Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Laky Tibor

BSC Szakdolgozat

A sportfogadás egy matematikai modellje

A bennfentes tétek arányának becslése

Külső konzulens:
Pálffy László
matematikus
Pro Ludo díjas játékfejlesztő

Belső konzulens:
Zempléni András
egyetemi docens
Valószínűségelméleti és
Statisztika Tanszék

Budapest, 2014

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm Pálffy Lászlónak, hogy feltétlen segítőkészségével és érdekfeszítő ismeretterjesztésével motiválta szakdolgozatom, és köszönöm Zempléni András Tanár Úrnak, hogy iránymutatásával és folyamatos segítségével lehetővé tette szakdolgozatom létrejöttét.

Tartalomjegyzék

Rövidítések jegyzéke **4**

Bevezetés **5**

1. A sportfogadás menete, alapfogalmak **7**

2. Az alapmodell és a két módszer **10**

2.1 Modell a várható haszon definiálására 10
2.2 A várható haszon maximalizáló módszer 13
2.2.1 A bennfentes tétek arányának kiszámítása 16
2.2.2 A maximalizáló módszer összegzése 21
2.3 A kockázat minimalizáló módszer 22
2.4 A két módszer elméleti összehasonlítása 23

3. Alkalmazás **26**

3.1 Az alkalmazáshoz használt program 26
3.2 A két módszer gyakorlati összehasonlítása 26

4. Összefoglalás **33**

5. Függelék **34**

5.1 Oddsok kiszámítása és konvertálása másik típusba 34
5.2 Arbitrázs 34
5.2.1 C++ program arbitrázs számolására 35
5.3 A bennfentes tétek aránya az $n = 2$ esetben 36
5.4 A számításokra használt program 38

Irodalomjegyzék **41**

Rövidítések jegyzéke

n	Az adott esemény kimeneteleinek száma. Általában feltesszük, hogy $n \geq 3$ a várható haszon maximalizáló módszer általános alakjának érdekében.
π	Az esemény kimeneteleire egy bizonyos fogadóiroda által meghatározott árak n-dimenziós vektora, $\forall i : \pi_i \in (0;1)$.
O	Az eseményre kimeneteleire kínált, adott π vektorhoz tartozó oddsok n-dimenziós vektora, $\forall i : O_i = \frac{1}{\pi_i}$.
β	Adott π vektor koordinátáinak összege, $\beta = \sum_{i=1}^{n} \pi_i$, $1 < \beta$.
β^*	Adott eseményhez tartozó legkisebb β értéke.
p	Adott eseményre a játékosok által vélt valószínűségek n-dimenziós vektora, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.
z^*	Adott eseményen a bennfentes játékosok aránya, $0 < z^* < 1$.
α	Adott eseményen a bennfentes játékosok birtokába jutott információ súlya, $0 < \alpha < 1$.
z	A bennfentes tétek aránya, az α súly és a z^* bennfentes játékosok arányának szorzata.
R	A konkurenciára nézve legjobb árak megválasztása után, azok egységes növelésére használt konstans. A várható haszon nagysága.

Bevezetés

A szerencse megkísértésének vágya az ember veleszületett tulajdonsága - írta Loósz Vera és Gálfalvi István Szerencsekönyvükben. A nyerés okozta eufória már az ókori embert is rabul ejtette. A kocka egy kezdetleges első formája, amely állatok bokacsontjából készült, lehetőséget adott a közösségi játékra, versengésre, a gyakori siker reményét kínálta. Ennek az ősi játéknak több változata terjedt el, vált szenvedélyes játékká Kínától Egyiptomig. Már Tutenhamon fáraó sírjából is kockakészletek kerültek elő, de görög mítoszok szólnak arról is, hogy Zeusz, Hádész és Poszeidón istenek kockadobással döntötték el a föld, a tengerek és a pokol felosztását.

Idővel a többlettermelés lehetőséget adott a játék magasabb, veszélyesebb szintre emelésére, fogadással tették izgalmasabbá. Kockán függtek ékszerek, házak, állatok, birodalmak, országrészek, kastélyok, még Krisztus köntösének sorsa is. Fogadni mindenre lehetett és lehet, mióta a fogalom létezik. De az ember arra szeret a leginkább fogadni, amiről ismeretei vannak és azt gondolja, többet tud róla ellenfelénél. Így jutottak az ókori görögök már kétezer évvel ezelőtt arra a gondolatra, hogy fogadjanak kedvenceikre például az olimpiai kocsiversenyeken.

Minden valamire való arisztokratának volt versenyistállója, így a fogadás ezen formája hamar elterjedt, először Athénban, majd Rómában. De ez mégsem tekinthető a sportfogadás mai formáját meghatározó kezdőlépésnek. A hozzáállás, miszerint ha valakinek van még pénze, akkor nem a tétet növeli, hanem az esélyeit igyekszik ügyes-bajos módon "javítani", sokáig rontott el versenyeket és vette el a köznép kedvét a játéktól. Nem beszélve arról, hogy például Egyiptomban a versenyek kimenetelét gyakran előre tudni lehetett. Az íratlan szabály szerint külföldivel szemben a hazainak, szegényebbel szemben a gazdagabbnak kellett nyernie.

A sportfogadás szervezett formája a lottó kialakulásával köthető egybe. A XVII. század elejére a Földközi-tenger menti népek már mindenre fogadtak, mint a genovaiak például a köztársasági kormányzótanács évenként választott új tagjaira. Előbb 120, később csak 90 választott ember közül sorsolással döntötték el, hogy melyik 5 kerülhet be a tanácsba. Fogadásokat lehetett kötni az alkalmi "árusoknál" arra, hogy egy szenátor az öt kisorsolt közt lesz, de arra is, hogy a bejelölt szenátort elsőként sorsolják ki. Ennek az utóbbi eseménynek ugyan az elméleti valószínűsége 1/90 volt, de a szervezők a befizetett tét 60-szorosát ígérték (így generálva a szervezési költségek megtérülését és egy kis profitot). Benedetto Gentile szenátor ismerte fel először, hogy a fogadások ezen formája az államkincstárt is gyarapíthatná. Szabad kezet kapott a játék kidolgozására, és irányításával 1620-ban létrejöhetett a lottótörténet első állami húzása. A szenátorokat számokkal helyettesítették, majd fogadni lehetett az első kisorsolt szenátor számára és a maihoz hasonlóan, ám csak legfeljebb három (idővel négy) szenátoréra. A különböző típusú fogadásokra különböző szorzókat kínáltak. Míg egy választott szenátor beválasztására 13-15-szörös nyereményt ígértek, addig három választott szenátor esetén körülbelül 1000-szerest, ami sokkal kisebb, mint amit valószínűsége szerint kellett volna ajánlani. Ám a szervező által vállalt kockázat megnőtt, ha kevesen játszottak, vagy sokan ugyanazokra a számokra fogadtak. A fogadásszervezők először úgy védekeztek a túlfogadás veszélye ellen, hogy az árbevételüknek arányában arány-limiteket határoztak meg az egyes "népszerű" kimenetelekre való fogadási összeg korlátozására. Ha például a számpárok fogadásában a 15-26 számpáros részesedése elérte az 5% -ot, akkor a további fogadásokat arra a számkombinációra lezárták/felfüggesztették. Ez motiválta a mai sporfogadás egyik alapelvét, hogy a szorzókat változtatni kell a tétek nagyságától és eloszlásától függően.

Bár a sportfogadás eleinte csak a kiváltságosok élvezete volt, a korai lottó fejlődésével és módszerének átvételével fokozatosan új rétegek tudtak bekapcsolódni a játékba. A XIX. században a totalizatőr rendszer feltalálásával már rohamosan nőni kezdett a játékosok tábora. A rendszer alapelve, hogy a befolyt téteket egy fix haszon levétele után a nyertes játékosok között arányosan kiosztják, adott esetben sokkal nagyobb nyereményt is jelenthetett, mint amennyit valószínűsége tükrében vártak.

A XX. század végén az internet elterjedésével és az online fogadási lehetőség megjelenésével a kereslet tovább növekedett. Az online fogadóirodák fokozatosan vették át az irányítást és mára már a fogadók nagy része, különösen a skandináv országokban otthonról (de egyre nagyobb arányban mobiltelefonjukról) játszik. A kereslet olyan szolgáltatási hátteret igényel, amely képes hosszútávon bizosítani a játéklehetőséget. Ehhez azonban a szolgáltatóknak tisztában kell lenniük nemcsak az aktuális mérkőzések körülményeivel, hanem a játékosok általános hozzállásával és hozáértésével. Készen kell állniuk arra, ha olyan információ lát napvilágot a játékosok között, amely a fogadóiroda tudtán kívül modósíthatja a kimenetelek valószínűségeit. Ha nem veszik figyelembe ennek eshetőségét, egy ilyen alkalommal könnyen csődbe juthatnak, bármilyen nagy hasznot is halmoztak fel.

Szakdolgozatom elsődleges célja egy már ismert modell alapján különböző eseményekre becsülni a tétek azon arányát, amit a játékosok valamilyen bennfentes információ alapján tehettek meg. Ehhez először ismertetek egy általános modellt, amivel formalizálom, hogy mi a bennfentes tét és kik a bennfentesek. Majd ebből a fogadóirodák kétféle, különböző hozzáállását származtatom, a kockázat minimalizálót és a várható haszon maximalizálót, és külön a két módszerből nyert arányokat hasonlítom össze.

1. fejezet

A sportfogadás menete, alapfogalmak

Sporteseményekre fogadni úgynevezett fogadóirodáknál, vagy angolul bookmakereknél lehet. Ezek mára már többségében online felületek, amelyekre pénzünket feltöltve azzal egyenértékű, virtuális pénzzel gazdálkodhatunk.

Bár a világon sokhelyütt a totalizatőr fogadási rendszer a legkedveltebb, Európában már inkább az úgynevezett Dutch-book rendszer. A kettő közti különbség az, hogy míg a totalizatőrnél a tétek megtétele után, a jutalékot levonva, arányosan osztják szét a nyertesek közt bevételt, addig a Dutch-book rendszernél egy fix szorzóra lehet téteket tenni, amivel előre tudni lehet a várható nyeremény értékét. Mindkét módszernek mindkét oldalról megvannak a maga előnyei és hátrányai, ám mivel az alábbiakban kifejtett modellben a Dutch-book rendszert használom, ezért most ezt a fogadási szisztémát ismertetem részletesebben.

Tehát a fogadóiroda az események kimeneteleire szorzókat kínál, amiket más néven oddsoknak nevezünk. Ezek egyikét kiválasztva tétet helyezhetünk fel kedvenc csapatunk győzelmére. Ha a csapat veszít, tétünket a fogadóiroda elnyeri, míg ha nyer, akkor nyereményünk a feltett tét és a kiválasztott oddsnak megfelelő szám szorzata.

Ezek az oddsok többféle formájúak is lehetnek. Európában a legnépszerűbbek a decimálisak és a frakcionálisak, míg Amerikában (ebben a rendszerben) az úgynevezett amerikai (moneyline) oddsok. Ezeken felül egyes irodákban elérhetőek még többek között a szorzók indonéz, maláj, vagy honkongi formája is.

Nézzünk egy-egy példát a három legnépszerűbbre. Tegyük fel, hogy kedvenc csapatunk győzelmére szeretnénk fogadni, aminek nyerési esélye 60%-ra becsülhető.

1. Decimális odds

   Ez a típus a legkönnyebben kiszámítható, decimális formában van megadva. A fenti példánál a 60%-os győzelemre körülbelül 1,66-os szorzót fogunk kapni, ami a valószínűség reciproka. Csapatunk győzelme esetén a *jóváírt pénzünk* = *tét* $\cdot$ *1,66.*

2. Frakcionális odds

   A frakcionális, vagy más néven angol oddsok, törtekként vannak megjelenítve, a nyeremény értékét mutatják a megtett téthez viszonyítva. A fenti esetben a 60% tekinthető úgy, mint 10 alkalomból 6-szor nyernek, 4-szer veszítenek, ami frakcionális oddsnál 4/6-ot, egyszerűsítve 2/3-os oddsot jelent. Vagyis ha nyerünk, nyereményünk a feltett tét 2/3-a, a számlánkon jóváírt pénz pedig a nyeremény és a tét összege.

3. Amerikai odds

   Ez az oddsfajta egy százas alapú rendszert, mondjuk 100$-t használva kétféle típusra bomlik. Ha a nyerési esély nagyobb, mint 50%, akkor az odds egy negatív szám lesz, ami azt mutatja, hogy mennyit kéne kockáztatnunk 100$ nyeréséhez. Például 60% esetén -150-es oddsot kapunk, ami annyit tesz, hogy 150$ feltétele esetén nyerhetünk 100$-t. Ha az esély kisebb, mint 50%, akkor azt mutatja, hogy 100$ kockáztatása mellett mennyit nyerhetünk. A fenti példában a komplementer esélye 40%, amihez +150-es odds tartozik, vagyis 100$-t feltéve 150$-t nyerhetünk, így összesen 250$-t írnának jóvá.[1]

A játékosok ezeket az oddsformákat használva fogadnak, míg számlájuk egyenlege le nem merül, vagy jobb esetben, míg ki nem veszik nyereményük.

