\theta}^2\right)^{\frac{N}{2}}\left(1+\hat{\theta}^2\right)^{-\frac{T-2}{2}}}{TB_{\frac{\hat{\theta}^2}{1+\hat{\theta}^2}}\left(\frac{N}{2}, \frac{T-N}{2}\right)}$$

ahol

$$B_x(a,b) = \int_0^x y^{a-1}(1-y)^{b-1}dy$$

A közelítés első tagja a torzítatlan becslés a második tag pedig a korrekciós tag, mely megnöveli az értéket annyira, hogy a becslésünk pozitív legyen. Ez alapján a becslés alapján választott konstans és súlyfüggvény a követekező:

$$\hat{c}_* = \frac{(T-N-1)(T-N-4)}{T(T-2)}\left(\frac{\hat{\theta}^2_a}{\hat{\theta}^2_a + \frac{N}{T}}\right)$$

és

$$\hat{w}_{II} = \frac{1}{\gamma}\hat{c}_*\hat{\Sigma}^{-1}\hat{\mu}$$

Egy másik megközelítés szerint Garlappi[6], Uppal[7] és Wang[8], olyan szabályt javasoltak, mely egyesítette a paraméteres bizonytalanságot és a hasznosságfüggvény hozamát. Ezt olyan befektetők számára javasolják, akik a bizonytalanságot kisebb szinten szeretnék tartani. Ez a szabály a következő:

$$\hat{w}_{ua} = \frac{c_{ua}}{\gamma}\frac{T}{T-1}\bar{\Sigma}^{-1}\hat{\mu}$$

[3]Tatsuya Kubokawa - a Tokyo-i Egyetem professzora (1993)
[4]Christian P. Robert - a Párizsi Egyetem professzora (1993)
[5]A.K.Md. Ehsanes Saleh - a Carleton-i Egyetem professzora (1993)
[6]Lorenzo Garlappi - a British Columbia Egyetem professzora (Vancouver) (2007)
[7]Raman Uppal - az EDHEC Business School professzora (London) (2007)
[8]Tan Wang - a British Columbia Egyetem professzora (Vancouver) (2007)

ahol

$$c_{ua} = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\epsilon}{\hat{\theta}^2}\right)^{\frac{1}{2}} & \text{ha } \hat{\theta}^2 > \epsilon \\ 0 & \text{ha } \hat{\theta}^2 \leq \epsilon \end{cases}$$

Ekkor $\epsilon = \frac{NF^{-1}_{N,T-N}(p)}{T-N}$ és $F^{-1}_{N,T-N}(p)$ a halmozódó, centrális, inverz F-eloszlás N és $T-N$ szabadságfokkal és p valószínűsségel. A nullhipotézis mellett, miszerint $\theta = 0$, $\hat{\theta}^2$ is ilyen eloszlású. Vagyis ez azt jelenti, hogy egy befektető p valószínűséggel fog nem befektetni a kockázatos értékpapírba, amennyiben a Sharpe-arány 0. Tehát egy befektető minél inkább kerüli a bizonytalan paramétereket, annál nagyobb p értékkel fog számolni. Ezekből következik, hogy a befektetőnek bizonytalan paraméterek esetén meg kell győződnie arról, hogy $\theta \neq 0$ mielőtt befektetne az érintési portfóliókba (azaz amíg nem biztos benne, addig kizárólag a kockázatmentes értékpapírba fog fektetni).

4.2. Három részre osztás: a határportfóliók

Az előző részben mutattunk néhány lehetőséget az optimális portfólió kialakítására. Ezekben közös, hogy a tőkénket kétfajta értékpapír között osztjuk meg, ezek: a kockázatmentes és az értintési portfóliók. Ezek veszteséges mintából vett hatékonyságot generálnak, melyet szeretnénk lecsökkenteni. Ennek egyik módja lehet, hogy nem csak ebbe a kétfajta értékpapírba fektetünk be.

A tőkénket osszuk három részre: kockázatmentes értékpapír, érintésiportfólió és határportfólió. Ez utóbbiba azért fektetünk be, hogy az értintésiportfólió esetén fellépő becslési kockázatunkat csökkentsük. Ez azért jó számunkra, mert ugyan mindkét portfóliónak van becslési kockázata, ezek mégsem teljesen korreláltak. Így a mintából vett hatékonyság nagyobb lesz ebben az esetben. Persze csak akkor, ha megfelelően osztjuk fel a tőkénket a két rész között.

