Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Papp Dorottya

Matematika B.Sc.

Alkalmazott matematikus szakirány

Gráfok favastagsága

Szakdolgozat

Témavezető:

Lukács András

Számítógéptudományi Tanszék

Budapest, 2014

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Általában egy gráfelméleti probléma annál könnyebben kezelhető, minél egyszerűbb szerkezetű gráfon szeretnénk azt megoldani. A fákra különösen igaz, hogy gyors algoritmusok futtathatóak rajtuk, mert sok esetben rekurzív lépésekkel, a levelektől a gyökér felé lehet kezelni a problémákat: egy csúcs eredményének kiszámításához elég a gyerekeinek az eredményét ismerni. Azonban a fák nagyon speciális szerkezetűek, így hiába léteznek hatékony algoritmusok fákra, ezek az általános gráfoknak csak egy szűk osztályára jelentenek megoldást. Ebben a dolgozatban egy bővebb gráfosztállyal, a korlátos favastagságú gráfok osztályával fogunk foglalkozni. Ezeknek a gráfoknak a szerkezete visszavezethető egy olyan fastruktúrára, amely sok algoritmus futtatásánál hatékonyan felhasználható, mert a fáknál ismert jó tulajdonságok itt is megjelennek. Így a korlátos favastagságú gráfok osztályán belül is igaz, hogy nehéz feladatokat, például NP-teljes problémákat is meg lehet oldani gyors, azaz polinomiális, vagy akár lineáris idejű algoritmusokkal.

Az 1. fejezetben alapvető fogalmakról és állításokról lesz szó. Először a soros-párhuzamos gráfok osztályával foglalkozunk, majd egy gráf fa-felbontásának és favastagságának definiálása után bevezetjük ennek a gráfosztálynak az általánosítását jelentő korlátos favastagságú gráfok osztályát. Ezek után megismerkedünk néhány korlátos és nem korlátos favastagságú gráfosztállyal. A fejezet végén pedig példát láthatunk arra, hogy különböző speciális gráfosztályokba eső gráfok favastagságának kiszámítása milyen bonyolultsági osztályba esik.

Korlátos favastagságú gráfokon futtatható gyors algoritmusok működéséhez szükséges ismerni a gráf egy minél jobb fa-felbontását. A legjobb fa-felbontás megtalálása NP-teljes probléma, de egy paraméter rögzítésével egyszerűbbé válik a feladat. A 2. fejezetben Hans L. Bodlaender algoritmusával foglalkozunk, amely az első lineáris idejű algoritmus ennek megoldására. A lineáris futásidő ellenére ez az eredmény a gyakorlatban nem jól használható, inkább elméleti jelentőséggel bír.

A 3. fejezetben megismerkedünk egy fontos gráfelméleti eredménnyel, Neil Robertson és Paul D. Seymour gráfminor-tételével. Ennek a tételnek a dolgozat témájához kapcsolódó következménye, hogy a korlátos favastagságú gráfok karakterizálhatóak tiltott minorok egy véges halmazával.

Végül az utolsó fejezetben megnézünk pár problémát, amelyek általános gráfokon nehéz, például NP-teljes feladatok, azonban korlátos favastagságú gráfok körében polinomiális, vagy akár lineáris időben megoldhatóak.

1. fejezet

Elméleti alapok

Ebben a fejezetben bevezetjük a soros-párhuzamos gráfok osztályát, amelynek segítségével arra láthatunk példát, hogy hogyan lehet fastruktúrára visszavezetni egy más szerkezetű gráfot, és hogyan egyszerűsítheti le ez az átalakítás az eredeti gráfon való számításokat. Utána definiáljuk egy gráf fa-felbontásának fogalmát, amely egy ilyen visszavezetés eredménye általános gráfok esetén, majd megismerkedünk a favastagság fogalmával. Ez a gráfok egy paramétere, amely a gráf szerkezetét egy fa szerkezetéhez hasonlítja, ez tehát szemléletesen a két szerkezet hasonlóságának mérőszáma. Segítségével írható le a korlátos favastagságú gráfok osztálya, amely a soros-párhuzamos gráfok osztályának egy általánosítása. Ezek után néhány alapvető korlátos favastagságú gráfosztályról és a korlát értékének kiszámításáról lesz szó, majd példát látunk olyan gráfosztályokra is, ahol ilyen korlát nem létezik. Egy gráf favastagságának kiszámítása különböző nehézségű lehet különböző gráfosztályokon belül. A fejezet végén áttekintjük, hogy milyen bonyolultsági osztályok fordulhatnak elő. Ebben a fejezetben a [3], [6] és [7] cikkekre támaszkodva haladunk.

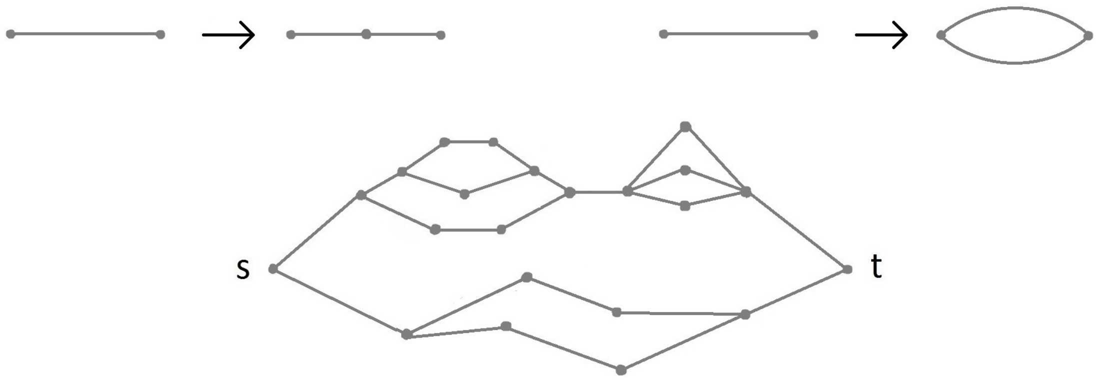
1.1. Előzmény: soros-párhuzamos gráfok

1.1.1. Definíció. *A soros-párhuzamos gráf két kitüntetett csúccsal, az s forrással és a t nyelővel rendelkező gráf, amelyet az s és t csúcsokból és a közéjük behúzott élből álló kiinduló gráfból kaphatunk meg az alábbi két művelet ismételt alkalmazásával:*

1. *egy már meglevő élt felosztunk egy új csúccsal (így két él keletkezik)*

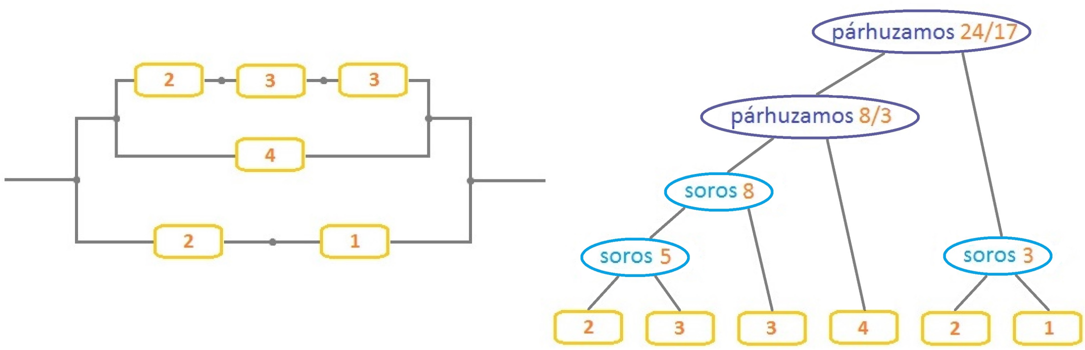
2. *egy már meglevő él mellé párhuzamosan behúzunk egy új élt*

A következő ábrán a két művelet és egy soros-párhuzamos gráf látható.



Soros-párhuzamos gráfokkal modellezhető az elektromos áramkörök egy része. Az ilyen áramkörök esetében például az eredő ellenállást úgy számíthatjuk ki könnyen, hogy az áramkörnek megfelelő soros-párhuzamos gráf szerkezetét visszavezetjük egy fa szerkezetére. Egy soros-párhuzamos gráf felépülése lépésről lépésre leírható egy bináris fával úgy, hogy a levelekben vannak az élek (pontosabban az élekből és a hozzájuk tartozó két végpontból álló K_2-k), felfelé haladva pedig egy csúcs az alatta levő két részgráf összekapcsolódásának a típusát tartalmazza. Ez az eredő ellenállás kiszámításánál azt jelenti, hogy a levelekben vannak az éleknek megfelelő ellenállás értékek, felfelé haladva pedig egy csúcsban az egyre nagyobb részáramkörök eredő ellenállásainak az értéke áll, annak megfelelően kiszámolva, hogy soros vagy párhuzamos-e az adott kapcsolás. (Georg Ohm és Gustav Kirchhoff törvényeinek együttes alkalmazásával vezethetőek le a képletek, amelyekkel ezeket az értékeket ki tudjuk számolni: soros kapcsolás esetén $R = R_1 + R_2$, párhuzamos kapcsolás esetén pedig $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$.)

A következő ábrán példát láthatunk egy áramkörre és az eredő ellenállás kiszámítására az előbb ismertetett visszavezetés segítségével.