A sportfogadás a piaci kereskedelem egy leegyszerűsített formája. Tekinthető úgy, hogy a bukméker 1-et fizet csapatunk győzelme esetén, különben pedig 0-t, és ekkor a decimális oddsok reciprokai éppen a kimenetelek árait jelölik, vagyis hogy mennyit kell feltenni ahhoz, hogy 1-et nyerjünk. Ezen árak meghatározására minden bookmakernek saját metódusa van, de vannak közös szempontok, amiket mindegyiknek szem előtt kell tartania, mint például

i, működési és fenntartási költségek, szerencsejáték adó,

ii, esetleges monopólium fenntartásának költsége, kizárólagossági jogok díja,

iii, kockázatminimalizálás,

iv, biztosítás esetleges belső információk megjelenésére és terjedésére a játékosok között.

Feltehetjük, hogy a bookmaker célja az igények teljeskörű kielégítése, nem teheti meg, hogy nem ajánl oddsot egy olyan kimenetelre, amelynek népszerűsége nagy, legyen ennek ára akár túl alacsony, vagy túl nagy. Viszont minden fogadóirodának egyéni döntése, hogy az oddsokon mekkora árrést alkalmaz, és ezt hogyan osztja szét.

[1] Oddsszámítást és egyik típusból a másikba konvertálást lásd Függelék 5.1.

A továbbiakban jelöljük egy adott, n lehetséges kimenetelű eseményhez tartozó oddsok vektorát $O = (O_1; \ldots; O_n)$-nel. Ekkor a kimenetelekhez tartozó árak vektora legyen $\pi = (\pi_1; \ldots; \pi_n)$, ahol tehát $\pi_i = \frac{1}{O_i}$, $i = 1, \ldots, n$. Feltehetjük, hogy π minden koordinátája 0-nál nagyobb és 1-nél kisebb, ugyanis a decimális oddsok pozitívak, emellett 1-nél biztosan nem kisebbek, különben a játékos győzelme esetén is kevesebb pénzt kapna vissza, mint amennyit feltett. Az 1-es odds egy biztos esemény bekövetkezésére elképzelhető lenne, de mivel általában a fogadóirodának kell adóznia a játékok után, emellett a játékosok sem nyernek vele, ezért feltehetjük, hogy biztos eseményre nem lehet fogadni.

Ideális esetben, mint ahogy azt korábban láttuk, az árak a kimenetelek valószínűségét jelölnék, összegük pedig 1 lenne. Ez azt jelentené, hogy a fogadóiroda haszna egyedül csak szerencséjén múlna, hosszútávon várhatóan ugyanannyit fizetne vissza, mint amennyi tétet elfogadott. Az árak növelésével viszont csökkentheti a visszafizetési rátát, ezáltal (egy majdnem) biztos profitra tehet szert. A növelés által nyert bruttó haszonszázalékot fogom árrésnek nevezni, és β-val jelölöm az új árak bruttó összegét, amit úgy értelmezek, hogy a hozzá tartozó haszon még csak a bruttó profit.

Például ha páros-páratlanra szeretnénk oddsot kínálni, akkor ideális esetben $\pi = (0.5; 0.5)$ lenne, $O = (2; 2)$ oddsokkal. Ebben az esetben várhatóan ugyanannyit fizetünk vissza, mint amennyi a bevételünk, ezért legyen $\pi = (0.52; 0.52)$ és így $O = (1.92; 1.92)$. Ezzel az új $\beta = 1.04$, amivel a visszafizetési ráta 100%-ról 96%-ra csökkent, vagyis 4%-os árrést (várható profitot) nyertünk, amiből le kell vonni a fent említett költségeket.

Természetesen, ha a fogadóiroda növelés helyett csökkentené az oddsokat, akkor az új árak összege kisebb lenne, mint 1, és ekkor egy úgynevezett arbitrázs helyzet alakulna ki, ami ezúttal nem a fogadóirodának, hanem a játékosoknak biztosítana biztos nyerési lehetőséget.[2] Ezért a továbbiakban feltehetjük, hogy $1 < \sum_{i=1}^{n} \pi_i = \beta$.

A fentiekből adódóan a továbbiakban feltehetjük, hogy egy olyan piacon, ahol a fogadóirodák egymással versenyben vannak a játékosokért, az a bookmaker élvezi a legnagyobb népszerűséget, amelyik a legkisebbnek választja az árrését, vagyis β-ja nem sokkal nagyobb, mint 1. Így célszerű bevezetni β^*-ot, ami a továbbiakban jelölje egy adott kimenetelhez tartozó, a piacon megtalálható legkisebb β értékét.

Látni fogjuk, hogy ez a növelés nem minden kimenetelen egyenletes. Egy 'esélytelen' kimenetelre kínált oddsnak értelemszerűen nagyon nagynak kell lennie, ám a kockázat nagysága miatt a módosítás ezeken jóval markánsabb lesz, mint azokon, amelyeknek reális esélyük van a győzelemre. Nem beszélve arról, hogy egy 'túlzottan' esélyes kimenetel árát általában inkább az 'esélytelen' kárára csökkentik. Ezt a jelenséget favorit-esélytelen torzításnak hívjuk.

[2] Arbitrázsra példa és arbitrázs kalkulátor lásd Függelék 5.2.

2. fejezet

Az alapmodell és a két módszer

A következő modell első, általam ismert megfogalmazója Hyun Song Shin, a közgazdaságtan egyik koreai professzora. Alapjait és első megoldását 1991-92-93-ban írt tanulmányaiban ismertetette[1][2][3], amire '94-ben Bruno Julien és Bernard Salainé egy gyakorlatban könnyebben kezelhető, másik megoldást adott[4]. '99-ben John Fingleton és Patrick Waldron egy jóval általánosabb modell keretein belül vizsgálta ugyanazt a felvetést, és az eredeti feladatra egy harmadik, még könnyebben kezelhető és még hatékonyabb megoldást adtak[5]. Szakdolgozatom során ezen kutatók munkáinak együttes eredményeit ismertetem, helyenként saját bizonyításokkal és a gyakorlatból származtatott saját mérési eredményekkel.

2.1. Modell a várható haszon definiálására

Az első fejezetben fogadóirodák helyzetét vizsgáltuk, így most vessünk egy pillantást a másik oldalra, vagyis a játékosok közösségére.

Tegyük fel, hogy két típusú ember vesz részt a játékban. Az egyik, aki az eseményekre publikus források alapján tippel, vagy szimplán csak a megérzéseire hagyatkozik. Nevezzük őket informálatlan játékosoknak. Feltehetjük, hogy egy ilyen ember 1 valószínűséget társít az általa favorizált kimenetelhez, és 0-t a többihez. Mivel a modellünkben nem számít, hogy egy adott személy mire fogad, ezért az informálatlan játékosok $p = (p_1; \ldots; p_n)$ stratégiavektorát úgy definiálom, hogy p_i jelölje azt az arányt, hogy az i-edik kimenetelre az informálatlan játékosok hányad része fogad.

A másik típusú embert nevezzük informált, vagy bennfentes játékosnak. A bennfentes játékos szintén birtokában van minden elérhető információnak, de még olyan pozitív információról is tudomást szerez, amiről a fogadóiroda nem tud. Mondhatni, az információs hierarchia tetején a bennfentesek, közepén a bookmaker és alján az informálatlan játékosok állnak.

Ha feltesszük, hogy az információkat kategorizálni tujuk, akkor jelöljük a bennfentes játékosok többlettudásának súlyát α-val, ahol $0 < \alpha \leq 1$. Ekkor az általuk becsült valószínűségek vektora legyen $(1-\alpha)p + \alpha e_i$, ahol e_i az n-dimenziós vektrotérben az i-edik egységvektort jelöli.[1] Mivel $\alpha = 1$ esetén az adott csapat győzelme így biztos lenne, amit (ideális esetben) még a bennfentesek sem tudhatnak előre, így a továbbiakban legyen $0 < \alpha < 1$.

Ezek után jelöljük az informált játékosok arányát z^*-al, illetve a kívülállók arányát $(1-z^*)$-al. Ha a játékosok közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet, akkor az ő stratégiája

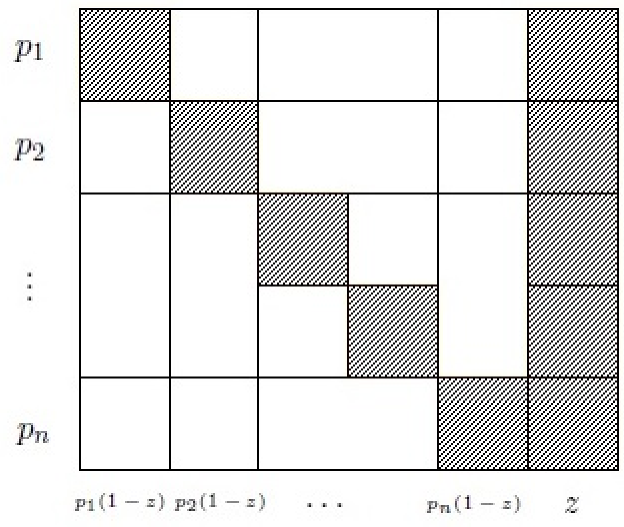
$$\begin{cases} p & (1-z^*) \text{ valószínűséggel} \\ (1-\alpha)p + \alpha e_i & z^* \text{ valószínűséggel.} \end{cases}$$

Eszerint a várható fogadások aránya az i-edik kimenetel bekövetkezésére:

$$p_i(1-z^*) + ((1-\alpha)p_i + \alpha)z^* = p_i(1-\alpha z^*) + \alpha z^*$$

Ebből arra következtethetünk, hogy az információ mértéke és a bennfentesek aránya ezzel a modellel nem választható külön. Ez motiválja, hogy a bennfentes fogadók z^* aránya helyett inkább a bennfentes tétek $z = \alpha z^*$ arányával foglalkozzunk, amit úgy értelmezünk, hogy a tétek azon z hányada, amely valamilyen nem publikus információ hatására lett megtéve és nyert.

Ekkor az alábbi diagram satírozott részei a tétek összegének azon arányait mutatják, amikor a fogadóiroda a játékosoknak a satírozott rész területének ellenében fizet vissza, míg a jelöletlen részek azok, amikor a játékosok elvesztették pénzüket.



2.1. ábra: A veszteség-nyereség aránya.

[1] Értsd: p_i-t a komplementere α-szorosával növeljük, míg a többit α-szorosaikra csökkentjük.

Tekintsük a játékosok által megtett tétek összegének értékét egységnek, ezzel a modell nem veszít hatékonyságából, és jelölje $\pi = (\pi_1; \ldots; \pi_n)$ vektor továbbra is a kimenetelek árát. Ekkor a fogadóiroda várható visszafizetése a bennfentesek felé $\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{z}{\pi_i}$, illetve az informálatlan játékosok felé $\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{p_i(1-z)}{\pi_i}$.

Ezek után a fogadóiroda várható visszafizetése tetszőleges i-edik kimenetel győzelme esetén $\frac{p_i(1-z)+z}{\pi_i}$, és emiatt általános esetben, az esemény végbemenetele után a fogadóiroda várható visszafizetése a játékosok felé

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{p_i(1-z)+z}{\pi_i}.$$

Mindennek tudatában a fogadóiroda *várható hasznát* a következő függvény adja:

$$f(\pi) = 1 - \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{p_i(1-z)+z}{\pi_i}, \text{ ahol } \sum_{j} \pi_j \leq \beta^*, \quad \forall i : \pi_i \in (0; 1) \tag{2.1}$$

A továbbiakban a bookmakerek kétféle hozzáállását modellezük. Az egyik, amelyik a várható haszna (másnéven profitja) maximalizását helyezi előtérbe, míg a másik, amelyik a kockázat minimalizálását tartja fontosabbnak. Célunk mindkét esetben előzetesen meghatározni az optimális π értékeit, majd - feltéve, hogy a fogadóiroda is ezen értékeket választotta - utólagosan becsülni a bennfentes tétek arányát.

2.2. A várható haszon maximalizáló módszer

Tegyük fel, hogy egy választott fogadóirodának célja a 2.1 várható haszon maximalizálása π-ben. Ennek első megoldását Shin adta, a témához kapcsolódó második cikkében, 1992-ben. Mivel '99-ben Julien és Salainé a feladatot nemcsak más szemszögből közelítette meg, hanem általánosabban is kezelte, ezért az ő megoldásukra fogok hivatkozni. Bár a megoldás főbb gondolatmenete az ő tanulmányukban is megtalálható, teljes egészében én írom most le.

A levezetés előtt ismertetem a fogalmakat, amiket felhasználok, illetve a Lagrange-féle multiplikátor módszert, aminek segítségével oldom majd meg a feladatot.

2.2.1. Definíció (Halmazon vett szélsőérték). Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény, és $H \subset D_f$ nem üres részhalmaz. Ekkor f-nek az $x_0 \in H$ pontban minimuma (maximuma) van H-n, ha $\forall x \in H : f(x_0) \leq f(x)$ $(f(x_0) \geq f(x))$.

2.2.2. Definíció (Feltételes szélsőérték). Legyenek $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g_1; \ldots; g_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ adott függvények és legyen $H := \{x \in \mathbb{R}^n | g_1(x) = 0; \ldots; g_k(x) = 0\}$, továbbá tegyük fel, hogy $H \neq \emptyset$. Ekkor azt mondjuk, hogy f-nek a $g_1(x) = 0; \ldots; g_k(x) = 0$ feltételek mellett feltételes szélsőértéke van az $x_0 \in H$ pontban, ha a H halmazon az f függvénynek szélsőértéke van az x_0 pontban.