És hogy melyik kockázatos értékpapírokból álló portfóliót használjuk?

A mintából származó globális minimum-varianciájú portfóliót, mégpedig két okból: ennek értéke csak $\hat{\Sigma}$-tól függ $\hat{\mu}$ értékétől nem, így a súlyfüggvény becsült értéke sokkal pontosabb lehet, és nyilván minimális szórású portfóliót szeretnénk kapni. Emellett minden mintából származó határportfólió előáll mint két határportfólió lineáris kombinációja.

Tekintsük a következő portfólió alkotási szabályt:

$$\hat{w}(c,d) = \frac{1}{\gamma}\left(c\hat{\Sigma}^{-1}\hat{\mu} + d\hat{\Sigma}^{-1}1_N\right)$$

ahol a c, d konstansok értékét kell optimálisan megválasztani. Ebben az esetben a mintából vett hatékonyság $T > N + 4$ esetén:

$$\begin{aligned}
E\left[U\left(\hat{w}\left(c,d\right)\right)\right] &= E\left[\hat{w}\left(c,d\right)\right]^T \mu - \frac{\gamma}{2} E\left[\hat{w}\left(c,d\right)^T \Sigma \hat{w}\left(c,d\right)\right] = \\
&= \left(\frac{T}{T-N-2}\right)\frac{1}{2\gamma}\Bigg[2\left(c\mu^T\Sigma^{-1}\mu + d\mu^T\Sigma^{-1}1_N\right) - \\
&- \frac{T(T-2)}{(T-N-1)(T-N-4)} \times \\
&\times \left(\left(\mu^T\Sigma^{-1}\mu + \frac{N}{T}\right)c^2 + 2\left(\mu^T\Sigma^{-1}1_N\right)cd + \left(1_N^T\Sigma^{-1}1_N\right)d^2\right)\Bigg]
\end{aligned}$$

A két konstans c és d értékét úgy szeretnénk meghatározni, hogy maximalizálják a mintából vett hatékonyságot:

$$c_{**} = \frac{(T-N-1)(T-N-4)}{T(T-2)}\left(\frac{\psi^2}{\psi^2 + \frac{N}{T}}\right)$$

$$d_{**} = \frac{(T-N-1)(T-N-4)}{T(T-2)}\left(\frac{\frac{N}{T}}{\psi^2 + \frac{N}{T}}\mu_g\right)$$

ahol

$$\psi^2 = \mu^T\Sigma^{-1}\mu - \frac{\left(\mu^T\Sigma^{-1}1_N\right)^2}{1_N^T\Sigma^{-1}1_N} = \left(\mu - \mu_g 1_N\right)^T\Sigma^{-1}\left(\mu - \mu_g 1_N\right)$$

ahol ψ a minimális-varianciájú határhoz húzott értintő meredeksége, μ_g pedig a globális minimális-varianciájú portfólió várható többlethozama, ami az alábbi módon írható fel:

$$\mu_g = \frac{1_N^T\Sigma^{-1}\mu}{1_N^T\Sigma^{-1}1_N}$$

Ezekből következik, hogy az optimális portfóli súlya:

$$\hat{w}_{**} = \frac{(T-N-1)(T-N-4)}{(T(T-2))\gamma}\left[\left(\frac{\psi^2}{\psi^2 + \frac{N}{T}}\right)\hat{\Sigma}^{-1}\hat{\mu} + \left(\frac{\frac{N}{T}}{\psi^2 + \frac{N}{T}}\right)\mu_g\hat{\Sigma}^{-1}1_N\right]$$