1.2. A fa-felbontás és favastagság fogalma

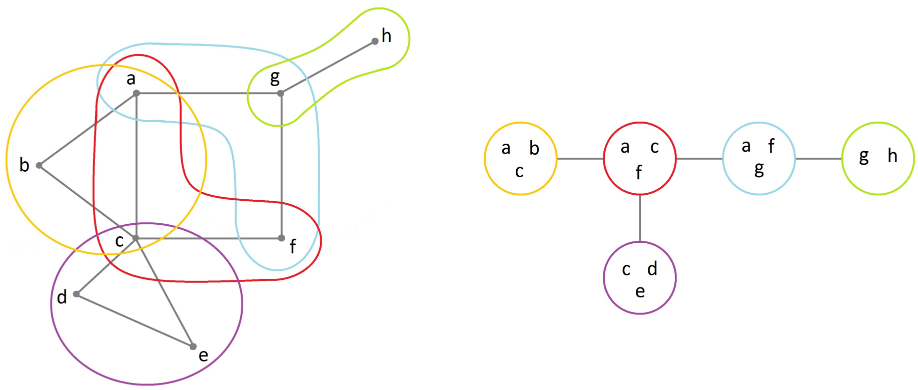
Ebben a részben megismerjük egy gráf fa-felbontásának, majd favastagságának fogalmát, amelyeket ebben a formában Neil Robertson és Paul D. Seymour vezetett be. [9]

Egy gráf egy fa-felbontása a gráfnak egy speciális fastruktúrára való visszavezetése. Pontosan ezt a következőképpen lehet definiálni:

1.2.1. Definíció. *Egy $G = (V, E)$ gráf fa-felbontása az $(\{X_i \mid i \in I\}, T = (I, F))$ pár. Az X_i-k, az ún. kupacok V-nek részhalmazai, amelyek az I csúcshalmazú, F élhalmazú T fa egy-egy csúcsának felelnek meg, illetve teljesül a következő 3 tulajdonság:*

1. *$\bigcup_{i \in I} X_i = V$, azaz a kupacok lefedik G csúcsait*
2. *$(u, v) \in E \implies \exists i \in I : u, v \in X_i$, azaz a kupacok lefedik G éleit*
3. *a T fa F élhalmaza olyan, hogy $\forall v \in V$-re teljesül, hogy az $\{i \in I \mid v \in X_i\}$ halmaz, azaz a T fa azon csúcsai, amelyek v-t tartalmazó kupacoknak felelnek meg, összefüggő részgráfot alkotnak T-ben*

A következő ábrán példát láthatunk egy gráfra és annak egy fa-felbontására.



1.2.2. Definíció. *Egy gráf $(\{X_i \mid i \in I\}, T = (I, F))$ fa-felbontásának a szélessége a $\max_{i \in I} |X_i| - 1$ mennyiség.*

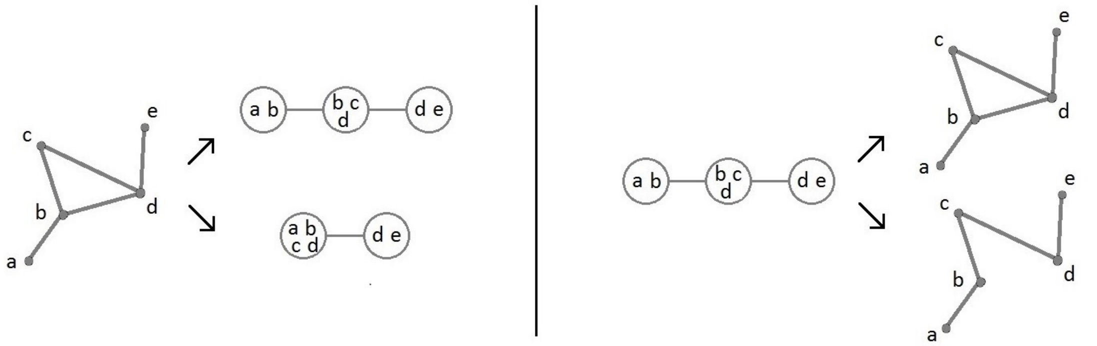
1.2.3. Definíció. *Egy gráf favastagsága egy minimális szélességű fa-felbontásának szélessége.*

Egy gráf egy fa-felbontása annál jobb, minél kisebb annak a szélessége, mert a kis szélesség azt jelenti, hogy a T fa csúcsainak megfelelő kupacokba csak kevés csúcs jut.

T annál jobban hasonlít egy hagyományos fára, minél kevesebb csúcs van a kupacokban. Tehát a kisebb favastagságú gráfok szerkezete jobban, a nagyobb favastagságú gráfoké pedig kevésbé közelít egy fa szerkezetéhez.

1.2.4. Állítás. *Egy gráfnak többféle fa-felbontása létezhet, illetve az is igaz, hogy ugyanaz a fa-felbontás több különböző gráfnak is megfelelhet.*

Bizonyítás. Mindkét esetre láthatunk egy-egy példát az alábbi ábrán.



□

1.2.5. Megjegyzés. Minden n csúcsú gráfra igaz, hogy egyetlen kupac, amely tartalmazza a gráf összes csúcsát, a gráf egy $n-1$ szélességű fa-felbontása. Ezt triviális fa-felbontásnak nevezzük.

1.2.6. Állítás. *Az 1.2.1. Definícióban szereplő 3. tulajdonság ekvivalens azzal, hogy a T fa $\forall i, j, k \in I$ csúcsára, ahol j rajta van az i és k közötti úton, teljesül, hogy $X_i \cap X_k \subseteq X_j$.*

Bizonyítás. Az egyik irány belátásához induljuk ki egy olyan T fából, amelyre $\forall v \in V$-re a T fa azon csúcsai, amelyek v-t tartalmazó kupacoknak felelnek meg, összefüggő részgráfot alkotnak T-ben. Vegyünk egy $w \in X_i \cap X_k$ csúcsot. Mivel T fa, az i-t és k-t összekötő út egyértelmű, így bármely j csúcsra, amely ennek az útnak eleme, $w \in X_j$ is teljesül. Ez elmondható $\forall w \in X_i \cap X_k$ esetén, tehát készen vagyunk.

A másik irány belátásához indirekt módon tegyük fel, hogy a T fa $\forall i, j, k \in I$ csúcsára, ahol j rajta van az i és k közötti úton, teljesül, hogy $X_i \cap X_k \subseteq X_j$, de $\exists v \in V$, hogy a T fa azon csúcsai, amelyek v-t tartalmazó kupacoknak felelnek meg, nem alkotnak összefüggő részgráfot T-ben. Vegyünk ebből a nem összefüggő részgráfból két komponenst, T_1-et és T_2-t, és vegyük az i csúcsot T_1-ből, illetve a k csúcsot T_2-ből. Ekkor $v \in X_i \cap X_k$, tehát v minden i-t k-val összekötő úton levő j csúcshoz tartozó X_j-nek is eleme. Azonban ez ellentmond annak, hogy T_1 és T_2 különálló részgráfok T-ben. □

1.2.7. Definíció. *Egy* $(\{X_i \mid i \in I\}, T = (I, F))$ *fa-felbontás redundáns, ha van olyan* $(i, j) \in F$ *él, melyre* $X_i \subseteq X_j$*.*

1.2.8. Állítás. *Egy* G *gráf* k *szélességű* $(\{X_i \mid i \in I\}, T = (I, F))$ *redundáns fa-felbontásából mindig elkészíthető* G *egy* k *szélességű nem redundáns fa-felbontása.*

Bizonyítás. Ha egy $(i, j) \in F$ élre $X_i \subseteq X_j$, akkor az (i, j) élt úgy összehúzva, hogy az (i, j) két végpontja összeolvasztásával keletkezett új csúcshoz X_j-t rendeljük, szintén G egy fa-felbontását kapjuk, amely ugyanolyan szélességű, mint az eredeti fa-felbontás. Ezt a műveletet addig ismételhetjük, amíg G-nek egy nem redundáns fa-felbontását kapjuk. $\square$

1.3. Korlátos és nem korlátos favastagságú gráfokra vonatkozó példák, állítások

A soros-párhuzamos gráfoknak általánosítását jelentik a korlátos favastagságú gráfok, mert ezek struktúrája is összefüggésbe hozható egy olyan fastruktúrával, amely gyors számításokat tesz lehetővé. Minden gráfnak létezik fa-felbontása, de a korlátos favastagságú gráfosztályokon belüli gráfok azok, amelyeknek bármilyen nagy is csúcsszáma, a fa-felbontásukban a kupacok mérete korlátos. Ez azért fontos, mert például azok az algoritmusok, amelyek egy gráfokon értelmezett problémát a gráf fa-felbontásának segítségével oldanak meg, kihasználják ezt a korlátot, és annál gyorsabban futnak, minél kisebb a korlát értéke.

A következő táblázatban látható néhány korlátos favastagságú gráfosztály, és a hozzájuk tartozó korlát. Pár gráfosztályra be is bizonyítjuk, hogy a korlát valóban a táblázatban megadott érték.

Gráfosztály	Leírás	Korlát
fa, erdő	Olyan gráf, amelyben nincs kör.	1
kör	Élek olyan egymáshoz csatlakozó sorozata, amelyben az élek és csúcsok nem szerepelhetnek egynél többször, és az első csúcs megegyezik az utolsó csúccsal.	2
soros-párhuzamos gráf	A definíciót lásd korábban.	2
pszeudoerdő	Olyan gráf, amelynek minden összefüggő komponensében legfeljebb egy kör van.	2
kaktuszgráf	Olyan gráf, amelyben bármely két körnek legfeljebb egy közös csúcsa van.	2
átlós gráf	Olyan gráf, amelynek van olyan síkbarajzolása, amelyben minden csúcs a külső tartomány határán van.	3
Halin-gráf	Olyan gráf, amelyet egy síkba lerajzolt fából konstruálhatunk úgy, hogy a leveleket egy körrel összekötjük, illetve két feltétel teljesül még rá: legalább négy csúcsa van, és nincs olyan csúcsa, melynek foka kettő.	3

1.3.1. Lemma. *Minden k favastagságú $G = (V, E)$ gráfnak létezik legfeljebb k fokú csúcsa.*

Bizonyítás. Vegyük G egy k szélességű nem redundáns $(\{X_i \mid i \in I\}, T = (I, F))$ fa-felbontását. Ilyen létezik az 1.2.8. Állítás miatt. Nézzük T egy l levelét, amelyhez az $X_l \subseteq V$ részhalmaz tartozik. X_l-ben van olyan $v \in V$ csúcs, amely nem szerepel a levél szomszédjának megfelelő kupacban, mivel a vizsgált fa-felbontás nem redundáns. Ekkor a fa-felbontás definíciójában (1.2.1. Definíció) szereplő 3. tulajdonság miatt v nem szerepelhet T más csúcsainak megfelelő kupacokban sem, tehát v csak X_l-nek eleme. Mivel $\forall i$-re $|X_i| \leq k + 1$, így $|X_l| \leq k + 1$, tehát v foka legfeljebb k. □

1.3.2. Állítás. *Egy összefüggő gráfnak pontosan akkor legfeljebb 1 a favastagsága, ha az fa.*

Bizonyítás. A G fának a következőképpen tudjuk megkonstruálni egy 1 szélességű $(\{X_i \mid i \in I\}, T = (I, F))$ fa-felbontását. Válasszunk egy r gyökércsúcsot G-ben, és irányítsuk meg G éleit úgy, hogy r-től elfelé mutassanak. G minden irányított (u, v) éléhez tartozzon egy $\{u, v\}$ kupac, amely egy T-beli csúcsnak feleljen meg. ($\{u, v\}$ ekvivalens $\{v, u\}$-val, de megtartjuk az élek irányítottságát a leírás megkönnyítése érdekében.) Az

$\{u_1, v_1\}$ és $\{u_2, v_2\}$ kupacoknak megfelelő T-beli csúcsok szomszédosak, ha $v_1 = u_2$. Látható, hogy ez tényleg egy fa-felbontása G-nek, és szélessége 1. (Kisebb szélességű fa-felbontást nem lehet találni, mert 0 szélességű fa-felbontása nyilván a csak csúcsokat tartalmazó gráfoknak van.)