2.2.1. Tétel (Lagrange-féle multiplikátor módszer). Legyenek $f; g_1; \ldots; g_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(k \leq n)$ folytonosan differenciálható függvények. Tegyük fel, hogy az f függvénynek a $g_1(x) = 0; \ldots; g_k(x) = 0$ feltétel mellett feltételes szélsőértéke van az $x_0 \in H \cap D(f)$ pontban, ahol $H = \{x \in \mathbb{R}^n | g_1(x) = 0; \ldots; g_k(x) = 0\}$ és

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \partial_1 g_1(x_0) & \partial_1 g_2(x_0) & \ldots & \partial_1 g_k(x_0) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \partial_n g_1(x_0) & \partial_n g_2(x_0) & \ldots & \partial_n g_k(x_0) \end{pmatrix} = k.$$

Ekkor léteznek $\lambda_1; \ldots; \lambda_k \in \mathbb{R}$ számok, hogy

$$F(x) := f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \ldots + \lambda_k g_k(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ függvényre } F'(x_0) = 0.[10]$$

Szeretném meghatározni a 2.1 függvény maximumát, az adott korlátok mellett. A könnyebb kezelhetőség érdekében módosítsuk a feladatot úgy, hogy teljesítse a Lagrange-féle multiplikátor módszer feltételeit. Az átfogalmazáshoz fontos megjegyezni, hogy a forgalom növelése prioritást élvez az árrés növelésével szemben, ezért ha a bookmaker β-ja nagyobb, mint a győztes β^*, akkor túl nagy árrést alkalmaz a konkurenciához képest és így csökken a forgalma, míg ha kisebbnek választaná, akkor a nagyobb forgalma mellett még növelhetné az árrését is. Ezért akkor jár a legjobban, ha árai összegét az aktuális β^*-nak állítja be, vagyis $\sum\limits_{j=1}^{n} \pi_j = \beta^*$. Emellett a π-re tett korlátok elhagyhatók, ugyanis abban a szerencsés helyzetben vagyunk, hogy $\pi_i \in (0;1)$ teljesülni fog minden koordinátára, feltéve, hogy $\forall i : p_i < 1$.

A módosított feladat a következő: keressük azt a $\pi \in \mathbb{R}^n$ pontot, amelyben $f : (0;1)^n \to \mathbb{R}$ értéke maximális a $g(\pi) = 0$ feltétel mellett, ahol

$$\begin{cases} f(\pi) = 1 - \sum\limits_{i=1}^{n} p_i \frac{p_i(1-z)+z}{\pi_i} \\ \\ g(\pi) = \sum\limits_{j=1}^{n} \pi_j - \beta^*. \end{cases}$$

Mivel f és g az értelmezési tartományon differenciálható függvények összege, ezért maguk is differenciálhatóak, továbbá $\forall \pi \in (0;1)^n$ pontra

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} \partial_1 g(\pi) \\ \vdots \\ \partial_n g(\pi) \end{pmatrix} = 1.$$

Ezért a 2.2.1 tétel alapján, ha f-nek π-ben feltételes szélsőértéke van, akkor létezik $\lambda \in \mathbb{R}$ szám, hogy az $F(x) := f(x) + \lambda g(x) : (0;1)^n \to \mathbb{R}$ függvényre $F'(\pi) = 0$, vagyis

$$\begin{cases} \partial_1 F(\pi) = \partial_1 f(\pi) + \lambda \partial_1 g(\pi) = 0 \\ \vdots \\ \partial_n F(\pi) = \partial_n f(\pi) + \lambda \partial_n g(\pi) = 0. \end{cases}$$

Ez π-ben egy n-ismeretlenes, n egyenletből álló egyenletrendszer, aminek tetszőleges i-edik sorára

$$\partial_i F(\pi) = \partial_i (1 - \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{p_i(1-z)+z}{\pi_i} + \lambda \sum_{j=1}^{n} \pi_j - \beta^*) = p_i \frac{p_i(1-z)+z}{\pi_i^2} + \lambda = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{p_i^2(1-z) + p_i z} = \lambda' \pi_i \quad i = 1; \ldots ; n.$$

Legyen $y_i = \sqrt{p_i^2(1-z) + p_i z}$, és adjuk össze az egyenletrendszer sorait, ekkor

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \lambda' \sum_{i=1}^{n} \pi_i = \lambda' \beta^*.$$

Ezt és az előző egyenletet felhasználva $\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{\beta^*} = \lambda' = \frac{y_i}{\pi_i}$, amiből kapjuk, hogy

$$\pi_i = \frac{y_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} y_j} \beta^* = \frac{\sqrt{p_i^2(1-z) + p_i z}}{\sum\limits_{j=1}^{n} \sqrt{p_j^2(1-z) + p_j z}} \beta^* \quad i = 1; \ldots ; n. \tag{2.2}$$

Vegyük észre, hogy f függvény tetszőleges π_i 0-hoz tartása esetén korlátlanul csökken, illetve a feltétel csak a kapott π pontban teljesül, ezért a szélsőérték csakis maximum lehet, vagyis a 2.2 eredmény maximalizálja a feladatot.

Az eddigiek alapján minden egyes β^*-ra meg tudjuk adni azt a π vektort, ami maximalizálja a várható hasznot. A továbbiakban szeretnénk olyan π-t adni, amely nem függ β^* értékétől.

Helyettesítsük vissza a kapott 2.2 megoldást az f függvénybe.

$$f(\pi) = 1 - \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{p_i(1-z)+z}{\pi_i} = 1 - \frac{1}{\beta^*}\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{p_i^2(1-z)+p_i z}\right)^2$$

Mivel β^* az optimális oddsok reciprokának összegét jelöli, ezért ha a várható profit 0-nál nagyobb lenne, akkor egy másik fogadóiroda rá tudna licitálni egy jobb β-val (ha kisebbek a költségei) úgy, hogy egy kevéssel csökkenti oddsait, ezzel csökkentve a haszon nagyságát, viszont növelve népszerűségét. Ezért feltehetjük, hogy a nettó β^* értéke p és z paraméterek függvényében:[2]

$$\beta^* = \left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{p_i^2(1-z)+p_i z}\right)^2 \tag{2.3}$$

Ezt újra visszahelyettesítve 2.2 megoldásba az optimális árak egy olyan kifejezését kapjuk, amelyek már csak p-től és z-től függenek.

$$\pi_i = \sqrt{p_i^2(1-z)+p_i z}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{p_j^2(1-z)+p_j z} \tag{2.4}$$

Ha tehát egy fogadóirodának az elsődleges célja a várható profitjának maximalizálása, akkor célszerű a 2.4-ben meghatározott nettó árakat meghirdetnie, feltéve hogy ismeri a játékosok p vektorát és a bennfentes tétek z arányát. Ez optimális lesz a konkurenciára nézve, de várhatóan nem termel profitot, ami értelemszerűen nem tekinthető megoldásnak. Hasznát úgy növelheti, ha π_i árait egy kevéssel tovább növeli, szem előtt tartva, hogy ezzel nő β-ja is. Feltehetjük, hogy ezzel nem csökken jelentősen népszerűsége, ugyanis aki ennél jobbat választ, az vagy kevesebbel növelte a kapott eredményt, de kis módosításoknál ez már nem olyan jelentős különbség, vagy nem is növelte, de akkor várhatóan nem termel hasznot. Ezért az optimális nettó π értékeit minden fogadóiroda tetszés szerint módosíthatja egy konstans R szám függvényében, amit érdemes minél kisebbre választani. Ekkor a bruttó árak:

$$\pi_i = \frac{\sqrt{p_i^2(1-z)+p_i z}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{p_j^2(1-z)+p_j z}}{1-R} \tag{2.5}$$

[2]Ez a legjobb abban a tekintetben, hogy ehhez a β-hoz tartozik a legnagyobb népszerűség, viszont várhatóan nem termel hasznot.

Ezzel a várható bruttó haszon nagysága éppen az R értéke lesz.[3]

$$f(\pi) = 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^2}{\frac{y_i \sum_{j=1}^{n} y_j}{1-R}} = 1 - (1-R) = R$$

Megjegyzés:

Az árak növelésével összegük hasonlóan változott, $\beta = \sum_{i=1}^{n} \pi_i = \frac{\beta^*}{1-R}$.

Az alkalmazás során az adott oddsokból számoljuk π-t és β-t, majd különböző R-ekre p-t és z-t, ám ezzel egy korlátot kapunk annak nagyságának választhatóságára, ugyanis mivel $1 < \beta^*$, ezért

$$1 < \beta^* = (1-R)\beta \Leftrightarrow 0 \le R < 1 - \frac{1}{\beta}.$$

2.2.1. A bennfentes tétek arányának kiszámítása

A 2.5-ben kapott π vektor is jól mutatja, hogy általánosan $\forall i : \pi_i > p_i$, és az egyenlőség csak z=0 esetben állhatna fenn, vagyis a bennfentes információ hatással van az oddsokra. Mivel azt sosem tehetjük fel, hogy nincsen bennfentes információ, ezért célszerű meghatározni z körülbelüli értékét. A továbbiakban feltesszük, hogy a fogadóiroda a fentiek alapján határozta meg oddsait, és ezt felhasználva z nagyságára utólagos becslést teszünk.

Első lépésként vizsgáljuk meg a már meglévő eredményeket, ismert

$$\pi_i = \frac{\sqrt{p_i^2(1-z) + p_i z} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{p_j^2(1-z) + p_j z}}{1-R} \quad \text{és } \beta = \sum_{i=1}^{n} \pi_i = \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} \sqrt{p_j^2(1-z) + p_j z}\right)^2}{1-R}.$$

$$\text{Ebből } \frac{\pi_i\sqrt{1-R}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{p_i^2(1-z) + p_i z} \Leftrightarrow \frac{\pi_i^2(1-R)}{\beta} = p_i^2(1-z) + p_i z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 = p_i^2(1-z) + p_i z - \frac{1-R}{\beta}\pi_i^2.$$

Vagyis ha ismerjük π-t, β-t, z-t és R-et, akkor a fenti, p-ben másodfokú egyenlet pozitív megoldása a játékosok által becsült, i-edik kimenetelhez tartozó valószínűséget adja.

$$p_i = \frac{-z + \sqrt{z^2 + 4(1-z)\frac{1-R}{\beta}\pi_i^2}}{2(1-z)} \tag{2.6}$$

[3] Ezért innentől talán érdemes lenne várható profit maximalizáló helyett kockázatsemleges módszernek hívni, ám mivel az oddsokat eredetileg a maximalizálás jegyében választottuk meg, ezért az elnevezést fenntartom.

Tudván, hogy $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, az előző eredményt átrendezve implicit kapjuk z értékét.

$$z = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{z^2 + 4(1-z)\frac{1-R}{\beta}\pi_i^2} - 2}{n-2} \tag{2.7}$$

Mivel a modellt általánosan, tetszőleges n-re szeretnénk kezelni, ezért a továbbiakban feltesszük, hogy $n \geq 3$, de az $n = 2$ eset tárgyalása megtalálható a függelék 5.3 fejezetében.

A feladat tehát a 2.7 egyenletet explicit kifejteni z-re.

Ennek két megoldása közül a z=1 rögtön adódik. Mivel $z = \alpha z^*$, ahol α a bennfentes információ súlya és z^* az informált játékosok aránya, ezért ez azt jelentené, hogy minden játékos biztosan tudja a játék kimenetelét. Mivel korábban feltettük, hogy $0 < \alpha < 1$, ezért ezzel az esettel tovább nem foglalkozunk.

A másik megoldás kiszámításához először tekintsük a következő tételt.

2.2.2. Tétel. Legyen $g : [a;b] \to \mathbb{R}$ folytonos és az $(a;b)$ intervallumon differenciálható függvény, továbbá tegyük fel, hogy $\exists z \in (a;b) : g(z) = z$, vagyis létezik g-nek $(a;b)$-n fixpontja. Ekkor ha $\forall x \in (a;b) : |g'(x)| < 1$, akkor tetszőleges $x_o \in [a;b]$ pontot választva, az $x_{i+1} = g(x_i)$ $i = 0, 1, 2 \ldots$ iteráció konvergens és $\lim_{i\to\infty} g(x_i) = z$.[11]

2.2.1. Bizonyítás. A bizonyításhoz szükséges lemma ezúttal is Joseph Louis Lagrange olasz-francia matematikustól származik.

2.2.3. Lemma (Lagrange-féle középértéktétel). Legyen $g : [a;b] \to \mathbb{R}$ folytonos, az $(a;b)$ nyílt intervallumon differenciálható függvény, ekkor $\exists c \in (a;b) : g'(c) = \frac{g(b)-g(a)}{b-a}$.

A lemma alapján tetszőleges $x \in [a;b]$ és z között létezik c, hogy $g'(c) = \frac{g(x)-g(z)}{x-z}$, vagyis $g(x) - g(z) = g'(c)(x - z)$. Mivel $g(z) = z$ és $x_{i+1} = g(x_i)$, ezért

$$|x_n - z| = |g(x_{n-1}) - g(z)| = |g'(c_n)| \cdot |x_{n-1} - z| \tag{2.8}$$

ahol $c_n \in (x_n; z)$ $i = 0, 1, \ldots$ a Lagrange-féle középértéktétel szerint választott közbülső pont.