Mivel d_* csak abban az esetben lehet 0 ha $\mu_g = 0$, így ez a szabály mindig az javasolja, hogy fektessünk a globális minimális-varianciájú portfólióba függetlenül attól, hogy mik a paraméterek μ és Σ pontos értékei. És $\frac{N}{T}$ értéke minél nagyobb, annál nagyobb tőkét fogunk az ilyen típusú portfóliókba

fektetni. Vagyis ez azt jelenti, hogy minél nagyobb az elérhető kockázatos értékpapírok száma, annál nagyobb a becslési hibánk, így sokkal jobban bízunk a globális minimális-varianciájú portfólióban. Erre az összefüggésre Jobson[9], Korkie[10] és Ratti[11] világítottak rá először, akik azt javasolták, hogy a tőkénket két részre osztva fektessük be és ez a két rész a kockázat mentes és a globális minimális-varianciájú portfólió volt.
Az optimális érték ekkor amit az érintési portfólióba fektetünk ψ^2 és $\frac{N}{T}$ értékétől függ. Minél nagyobb az érintő meredeksége, annál nagyobb összeget fogunk a mintából származó értintési portfólióba fektetni.
A fent megadott súly mellett a mintából vett hatékonyság értéke a következő $T > N + 4$ esetén:

$$E\left[U\left(\hat{w}_{**}\right)\right] = \frac{\theta^2}{2\gamma}\frac{(T-N-1)(T-N-4)}{(T-2)(T-N-2)}\left[1 - \frac{\frac{N}{T}}{\theta^2 + \left(\frac{\theta^2}{\psi^2}\right)\left(\frac{N}{T}\right)}\right]$$

Ebben az esetben is felmerül a probléma, hogy vannak paramétereink, melyeknek az értéke nem ismert: ψ^2 és μ_g így ezeknek az értékét meg kell becsülnünk a minta alapján:

$$\hat{\mu}_g = \frac{\hat{\mu}^T\hat{\Sigma}^{-1}1_N}{1_N^T\hat{\Sigma}^{-1}1_N}$$

$$\hat{\psi}^2 = \left(\hat{\mu} - \hat{\mu}_g 1_N\right)^T \hat{\Sigma}^{-1}\left(\hat{\mu} - \hat{\mu}_g 1_N\right)$$

Ekkor $\hat{\psi}^2$ elsozlása:

$$\frac{T-N+1}{N-1}\hat{\psi}^2 \sim F_{N-1,T-N+1}\left(T\psi^2\right)$$

$\hat{\psi}^2$ esetén felemrül ugyanaz a probléma, mint $\hat{\theta}^2$ esetében: a becslés súlyosan torzított, ha T értéke kicsi. Ezért a következő korrekciót alkalmazzuk, hogy jobb közelítés kapjuk ψ^2-re:

$$\hat{\psi}_a^2 = \frac{(T-N-1)\hat{\psi}^2 - (N-1)}{T} + \frac{2\left(\hat{\psi}^2\right)^{\frac{N-1}{2}}\left(1+\hat{\psi}^2\right)^{-\frac{T-2}{2}}}{TB_{\frac{\hat{\psi}^2}{1+\hat{\psi}^2}}\left(\frac{N-1}{2}, \frac{T-N+1}{2}\right)}$$

[9]Dave Jobson - az Alberta-i Egyetem professzora (Kanada) (1979)
[10]Bob Korkie - az Alberta-i Egyetem professzora (1979)
[11]V. Ratti (1979) - Jobson, J. D.; Korkie, B. and Ratti, V.: "Improved Estimation for Markowtiz Portfolios Using James-Stein Type Estimators"

Mindezek apalján végül megadható a három részre osztott optimális portfólió súlya a következő alakban:

$$\hat{w}_{III} = \frac{(T-N-1)(T-N-4)}{T(T-2)\gamma} \left[\left(\frac{\hat{\psi}_a^2}{\hat{\psi}_a^2 + \frac{N}{T}} \right) \hat{\Sigma}^{-1}\hat{\mu} + \left(\frac{\frac{N}{T}}{\hat{\psi}_a^2 + \frac{N}{T}} \right) \hat{\mu}_g \hat{\Sigma}^{-1} 1_N \right]$$

Az így kapott súly $\hat{w}_{III}$ felülmúlja a $\hat{w}_{II}$-ot, de ezt analitikusan bebizonyítani nem könnyű, mivel az értékeik függnek $\hat{\psi}_a^2$-tól és $\hat{\mu}_g$-tól, ezek pedig véletlen adatú mintából lettek megbecsülve.