Megfordítva, tegyük fel, hogy egy G összefüggő gráfnak 1 a favastagsága. Ekkor az 1.3.1. Lemma miatt G-nek van olyan v csúcsa, melynek foka legfeljebb 1. Legyen G' az a gráf, amelyet G-ből kapunk v elhagyásával. Ha G egy 1 szélességű fa-felbontásának kupacaiból szintén elhagyjuk v-t, akkor G' egy jó fa-felbontását kapjuk, amelynek szélessége nem nagyobb, mint az eredeti fa-felbontás szélessége. Ekkor tehát megint van legfeljebb elsőfokú csúcs. Így, elsőfokú csúcsokat egyesével eltávolítva végül G összes csúcsa elfogy. Könnyen látható, hogy ez csak akkor lehetséges, ha G fa volt. □

1.3.3. Állítás. *Egy soros-párhuzamos gráfnak a favastagsága legfeljebb 2.*

Bizonyítás. Legyen G egy soros-párhuzamos gráf. G fa-felbontását a soros-párhuzamos gráfok definíciójában (1.1.1. Definíció) szereplő rekurzív konstrukciót használva, magának a G gráfnak az épülésével párhuzamosan adjuk meg. Közben a fa-felbontás szélessége soha nem fogja átlépni a kettőt. A kiinduló gráfnak, K_2-nek a favastagsága 1. Két eset van:

1. eset: Ha az (u, v) élt a w új csúcs osztja fel, akkor a felosztás előtti a fa-felbontásban szereplő fának volt egy olyan j csúcsa, hogy a j-nek megfelelő kupac tartalmazta u-t és v-t. Most tegyünk egy u-t, v-t és w-t tartalmazó kupacnak megfelelő új csúcsot a fába, és kössük össze j-vel.

2. eset: Ha új párhuzamos él kerül a gráfba az (u, v) él mellé, akkor az új él behúzása előtti gráf fa-felbontása a módosított gráfnak is fa-felbontása, így azon nem kell változtatni. □

1.3.4. Állítás. *Egy kör favastagsága 2.*

Bizonyítás. A bizonyítás következik az előző két állításból. Egyrészt egy kör egy speciális soros-párhuzamos gráf, tehát favastagsága legfeljebb 2, másrészt mivel egy kör nem fa, favastagsága nem lehet 1. Tehát egy kör favastagsága 2. □

A következőkben nem korlátos favastagságú gráfokkal fogunk foglalkozni.

1.3.5. Állítás. *Egy n csúcsú gráfnak pontosan akkor $n-1$ a favastagsága, ha az az n csúcsú teljes gráf.*

Bizonyítás. Vegyünk egy n csúcsú $n-1$ favastagságú $G=(V,E)$ gráfot, és indirekt módon tegyük fel, hogy G nem az n csúcsú teljes gráf. Ekkor G-nek $\exists u,v\in V$ csúcsai úgy, hogy $(u,v)\notin E$. Az $X_1=V\backslash\{u\}$ és $X_2=V\backslash\{v\}$ kupacokból képzett fa-felbontás G egy olyan fa-felbontása, amelynek szélessége $|V|-2=n-2$, mivel $|X_1|=|X_2|=|V|-1$. Azaz G favastagsága legfeljebb $n-2$, ami ellentmondás.

A másik irányhoz vegyünk egy n csúcsú teljes gráfot, és indirekt módon tegyük fel, hogy a favastagsága kevesebb, mint $n-1$. (Több nem lehet a definícióból adódóan.) Ekkor az 1.3.1. Lemma miatt van a gráfnak egy legfeljebb $n-2$ fokú csúcsa, ami ellentmondás. □

A következő részben megvizsgáljuk a síkbarajzolható gráfok favastagságát. Tudjuk Kuratowski tétele alapján, hogy egy gráf pontosan akkor síkbarajzolható, ha nem tartalmazza részgráfként K_5-öt, $K_{3,3}$-at vagy ezek soros bővítését. Mivel az erdő egy olyan gráf, amely nem tartalmazza a (2 favastagságú) K_3-at és a favastagsága legfeljebb 1, illetve egy soros-párhuzamos gráf egy olyan gráf, amely nem tartalmazza a (3 favastagságú) K_4-et és a favastagsága legfeljebb 2, remélhetnénk, hogy egy síkbarajzolható gráf favastagsága legfeljebb 3, mivel nem tartalmazza a (4 favastagságú) K_5-öt. De ez sajnos nem így van.

1.3.6. Állítás. *Egy n csúcsú síkbarajzolható gráf favastagsága $\Omega(\sqrt{n})$ nagyságrendű, tehát $\exists n_0>0$ és $c>0$, hogy ha $n\geq n_0$, akkor a favastagság $\geq c\sqrt{n}$.*

1.3.7. Megjegyzés. Valójában több igaz: egy n csúcsú síkbarajzolható gráf favastagsága $O(\sqrt{n})$ nagyságrendű, tehát az is teljesül, hogy $\exists n_0>0$ és $d>0$, hogy ha $n\geq n_0$, akkor a favastagság $\leq d\sqrt{n}$. De mi most csak az alsó korlátot bizonyítjuk, ami ahhoz szükséges, hogy lássuk, hogy a síkbarajzolható gráfok osztálya nem korlátos favastagságú.

Az 1.3.6. Állítás bizonyításához elég mutatni egy speciális síkbarajzolható gráfosztályt, amelyre teljesül az állítás. Mi az n csúcsú ($\sqrt{n}\times\sqrt{n}$-es) négyzetrácsokat fogjuk vizsgálni.

Először szükségünk lesz egy lemmára.

1.3.8. Lemma. *Legyen $G=(V,E)$ egy k favastagságú gráf. Tegyük fel, hogy $\forall v\in V$ csúcs el van látva egy nemnegatív $w(v)$ súllyal úgy, hogy $\sum_{v\in V} w(v)=1$. Ekkor van egy legfeljebb $k+1$ csúcsból álló S halmaz, ún. szeparáló halmaz, amelynek az elhagyásával a G gráf az S_1, S_2, … részekre esik szét a következők teljesítésével:*

1. *Minden rész legfeljebb $\frac{1}{2}$ összsúlyú.*

2. *Minden i, j-re fennáll, hogy az S_i-ből S_j-be vezető út átmegy S-en.*

Bizonyítás. Legyen $(\{X_i \mid i \in I\}, T = (I, F))$ egy k szélességű fa-felbontása G-nek.

Először tegyünk egy megfigyelést, amelyet majd később használunk fel. A T fának egy belső csúcsát elhagyva különálló részfákra esik szét T. Vegyük észre, hogy ha ennek a T-beli csúcsnak megfelelő kupacot, azaz G-beli csúcshalmazt elhagyjuk G-ből, akkor G is különálló komponensekre esik. Ugyanis, nézzük a szétesett T részfáit, és azok kupacaiból vegyük ki az elhagyott belső csúcsnak megfelelő kupac csúcsait. Egy-egy ilyen módosított részfának egy-egy különálló G-beli komponens felel meg, hiszen a fa-felbontás definíciójában (1.2.1. Definíció) szereplő 3. tulajdonság miatt ezekben a részfákban különböző G-beli csúcsok szerepelnek, és két különböző részfában szereplő G-beli csúcs nem lehet összekötve G-ben a fa-felbontás 2. tulajdonsága miatt.

Keressünk most megfelelő szeparáló halmazt! Két eset van:

1. eset: Ha T tartalmaz egy olyan kupacot, amelyben szereplő G-beli csúcsok összsúlya legalább $1/2$, akkor ez a kupac az állításban szereplő követelményeknek megfelelő szeparáló halmaz a következők miatt. Egyrészt a kupacban nem szereplő G-beli csúcsok összsúlya legfeljebb $1/2$, így az 1. követelmény nyilván teljesül, másrészt a bizonyítás elején leírt megfigyelés alapján teljesül a 2. követelmény, harmadrészt pedig a favastagság definíciója (1.2.3. Definíció) miatt a kupacban szereplő csúcsok száma legfeljebb $k + 1$.