Tudjuk, hogy minden $(a;b)$-beli pontra $|g'(x)| < 1$, ezért tegyük fel, hogy $\forall i \in \mathbb{N} :$ $|g'(c_i)| \leq \alpha < 1$, és módosítsuk a 2.8 egyenletet:

$$|x_n - z| = |g'(c_i)| \cdot |x_{n-1} - z| \leq \alpha |x_{n-1} - z| \leq \alpha^n |x_0 - z| \tag{2.9}$$

Mivel $\alpha < 1$, ezért $\lim_{n\to\infty} \alpha^n = 0$, vagyis $\lim_{n\to\infty} |x_n - z| = 0$, ezért az iteráció konvergens és a fixponthoz tart.

$\square$

A 2.2.2 tételt felhasználva szeretném belátni, hogy a következő iteráció a keresett z értékéhez konvergál.

$$\begin{cases} z_0 := 0 \\ z_{i+1} := \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{n} \sqrt{z_i^2 + 4(1-z_i)\frac{1-R}{\beta}\pi_j^2} - 2}{n-2} \end{cases} \tag{2.10}$$

2.2.4. Tétel. Legyen $g(z) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \sqrt{z^2+4(1-z)\frac{1-R}{\beta}\pi_j^2}-2}{n-2}$, ekkor $\exists z^* \in (0;1) : g(z^*) = z^*$ és $z_0 = 0$ kezdéssel a $z_{i+1} = g(z_i)$ $i = 0, 1, 2\ldots$ iteráció ehhez a fixponthoz tart.

2.2.2. Bizonyítás. A bizonyítás két részre tagolódik.

I) A fixpont létezése.

2.2.3. Definíció (Szigorúan konvex). Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy f szigorúan konvex függvény, ha $\forall x, y \in I$ és $\forall t \in [0; 1]$ esetén

$$f(tx + (1-t)y) < t \cdot f(x) + (1-t) \cdot f(y).$$

2.2.5. Lemma. Legyen $f : I \to \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható függvény, ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.

i) f szigorúan konvex függvény I-n;

ii) $\forall x \in I$ esetén $f"(x) > 0$.

Legyen $h_i(z) = \sqrt{z_i^2 + 4(1-z)\frac{1-R}{\beta}\pi_i^2}$, ekkor $h_i'(z) = \dfrac{z - 2\frac{1-R}{\beta}\pi_i^2}{\sqrt{z^2 + 4(1-z)\frac{1-R}{\beta}\pi_i^2}}$ és

$$h_i''(z) = \left[\frac{1}{\sqrt{z^2 + 4(1-z)\frac{1-R}{\beta}\pi_i^2}} - \frac{(z - 2\frac{1-R}{\beta}\pi_i^2)^2}{\left(\sqrt{z^2 + 4(1-z)\frac{1-R}{\beta}\pi_i^2}\right)^3}\right] \cdot \frac{1}{z^2 + 4(1-z)\frac{1-R}{\beta}\pi_i^2}.$$

Ekkor $h_i''(z) > 0 \iff \left(z^2 + 4(1-z)\frac{1-R}{\beta}\pi_i^2\right) > \left(z - 2\frac{1-R}{\beta}\pi_i^2\right)^2 \iff$

$$z^2 + 4\frac{1-R}{\beta}\pi_i^2 - 4z\frac{1-R}{\beta}\pi_i^2 > z^2 - 4z\frac{1-R}{\beta}\pi_i^2 + 4\left(\frac{1-R}{\beta}\right)^2\pi_i^4 \iff$$

$$4\frac{1-R}{\beta}\pi_i^2 > 4\left(\frac{1-R}{\beta}\right)^2\pi_i^4 \iff 1 > \frac{1-R}{\beta}\pi_i^2 \iff \pi_i^2 < \frac{\beta}{1-R}.$$

Mivel $\beta > 1$, $1 - \frac{1}{\beta} > R \geq 0$ és $\pi_i < 1$, ezért ez az egyenlőtlenség z-től függetlenül mindig fennáll.

Ezek alapján $g''(z) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} h_i''(z)}{n-2} > 0$, ezért a 2.2.5 lemma alapján g szigorúan konvex függvény.

Vegyük észre, hogy $g(0) > 0$, ugyanis

$$g(0) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \sqrt{4\frac{1-R}{\beta}\pi_j^2} - 2}{n-2} = \frac{\sqrt{4\frac{1-R}{\beta}} \sum\limits_{j=1}^{n} \sqrt{\pi_j^2} - 2}{n-2} = \frac{\sqrt{4\frac{1-R}{\beta}\beta} - 2}{n-2},$$

ahol $(1-R)\beta = \beta^* > 1$, vagyis $g(0) = \dfrac{2\sqrt{\beta^*} - 2}{n-2} > 0$.

Továbbá $g'(1) > 1$, ugyanis

$$g'(1) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} h_i'(1)}{n-2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(1 - 2\frac{1-R}{\beta}\pi_i^2\right)}{n-2} > \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(1 - 2\frac{1-R}{\beta}\pi_i\right)}{n-2} = \frac{n-2+2R}{n-2} > 1.$$

Mivel $g(z)$ szigorúan konvex és folytonos (0;1)-en, $g(0) > 0$, $g(1) = 1$ és $g'(1) > 1$ ezért $g(z)$-nek szükségszerűen metszenie kell valahol az y=x egyenest a (0;1) intervallumon belül, vagyis létezik z* fixpontja.

II) Az iteráció konvergenciája.

Vizsgáljuk meg $g'(z)$ függvényt a $z = 0$ helyettesítési értékben.

$$g'(z) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{2z - 4\frac{1-R}{\beta}\pi_j^2}{2\sqrt{z^2 + 4(1-z)\frac{1-R}{\beta}\pi_j^2}}}{n-2}$$

$$g'(0) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{-2\frac{1-R}{\beta}\pi_j^2}{\sqrt{4\frac{1-R}{\beta}\pi_j^2}}}{n-2} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} -\sqrt{\frac{1-R}{\beta}}\pi_j}{n-2} = \frac{-\sqrt{\frac{1-R}{\beta}} \sum\limits_{j=1}^{n} \pi_j}{n-2} = \frac{-\sqrt{\frac{1-R}{\beta}}\beta}{n-2} = \frac{-\sqrt{(1-R)\beta}}{n-2}$$

Feltehető, hogy $1 < (1-R)\beta = \beta^*$ kisebb, mint 4, ezért

$$|g'(0)| = \left| \frac{-\sqrt{(1-R)\beta}}{n-2} \right| = \left| \frac{-\sqrt{\beta^*}}{n-2} \right| < 1 \Leftrightarrow n \geq 4.$$

$n \geq 4$ esetén $|g'(0)| < 1$, illetve a szigorú konvexitást és a derivált függvény monoton növekedését kihasználva $g(g(0)) \leq g(0)$, és ezért az iteráció a két érték között, a fixpont körül oszcillál, amíg tetszőlegesen meg nem közelíti.

$n = 3$ esetén elemi egyenletrendezésekkel belátható, hogy $g(g(0)) \leq g(0)$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\beta \leq \frac{9}{4(1-R)}$ és ekkor az $n = 4$ esethez hasonlóan az iteráció konvergens.

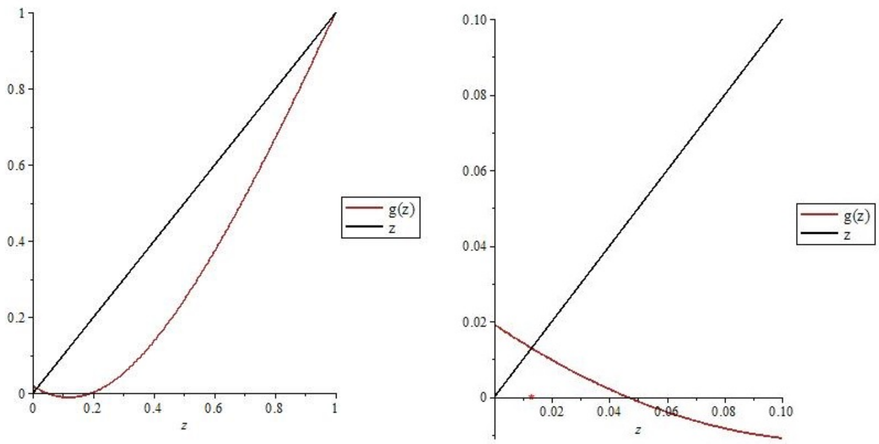
Mivel $R = 0$ esetén $\beta \leq 2.25$, amit még a konkurencia nélküli fogadóirodáknál is feltehetünk, ezért a 2.10 iteráció segítségével tetszőlegesen közelíteni tudjuk a bennfentes tétek arányát.

$\square$

Megjegyzés:

A konvergencia sebessége exponenciális. Ha programozáskor a lépések számát 500-700-nak választjuk, akkor tapasztalataim szerint a pontosság legalább 3 számjegyű lesz, ami bőven elég egy elméleti modell alkalmazásánál.

Nézzünk egy példát az iterációra. Legyen $O = (2.7; 3.25; 5; 5.5)$ egy 4-kimenetelű eseményre kínált oddsok vektora, ekkor $\pi = (0.37; 0.31; 0.2; 0.18)$ (kerekítve) és $\beta = 1.06$. Mivel $0 \leq R < 1 - \frac{1}{\beta}$, ezért a választott R értéke nem érheti el a 0.056-et. Válasszuk R-t 0.02-nek és definiáljuk g(z)-t az iteráció függvényének. Ekkor az iterációt elvégezve z értéke körülbelül 0.0129, vagyis 1.3%.



2.2. ábra: Az iteráció függvénye és az identikus egyenes metszéspontjai.

2.2.2. A maximalizáló módszer összegzése

i) A Lagrange-féle multiplikátor módszer segítségével megadtuk az árak egy olyan optimális π vektorát, ami adott β^* mellett a legnagyobb várható hasznot termeli, feltéve, hogy a fogadóiroda meg tudja becsülni a bennfentes tétek arányát és a játékosok által vélt valószínűségeket.

$$\pi_i = \frac{\sqrt{p_i^2(1-z)+p_i z}}{\sum\limits_{j=1}^{n}\sqrt{p_j^2(1-z)+p_j z}}\beta^* \tag{2.11}$$

Ezután úgy módosítottuk π vektor koordinátáit, hogy a várható haszon maximalizáló hozzáállást tanúsító fogadóirodák között ehhez tartozzon a legalacsonyabb β érték, vagyis várhatóan 0 profitot termeljen, majd a haszon érdekében egységesen emeltük az árakat.

$$\pi_i = \frac{\sqrt{zp_i+(1-z)p_i^2}\sum\limits_{j=1}^{n}\sqrt{zp_j+(1-z)p_j^2}}{1-R} \tag{2.5}$$

ii) Felhasználva, hogy $1 < \beta^*$ és $\beta = \sum\limits_{i=1}^{n}\pi_i$, korlátot kaptunk az árrés választhatóságára,

$0 \le R < 1 - \frac{1}{\beta}$, ami ebben az esetben éppen a várható profit bruttó értéke lesz. (2.12)

iii) Feltéve, hogy a fogadóiroda az így kapott π-t használta, adtunk egy módszert arra, hogyan lehet utólagosan kiszámítani az általuk becsült bennfentes tétek arányát.

$$\begin{cases} z_0 := 0 \\ z_{i+1} := \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{n}\sqrt{z_i^2+4(1-z_i)\frac{1-R}{\beta}\pi_j^2}-2}{n-2} \end{cases} \tag{2.13}$$

iv) Bár a modell folyamán főképp csak a bizonyításokban volt szükség rá, de levezettük, hogy π-ből, R-ből és z-ből utólagosan kiszámíthatók a fogadóirodák által feltételezett p vektor koordinátái is.

$$p_i = \frac{-z+\sqrt{z^2+4(1-z)\frac{1-R}{\beta}\pi_i^2}}{2(1-z)} \tag{2.6}$$

2.3. A kockázat minimalizáló módszer

Ebben az esetben a fogadóiroda célja a a 2.1 várható haszon maximalizálása helyett olyan π vektor meghatározása, aminek függvényében a profit pozitív, viszont a kockázat egyenletes minden egyes kimenetelre, feltéve hogy p vektor és z ismert.

$$f(\pi) = 1 - \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{p_i(1-z)+z}{\pi_i}, \text{ ahol } \sum_j \pi_j \leq \beta^*, \ \ \forall i : \pi_i \in (0;1) \tag{2.1}$$

A maximalizáló esethez hasonlóan most is annak a fogadóirodának van a legnagyobb népszerűsége, akinek a várható haszna a legalacsonyabb, különben a konkurencia rá tudna licitálni egy kisebb árréssel, így legyenek az árak nettó értéke éppen az igények nagysága.

$$\pi_i = p_i(1-z) + z$$

Ezután újra az adott fogadóiroda egyéni döntése, hogy mekkorának választja R értékét, hogy növelje az árait és csökkentse az oddsait, szem előtt tartva, hogy túl nagy növelés esetén elvesztheti piaci helyzetét, ugyanakkor várható bruttó hasznának nagysága éppen R lesz.

$$\pi_i = \frac{p_i(1-z)+z}{1-R} \quad \text{és így} \quad \beta = \sum_{i=1}^{n} \pi_i = \frac{(n-1)z+1}{1-R} \tag{2.14}$$

Amennyiben a fogadóiroda ennek szellemében választja π értékeit, úgy az általuk vélt p vektor koordinátáit az egyenlet átrendezésével utólagosan ki lehet számítani.

$$p_i = \frac{(1-R)\pi_i - z}{1-z} \tag{2.15}$$

Mivel $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$, ezért az egyenletek összegzésével kiszámítható, hogy ha a fogadóiroda a fenti modell szerint a kockázat minimalizálását tartja elsődleges szempontnak, akkor mennyire becsülte a bennfentes tétek arányát.

$$z = \frac{(1-R)\beta - 1}{n-1} \tag{2.16}$$

Megjegyzés:

Mivel $0 < z < 1$, ezért $0 < \frac{(1-R)\beta - 1}{n-1} < 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{\beta} > R > 1 - \frac{n}{\beta}$, vagyis $0 \leq R < \frac{1}{\beta}$ ebben az esetben is.