5. fejezet

Néhány példa

Ebben a fejezetben néhány eljárást bemutatok a gyakorlatban is az R[1] program segítségével. Az adott példák nemcsak a kapott értékeket, hanem az eljárások kódjait is tartalmazzák.

5.1. A becslesi kockázat vizsgálata

Példa

Tekintsünk öt kötvényt ($N = 5$). Legyen a megfigyeléseink száma száz (vagyis a korábbi jelölést használva: $T = 100$). Jelölje a hozamukat m és a kovarianciájukat S, melyeknek az értékét véletlenszerűen választjuk. Elkészítjük a maximum-likelihood becsléseket és ezek alapján hasonlítjuk össze a négy esetet: m és S ismert, m becsült paraméter és S ismert, S ismert és m a becsült paraméter valamint m és S egyaránt becsült paraméterek (ez a valóságban tipikusan fennálló eset).

[1]The R-Project for Statistical Computing: www.r-poject.org

Az R-ben használt kód[13] a következő[2]:

```
> haszon <- function(m,s,g=3)
>{
+ # Legyen az X minta adott paraméterű normális eloszlású.
+ X <- rnorm(50,mu,Sigma)
+ m.e  <- colMeans(X)
+ s.e <- cov(X)

+ # Súlyok megadása:
+ w <- solve(s) %*% / gamma # m és s értéke ismert
+ w.e.m <- solve(S) %*% m.e / gamma # s ismert, m értéke becsült
+ w.e.s <- solve(S.e) %*% m / gamma # m ismert, s értéke becsült
+ w.e.ms <- solve(S.e) %*% m.e / gamma # m és s értéke becsült

+ # Az előző súlyokhoz tartozó hasznosságfüggvények:

+ U <- t(w) %*% m - gamma * t(w) % * % S % * % w / 2
+ U.e.m <-t(w.e.m) %*% m - gamma * t(w.e.m ) %*% S %*% w.e.m / 2
+ U.e.s <-t(w.e.s) %*% m - gamma * t(w.e.s) %*% S %*% w.e.s  / 2
+ U.e.ms<-t(w.e.ms) %*% m - gamma * t(w.e.ms) %*% S %*% w.e.ms / 2
+ return(c(U=U,U.e.m=U.e.m,U.e.s=U.e.s,U.e.ms=U.e.ms))
+ }

> ertekel <- function(mu, Sigma, N=10)
+ {
+ sim <- haszon(mu, Sigma)
+ for(k in 2:N)
+ sim <- rbind(sim, haszon(mu, Sigma))
+ return(sim)
+ }

> set.seed(1) # Egyetlen mu-Sigma paraméterpár használata.
> mu <- runif(5, -1, 1)
> Sigma <- cov(matrix(runif(5*100, -1, 1), ncol=5))
> gamma <- 3 # kockázatkerülési együttható

> res <- ertekel(mu, Sigma, 10)
> colMeans(res)
```

[2] A kód futtatásához szükséges az *mnormt* package telepítése.

Hasznosságfüggvény értéke az egyes becsült értékek esetén

Sorszám	U (μ, Σ)	U $(\hat{\mu}, \Sigma)$	U $\left(\mu, \hat{\Sigma}\right)$	U $\left(\hat{\mu}, \hat{\Sigma}\right)$
1.	0.6155353	0.6057264	0.4495518	0.4021209
2.	0.6155353	0.5979633	0.5308857	0.4908539
3.	0.6155353	0.5971151	0.4101207	0.4174122
4.	0.6155353	0.5984072	0.4871195	0.4772139
5.	0.6155353	0.5969258	0.5226572	0.5105391
6.	0.6155353	0.6007598	0.5096163	0.5003359
7.	0.6155353	0.5988741	0.5172159	0.5124807
8.	0.6155353	0.6026181	0.5240612	0.5047240
9.	0.6155353	0.5979213	0.4709947	0.4457492
10.	0.6155353	0.6012736	0.4133026	0.3694628
11.	0.6155353	0.6057264	0.4495518	0.4021209
12.	0.6155353	0.5979663	0.5308857	0.4908539
13.	0.6155353	0.5971151	0.4101207	0.4174122
14.	0.6155353	0.5984072	0.4871195	0.4772139
15.	0.6155353	0.5969258	0.5226572	0.5105391

A táblázat adatai alapján, a gyakorlat alátámasztja az elméleti állításokat. Vagyis a becsült adatokból összeállított portfólió hasznossága minden esetben kisebb lesz, mint az ismert adatokból meghatározott portfólióé. Vagyis a maximum-likelihood becsléssel meghatározott portfólióalkotási szabály minden esetben alulmúlja az eredeti optimális portfóliót hasznosság szempontjából.