2. eset: Ha minden kupacnak az összsúlya kisebb, mint $\frac{1}{2}$, akkor válasszunk egy tetszőleges r gyökércsúcsot T-ben, és irányítsuk meg T éleit úgy, hogy r-től elfelé mutassanak. Ha vesszük T-nek egy tetszőleges s csúcsát, és T-nek az s gyökerű részfáját, akkor legyen $W(s)$ azoknak a csúcsoknak az összsúlya, amelyek ennek a részfának a kupacaiban szerepelnek (minden csúcsot csak egyszer számolunk, akkor is, ha több kupacban szerepelnek). Válasszuk ki T-nek egy olyan j csúcsát, amelyre $W(j) \geq \frac{1}{2}$ és j minden u gyerekére $W(u) < \frac{1}{2}$. Ezt nyilván meg tudjuk tenni, mert minden kupacnak az összsúlya kisebb, mint $\frac{1}{2}$. Legyen S a j-nek megfelelő kupac, azaz X_j. Ekkor S egy megfelelő szeparáló halmaz. Egyrészt, ahogy az 1. esetben is láttuk, $|S| \leq k+1$, illetve a 2. követelmény is nyilvánvalóan teljesül. Nézzük most az 1. követelményt. Azok a G-beli komponensek, amelyek a j-től az irányítás alapján lejjebb levő részfákból adódnak, a $W(u) < \frac{1}{2}$ feltétel miatt $\frac{1}{2}$-nél kisebb összsúlyúak. Az a G-beli komponens, amely pedig j-nek az r gyökércsúcs felé eső részfájából adódik, azért legfeljebb $\frac{1}{2}$ összsúlyú, mert $W(j) \geq \frac{1}{2}$ és ebben a G-beli komponensben nem szerepelhet olyan csúcs, amelynek a súlyát $W(j)$-be beleszámoltuk. Tehát az 1. követelmény is teljesül. □

Az 1.3.6. Állítás bizonyítása. Tekintsünk egy n csúcsú, $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$-es négyzetrácsot, amelynek a favastagságát jelölje k. Legyen B a négyzetrács csúcsainak legalsó sorából álló halmaz. Legyen B összes csúcsának a súlya $\frac{1}{\sqrt{n}}$, a négyzetrács többi csúcsáé pedig 0. Az 1.3.8. Lemma miatt van egy legfeljebb $k+1$ csúcsból álló S halmaz, amelynek az elhagyásával a négyzetrács az $S_1, S_2, \dots$ különálló komponensekre esik, úgy, hogy egyik komponens sem tartalmaz $\frac{\sqrt{n}}{2}$-nél több csúcsot B-ből, különben lenne olyan komponens, amelynek a súlya nagyobb, mint $\frac{1}{2}$. Indirekt módon tegyük fel, hogy $k < \frac{\sqrt{n}}{2} - 1$. Ekkor tehát S kevesebb, mint $\frac{\sqrt{n}}{2}$ csúcsból áll, vagyis a négyzetrácsnak több mint $\frac{\sqrt{n}}{2}$ oszlopa nem tartalmaz S-beli csúcsot. Nevezzük ezeket az oszlopokat szabad oszlopoknak. Mivel nincs olyan komponens, amely $\frac{\sqrt{n}}{2}$-nél több csúcsot tartalmaz a legalsó sorból, legalább két különböző komponens tartalmazza a legalsó csúcsát egy szabad oszlopnak. Legyen u és v két ilyen különböző komponens egy-egy szabad oszlopának a legalsó csúcsai. Továbbá, kell lennie egy szabad sornak is, mert kevesebb S-beli csúcs van, mint sor. Nézzük azt az utat, amely u-ból indul, felmegy a szabad oszlopon a szabad sorig, amelyen elmegy v szabad oszlopáig, majd lemegy ezen az oszlopon v-ig. Ez az út a két komponens között nem megy át S-beli csúcson, ami ellentmondás, tehát $k \geq \frac{\sqrt{n}}{2} - 1$. Vagyis a favastagság legalább $\frac{\sqrt{n}}{2} - 1$. □

1.3.9. Megjegyzés. Valójában a $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$-es négyzetrács favastagsága $\sqrt{n}$. A következőképpen tudunk egy olyan fa-felbontást adni, amelyben minden kupac mérete $\sqrt{n}+1$. Vegyük azokat a $B_{i,j}$ kupacokat, melyekre $1 \leq i < \sqrt{n}$, illetve $1 \leq j \leq \sqrt{n}$, és ahol $B_{i,j}$ tartalmazza az első $\sqrt{n}+1-j$ csúcsát az i-edik sornak és az utolsó j csúcsát az $i+1$-ik sornak. Könnyen látható, hogy a négyzetrács egy helyes fa-felbontását kapjuk, ha ezeket a kupacokat lexikografikus sorrendbe állítjuk (i szerinti, majd azon belül j szerinti sorrend), és összekötjük a szomszédos kupacokat, így előállítva a fát, amely ebben az esetben egy út. (Azt, hogy miért nem lehet $\sqrt{n}$-nél kisebb a favastagság, nem bizonyítjuk.)

1.4. A favastagság kiszámításának bonyolultsága néhány gráfosztály esetén

Stefan Arnborg, Derek G. Corneil, és Andrzej Proskurowski mutatta meg, hogy általános gráfok esetén NP-teljes feladat azt eldönteni, hogy a gráfnak kisebb vagy egyenlő-e a favastagsága, mint k, ha a gráf és k is bemeneti paraméter [1]. Azonban léteznek olyan speciális gráfosztályok, amelyeken belül hatékonyabban megoldható ez a probléma. Például egy korlátos favastagságú gráfosztályon belül, ahol tehát minden gráf favastagsága legfeljebb egy konstans k érték, lineáris idejűvé egyszerűsödik a feladat. A következő táblázat néhány speciális gráfosztályt sorol fel, illetve a hozzájuk tartozó bonyolultsági osztályt, ha az adott gráfosztályon belül vizsgáljuk a problémát.

Bonyolultsági osztály	**Gráfosztály**	**Leírás**
lineáris	átlós gráf	
	fa, erdő	A definíciókat
	Halin-gráf	lásd korábban.
	soros-párhuzamos gráf	
polinomiális	intervallumgráf	Olyan gráf, amelynek csúcsai megfeleltethetőek a valós számok egy-egy intervallumának, és két csúcsa között pontosan akkor van él, ha a megfelelő intervallumok metszete nem üres.
	körívgráf	Egy körön vett, zárt körívekből képzett metszetgráf.
	merevkörű gráf	Olyan gráf, amelyben minden háromnál hosszabb körben van húr, azaz olyan él, amely két nem szomszédos csúcsot köt össze.
	merevkörű páros gráf	Olyan páros gráf, amelyben minden háromnál hosszabb körben van húr, azaz olyan él, amely két nem szomszédos csúcsot köt össze.
	permutáció-gráf	Olyan gráf, amelynek csúcsai egy permutáció elemeinek felelnek meg, élei pedig az inverzióban álló elempárok között vezetnek.
	split gráf	Olyan gráf, amelynek csúcsai egy klikké és egy független csúcshalmazzá particionálhatók.
	távolság-öröklő gráf	Olyan gráf, amelyben minden összefüggő feszített részgráfban bármely két csúcs távolsága megegyezik az eredeti gráfban levő távolságukkal.
NP-teljes	korlátos fokú gráf	Olyan gráf, amelyhez létezik egy k konstans úgy, hogy minden csúcs foka legfeljebb k.
	páros gráf	Olyan gráf, amelynek csúcshalmazát fel lehet osztani két halmazra úgy, hogy az összes élre teljesül, hogy az egyik végpontja az egyik, a másik végpontja a másik csúcshalmazban van.
nyitott kérdés	síkbarajzolható gráf	Olyan gráf, amely lerajzolható úgy a síkban, hogy élei nem metszik egymást.

2. fejezet

Bodlaender algoritmusa

Ahogy már a bevezetésben említettük, korlátos favastagságú gráfokkal azért érdemes foglalkozni, mert sok nehéz probléma polinomiális, vagy akár lineáris időben megoldható rajtuk. Ehhez azonban ismerni kell a gráf egy konkrét, minél kisebb szélességű fa-felbontását. Az előző fejezet végén volt arról szó, hogy általános gráfok esetén NP-teljes feladat azt eldönteni, hogy a gráfnak kisebb vagy egyenlő-e a favastagsága, mint k, ha a gráf és k is bemeneti paraméter. Ha k-t rögzítjük, és csak a gráf a bemeneti paraméter, akkor egyszerűbbé válik a probléma. Hans L. Bodlaender tétele mondja ki azt, hogy bármely rögzített $k \in \mathbb{N}$ esetén létezik olyan lineáris idejű algoritmus, amely eldönti, hogy egy $G = (V, E)$ gráf favastagsága kisebb vagy egyenlő-e, mint k, és ha igen, megadja G egy legfeljebb k szélességű fa-felbontását. Bodlaender meg is adott egy ilyen algoritmust, ezt fogjuk áttekinteni ebben a fejezetben a [2] cikk alapján.

2.1. Az algoritmus fő ötlete

Az algoritmus a csúcsokat két halmazra, az „alacsony fokú” és a „magas fokú” csúcsok halmazára particionálja. Megmutatható, hogy azoknak a gráfoknak, amelyeknek a favastagsága legfeljebb egy rögzített k konstans, csak „kevés” magas fokú csúcsuk van. Két esetet különböztetünk meg:

1. „Elég sok” alacsony fokú csúcs szomszédos egy vagy több másik alacsony fokú csúccsal. Ekkor megmutatható, hogy G-ben bármely tovább nem bővíthető párosítás elég sok ($\Omega(n)$) élt tartalmaz. Vesszük azt a G' gráfot, amelyet úgy kapunk, hogy minden élt összehúzunk G-nek egy tovább nem bővíthető párosításában. Ekkor rekurzív módon kiszámítható G' egy legfeljebb k szélességű fa-felbontása, vagy levonható a következtetés, hogy G' favastagsága, ezért G favastagsága is nagyobb

k-nál. Az így megkapott fa-felbontásból egyszerűen kiszámítható G egy $2k+1$ szélességű fa-felbontása, amely már felhasználható az eredeti probléma megoldására Bodlaender és Kloks egy korábbi algoritmusának (lásd [4]) segítségével.

2. „Kevés" alacsony fokú csúcs szomszédos egy vagy több másik alacsony fokú csúccsal. Ekkor megmutatható, hogy éleknek egy bizonyos halmaza úgy adható G-hez, hogy nem növekszik a favastagság egy legfeljebb k nagyságú értékről k-nál nagyobb értékre. Megmutatható, hogy a G' „bővített gráf", tehát az a gráf, amelyet G-ből kapunk ezeknek az éleknek a hozzáadásával, elég sok ($\Omega(n)$) I-szimpliciális csúcsot tartalmaz. Egy I-szimpliciális csúcs egy olyan csúcs, amelynek szomszédai klikket alkotnak a G' bővített gráfban (illetve még egyéb, kevésbé fontos feltételeknek is teljesülnie kell.) G'-ből az I-szimpliciális csúcsokat elhagyva kapjuk G''-t. Rekurzív módon kiszámítható G'' egy legfeljebb k szélességű fa-felbontása, vagy levonható a következtetés, hogy G'' favastagsága, ezért G favastagsága is nagyobb k-nál. Az így megkapott fa-felbontásból egyszerűen kiszámítható az eredeti G gráf legfeljebb k szélességű fa-felbontása.