2.4. A két módszer elméleti összehasonlítása

	Profit maximalizálás	Kockázat minimalizálás
Árak	$\pi_i = \frac{\sqrt{zp_i+(1-z)p_i^2}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{zp_j+(1-z)p_j^2}}{1-R}$	$\pi_i = \frac{p_i(1-z)+z}{1-R}$
Az árak összege	$\beta = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{p_i z+(1-z)p_i^2}\right)^2}{1-R}$	$\beta = \frac{(n-1)z+1}{1-R}$
Bennfentes tétek	$z = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{z^2+4(1-z)\frac{1-R}{\beta}\pi_i^2}-2}{n-2}$	$z = \frac{(1-R)\beta-1}{n-1}$
Valószínűségek	$p_i = \frac{-z+\sqrt{z^2+4(1-z)\frac{1-R}{\beta}\pi_i^2}}{2(1-z)}$	$p_i = \frac{(1-R)\pi_i-z}{1-z}$

Árak

A profit maximalizálásának esetében π_i értéke a kimenetelek számával arányosan növekszik, ezzel alátámasztva, hogy a kimenetelek számának emelésével az árrés nagysága is nő, növelvén a várható hasznot.

Felhasználva a β-ra kapott eredményt, tekintsük egy tetszőleges i-edik kimenetelen a bookmaker várható tartozását.

$$\frac{p_i(1-z)+p_i}{\pi_i} = \ldots = \sqrt{\frac{1-R}{\beta}\left(\frac{z}{p_i}+(1-z)\right)}$$

Ez p_i nullához tartásával korlátlanul növekszik, ami azt jelenti, hogy minél kisebb egy kimenetel esélye, annál nagyobb rajta a kockázat a fogadóiroda számára. Ezért azokban az esetekben, amikor az esélyek a kimenetelek egy valódi részhalmazára koncentrálódnak, a profit maximalizáló módszer helyett a kockázat minimalizáló módszer használata ajánlott, a véges tőke és a túl nagy kockázat miatt.

A kockázat minimalizálás esetében az árak függetlenek a kimenetelek számától, vagyis hasonló paraméterek mellett n növelésével a kimenetelhez tartozó odds változatlan marad, ami a játékosok számára elég nagy n-re kedvezőbb lehet a maximalizáló esetnél.

Ugyanakkor ha a fogadóiroda β-ját rögzíti, akkor az egyenletet átrendezve a következőt kapjuk.

$$\pi_i = \frac{p_i(1-z)+z}{(n-1)z+1}\beta$$

Ekkor π_i értéke β növekedésével arányosan nő, ami szintén alátámasztja, hogy amelyik fogadóiroda kisebb β értéket választ, az általánosságban nagyobb oddsokat hirdet, és ezáltal nagyobb népszerűségre tehet szert.

Az árak összege

Az első módszernél újra azt látjuk, hogy β a kimenetelek számától függően nő, de befolyásolja azok valószínűségeinek egyenletessége. Értéke legalább $\frac{1}{1-R}$, amit egy szinte biztos kimenetel létezésének esetén közelít meg, míg abban az extrém esetben, amikor minden kimenetelnek ugyanakkora a valószínűsége, ez eléri az $\frac{(n-1)z+1}{1-R}$-et, ami épp a kockázat minimalizáló módszer β-ja. Ebből arra következtethetünk, hogy bár a favoritokra a kockázat minimalizáló bookmaker jobb oddsot kínál, általánosságban magasabb árréssel dolgozik, mint a várható haszon maximalizáló, így a β-ban hirdetett versenyt biztosan elvesztené vele szemben.

A bennfentes tétek aránya

A bennfentes tétek arányát elméleti úton nehéz összehasonlítani a maximalizáló esetbeli összetettség miatt. Annyi azonban megfigyelhető, hogy a kockázat minimalizáló esetben a kimenetelek számával fordítottan arányos, vagyis minél több kimenetel van, annál kisebb az információ okozta kár, ami pont azt a tulajdonságot mutatja, amit ettől a módszertől elvártunk.

A favorit-esélytelen torzítás

Ez a tulajdonság a gyakorlatban szemléletesen azt jelenti, hogy egy nagyon esélyes kimenetel árát a módosításnál növelés helyett csökkentik, míg egy esélytelennek tűnő kimenetelét ezzel arányosan növelik. Így míg a favorit oddsa csak kicsivel nő, addig az esélytelené nagy mértékben csökken, ezért az utóbbira fogadni sokkal rosszabb stratégia, mint az esélyesre tenni. Ennek következtében ekkor a fogadóiroda kockázata csökken, mindamellett, hogy a favoritra kínált odds emelésével a népszerűsége akár nőhet is.

2.4.1. Tétel. Mivel mindkét módszernél az árakat egységesen emeltük, ezért ezeknél a favorit-esélytelen torzítás teljes mértékben nem teljesülhet, ám egy része mégis megfigyelhető, miszerint az esélyesebb kimenetelen vett árnövelés mértéke semmilyen esetben sem lehet nagyobb, mint a kevésbé valószínűén, formálisan

$$\frac{\pi_i}{\pi_j} < \frac{p_i}{p_j} \Longleftrightarrow p_j < p_i.$$

2.4.1. Bizonyítás.

I) A profit maximalizáló módszer.

$$\frac{\pi_i}{\pi_j} = \frac{\sqrt{zp_i + (1-z)p_i^2}}{\sqrt{zp_j + (1-z)p_j^2}} = \frac{p_i\sqrt{\frac{z}{p_i} + (1-z)}}{p_j\sqrt{\frac{z}{p_j} + (1-z)}} \Longleftrightarrow \frac{\pi_i \cdot p_j}{\pi_j \cdot p_i} = \frac{\sqrt{\frac{z}{p_i} + (1-z)}}{\sqrt{\frac{z}{p_j} + (1-z)}}$$

$$\text{Továbbá} \quad p_i > p_j \Leftrightarrow \frac{z}{p_i} < \frac{z}{p_j} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{z}{p_i} + (1-z)} < \sqrt{\frac{z}{p_j} + (1-z)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{\frac{z}{p_i} + (1-z)}}{\sqrt{\frac{z}{p_j} + (1-z)}} < 1 \Leftrightarrow \frac{\pi_i \cdot p_j}{\pi_j \cdot p_i} < 1 \Leftrightarrow \frac{\pi_i}{\pi_j} < \frac{p_i}{p_j}.$$

II) A kockázat minimalizáló módszer.

Ebben az esetben az árak arányából rögtön kijön,

$$\frac{\pi_i}{\pi_j} = \frac{p_i(1-z) + z}{p_j(1-z) + z}, \text{ vagyis} \quad \pi_j < \pi_i \Leftrightarrow p_j < p_i.$$

□

Összegezve, ha a kimenetelek száma nagy, de a valószínűségeik közel egyenletesek, akkor érdemes a várható haszon maximalizáló módszert alkalmazni, ugyanis ekkor a várható bruttó haszna szintén R, de ezt kisebb árréssel éri el. Míg ha van olyan kimenetel, amely esélyesebb a többinél, vagy a kimenetelek száma kevés, akkor érdemes a kockázat minimalizáló módszert használni. A köztes esetekben nincs markáns különbség, a β-ban hirdetett verseny nagysága alapján célszerű dönteni.

3. fejezet

Alkalmazás

3.1. Az alkalmazáshoz használt program

Az alkalmazás során korábban hirdetett, különböző eseményekhez tartozó oddsokat használok fel. A fenti modell alapján ezekkel különféle számításokat kell elvégezni, amihez az adatok számából adódóan érdemes egy programot készíteni. Én az értékek kiszámítására egy C++ nyelven írt programot készítettem, aminek részletes dokumentációja nem tartozik a szakdolgozatom témájához, ám főbb eljárásainak forráskódja megtalálható a függelék 5.4 fejezetében.

A program első metódusaként sorra bekéri az eseményeket a külön erre a modellre definiált Event típusokba úgy, hogy először a kimenetelek számát, majd a csapatneveket, végül az oddsokat lehet feltölteni. A típusok létrehozása után soronként írva, ';'-vel elválasztva az esemény adatait adatbázist készít egy adott, txt kitérjesztésű fájlba.

Ha végeztünk a feltöltéssel, a programmal csak meg kell nyittatni az adatbázist és az magától kiszámít minden értéket (az árak összegét, a valószínűségeket, bennfentes tétek arányait, átlagokat, szórásokat, gyakoriságokat stb.), amire szükségünk van.

3.2. A két módszer gyakorlati összehasonlítása

Shin professzor az általa megfogalmazott várható haszon maximalizáló módszert, ami a fentinek $R = 0$ esete, az 1991 júliusában rendezett 136 nagy-britanniai lóversenyfutam oddsaira alkalmazta. Az adatokat '99-ben Fingleton és Waldron rendelkezésére bocsátotta, akik ugyanezt és a kockázat minimalizáló módszert vizsgálták, immáron különböző R értékekre. Saját adatbázisuk az 1696 darab, '93-ban Írországban rendezett lóversenyfutam eredményeiből áll. A két adatbázis újbóli feldolgozásából kapott eredményeket a következő táblázatok foglalják össze. A táblázatok első oszlopa a β-ra kapott eredményeket, míg a többi a választott R szám függvényében kiszámolt z értékeket és tulajdonságaikat jelölik.

		R					
	β	**0**	**0.02**	**0.04**	**0.06**	**0.08**	**0.1**
Átlag	1.426	0.040	0.037	0.034	0.030	0.027	0.024
Szórás	0.225	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010
Maximum	2.426	0.107	0.093	0.079	0.066	0.062	0.059
Minimum	1.048	0.012	0.008	0.003	0.001	0.001	0.000
Darabszám	1696	1696	1696	1696	1692	1686	1671

3.1. táblázat: Ír adatok a profit maximalizáló módszerrel

		R					
	β	**0**	**0.02**	**0.04**	**0.06**	**0.08**	**0.1**
Átlag	1.426	0.037	0.034	0.031	0.028	0.025	0.023
Szórás	0.225	0.009	0.009	0.009	0.009	0.009	0.009
Maximum	2.426	0.097	0.085	0.073	0.061	0.054	0.052
Minimum	1.048	0.012	0.008	0.003	0.001	0.001	0.000
Darabszám	1696	1696	1696	1696	1692	1686	1671

3.2. táblázat: Ír adatok a kockázat minimalizáló módszerrel

A fenti két táblázat alapján az ír fogadóiroda 2.5% és 4% közé tehette a benfentes tétek arányát és átlagosan 30%-os árrést alkalmazott, ezzel szemben a következő két táblázat alapján a brit fogadóiroda ugyanezen arányt 1.1% és 2.2% közé tehette, míg átlagosan 16%-os árrést alkalmazott.

		R					
	β	**0**	**0.02**	**0.04**	**0.06**	**0.08**	**0.1**
Átlag	1.188	0.023	0.020	0.016	0.013	0.011	0.009
Szórás	0.107	0.008	0.008	0.007	0.007	0.007	0.007
Maximum	1.584	0.056	0.052	0.047	0.043	0.039	0.035
Minimum	0.986	0.005	0.000	0.001	0.001	0.000	0.000
Darabszám	136	135	135	133	130	120	106

3.3. táblázat: Brit adatok a profit maximalizáló módszerrel

		R					
	β	**0**	**0.02**	**0.04**	**0.06**	**0.08**	**0.1**
Átlag	1.188	0.022	0.019	0.016	0.013	0.011	0.09
Szórás	0.107	0.007	0.007	0.007	0.007	0.007	0.006
Maximum	1.584	0.049	0.046	0.042	0.039	0.035	0.032
Minimum	0.986	0.005	0.000	0.001	0.001	0.000	0.000
Darabszám	136	135	135	133	130	120	106

3.4. táblázat: Brit adatok a kockázat minimalizáló módszerrel

Megfigyelhető, hogy az az ír fogadóiroda, ahonnan az adatok származnak, az adott időszakban átlagosan jóval nagyobb árrést használt, mint a brit. Továbbá arra lehet következtetni, hogy a brit piacon vagy kisebb R értéket használtak, vagy kevesebb volt a bennfentes tétek aránya, feltéve, hogy a fenti két módszer egyikét alkalmazták az oddsok meghatározásakor.

A továbbiakban a (jóval régebbi) ír és brit adatokat szeretném összhasonlítani a Kincsem Parkban 2013-ban rendezett 310 galoppverseny eredményével[12]. Az adatok rögzítése után a várható haszon maximalizáló, és a kockázat minimalizáló módszerre a következő eredményeket kaptam.