5.2. Stein-féle becslés

A kódban használt jelölések:

- $\Sigma = B\Phi(l)B^T$ -nak megfelele: $S = B\ diag(L)\ t(B)$
- $\lambda_j = L.j$
- $\alpha_j = a.j$
- fi.j = lambda.j / alfa.j korábban $\hat{\phi} = \frac{l_j}{\alpha_j}$

Az R-ben használt kód[3] [13]:

```
> # egy véletlen Sigma megadása
> p <- 5
> set.seed(1)
> S <-cov(matrix(runif(p*100, -1, 1), ncol=5))

> # felbontás a korábban meghatározott alakra
> M <- eigen(S)
> B <- M$vec
> L <- M$val
> round(S - B %*% diag(L) %*% t(B),4)
> round(diag(rep(1,p))-t(B) %*% B,4)
> all(diff(L)<0)

> N <- 20 # a minta elemszámának meghatrározása
# a minta eloszlása adott paraméterű normális eloszlás
> X <- matrix(rnorm(N*p,0,s),ncol=p)
> S.m <- cov(x) # a kovariancia mátrix maximum-likelihood becslése

> St.mod <- function(S.ml,mfi.n)
> {
+ p <- nrow(S.ml)
+ M <- eigen(S.ml)
+ B <- M$vec
+ L <- M$val

+ # az alfa súlyok meghatározása
+ a <- rep(NA,p)
+ for(j in 1:p)
+ a[j] <- mfi.n - p + 1 + 2 * L[j] * sum(1/(L[j]-L[-j]))

+ # a fi értékek monoton csökkenő sorrendbe rendezése
+ n <- rep(1,p)
+ j <- p
+ for(j in p:2)
+ if(a[j]<0)
+ {
```

[3] A kód futtatásához szükséges az *mnormt* pakage telepítése.

```
+ a[j-1]<-a[j]+a[j-1]; a<-a[-j]
+ L[j-1] <- L[j] + L[j-1]; L <- L[-j]
+ n[j-1] <- n[j] + n[j-1]; n <- n[-j]
+ }
+ fi <- L / a

+ j <- length(n)-1
+ while(j>1)
+ if(fi[j]<fi[j+1])
+ {
+ a[j] <- a[j] + a[j+1]; a <- a[-(j+1)]
+ L[j] <- L[j] + L[j+1]; L <- L[-(j+1)]
+ fi[j] <- L[j] / a[j]; fi <- fi[-(j+1)]
+ n[j] <- n[j] + n[j+1]; n <- n[-(j+1)]
+ j <- length(n)-1
+ }
+ else j<-j-1
+ a <- rep(a,n)
+ L <- rep(L,n)
+ fi <- rep(fi,n)

+ S.st <- B %*% diag(fi) %*% t(B)
+ return(S.st = S.st)
+ }

> # a továbbiakban az eljárás az alábbi módon hívható meg:
> X <- matrix(rnorm(N*p, 0, S), ncol=p)
> S.m <- cov(X)
> St.mod(S.m, N)

> save(St.mod, file = 'StMod.rda')
```

Példa a futtatás során kapott mátrixra

A kezdetben megadott véletlen S mátrix:

$$S = \begin{pmatrix} 0.286406425 & 0.0049552605 & 0.043113594 & -0.529716815 & -0.0004910509 \\ 0.0049552605 & 0.2955367266 & 0.002932472 & -0.0008100949 & 0.0042799913 \\ 0.0431135936 & 0.0029324723 & 0.310793544 & 0.0335964434 & -0.0217541948 \\ -0.0529716415 & -0.0008100949 & 0.033596443 & 0.3360363299 & 0.0071821395 \\ -0.0004910509 & 0.0042799913 & -0.021754195 & 0.0071821395 & 0.3702783003 \end{pmatrix}$$