Mindkét esetben a rekurzív lépéseken kívüli lépések lineáris idejűek, a rekurzív részekben pedig minden G' mérete G-nek egy konstans törtrésze, ezért az egész algoritmus lineáris idejű.

2.2. Előzetes eredmények, definíciók, jelölések

A következőkben áttekintjük Bodlaender algoritmusának megértéséhez szükséges jelöléseket, állításokat és definíciókat, majd ismertetjük magát az algoritmust. A bizonyításoktól a legtöbb esetben eltekintünk, a cél az algoritmus szerkezetének átlátása lesz.

2.2.1. Definíció. *Egy $(\{X_i \mid i \in I\}, T = (I, F))$ k szélességű fa-felbontás egyenletes, ha*

1. $|X_i| = k + 1 \ \forall i \in I$
2. $|X_i \cap X_j| = k \ \forall (i, j) \in F$

2.2.2. Állítás. *Egy $G = (V, E)$ gráfnak bármely k szélességű $(\{X_i \mid i \in I\}, T = (I, F))$ fa-felbontása átalakítható k szélességű egyenletes fa-felbontássá.*

Bizonyítás. Az átalakításhoz alkalmazzuk addig a következő három műveletet, amíg már egyik sem végezhető el többször:

1. Ha $(i,j) \in F$ esetén $X_i \subseteq X_j$, akkor húzzuk össze az (i,j) élt T-ben, és az X_i-nek és X_j-nek megfelelő csúcsok összeolvasztásából keletkezett új csúcshoz rendeljük X_j-t. (Erre a műveletre nincs szükség, ha nem redundáns fa-felbontásból indultunk ki.)

2. Ha $(i,j) \in F$ esetén $X_i \nsubseteq X_j$ és $|X_j| < k+1$, akkor válasszunk egy $v \in X_i \backslash X_j$ csúcsot, és adjuk v-t X_j-hez.

3. Ha $(i,j) \in F$, $|X_i| = |X_j| = k+1$ és $|X_i \backslash X_j| > 1$, akkor osszuk fel az (i,j) élt T-ben. Legyen i' az új T-beli csúcs. Válasszunk egy $v \in X_i \backslash X_j$, illetve egy $w \in X_j \backslash X_i$ csúcsot, és legyen $X_{i'} = X_i \backslash \{v\} \cup \{w\}$. □

2.2.3. Állítás. *Ha* $(\{X_i \mid i \in I\}, T = (I,F))$ *egy* k *szélességű egyenletes fa-felbontása a* $G = (V,E)$ *gráfnak, akkor* $|I| = |V| - k$.

Bizonyítás. A bizonyítást $|I|$ szerinti indukcióval végezzük.

Nézzük az $|I| = 1$ esetet, amikor tehát egyetlen csúcsa van T-nek. Ekkor G összes csúcsát tartalmazza az ennek a T-beli csúcsnak megfelelő kupac, vagyis $|V|$ megegyezik a kupac elemszámával. Mivel egyenletes fa-felbontásról van szó, minden kupac elemszáma $k+1$, azaz $|V| = k+1$. Ebből következik, hogy $|V| - k = k+1-k = 1$, tehát $|I| = |V| - k$ teljesül.

Most tegyük fel, hogy igaz az állítás $|I| = n-1$-re. Belátjuk, hogy ebből következik az állítás $|I| = n$-re. Tekintsük egy $G = (V,E)$ gráfnak egy olyan $(\{X_i \mid i \in I\}, T = (I,F))$ k szélességű egyenletes fa-felbontását, melyre $|I| = n$. Legyen i egy levele T-nek. Ekkor egyértelműen létezik $v \in V$, amely szerepel az i-nek megfelelő kupacban, azaz X_i-ben, de nem szerepel T többi csúcsának megfelelő kupacban. Hagyjuk el i-t T-ből, illetve v-t (és a hozzá tartozó éleket) G-ből. Ekkor a T-ből keletkezett fából adódó fa-felbontás k szélességű egyenletes fa-felbontása a G-ből keletkezett $|V| - 1$ csúcsú gráfnak, $|I| - 1$, azaz $n-1$ csúccsal. Erre az indukciós feltevés miatt $n - 1 = (|V| - 1) - k$ teljesül, azaz $|I| = n = |V| - k$. □

2.2.4. Állítás. *Egy legfeljebb* k *favastagságú* $G = (V,E)$ *gráfnak legfeljebb* $k|V| - \binom{k+1}{2}$ *éle van.*

Bizonyítás. A bizonyítást $|V|$ szerinti indukcióval végezzük.

Induljunk $|V| = k+1$-től. ($|V| < k+1$ nem lehet, mert az azt jelentené, hogy van olyan kupac, amely több csúcsot tartalmaz, mint amennyi csúcsa G-nek van.) Ebben az esetben igaz az állítás, mert $k|V| - \binom{k+1}{2} = k(k+1) - \binom{k+1}{2} = \frac{k(k+1)}{2}$, és egy $k+1$ csúcsú gráfnak tényleg legfeljebb $\frac{k(k+1)}{2}$ éle van.

Most tegyük fel, hogy igaz az állítás $|V| = n-1$-re. Belátjuk, hogy ebből következik az állítás $|V| = n$-re. Tekintsük egy n csúcsú $G = (V, E)$ gráfnak egy legfeljebb k szélességű, egyenletes $(\{X_i \mid i \in I\}, T = (I, F))$ fa-felbontását. Ilyen létezik a 2.2.2. Állítás miatt. Legyen i egy levele T-nek. Ekkor egyértelműen létezik $v \in V$, amely szerepel az i-nek megfelelő kupacban, azaz X_i-ben, de nem szerepel T többi csúcsának megfelelő kupacban. Minden kupacban, így az i-nek megfelelő kupacban is $k+1$ csúcs van, tehát v foka legfeljebb k. Hagyjuk el i-t T-ből, és v-t G-ből. Ekkor a T-ből keletkezett fából adódó fa-felbontás legfeljebb k szélességű egyenletes fa-felbontása a G-ből keletkezett $G' = (E', V \setminus \{v\})$ gráfnak. Az $n-1$ csúcsú G'-re az indukciós feltevés miatt teljesül az állítás, azaz $|E'| \leq k(|V|-1) - \binom{k+1}{2}$. Mivel v foka legfeljebb k volt, legfeljebb k élt hagytunk el, azaz $|E| \leq k(|V|-1) - \binom{k+1}{2} + k = k|V| - \binom{k+1}{2}$. □

2.2.5. Állítás. *Legyen a $G = (V, E)$ gráf egy fa-felbontása $(\{X_i \mid i \in I\}, T = (I, F))$. Ekkor teljesülnek a következők.*

1. *Ha $W \subseteq V$ egy klikket feszít G-ben, akkor $\exists i \in I : W \subseteq X_i$.*

2. *Ha $W_1 \subseteq V$ és $W_2 \subseteq V$ egy teljes páros részgráfot feszít G-ben, tehát minden W_1-beli csúcs minden W_2-beli csúccsal szomszédos, akkor $\exists i \in I : W_1 \subseteq X_i$ vagy $W_2 \subseteq X_i$.*

2.2.6. Állítás. *Legyen a $G = (V, E)$ gráf egy fa-felbontása $(\{X_i \mid i \in I\}, T = (I, F))$. Ha $\exists i \in I : v, w \in X_i$ és $v \neq w$, akkor $(\{X_i \mid i \in I\}, T = (I, F))$ fa-felbontása a $G + (v, w) = (V, E \cup \{(v, w)\})$ gráfnak is.*

2.2.7. Állítás. *Tegyük fel, hogy a $G = (V, E)$ gráfban v-nek és w-nek legalább $k+1$ közös szomszédja van. Ha G favastagsága legfeljebb k, akkor $G + (v, w)$ favastagsága is legfeljebb k. Továbbá az is igaz, hogy G bármely legfeljebb k szélességű fa-felbontása a $G + (v, w)$ gráfnak is fa-felbontása, és fordítva.*

Ennek a fejezetnek a hátralevő részében feltesszük, hogy

- k egy adott, rögzített konstans,
- $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$ konstansok, melyeket úgy választunk meg, hogy

$$c_2 = \frac{1}{4k^2 + 12k + 16} - \frac{c_1 k^2 (k+1)}{2} > 0.$$

Ekkor c_1 és c_2 0 és 1 közötti számok, amelyek a későbbiekben ismertetett tulajdonságú csúcsoknak az arányára fognak felső illetve alsó korlátot adni.

- $d = max(k^2 + 4k + 4, \lceil 2k/c_1 \rceil)$

2.2.8. Definíció. *Egy gráf egy csúcsa alacsony fokú, ha fokszáma legfeljebb d.*

2.2.9. Definíció. *Egy gráf egy csúcsa magas fokú, ha fokszáma nagyobb, mint d.*

2.2.10. Definíció. *Egy gráf egy csúcsa barátságos, ha alacsony fokú és van legalább egy alacsony fokú szomszédja.*

2.2.11. Állítás. *Egy k favastagságú gráfban kevesebb, mint $c_1|V|$ magas fokú csúcs van.*

2.2.12. Definíció. *Egy $G = (V, E)$ gráf egy tovább nem bővíthető párosítása az $M \subseteq E$ élhalmaz, ha bármely két M-beli él független, vagyis nincs közös végpontjuk, és minden $E \backslash M$-beli élnek van valamely M-beli éllel közös végpontja.*

2.2.13. Megjegyzés.

1. A tovább nem bővíthető párosítást ne keverjük össze a maximális párosítással. Ez olyan párosítás, amelynek elemszáma maximális, tehát amelynél magasabb elemszámú párosítás nem létezik.