		R					
	β	**0**	**0.02**	**0.04**	**0.06**	**0.08**	**0.1**
Átlag	1.187	0.028	0.024	0.021	0.017	0.014	0.010
Szórás	0.027	0.009	0.008	0.007	0.006	0.005	0.004
Maximum	1.282	0.077	0.068	0.059	0.051	0.043	0.034
Minimum	0.947	0.000	0.001	0.002	0.003	0.002	0.003
Darabszám	310	309	308	307	305	304	303

3.5. táblázat: Kincsem parki adatok a profit maximalizáló módszerrel

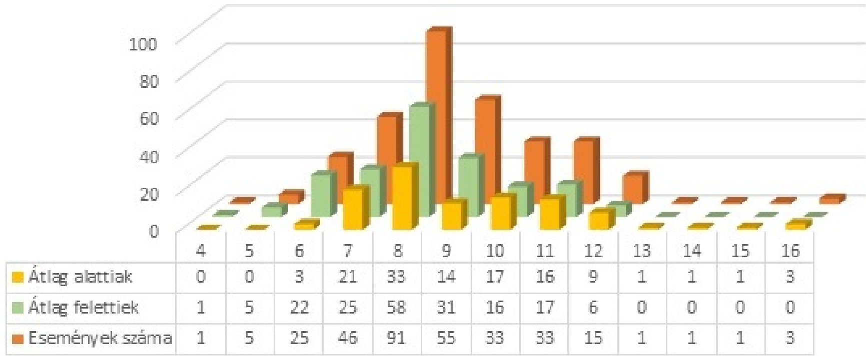
		R					
	β	**0**	**0.02**	**0.04**	**0.06**	**0.08**	**0.1**
Átlag	1.187	0.026	0.023	0.020	0.017	0.013	0.010
Szórás	0.027	0.008	0.007	0.006	0.005	0.004	0.004
Maximum	1.282	0.074	0.066	0.058	0.050	0.042	0.034
Minimum	0.947	0.000	0.001	0.002	0.003	0.002	0.003
Darabszám	310	309	308	307	305	304	303

3.6. táblázat: Kincsem parki adatok a kockázat minimalizáló módszerrel

A táblázatok alapján a két módszer által nyújtott bennfentes tétek aránya között nincs jelentős különbség, mindkét esetben 1% és 3% közé tehető, azonos R értékek mellett. Ez a modell alapján azt jelenti, hogy vagy csak nagyon kevés bennfentes információ volt a játékosok között, vagy csak nagyon kis csoporton belül.

A másik kétféle adattal összehasonlítva a bennfentes tétek aránya a brit és az ír értékek közé tehető, míg az árak összege és azok szórása jóval kisebb, mint a másik két esetben. Ezt pont fordítva vártuk volna, hiszen a brit és az ír piac jóval nagyobb keresletet szolgált ki, és ezért feltehetően a konkurencia is nagyobb volt.

Tekintsük a következő diagramot, ami a Kincsem parkbeli β-k eloszlását ábrázolja. A diagramon a hátsó oszlopok az adott indulók számához tartozó események számát, a középsők az ezeken az eseményeken az átlagnál nagyob β-k számát, míg az elülső oszlopok az átlagnál kisebb β-k számát jelölik, ahol a fenti táblázat alapján az átlag értéke 1.187.



3.1. ábra: β-k eltérése az átlaguktól a kimenetelek számának függvényében

A diagramból arra következtethetünk, hogy ellentétben a vártakkal, a kimenetelek számának növekedése nem volt hatással az árak összegének növekedésére, továbbá a fenti táblázat alapján valószínűsíthető, hogy 2013-ban az összes Kincsem parkbeli galoppversenyre az árak összegét előzetesen azonos nagyságúnak választották, és az oddsokat ezen érték függvényében számították ki.

A korábbiakhoz hasonlóan, előzetes elmélkedések alapján azt gondolnánk, hogy a favorit-esélytelen torzítás jóval markánsabb egy olyan piacon, ahol a kereslet kisebb és kevesebb a konkurens cég, ám jelen eseben ez sem teljesül. Ennek szemléltetésére először tekintsük Jack Dowie 1976-ban, a brit síkfutás '73-as szezonjának oddsai alapján készített táblázatát.

Arány	**Nyeremény/Összes%**
1/1 oddsnál kisebb	0.99
5/1 oddsnál kisebb	0.91
10/1 oddsnál kisebb	0.89
16/1 oddsnál kisebb	0.80
Összes	0.61

3.7. táblázat: 1973-as brit síkfutás favorit-esélytelen torzítása

Ez azt mutatja, hogy ha egy választott szint alatt lévő összes kimenetelt azonos nagyságú téttel teszünk meg, akkor mekkora a nyeremény/megtett tétek aránya. Ideális esetben, ha az árak fix arányban állnának a tényleges valószínűségekkel, akkor a nyeremény/összes hányadnak egyazon konstans értéket kéne felvennie az összes részhalmazon. Láthatóan ez nem teljesül, az egyre nagyobb oddsok megjelenésével az arány csökkenése azt jelzi, hogy a kisebb oddsokhoz képest jobban növelték az esélytelenek árait, ami éppen a favorit-esélytelen torzítás egy részét jelöli.

Ehhez képest a 2013-as Kincsem parkbeli eredményekből, ahol az egy futamon indulók átlagos száma szintén 8, a következőket kapjuk.

Arány	Győztes/Összes	Nyeremény/Összes	Nyeremény/Összes%
2-es oddsnál kisebb	23/45	36/45	0.81
5-ös oddsnál kisebb	152/574	478/574	0.83
10-es oddsnál kisebb	241/1359	1096/1359	0.81
20-nál kisebb	287/2080	1723/2080	0.83
Összes	310/2687	2382/2687	0.89

3.8. táblázat: Kincsem parki favorit-esélytelen torzítás (kerekített értékekkel)

Mivel az átlagos $\beta = 1.187$ volt, ezért az átlagos visszafizetési rátának körülbelül ennek reciprokának, 84.2%-nak kéne lennie minden részhalmazon. Ez jelen esetben nagyrészt teljesül is, vagyis nem észlelhető favorit-esélytelen torzítás. Emiatt feltehetjük, hogy a 2013-as szezonban, a Kincsem parkbbeli galoppfutamokon az árak favorit-esélytelen torzítása nemhogy kisebb volt, mint a népszerűbb '73-as brit síkfutáson, hanem lehetséges, hogy az oddsot kínáló fogadóiroda nem is alkalmazta ezt a módszert.

A fentiek alapján, mivel sem az ismert kapcsolat n és β között, miszerint a kimenetelek számának növekedésével arányosan növekszik az árak összege, sem a favorit-esélytelen torzítás nem volt fellelhető a 2013-as szezonbeli, Kincsem parki adatok között, ezért nem tudjuk megerősíteni, hogy az árakat a profit maximalizáló, vagy kockázat minimalizáló módszer egyikével határozták volna meg.

A következőkben tekintsünk egy általam választott, a www.oddsportal.com felmérései alapján középvezető fogadóiroda háromesély oddsait, amiket a 2013-14-es szezon Bajnokok Ligája mérkőzéseire kínált. A 125 mérkőzés végeredményéből és az ezeken kínált 375 oddsból a következő eredményeket kaptam[13].

		R					
	β	**0**	**0.02**	**0.04**	**0.06**	**0.08**	**0.1**
Átlag	1.066	0.036	0.022	0.012	0.02	0.003	
Szórás	0.005	0.003	0.002	0.002	0.002	0.002	
Maximum	1.098	0.050	0.038	0.027	0.016	0.005	
Minimum	1.056	0.030	0.019	0.008	0.000	0.002	
Darabszám	125	125	125	125	84	2	0

3.9. táblázat: BL háromesély adatok a profit maximalizáló módszerrel

		R					
	β	**0**	**0.02**	**0.04**	**0.06**	**0.08**	**0.1**
Átlag	1.066	0.033	0.022	0.011	0.02	0.003	
Szórás	0.005	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	
Maximum	1.098	0.049	0.038	0.027	0.016	0.005	
Minimum	1.056	0.029	0.018	0.008	0.000	0.002	
Darabszám	125	125	125	125	84	2	0

3.10. táblázat: BL háromesély adatok a kockázat minimalizáló módszerrel

Mivel a kereslet ezekere a típusú mérkőzésekre nagyságrendekkel nagyobb, mint az előzőekre, és ezzel arányosan a konkurens fogadóirodák száma is több, illetve a befizetett adó viszont kevesebb, mint egy állami fogadóirodánál, ezért ebben az esetben a β-k átlaga és szórása még a Kincsem parkbelieknél is jóval kisebb. Emiatt egyrészt R nem választható a korábbiakhoz hasonlóan nagyra, másrészt minden értéke mellett a bennfentes tétek aránya mindkét módszerrel számítva közel azonos, 1.1% és 3.6% között lehetett.

Az ezekre az eseményekre kínált β-k átlaga 1.066 volt, ezért a korábbiakhoz hasonlóan az alábbi táblázatban a nyeremény/összes aránynak 93.8% körül kell lennie, ha nem alkalmaztak favorit-esélytelen torzítást. Ám a táblázat alapján arra a következtetésre jutunk, hogy a 2-es odds alatti kimenetelek árait vagy csökkentették, vagy pedig nagyobb arányban győztek az ilyen kimenetelek, mint azt előzetesen várták.

Arány	**Győztes/Összes**	**Nyeremény/Összes**	**Nyeremény/Összes%**
1.5-ös oddsnál kisebb	37/46	47/46	1.03
2-es oddsnál kisebb	62/85	90/85	1.06
5-ös oddsnál kisebb	115/279	253/279	0.91
10-es oddsnál kisebb	123/348	303/348	0.87
20-nál kisebb	125/372	326/372	0.88
Összes	125/375	326/375	0.87

3.11. táblázat: BL háromesély favorit-esélytelen torzítása (kerekített értékekkel)

Amennyiben szándékos volt a torzítás, úgy a torna nagyobb kockázattal járt, mint a fenti modellben feltételeztük. Ennek további vizsgálata előtt nézzük az ezen mérkőzésekhez tartozó félidő/teljes játékidő oddsokhoz tartozó favorit-esélytelen torzítás táblázatot.

Arány	**Győztes/Összes**	**Nyeremény/Összes**	**Nyeremény/Összes%**
2-es oddsnál kisebb	19/36	31/36	0.87
5-ös oddsnál kisebb	75/230	221/230	0.96
10-es oddsnál kisebb	108/486	433/486	0.89
20-nál kisebb	120/786	613/386	0.78
Összes	125/1125	839/1125	0.75

3.12. táblázat: BL félidő/teljes játékidő favorit-esélytelen torzítása (kerekített értékekkel)

Ezen ajánlatokhoz tartozó árak összege átlagosan 1.206 volt, így a nyeremény/összes értékeknek konstans 83%-körül kéne ingadozniuk. Ám a táblázatból az olvasható le, hogy valószínűleg az alacsonyabb oddsokat inkább növelték, míg a nagyobb oddsokat fokozatosan, a valószínűséggel fordított arányban csökkentették, ami épp a favorit-esélytelen torzítást jelenti.

Ebből arra következtethetünk, hogy a háromesély fogadásnál nem volt véletlen, hogy csak az esélyes kimeneteleket árát csökkentették. Bár a kockázatot ezzel növelték, feltehetően az eseményekhez tartozó többi, többféle kimenetelű ajánlatoknál az esélytelen kimenetelek oddsai csökkentésével kompenzálták a várható haszon csökkenését. Mivel a favorit-esélytelen torzításra tett tétel - miszerint egy esélyesebb kimenetelen kisebb a módosítás, mint egy kevésbé valószínűn - jelen esetben a háromesély oddsoknál nem teljesült, ezért újból nem tudjuk egyértelműen elfogadni sem azt, hogy a választott fogadóiroda várható haszon maximalizáló, sem azt, hogy kockázat minimalizáló hozzáállást tanúsított volna.

4. fejezet

Összefoglalás

A fenti modellben egy olyan piaci helyzet speciális esetével foglalkoztunk, melyben az árut adók és vevők tájékozottsága különbözhet. Bár az alkalmazások során nem tudtuk egyértelműen eldönteni, hogy egyes fogadóiroda profit maximalizáló, vagy kockázat minimalizáló hozzáállást tanúsított-e, de általánosságban egy kiindulópontot adtunk arra, hogyan lehet becsatlakozni és részt venni egy olyan kereskedelmi versenyben, ahol az árak a meghirdetéstől kezdve nem változnak. Emellett mivel két eltérő módszerrel határoztuk meg egy általános modell alapján definiált bennfentes tétek arányait és ezek mindkét módszernél közel megegyeztek, ezért feltehetjük, hogy a Kincsem Parknál kapott 1-3% és a Bajnokok Ligája háromesély fogadásainál kapott 0.3-3.6% arány reális becslése lehet a valós bennfentes tétek arányainak.

További kutatások során érdemes lenne megvizsgálni azokat az eseteket, amikor az árak a konkurenciához mérten dinamikusan változhatnak valamilyen határidőig, vagy egy bizonyos termékből csak véges mennyiséget tudunk eladni, mindamellett, hogy az egész paletta egyenletes árulása lenne a cél. Másik kinduló pont lehet a negatív információ megjelenésének eshetősége, vagy éppen az információ súlyának és a bennfentes fogadók arányának valamilyen úton történő szétválasztása.