Az S mátrix maximum-likelihood becslése:

$$S.m = \begin{pmatrix} 0.27233499 & 0.010643301 & -0.015135434 & -0.063137796 & -0.025859838 \\ 0.01064330 & 0.325385691 & 0.019690486 & 0.031573102 & 0.002944032 \\ -0.01513543 & 0.019690486 & 0.353856511 & 0.004161657 & -0.054171541 \\ -0.0631378 & 0.031573102 & 0.004161657 & 0.35682759 & 0.097174237 \\ -0.02585984 & 0.003244032 & -0.054171541 & 0.09717423 & 0.475607649 \end{pmatrix}$$

A Stein-féle becslés S-re:

$$S.st = \begin{pmatrix} 0.0189766394 & 3.208240e-05 & -1.230143e-04 & 2.934158e-04 & 0.0005097139 \\ 0.0000320824 & 1.907313e-02 & 3.716819e-05 & -8.865422e-05 & -0.0001540077 \\ -0.001230143 & 3.716819e-05 & 1.894031e-02 & 3.399289e-04 & 0.0005905152 \\ 0.0002934158 & -8.865422e-05 & 3.399289e-04 & 1.827202e-02 & -0.001408507 \\ 0.0005097139 & -1.540077e-04 & 5.905152e-04 & -1.408507e-03 & 0.016636002 \end{pmatrix}$$

5.3. Az előző két módszer összehasonlítása

```
load('StMod.rda') # az St.mod() függvény meghívása
p <- 5
set.seed(1)
m <- runif(p,-1,1) # véletlen várható érték
S <- cov(matrix(runif(p*100,-1,1),ncol=5)) # véletlen kov. mátrix

# maximum-likelihood becslés S-re egy N elemű minta alapján
N <- 20
X <- matrix(rmnorm(N*p,0,S),ncol=p)
S.m <- cov(X)

St.mod(S.m,N) # a Stein becslés kiszámítása

# A különböző becslési kockázatok
haszon.plus <- function(mu,Sigma,gamma=3,N=50)
{
X <- rmnorm(N,mu,Sigma)
m.e <- colMeans(X)
S.e <- cov(X)
S.st <- St.mod(S.e,N)
w <- solve(Sigma) %*% mu / gamma
```

```
w.e.m <- solve(Sigma) %*% m.e / gamma
w.e.s <- solve(S.e) %*% mu / gamma
w.e.ms <- solve(S.e) %*% m.e / gamma
w.st <- solve(S.st) %*% m.e / gamma
U <- t(w) %*% mu - gamma * t(w) %*% Sigma %*% w / 2
U.e.m <- t(w.e.m) %*% mu - gamma * t(w.e.m) %*% Sigma %*% w.e.m / 2
U.e.s <- t(w.e.s) %*% mu - gamma * t(w.e.s ) %*% Sigma %*% w.e.s / 2
U.e.ms <- t(w.e.ms) %*%mu - gamma * t(w.e.ms) %*% Sigma %*% w.e.ms / 2
U.st <- t(w.st) %*% mu - gamma * t(w.st) %*% Sigma %*% w.st  / 2
return(c(U=U,U.e.m=U.e.m,U.e.s=U.e.s,U.e.ms=U.e.ms,U.st=U.st))
}
haszon.plus(m,S,g=3,N=50)

ertekel <- function(mu,Sigma,N=10)
{
sim <- haszon.plus(mu,Sigma)
for(k in 2:N)
sim <- rbind(sim,haszon.plus(mu,Sigma))
return(sim)
}

# Véletlen mu-Sigma paraméterpár megadása
set.seed(1)
mu <- runif(5,-1,1)
Sigma <- cov(matrix(runif(5*100,-1,1),ncol=5))
gamma <- 3

res <- ertekel(mu,Sigma,10)
colMeans(res)
```

5.4. Élő adatsorok

Az eljárásokat kipróbáltam élő adatsorokon is. Ezeknek a jellemzői, hogy nem stacionér adatok és a trend-adatoktól megtisztítva vizsgáltam. Ezek is bizonyították, hogy a gyakorlati számítások egybevágnak az előző fejezetekben bemutatott elméletekkel.
A vizsgált két élőadatsor: az időátlagolt fogyasztás és vagyon értékének logaritmusa [14] és a cukor árának logaritmusa [15]: havi adatok három váraosra vonatkozólag (Buffalo, Minneapolis és KansasCity) 1972 augustustól 1980 novemberéig.