2. Tovább nem bővíthető párosítás mohó algoritmussal könnyen található, $O(|V|+|E|)$ időben.

2.2.14. Állítás. *Ha a $G = (V, E)$ gráfban n_b barátságos csúcs van, akkor G bármely tovább nem bővíthető párosítása legalább $\frac{n_b}{2d}$ élt tartalmaz.*

Legyen M egy tovább nem bővíthető párosítás a $G = (V, E)$ gráfban. Húzzunk össze minden M-beli élt G-ben, ekkor a kapott gráf legyen $G'(V', E')$. Definiáljuk az $f_M : V \to V'$ függvényt a következőképpen:

$$f_M(v) = \begin{cases} v & \text{ha } v \text{ nem végpontja } M\text{-beli élnek} \\ \\ \text{a } (v, w) \in M \text{ él összehúzása} & \\ \quad \text{során keletkezett csúcs} & \text{különben} \end{cases}$$

2.2.15. Állítás. *Legyenek M, G, G' és f_M olyanok, mint ahogyan feljebb definiáltuk őket. Ha (X, T) G'-nek egy k szélességű fa-felbontása, akkor (Y, T), ahol $Y_i = \{v \in V \mid f_M(v) \in X_i\}$, egy legfeljebb $2k + 1$ szélességű fa-felbontása G-nek.*

2.2.16. Állítás. *Legyenek G és G' olyanok, mint ahogyan feljebb definiáltuk őket. Ekkor G' favastagsága legfeljebb annyi, mint G favastagsága.*

2.2.17. Jelölés. Legyen v a $G = (V, E)$ gráf egy csúcsa. Ekkor a $\{w \in V \mid (v, w) \in E\}$ halmazt, azaz v szomszédainak halmazát jelölje $N_G(v)$.

2.2.18. Tétel. (Bodlaender és Kloks) *Minden k-ra és l-re létezik olyan lineáris idejű algoritmus, amely ha adott egy $G = (V, E)$ gráf és ennek egy legfeljebb l szélességű (X, T) fa-felbontása, akkor eldönti, hogy G fa-felbontása kisebb vagy egyenlő-e, mint k, és ha igen, megadja G-nek egy legfeljebb k szélességű fa-fafelbontását.* [4]

2.2.19. Definíció. *Tekintsünk egy $G = (V, E)$ gráfot. Módosítsuk G-t úgy, hogy adjuk a (v, w) élt E-hez minden olyan $v, w \in V$ pár esetén, amelyre v-nek és w-nek legalább $k + 1$ közös alacsony fokú szomszédja van G-ben. A G gráfból ily módon létrejött $G'(V, E')$ gráfot G bővített gráfjának nevezzük.*

2.2.20. Állítás. *Ha a G gráf favastagsága legfeljebb k, akkor G bővített gráfjának favastagsága is legfeljebb k. Továbbá az is igaz, hogy G bármely legfeljebb k szélességű fa-felbontása a bővített gráfnak is fa-felbontása, és fordítva.*

2.2.21. Definíció. *Egy v csúcs szimpliciális a G gráfban, ha szomszédai klikket alkotnak G-ben.*

2.2.22. Definíció. *Egy v csúcs I-szimpliciális, ha*

1. *szimpliciális G bővített gráfjában,*
2. *alacsony fokú G-ben, és*
3. *nem barátságos csúcs G-ben.*

Levezethető, hogy ha „kevés” magas fokú csúcs és „kevés” barátságos csúcs van egy G gráfban, akkor ha G favastagsága legfeljebb k, akkor G-ben sok I-szimpliciális csúcs van. Ezt mondja ki a következő állítás:

2.2.23. Állítás. *Ha a $G = (V, E)$ gráf favastagsága legfeljebb k, és n_b darab barátságos, illetve n_m darab magas fokú csúcsot tartalmaz, akkor legalább*

$$\frac{|V|}{2k^2 + 6k + 8} - 1 - n_b - \frac{1}{2}k^2(k + 1)n_m$$

I-szimpliciális csúcs van G-ben.

2.2.24. Állítás. *Legyen a G' az a gráf, amelyet egy G gráfnak a bővített gráfjából kapunk úgy, hogy töröljük belőle az összes I-szimpliciális csúcsot. Legyen (X,T) egy legfeljebb k szélességű fa-felbontása a G' gráfnak. Ekkor minden G-beli I-szimpliciális v csúcshoz létezik $i \in I : N_G(v) \subseteq X_i$.*

2.2.25. Állítás. *Ha kevesebb, mint $|V|/(4k^2+12k+16)$ barátságos csúcs van, akkor a 2.2.11. és 2.2.23. Állítás miatt legalább $|V|/(4k^2+12k+16) - \frac{1}{2}k^2(k+1)c_1|V| = c_2|V|$ I-szimpliciális csúcs van G bővített gráfjában, feltéve, hogy G favastagsága legfeljebb k.*

2.3. Az algoritmus

Ebben a részben megnézzük az algoritmus rekurzív leírását. Az algoritmus kimenete tehát egy $G=(V,E)$ gráf esetén

- vagy G-nek egy legfeljebb k szélességű fa-felbontása,
- vagy az, hogy G favastagsága k-nál nagyobb.

„Nagyon kicsi” gráfok esetén (azaz ha a gráf csúcsainak száma legfeljebb egy konstans érték), más véges algoritmusok használhatóak a probléma megoldására. Egyébként ezt az algoritmust használjuk.

Először ellenőrizzük, hogy $|E| \leq k|V| - \binom{k+1}{2}$ teljesül-e. Ha nem, akkor a 2.2.4. Állítás alapján tudjuk, hogy G favastagsága nagyobb, mint $k \longrightarrow$ STOP.

1. Ha legalább $|V|/(4k^2+12k+16)$ barátságos csúcs van, tegyük a következőt:
   - Keressünk egy tovább nem bővíthető $M \subseteq E$ párosítást G-ben.
   - Számítsuk ki a $G'(V',E')$ gráfot, amelyet úgy kapunk, hogy minden M-beli élt összehúzunk.
   - Rekurzív módon alkalmazzuk az algoritmust G'-re.
   - Ha G' favastagsága nagyobb, mint $k \longrightarrow$ STOP. Ekkor G favastagsága is nagyobb, mint k. (Lásd a 2.2.16. Állítást.)
   - Tegyük fel, hogy a rekurzív hívás G'-nek egy k szélességű (X,T) fa-felbontását adta. Ekkor konstruáljuk meg G-nek egy legfeljebb $2k+1$ szélességű (Y,T) fa-felbontását, mint a 2.2.15. Állításban.
   - Használjuk a 2.2.18. Tétel algoritmusát az eredeti probléma megoldásához.

2. Ha kevesebb, mint $|V|/(4k^2+12k+16)$ barátságos csúcs van, tegyük a következőt:

   - Számítsuk ki G bővített gráfját, és keressük meg az I-szimpliciális csúcsokat. (Ez lineáris időben megtehető, a részleteket nem tárgyaljuk.)
   - Ha létezik legalább $k+1$ fokú I-szimpliciális csúcs $\longrightarrow$ STOP, mivel G bővített gráfja tartalmaz legalább $k+2$ csúcsú klikket, ezért G favastagsága nagyobb, mint k.
   - Tegyük az I-szimpliciális csúcsokat egy S halmazba. Számítsuk ki G'-t, amelyet úgy kapunk, hogy töröljük G-ből az összes I-szimpliciális csúcsot és a hozzájuk tartozó éleket.
   - Ha $|S| < c_2|V| \longrightarrow$ STOP. Ekkor G favastagsága nagyobb, mint k. (Lásd a 2.2.25. Állítást.)
   - Rekurzív módon alkalmazzuk az algoritmust G'-re.
   - Ha G' favastagsága nagyobb, mint $k \longrightarrow$ STOP. Mivel G' részgráfja G-nek, G favastagsága is nagyobb, mint k.
   - Tegyük fel, hogy a rekurzív hívás G'-nek egy k szélességű (X,T) fa-felbontását adta. Ekkor $\forall v \in S$-re keressünk egy $i_v \in V$ csúcsot, amelyre $N_G(v) \subseteq X_{i_v}$, és adjunk egy új j_v csúcsot T-hez úgy, hogy $X_{j_v} = \{v\} \cup N_G(v)$. Ezen kívül tegyük j_v-t szomszédossá i_v-vel T-ben. (Ilyen i_v csúcs létezik a 2.2.24. Állítás miatt. A végeredmény G-nek egy legfeljebb k szélességű fa-felbontása.

Az algoritmus helyessége következik a 2.2. részből.

A futási idő a következőképpen állapítható meg. Egyrészt tudjuk, hogy minden rekurzív hívás esetében egy

$$(1-\frac{1}{2d(4k^2+12k+16)})|V|, \quad \text{vagy egy} \quad (1-c_2)|V|$$

csúcsú gráfon dolgozunk tovább. Legyen

$$c_3 = max((1-\frac{1}{2d(4k^2+12k+16)})|V|, (1-c_2)|V|).$$

Ekkor $0 \le c_3 < 1$. Másrészt minden nem rekurzív lépésnek létezik lineáris idejű megvalósítása (ennek részleteivel ebben a dolgozatban nem foglalkozunk). Így, ha az algoritmus futási idejét $T(n)$ jelöli egy n csúcsú gráf esetén, akkor azt kapjuk, hogy $T(n) \le T(c_3 \cdot n) + O(n)$, ezért $T(n) = O(n)$.

Azonban sajnos ez még nem jelenti, hogy a gyakorlatban jól használható lenne ez az algoritmus. Futási ideje $2^{O(k^3)} \cdot n$, amely rögzített k esetén lineáris időt jelent, de a konstans faktor óriási, így már $k = 4$ esetén sem működik elég gyorsan. Ezen az algoritmuson csak kisebb javítások történtek, amelyek a gyakorlati feladatoknál nem jelentenek előrelépést. Pontos eredményt adó és egyben gyors algoritmust tehát egyelőre nem találtak, helyette azonban léteznek heurisztikus, közelítő algoritmusok, amelyek a gyakorlatban jól használhatónak bizonyultak.