Motiváció

A gyakorlatban a nagyobb fogadóirodák többsége az árak megválasztásakor szoros együttműködésben (szerződéseben) vannak egy Betradar nevű céggel. A Betradar nemcsak figyeli több száz fogadóiroda percenként változó oddsát, hanem adatokat szolgáltat arról, hogy lokálisan milyen odds mellett mekkora volt egy adott korábbi kimenetel népszerűsége, illetve ezen adatok alapján ajánlatot tesz a fogadóirodáknak a következő események áraira. Bár az ajánlat módosításakor és visszavonásakor a bookmakerek főképp csak biztosítási szempontokat vesznek figyelembe, mégis a Betradar léte és titkos számítási módszerei motiválhatják a modell fejlesztését és a további kutatást.

5. fejezet

Függelék

5.1. Oddsok kiszámítása és konvertálása másik típusba

Legyen p egy tetszőleges kimenetel bekövetkezésének valószínűsége, $0 < p < 1$.

	Decimális	Frakcionális	Amerikai	
Oddsok:	$\frac{1}{p}$	$(1-p)/p$ egészekre felbővítve	$p > 0.5$	$-\frac{p}{1-p} \cdot 100$
			$p < 0.5$	$(\frac{1}{p} - 1) \cdot 100$
			$p = 0.5$	± 100
$p = 0.8$	1.25	1/4	-400	
$p = 0.3$	3.33	7/3	+233.33	

Az oddsok átkonvertálásához érdemes először az adott oddshoz tartozó egyismeretlenes egyenletet p függvényében megoldani és a kapott eredményre kiszámítani a másik típusú oddsot.

Például: 2.5 decimális mennyi moneyline?

$$\frac{1}{p} = 2.5 \Rightarrow p = 0.4 < 0.5 \Rightarrow \left(\frac{1}{0.4} - 1\right) \cdot 100 = +150$$

5.2. Arbitrázs

Tegyük fel, hogy egy háromkimenetelű eseményen az oddsok rendre $(2; 3.3; 10)$. Feltéve, hogy x jelöli az összes pénzünk, a kimeneteleket egyenként $\frac{5}{9}x$, $\frac{3}{9}x$, $\frac{1}{9}x$-el megtéve, minden esetben $\frac{10}{9}x$ a nyereményünk, így $\frac{1}{9}x$ kockázatmentes profitot termelünk.

Általános esetben, egy n-kimenetelű eseményen, amin a kínált oddsok reciprokainak összege nem éri el az 1-et, a tétek a következőképp számítandók:
Jelöljük $(O_1; \ldots; O_n)$-el a kínált oddsokat, x-el a felhasználható pénzünk mennyiségét, $(t_1; \ldots; t_n)$-el az arbitrázs eléréséhez kiszámítandó téteket és p-vel az arbitrázs nyújtotta

tiszta profitot. Ekkor legyen

$$t_i = \frac{\frac{1}{O_i}}{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{O_j}} \cdot x \;\; i = 1 \ldots n, \text{ amivel a tiszta hasznunk } p = (\frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{O_j}} - 1) \cdot x.$$

Természetesen ezzel a fogadóirodák is tisztában vannak, így egy fogadóirodán belül sohasem áll elő ilyen helyzet, de ha külön-külön válogatjuk össze a legjobb oddsokat több fogadóiroda közül, akkor könnyen elérhetünk 2-7%-os profitot. Ilyen összeválogatások keresésére és a tétek kiszámolására rengeteg program áll rendelkezésre az interneten, mégis hosszútávon komoly profitot előállítani ebből a szisztémából igen nehéz. Általában mire az ember megtenné az összes tétet, addigra az oddsok minimálisan változnak és így jobb esetben a profit annyira lecsökken, hogy a tranzakciós díjakat sem fedezi, rosszabb esesetben pedig az arbitrázshelyzet meg is szűnik, és veszíthetünk az eseményen.

5.2.1. C++ program arbitrázs számolására

A számítási metódus ismeretében alapvető C++ programozási ismeretekkel könnyen és gyorsan írhatunk programot az arbitrázs helyzetek kiértékelésére és a tétek kiszámítására.

Az alábbi programot én készítettem. Első lépésként bekéri a kimenetelek számát és a hozzájuk tartozó oddsokat, majd eldöntve, hogy az oddsok alapján arbitrázs helyzet áll-e fenn új adatokat kér, vagy a felhasználható pénzünk mennyiségétől függően kiszámolja az egyes oddsokhoz tartozó téteket és a tiszta profitot.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <iomanip>
using namespace std;
int main()
{
cout << setprecision(2) << fixed;
bool again=true;
do{
int n;
cout << "Kerem a kimenetelek szamat: "; cin >> n;

vector<float> odds_vector;
float odds;
cout << "Kerem az oddsokat:\n";
for(int i=0;i<n;++i){
    cout << i+1 << ". "; cin>> odds;
    odds_vector.push_back(odds);
}

float beta=0;
for(int j=0;j<n;++j)
{
    beta += 1/odds_vector[j];
}
cout << "A beta erteke: " << beta << endl;
if(beta>=1)
    cout << "Nincs arbitrazs helyzet." << endl;
```

A forráskód első fele

```
else
{
float x;
cout << "Arbitrazs helyzet all fenn,
kerem a raszant penz erteket: ";cin >> x;
float stake;
cout << "A tetek:\n";
for(int k=0; k<n;++k)
{
    stake = x/(beta*odds_vector[k]);
    cout << k+1 << ". tet: " << stake << endl;
}
cout << endl;

float profit=(1/beta-1)*x;
cout << "Minden kimenetel eseten a profit: " << profit << endl;
}
cout << endl;

char c;
cout << "Uj szamitas? i/n: ";cin >> c;
if(c!='i')
    again=false;
}while(again);

return 0;
}
```

A forráskód második fele

5.3. A bennfentes tétek aránya az $n = 2$ esetben

Mivel a 2.7 egyenlet csak $n \geq 3$ esetén értelmes, ezért az $n = 2$ esetet külön kell tárgyalni. Ennek vizsgálatlához tekintsük újra az i-edik kimenetelhez tartozó feltételezett valószínűséget.

$$p_i = \frac{-z + \sqrt{z^2 + 4(1-z)\frac{1-R}{\beta}\pi_i^2}}{2(1-z)} \tag{2.6}$$

$p_1 + p_2 = 1$ egyenletet felhasználva adjuk össze a két kimenetel valószínűségét, ekkor a 2.6 egyenletből a következőt kapjuk.

$$1 = \frac{-2z + \sqrt{z^2 + 4(1-z)\frac{1-R}{\beta}\pi_1^2} + \sqrt{z^2 + 4(1-z)\frac{1-R}{\beta}\pi_2^2}}{2(1-z)} \tag{5.1}$$

Ennek elméleti elemzése és z-re kifejtése helyett grafikus úton szeretném vizsgálni tulajdonságait. Ehhez a Maple szimbólikus matematikai programcsomagot fogom használni.

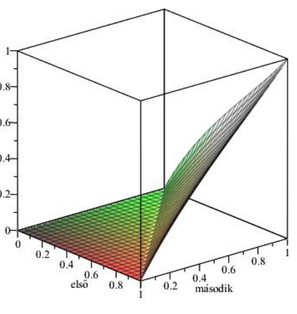
Jelölje x az első és y a második kimenetel árát, továbbá legyen $g(x; y)$ az a függvény, amely adott $(x; y)$ pontban kiszámolja az 5.1 egyenlethez tartozó z értéket, ha $x + y > 1$ (korábban feltettünk, hogy $\beta > 1$). Ha $x + y \leq 1$, akkor az ábra könyebb értelmezhetősége érdekében legyen $g(x, y) = 0$. A függvény definíciójának parancssora a következő.

$$g := \text{piecewise}\left(x + y > 1, \text{solve}\left(1 = \frac{-2z + \sqrt{z^2 + 4(1-z)\frac{1-R}{x+y}x^2} + \sqrt{z^2 + 4(1-z)\frac{1-R}{x+y}y^2}}{2(1-z)}, z\right)\right)$$

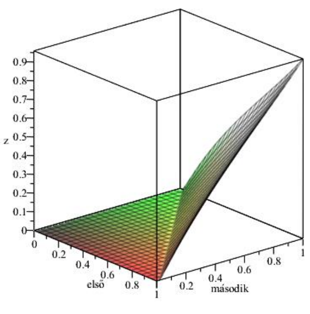
Emellett g függvény $[0; 1] \times [0; 1]$ egységnégyzeten való kirajzolására a következő parancssor szolgál.

plot3d($g(x, y), x = 0..1, y = 0..1$,axes=boxed,labels=["első","második","z"], orientation=[320, 70],projection=ORTHOGONAL)

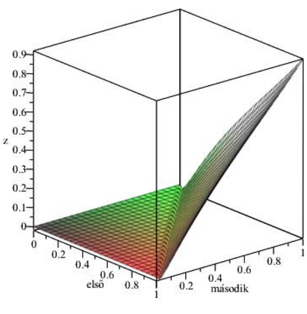
Ekkor R megválasztásától függően a következő ábrákat kaphatjuk.



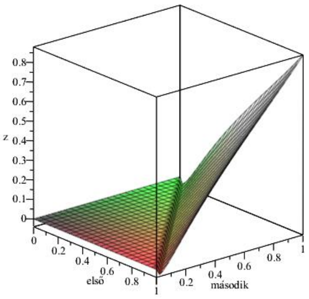
R=0



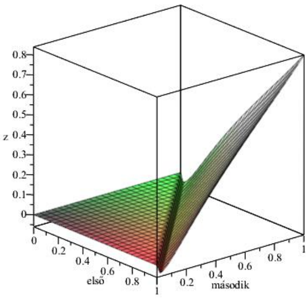
R=0.02



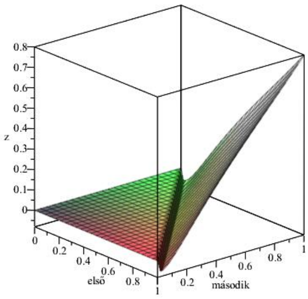
R=0.04



R=0.06



R=0.08



R=0.1

A grafikonok sík részei azokat az eseteket mutatják, amikor π_1 és π_2 összege nem éri el az 1-et, illetve az 'árkok' azokat jelölik, amikor z nem haladja meg a 0 értéket. Ezeken felül az árak növelésével a grafikonról minden pontban leolvasható a bennfentes tétek aránya, amit a Maple következő parancsával numerikusan is meg tudunk határozni.

$$\text{Legyen } (a;b) : a+b>1, \text{ ekkor } g\ (a;b)\text{-beli értéke: eval}(g,[x=a,y=b]).$$

A következő táblázat néhány esemény oddsaiból számított, kerekített eredményeket tartalmaz, ahol az R különböző értékeihez tartozó oszlopok a bennfentes tétek arányait jelölik.

Oddsok	Árak	β	R felső korlátja	$R=0$	$R=0.02$	$R=0.04$	$R=0.06$	$R=0.08$	$R=0.1$
$(1.002;41)$	$(0.99;0.02)$	1.022	0.022	0.031	0.001				
$(1.14;5.5)$	$(0.88;0.18)$	1.059	0.055	0.067	0.039	0.017			
$(1.5;2.5)$	$(0.67;0.4)$	1.067	0.062	0.067	0.045	0.024	0.003		
$(1.66;2.1)$	$(0.6;0.48)$	1.079	0.073	0.079	0.057	0.035	0.014		
$(1.83;1.83)$	$(0.55;0.55)$	1.093	0.085	0.079	0.071	0.049	0.027	0.005	
$(1.92;1.92)$	$(0.52;0.52)$	1.041	0.04	0.026	0.021	0			
$(1.95;1.95)$	$(0.51;0.51)$	1.026	0.025	0.026	0.005				

5.4. A számításokra használt program

A továbbiakban felteszem, hogy az Olvasó rendelkezik minimális C++ programozási ismeretekkel és rövid leírást adok a felhasznált eljárásokról.

Az első forráskód a 3.1 fejezetben említett típust jelöli. Célszerű volt többdimenziós változóit vektorokként definiálni, mert úgy csak a beolvasásnál van szükség a kimenetelek (_outcome) számára. Tegyük fel, hogy feltöltöttük a típus alapadatait (kimenetelek száma, csapatnevek, oddsok), ezután a második forráskód egy kiíró operátort jelöl, ami alkalmas txt fájlok sorfolytonos feltöltésére.

```
struct Event{
int _outcome;
double _R,_Ru,_beta,_wbeta;
vector<string> _teams;
vector<double> _odds;
vector<double> _pi;
//max profit case
vector<double> _p1;
double _z1;
//low risk case
vector<double> _p2;
double _z2;
};
```

```
ostream& operator<<(ostream& s,Event &e){
s << e._outcome << ";";
for(int i=0; i<e._outcome;++i)
{
    s << e._teams[i] << ";";
}
for(int j=0; j<e._outcome;++j)
{
    s << e._odds[j] << ";";
}
return s;
}
```

A következő két kód közül az első egy beolvasási operátor, aminek szerepe a txt-fájlok feldolgozásánál volt. Úgy definiáltam, hogy az előbbi, kiíró operátorhoz alkalmaszkodjon, az adatbázisokból a megfelelő sorrendben olvassa be az adatokat. A második kódban pedig két függvény található, az első függvény egy vektor elemeinek átlagát számolja ki, a második pedig a szórását. Ezek gyakran meghívásra kerültek más függvények lefutása során.