Irodalomjegyzék

[1] Varga-Haszonits István: A pénzügyi kockázat mérése és kezelése
Gazdasági Fizika Téli Iskola (előadás: 2009. január 31.)
Elérés dátuma: 2014. 05. 20.
http://tisk.mafihe.hu/tisk09/eloadasok/tisk.pdf

[2] Tulassay Zsolt: Kockázatos pénzügyi eszközök
Budapesti Corvinus Egyetem (előadás: 2006. március 1.)
Elérés dátuma: 2014. 04. 27.
http://joed.hu/suli/BCE-KTK-GTK/VPD/_leckek%F6nyv.hu/04.%20el%F5ad%E1s%20-%20kock%E1zat.pdf

[3] Tulassay Zsolt: EFFAS Portfólió-menedzsment
(előadás: 2011. március 4-5.)
Elérés dátuma: 2014. 06. 01.
http://www.bankarkepzo.hu/images/articles/349/file/effas_portfolio_2011_tulassay.pdf

[4] Sharpe, W. F.: "The Sharpe Ratio" (1994)
The Journal of Portfolio Management
http://www.stanford.edu/~wfsharpe/art/sr/sr.html

[5] Rmetrics Core Team and Diethelm Wuertz (2009)
fPortfolio: Rmetrics - Portfolio Selection and Optimalization
(version: 2100.78.)
http://CRAN.R-project.org/package=fPortfolio

[6] Nydick, S. W.: "The Wishart and Inverse Wishart Distributions" (2012)
http://www.tc.umn.edu/~nydic001/docs/unpubs/Wishart_Distribution.pdf

[7] Landsman, Z. M. and Valdez, E. A.: "Tail Conditional Expectations for Elliptical Distributions" (2003)
North American Acturial Journal Vol. 7., No. 4. (55-71 és 118-123)
http://math.illinoisstate.edu/actuary/downloads/CTE-Elliptical.pdf

[8] Elton, E. J.; Gruber M. J.; Brown S. J. and Goetzmann W. N.: Modern Portfolio Theory and Investment Analysis (2009)

[9] Markowitz, H.: "Portfolio Selection" (1952)
The Journal of Finance, Vol. 7, No. 1. (77-91)
https://www.math.ust.hk/~maykwok/courses/ma362/07F/markowitz_JF.pdf

[10] Tobin, J.: "Liquidity Preference as Behavior Towards Risk" (1958)
Review of Economix Studies 25.1 (65-86)
http://cowles.econ.yale.edu/P/cp/p01a/p0118.pdf

[11] Kan, R. and Zhou G.: "Optimal Portfolio Choice with Parameter Uncertainty" (2007)
Journal of Financial and Quantitative Anal., Vol. 42., No. 3. (621-656)
http://apps.olin.wustl.edu/faculty/zhou/KZ_JFQA_W07.pdf

[12] Lin, S. P. and Perlman, M. D.: "A Monte Carlo Comparsion of Four Estimators of a Covariance Matrix" (1985)
Proceedings of the Sixth International Symposium on Multivariate Analysis (411-429) (P.R. Krishnaiah, ed.)

[13] Alan Genz and Adelchi Azzalini (2009)
The multivariate normal and t distributions (version1.3-3)
http://CRAN.R-project.org/package=mnormt

[14] Grossman, S. J.; Malino, A. and Shiller, R. J.: "Estimating the Continuous-Time Consumption-Based Asset-Pricing Model"
(July 1987)
Journal of Business and Economic Statistics, Vol. 5., No. 3., (315-327)

[15] Taio, G. C. and Tsay, R. S.: "Model Specification in Multivariate Time Series "(1989)
Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), Vol. 51., No. 2., (157-213)