3. fejezet

A Robertson–Seymour-tétel és a korlátos favastagságú gráfok

A fejezet első részében kimondjuk Neil Robertson és Paul D. Seymour gráfminor-tételét. Ez a gráfelmélet egyik legmélyebb eredménye, bizonyítása rendkívül összetett. Az elméleten Robertson és Seymour 1983 és 2004 között dolgozott, több mint 500 oldalban közölték a bizonyítást. A tétel kimondása után belátjuk a tétel egy fontos következményét, amely gráfosztályok tiltott minorokkal való karakterizálhatóságáról szól. Végül megnézzük, mit jelent ez a következmény a korlátos favastagságú gráfok körében. Ebben a fejezetben a [10] és [11] cikkeket követjük.

3.1. Robertson–Seymour-tétel

A Robertson–Seymour-tétel kimondása előtt megnézünk néhány fogalmat és állítást, amelyek a tétel megértéséhez szükségesek.

3.1.1. Definíció. *Legyen X egy tetszőleges halmaz. Az X halmazon értelmezett kétváltozós $\sim$ reláció*

- *reflexív, ha $\forall x \in X$ esetén $x \sim x$*
- *tranzitív, ha $\forall x_1, x_2, x_3 \in X$ elemekre teljesül, hogy ha $x_1 \sim x_2$ és $x_2 \sim x_3$, akkor $x_1 \sim x_3$*

3.1.2. Definíció. *A kvázirendezés egy olyan kétváltozós reláció, amely reflexív és tranzitív.*

3.1.3. Definíció. *A $\sim$ kvázirendezés jól-kvázirendezés az X halmazon, ha X minden végtelen $x_0, x_1, x_2, \ldots$ sorozatára $\exists i < j$, hogy $x_i \sim x_j$. Ekkor azt mondjuk, hogy X elemei jól-kvázirendezettek a $\sim$ kvázirendezésre nézve.*

3.1.4. Definíció. *Egy H gráf a G gráfnak minora, ha megkapható G-ből a következő műveletek véges sokszori alkalmazásával:*

- *egy él törlése*
- *egy csúcs és a hozzá tartozó élek törlése*
- *egy él összehúzása (az él törlése és két végpontjának összeolvasztása)*

Jelölés: $H \preceq G$.

3.1.5. Definíció. *Egy H gráf a G gráfnak valódi minora, ha H minora G-nek, de H nem izomorf G-vel. Jelölés: $H \prec G$.*

3.1.6. Állítás. *A minor reláció ($\preceq$) kvázirendezés a véges gráfok halmazán.*

Bizonyítás. Tetszőleges G, G_1, G_2, G_3 véges gráfokra nyilvánvalóan teljesülnek a következők:

- $G \preceq G$ (reflexivitás)
- ha $G_1 \preceq G_2$ és $G_2 \preceq G_3$, akkor $G_1 \preceq G_3$ (tranzitivitás) □

Az előzőekben látott fogalmak és állítások megismerése után most már kimondhatjuk a Robertson–Seymour-tételt:

3.1.7. Tétel. (Robertson–Seymour) *Véges gráfok halmaza jól-kvázirendezett a minor relációra nézve. Másképpen ezt úgy lehet megfogalmazni, hogy véges gráfok tetszőleges végtelen $G_1, G_2, \ldots$ sorozatára igaz, hogy $\exists i < j$, hogy $G_i \preceq G_j$, azaz van két olyan elem, hogy az egyik minorként tartalmazza a másikat.*

3.2. Tiltott minorokkal való karakterizálás

Ebben a részben a Robertson–Seymour-tétel egy fontos következményével foglalkozunk, amely Klaus Wagner 1937-es eredményének általánosítása. Wagner tétele szerint egy véges gráf pontosan akkor síkbarajzolható, ha nem tartalmazza minorként K_5-öt vagy $K_{3,3}$-at. A következőkben megnézzük, hogy milyen általános feltétel teljesülése esetén lesz egy gráfosztály a síkbarajzolható gráfok osztályához hasonlóan tiltott minorokkal karakterizálható.

3.2.1. Definíció. *Egy $\mathcal{P}$ gráfosztály zárt a minorképzésre, ha bármely $G \in \mathcal{P}$ gráf esetén teljesül az, hogy ha $G' \preceq G$, akkor $G' \in \mathcal{P}$, azaz ha bármely $\mathcal{P}$-beli gráf minden minora is $\mathcal{P}$-beli.*

3.2.2. Tétel. *Minden minorképzésre zárt $\mathcal{P}$ gráfosztály karakterizálható tiltott minorok egy véges $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ halmazával, formálisan tehát $G \in \mathcal{P} \iff \forall T \in \mathcal{T}(\mathcal{P})$-re $T \npreceq G$, ahol $|\mathcal{T}(\mathcal{P})| < \infty$.*

Most megnézzük, hogyan következik ez a tétel a Robertson–Seymour-tételből. Először szükségünk lesz egy állításra, amelyet majd a bizonyításban felhasználunk.

3.2.3. Állítás. *Nem létezik valódi minoroknak végtelen csökkenő lánca, vagyis nem létezik gráfoknak egy olyan $\{G_n\}$ sorozata, hogy $G_1 \succ G_2 \succ \dots$.*

Bizonyítás. A minorképzés bármely művelete (él törlése, él összehúzása, csúcs törlése) csökkenti egy gráfban az élek és csúcsok együttes számát. Mivel ez egy nemnegatív egész szám, véges sok lépésben eljutunk az üres gráfig, tehát nem létezhet ilyen végtelen csökkenő lánc. □

A 3.2.2. Tétel bizonyítása. Jelölje $\overline{\mathcal{P}}$ azoknak a gráfoknak a halmazát, amelyek nem $\mathcal{P}$-beliek. Legyen $\mathcal{T}(\mathcal{P}) = \{T \mid T \in \overline{\mathcal{P}}$ és $\forall H \prec T$-re $H \in \mathcal{P}\}$, azaz $\overline{\mathcal{P}}$-nek valódi minorképzésre nézve minimális elemeinek halmaza. Belátjuk, hogy ekkor

$$G \in \mathcal{P} \iff \forall T \in \mathcal{T}(\mathcal{P})\text{-re } T \npreceq G, \text{ ahol } |\mathcal{T}(\mathcal{P})| < \infty.$$

Az egyik irány belátásához legyen $G \in \mathcal{P}$. Indirekt módon tegyük fel, hogy $\exists T \in \mathcal{T}(\mathcal{P})$, amelyre $T \preceq G$. Mivel $\mathcal{P}$ zárt a minorképzésre, $T \in \mathcal{P}$ teljesül, de ez ellentmondás, mert $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ definíciója miatt $T \in \overline{\mathcal{P}}$.

A másik irány belátásához legyen G olyan, hogy $\forall T \in \mathcal{T}(\mathcal{P})$-re $T \npreceq G$. Indirekt módon tegyük fel, hogy $G \notin \mathcal{P}$, tehát $G \in \overline{\mathcal{P}}$. Két eset van:

1. eset: Ha G minden valódi minora $\mathcal{P}$-beli, akkor $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ definíciója miatt $G \in \mathcal{T}(\mathcal{P})$. Ezek szerint, mivel $\forall T \in \mathcal{T}(\mathcal{P})$-re $T \npreceq G$, következik, hogy $G \npreceq G$, ami ellentmondás.

2. eset: Ha létezik $G' \in \overline{\mathcal{P}}$, amelyre $G \succ G'$, akkor G' is besorolható a két eset valamelyikébe. Ha az eljárást folytatva valamikor az 1. esethez jutunk, akkor az ellentmondás az ott leírtak miatt, ha pedig mindig a 2. eset lesz érvényben, kialakul egy valódi minorokból álló $G \succ G' \succ G'' \succ \dots$ lánc. Ez pedig a 3.2.3. Állítás miatt ellentmondás.

$|\mathcal{T}(\mathcal{P})|$ végességének bizonyításához indirekt módon tegyük fel, hogy $|\mathcal{T}(\mathcal{P})| = \infty$. Ekkor a 3.1.7. Tétel, vagyis a Robertson–Seymour-tétel miatt $\exists G_1, G_2 \in \mathcal{T}(\mathcal{P})$, hogy $G_1 \preceq G_2$. Sőt, $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ egy halmaz, ezért egy elem csak egy példányban szerepel benne, így $G_1 \prec G_2$-nek is teljesülnie kell. De $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ definíciója miatt $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ egyik elemének sincs valódi minora $\overline{\mathcal{P}}$-ben, és ezért $\mathcal{T}(\mathcal{P})$-ben sem lehet. □

3.3. Korlátos favastagságú gráfok és tiltott minorok

Ebben a részben megnézzük, mi a kapcsolat a Robertson–Seymour tétel előző részben megismert következménye és a korlátos favastagságú gráfok között.

3.3.1. Állítás. *A legfeljebb k favastagságú gráfok osztálya zárt a minorképzésre.*

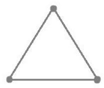
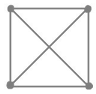
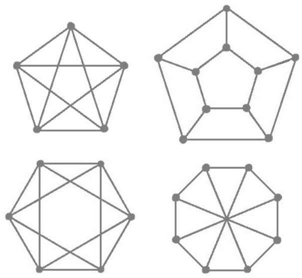
Bizonyítás. Vegyünk egy legfeljebb k favastagságú $G = (V, E)$ gráfot, és ennek egy legfeljebb k szélességű $(\{X_i \mid i \in I\}, T = (I, F))$ fa-felbontását. Azt kell belátni, hogy G-nek minden minora is legfeljebb k favastagságú. Elég a minorképzés három műveletét (3.1.4. Definíció) egyesével ellenőrizni:

1. Egy él elhagyása nem növeli a favastagságot, mert $(\{X_i \mid i \in I\}, T = (I, F))$ a keletkezett gráfnak is fa-felbontása.

2. Egy csúcs elhagyása esetén ezt a csúcsot az $(\{X_i \mid i \in I\}, T = (I, F))$ fa-felbontás kupacaiból is vegyük ki, így a keletkezett gráfnak egy jó fa-felbontását kapjuk. Ennek szélessége nem nagyobb $(\{X_i \mid i \in I\}, T = (I, F))$ szélességénél, mert egyik kupac elemszáma sem nőtt. Tehát egy csúcs elhagyása nem növeli a favastagságot. (Előfordulhat, hogy a gráf és a módosított fa-felbontás is több komponensre esik szét a csúcs elhagyása miatt, ekkor komponensenként nézve a favastagságot, ugyanúgy teljesül az állítás.)