```
istream& operator>>(istream& is,Event &e){
double n;
stringstream converter;
string input;
getline(is,input,';');
converter << input;
converter >> n;
e._outcome=n;
for(int i=0;i<n;++i)
{
    getline(is,input,';');
    e._teams.push_back(input);
}
double odds;
for(int j=0;j<n;++j)
{
    getline(is,input,';');
    converter << input;
    odds=atof(input.c_str());
    e._odds.push_back(odds);
}
return is;
}
```

```
double mean(const vector<double> values){
double mean=0;
for(unsigned int i=0;i<values.size();++i)
    mean +=values[i];
mean=mean/values.size();
return mean;
}

double stand_dev(const double mean,const vector<double> values){
double sum=0;
for(unsigned int i=0;i<values.size();++i)
{
    sum +=pow(mean-values[i],2);
}
double dev=sqrt(sum/values.size());
return dev;
}
```

A következő két kód egyazon függvénynek a leírását adja. Ez a függvény számolt ki minden ismeretlen értéket az alapadatokból. Célszerű volt úgy definiálni, hogy visszatérési értékkel rendelkezzen, ami az $R < 1 - \frac{1}{\beta}$ felső korlát, vagy $1 < \beta$ alsó korlát nem teljesülése esetén 1, különben 0 (ekkor lefut minden számolás).

```
int calc(Event& e){
double w,beta=0,wbeta,R=e._R,Ru;
int n=e._outcome;
vector<double> pi;
for(int i=0;i<n;++i)
{
    w=1/e._odds[i];
    beta +=w;
    pi.push_back(w);
}
e._pi=pi;  e._beta=beta;
if(beta<=1)
     return 1;
Ru=1-1/beta; e._Ru=Ru;
if(R>=Ru)
    return 1;

wbeta=beta*(1-R);
e._wbeta=wbeta;

double z1=0;
for(int j=0;j<1000;++j)
{
    double sum=0;
    for(int k=0;k<n;++k)
    {
        sum += sqrt(pow(z1,2)+4*(1-z1)*(1-R)/beta*pow(pi[k],2))
    }
    z1=(sum-2)/(n-2);
}
e._z1=z1;
```

```
vector<double> p1;
double p;
for(int l=0;l<n;++l)
{
    p=(-z1+sqrt(pow(z1,2)+4*(1-z1)*(1-R)/beta*pow(pi[l],2)))/(2*(1-z1));
    p1.push_back(p);
}
e._p1=p1;

double z2=((1-R)*beta-1)/(n-1);
e._z2=z2;

vector<double> p2;
p=0;
for(int o=0;o<n;++o)
{
    p=((1-R)*pi[o]-z2)/(1-z2);
    p2.push_back(p);
}
e._p2=p2;

return 0;
}
```

A következő két függvény rendre β és z táblázatait adták. A bal oldali függvény szolgáltatta az oszlopdiagram adatait, míg a jobb oldali a hat különböző R értékre számolt z adatait.

```
void beta table(const vector<Event> events){
vector<double> betas;
double beta;
for(unsigned int i=0;i<events.size();++i)
{
    beta=0;
    for(int j=0;j<events[i]._outcome;++j)
    {
        beta += 1/events[i]._odds[j];
    }
    betas.push_back(beta);
}

double betas_mean=mean(betas);
cout << "A betak atlaga: " << betas_mean << endl;
cout << "A betak szorasa: " << stand_dev(betas_mean,betas) << endl;
cout << "A betak maximuma: " << maximum(betas) << endl;
cout << "A betak minimuma: " << minimum(betas) << endl;
cout << "Esemenyek szama: " << betas.size() << endl;
cout << endl;

int m[13][3]={
    (0,0,0),(0,0,0),(0,0,0),(0,0,0),
    (0,0,0),(0,0,0),(0,0,0),(0,0,0),
    (0,0,0),(0,0,0),(0,0,0),(0,0,0)};
int n;
for(unsigned int k=0;k<events.size();++k)
{
    n=events[k]._outcome;
    ++m[n-4][0];
    if(betas[k]<betas_mean)
        ++m[n-4][1];
    else
        ++m[n-4][2];
}

for(int l=0;l<13;++l)
{
    cout << "A futok szama: " << l+4 << endl;
    cout << "Az esemenyek szama: " << m[l][0] << endl;
    cout << "Az atlag alatt/felett levok szama: " << m[l][1] << "/" << m[l][2] << endl;
    cout << endl;
}

return;
}
```

```
void z tables(const vector<Event> events){
vector<Event> events2;
for(unsigned int i=0;i<events.size();++i)
    events2.push_back(events[i]);
double R=0;
do{
    vector<double> z1s,z2s;
    for(unsigned int k=0;k<events2.size();++k)
    {
        events2[k]._R=R;
        int ind=calc(events2[k]);
        if(ind==0)
        {
            z1s.push_back(events2[k]._z1);
            z2s.push_back(events2[k]._z2);
        }
    }
    if(z1s.size()!=0)
    {
    double z1s_mean=mean(z1s);
    double z2s_mean=mean(z2s);
    cout << "R = " << R << endl;
    cout << "A profit max. modszer: " << endl;
    cout << "A bennfentes tetek atlaga: " << z1s_mean << endl;
    cout << "A bennfentes tetek szorasa: " << stand_dev(z1s_mean,z1s) << endl;
    cout << "A bennfentes tetek maximuma: " << maximum(z1s) << endl;
    cout << "A bennfentes tetek minimuma: " << minimum(z1s) << endl;
    cout << "Esemenyek szama: " << z1s.size() << endl;
    cout << endl;
    cout << "A kockazat min. modszer: " << endl;
    cout << "A bennfentes tetek atlaga: " << z2s_mean << endl;
    cout << "A bennfentes tetek szorasa: " << stand_dev(z2s_mean,z2s) << endl;
    cout << "A bennfentes tetek maximuma: " << maximum(z2s) << endl;
    cout << "A bennfentes tetek minimuma: " << minimum(z2s) << endl;
    cout << "Esemenyek szama: " << z2s.size() << endl;
    }

R +=0.02;
cout << endl;
}while(R<=0.1);
return;
}
```

Végül, de nem utolsó sorban a legösszetettebb függvény, a favorit-esélytelen torzítás táblázatát számoló eljárás. Megírásának nehézségét főképp a különböző adatok tömbjeinek észbentartása okozta. A *db* tömb tárolta, hány olyan odds van, ami csak az adott intervallumba esik, az m mátrix (kétdimenziós tömb) első oszlopa az adott osztálybeli oddsok nyereményei összegét adta, míg második oszlopa, hogy hány odds tartozik a kijelölt intervallumig terjedő tartományba. Végül *w* és *sum* tömbök a gyakoriságokat és az összdarabszámokat tartalmazták.

```cpp
void fl_bias(const vector<Event> events){
vector<double> betas;
double beta,max_odds=0;
for(unsigned int i=0;i<events.size();++i)
{
    beta=0;
    for(int j=0;j<events[i]._outcome;++j)
    {
        beta += 1/events[i]._odds[j];
    }
    betas.push_back(beta);
}

double m[6][2]={  {0,0},{0,0},{0,0},{0,0},{0,0},{0,0} };
double first, odds;
int db[6]={0,0,0,0,0,0};
for(unsigned int k=0;k<events.size();++k)
{
    first=events[k]._odds[0];
    if(first<1.5){m[0][0]+=first;++db[0];}
    else if(1.5<=first && first<2){m[1][0]+=first;++db[1];}
    else if(2<=first && first<5){m[2][0]+=first;++db[2];}
    else if(5<=first && first<10){m[3][0]+=first;++db[3];}
    else if(10<=first && first<20){m[4][0]+=first;++db[4];}
    else {m[5][0]+=first;++db[5];if(first>max_odds){max_odds=first;}}
    for(int l=0;l<events[k]._outcome;++l)
    {
        odds=events[k]._odds[l];
        if(odds<1.5){++m[0][1];}
        else if(1.5<=odds && odds<2){++m[1][1];}
        else if(2<=odds && odds<5){++m[2][1];}
        else if(5<=odds && odds<10){++m[3][1];}
        else if(10<=first && first<20){m[4][0]+=first;++db[4];}
        else {m[5][0]+=first;++db[5];if(first>max_odds){max_odds=first;}}
        for(int l=0;l<events[k]._outcome;++l)
        {
            odds=events[k]._odds[l];
            if(odds<1.5){++m[0][1];}
            else if(1.5<=odds && odds<2){++m[1][1];}
            else if(2<=odds && odds<5){++m[2][1];}
            else if(5<=odds && odds<10){++m[3][1];}
            else if(10<=odds && odds<20){++m[4][1];}
            else {++m[5][1];}
        }
    }
```

```cpp
double win[6];
win[0]=m[0][0]; win[1]=win[0]+m[1][0]; win[2]=win[1]+m[2][0]; win[3]=win[2]+m[3][0];
win[4]=win[3]+m[4][0]; win[5]=win[4]+m[5][0];
double sum[6];
sum[0]=m[0][1]; sum[1]=sum[0]+m[1][1]; sum[2]=sum[1]+m[2][1]; sum[3]=sum[2]+m[3][1];
sum[4]=sum[3]+m[4][1]; sum[5]=sum[4]+m[5][1];

cout << "Darabszam" << endl;
cout << "1.5-nel kisebb: "<< db[0] << "/" << m[0][1] << endl;
cout << "2-nel kisebb, legalabb 1.5: "<< db[1] << "/" << m[1][1] << endl;
cout << "5-nel kisebb, legalabb 2: "<< db[2] << "/" << m[2][1] << endl;
cout << "10-nel kisebb, legalabb 5: "<< db[3] << "/" << m[3][1] << endl;
cout << "20-nal kisebb, legalabb 10: "<< db[4] << "/" << m[4][1] << endl;
cout << "Legalabb 20: "<< db[5] << "/" << m[5][1] << endl;
cout << endl;
cout << "1.5-nel kisebb: "<< win[0] << "/" << sum[0] << " = " << win[0]/sum[0] << endl;
cout << "2-nel kisebb, legalabb 1.5: "<< db[1] << "/" << m[1][1] << endl;
cout << "5-nel kisebb, legalabb 2: "<< db[2] << "/" << m[2][1] << endl;
cout << "10-nel kisebb, legalabb 5: "<< db[3] << "/" << m[3][1] << endl;
cout << "20-nal kisebb, legalabb 10: "<< db[4] << "/" << m[4][1] << endl;
cout << "Legalabb 20: "<< db[5] << "/" << m[5][1] << endl;
cout << endl;
cout << "1.5-nel kisebb: "<< win[0] << "/" << sum[0] << " = " << win[0]/sum[0] << endl;
cout << "2-nel kisebb: "<< win[1] << "/" << sum[1] << " = " << win[1]/sum[1] << endl;
cout << "5-nel kisebb: "<< win[2] << "/" << sum[2] << " = " << win[2]/sum[2] << endl;
cout << "10-nel kisebb: "<< win[3] << "/" << sum[3] << " = " << win[3]/sum[3] << endl;
cout << "20-nal kisebb: "<< win[4] << "/" << sum[4] << " = " << win[4]/sum[4] << endl;
cout << "Osszes: "<< win[5] << "/" << sum[5] << " = " << win[5]/sum[5] << endl;
cout << endl;
return;
}
```

Irodalomjegyzék

[1] Hyun Song Shin, *Optimal betting odds against insider traders*, The Economic Journal, 1991.

[2] Hyun Song Shin, *Prices of state contingent claims with insider traders, and the favourite-longshot bias*, The Economic Journal, 1992.

[3] Hyun Song Shin, *Measuring the incidence of insider trading in a market for state-contingent claims*, The Economic Journal, 1993.

[4] Bruno Julien, Bernard Salanie, *Measuring the incidence of insider trading: A comment on Shin*, The Economic Journal, 1994.

[5] John Fingleton, Patrick Waldron, *Optimal determination of bookmaker's betting odds: Theory and tests*, Trinity Economic Paper Series, 1999.

[6] Loosz Vera, Dr. Galfalvi Istvan, *Szerencsekonyv*, Fortuna Reklamugynokseg, Kepzomuveszeti Kiado, 1997.

[7] Dr. Zempleni Andras, *Brit tetek*, Fortuna Magazin, Fortuna Press Kiado, 1993.

[8] Dr. Zempleni Andras, *Bukmekerek es az ado*, Fortuna Magazin, Fortuna Press Kiado, 1993.

[9] Palffy Laszlo, *A kockazas es egyeb tortenetek*, Alibi Kiado, 2004.

[10] *http://www.cs.elte.hu/seszter/oktatas/2008_09_2/BSc_mattanar_ea/Lagrange_multiplikator.pdf*, Sikolya Eszter, 2014.05.01.

[11] *http://mat.iitm.ac.in/home/sryedida/public_html/caimna/transcendental/iteration%20methods/fixed-point/iteration.html#cfc*, Indian Institute Of Technology Madras, 2014.05.01.

[12] *http://195.228.135.95/php/galopp.php*, Kincsem Park hivatalos honlap, 2014.05.21.

[13] *http://www.oddsportal.com/soccer/europe/champions-league/results/*, 2014.05.21.