3. Egy (u, v) él összehúzása esetén a G fa-felbontásában szereplő kupacokban cseréljük u-t v-re, vagy amelyik kupacban szerepelt u és v is, ott egyszerűen hagyjuk el u-t. Ekkor az (u, v) él elhagyásával keletkezett gráfnak egy jó fa-felbontását kapjuk, amely szintén legfeljebb k szélességű. □

A Robertson–Seymour-tétel tehát alkalmazható a korlátos favastagságú gráfokra: minden véges k értékre a legfeljebb k favastagságú gráfok karakterizálhatóak tiltott minorok egy véges halmazával. A tétel azonban arról nem szól, hogy pontosan mely gráfok tartoznak a tiltott minorok közé, így ezek a korlátos favastagságú gráfok esetében is csak kis k értékekre ismertek:

$k = 0$:	$k = 1$:	$k = 2$:	$k = 3$:
K_2	K_3	K_4	K_5, a pentagonális prizma gráfja, $K_{2,2,2}$, Wagner-gráf
			

$k = 4$ esetén már több mint 75 tiltott minor van. Nagyobb k értékekre a tiltott minorok száma legalább $\sqrt{k}$-ban exponenciális gyorsasággal növekszik. A növekedés ütemére vonatkozó felső korlát pedig sokkal magasabb, mint ez az alsó korlát.

4. fejezet

Nehéz feladatok hatékony megoldása korlátos favastagságú gráfok esetén

Ebben a fejezetben olyan problémákkal foglalkozunk, amelyek általános gráfokon nehezek, de megoldásuk a korlátos favastagságú gráfok osztályán belül jelentősen egyszerűbbé válik. A fejezet során a [3] és [8] cikkeket használjuk fel. A problémák közül egyet nézünk meg részletesen, a maximális független halmaz problémát, amely egy jól ismert, NP-teljes gráfelméleti probléma. Ennek a korlátos favastagságú gráfosztályokon belüli megoldására egy lineáris idejű algoritmust mutatunk. A fejezet végén röviden ismertetünk még három fontos eredményt, amelyekben a korlátos favastagságú gráfok nagy szerepet játszanak.

4.1. Maximális független halmaz

A maximális független halmaz probléma egy jól ismert NP-teljes gráfelméleti probléma. A feladat az, hogy keressük meg a $G = (V, E)$ gráfban a legnagyobb $W \subseteq V$ csúcshalmazt, amelyre minden $v, w \in W$ esetén $(v, w) \notin E$.

Ebben a részben megnézzük, hogyan oldható meg ez a probléma korlátos favastagságú gráfok esetén, lineáris időben.

Legyen $(\{X_i \mid i \in I\}, T = (I, F))$ a $G = (V, E)$ gráfnak egy k szélességű fa-felbontása, ahol T egy r gyökerű bináris fa. (Könnyen látható, hogy bármely fa-felbontás átalakítható olyan azonos szélességű fa-felbontássá, amelyben a fa gyökeres bináris fa.)

Minden $i \in I$-re definiáljunk egy $Y_i = \{v \in X_j \mid j = i \text{ vagy } j \text{ leszármazottja } i\text{-nek}\}$ halmazt.

Tegyünk két megfigyelést:

- Ha $v \in Y_i$, és $v \in X_j$ egy olyan j csúcsra, amely nem leszármazottja i-nek, akkor a fa-felbontás definíciójában (1.2.1. Definíció) szereplő 3. tulajdonság miatt $v \in X_i$.
- Hasonlóképpen, ha $v \in Y_i$, és v szomszédos egy $w \in X_j$ csúccsal, ahol j leszármazottja i-nek, akkor $v \in X_i$ vagy $w \in X_i$.

Ezeknek a következménye, hogy a globális, egész gráfon értelmezett maximális független halmaz problémát egy új, lokálisan értelmezett feladatra tudjuk visszavezetni. Minden T-beli $i \in I$ csúcs esetén, ha veszünk egy Y_i által feszített $G[Y_i]$ részgráfot G-ben, illetve egy W független halmazt $G[Y_i]$-n belül, akkor a feladat az, hogy W-t ki szeretnénk terjeszteni G egy független halmazává. Ekkor csak az a fontos, hogy mely X_i-beli csúcsok tartoznak W-hez, az pedig nem, hogy mely $Y_i \backslash X_i$-beliek. A következőkben a W csúcsainak száma fog nagy szerepet játszani.

Minden $i \in I$, $Z \subseteq X_i$ esetén jelentse $n_i(Z)$ annak a $G[Y_i]$-beli W maximális független halmaznak a méretét, ahol $W \cap X_i = Z$. Legyen $n_i(Z) = -\infty$, ha nem létezik ilyen halmaz.

Konstruálunk egy lineáris idejű algoritmust, amely minden $i \in I$ esetén kiszámítja az n_i-hez különböző V halmazok esetén tartozó értékekből álló táblát. Ez $2^{|X_i|}$ érték kiszámítását jelenti, de tudjuk, hogy $|X_i|$ korlátos: a korlát értéke G favastagsága. Az algoritmus alulról felfelé halad a fában, tehát egy n_i táblának a kiszámítása akkor kerül sorra, ha i minden j gyerekére az n_j tábla már ki van számítva. Az n_i tábla elemeinek kiszámítására a következő két formulát fogjuk használni.

Ha az i csúcs levél:

$$n_i(Z) = \begin{cases} |Z| & \text{ha } \forall v, w \in Z : (v,w) \notin E \\ -\infty & \text{ha } \exists v, w \in Z : (v,w) \in E \end{cases}$$

Ha az i csúcs belső csúcs a j és k gyerekkel:

$$n_i(Z) = \begin{cases} M & \text{ha } \forall v, w \in Z\text{-re } (v,w) \notin E \\ -\infty & \text{ha } \exists v, w \in Z : (v,w) \in E \end{cases}$$

$$\text{ahol } M = \max_{\substack{Z \cap X_j = Z' \cap X_i \\ Z \cap X_k = Z'' \cap X_i}} \{n_j(Z') + n_k(Z'') + |Z \cap (X_i \backslash X_j \backslash X_k)| - |Z \cap X_j \cap X_k|\}$$

Tehát vesszük a maximális elemszámot, ami előfordulhat az összes olyan $Z' \subseteq X_j$ halmaz között, amelyre $Z \cap X_j = Z' \cap X_i$, és az összes olyan $Z'' \subseteq X_k$ halmaz között, amelyre $Z \cap X_k = Z'' \cap X_i$. A $Z \cap (X_i \backslash X_j \backslash X_k)$-beli csúcsokat még nem számoltuk, ezért ennek a halmaznak az elemszámát még hozzá kell adni az eredményhez, míg a $Z \cap X_j \cap X_k$ halmaz elemszámát le kell vonni, mert ezeket az elemeket kétszer számoltuk.

Alulról felfelé haladva végül elérjük az r gyökércsúcsot, és kiszámítjuk az n_r táblát. A maximális G-beli független halmaz mérete a $\max\limits_{Z \subseteq X_r} \{n_r(Z)\}$ érték. Az elkészült táblákból maga a W maximális független halmaz is megkonstruálható.

Az algoritmus $O(2^{3k}|V|)$ futásidejű, tehát a csúcsok számától lineárisan, a favastagságtól pedig exponenciálisan függ.

4.2. Másodrendű monadikus logika

A másodrendű monadikus logika (monadic second-order logic, MSO) egy olyan nyelv, amellyel gráfok tulajdonságait ki lehet fejezni. A nyelv a következő formulákat használja fel:

- logikai műveletek ($\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\Leftrightarrow$, $\ldots$)
- kvantorok csúcsokra és élekre, illetve csúcsok és élek halmazára ($\forall v \in V$, $\exists e \in E$, $\forall W \subseteq V$, $\exists F \subset E$, $\ldots$)
- tartalmazás ellenőrzése ($v \in V$, $e \in E$, $\ldots$)
- illeszkedés ellenőrzése ($(v, w) \in E$, v végpontja-e az e élnek, $\ldots$)

Másodrendű monadikus logikával tehát eldöntési problémák írhatók le. Például egy $G = (V, E)$ gráf három színnel való színezhetősége egy ilyen probléma, amelyet a következő módon lehet kifejezni:

$$\begin{aligned}
&\exists W_1 \subseteq V,\ \exists W_2 \subseteq V,\ \exists W_3 \subseteq V:\\
&\quad \Big(\forall v \in V: \big(v \in W_1 \vee v \in W_2 \vee v \in W_3\big)\Big) \wedge\\
&\quad \Big(\forall v \in V: \neg\Big(\big(v \in W_1 \wedge v \in W_2\big) \vee \big(v \in W_1 \wedge v \in W_3\big) \vee \big(v \in W_2 \wedge v \in W_3\big)\Big)\Big) \wedge\\
&\quad \Big(\forall v \in V,\ \forall w \in V: \Big(\big((v \in W_1 \wedge w \in W_1) \vee (v \in W_2 \wedge w \in W_2) \vee\\
&\qquad\qquad \vee\ (v \in W_3 \wedge w \in W_3)\big) \Longrightarrow \neg\big((v, w) \in E\big)\Big)\Big)
\end{aligned}$$

Ha ez a kifejezés igaz, akkor G három színnel színezhető.

A következő tétel az egyik legfontosabb eredmény a korlátos favastagságú gráfok körében:

4.2.1. Tétel. (Courcelle) *Legyen G egy k favastagságú gráf. Minden olyan gráfelméleti probléma, amely kifejezhető monadikus másodrendű logikával, lineáris időben megoldható G-n.* [5]

Courcelle tételét később többször kiterjesztették bővebb problémakörökre, „kiterjesztett" másodrendű logikával (extended second-order logic) kifejezhető problémákra. (A másodrendű monadikus logika formulái közé még más formulákat is bevettek.) Ezek közé már nem csak eldöntési problémák, hanem optimalizációs problémák is tartoznak, például a maximális független halmaz probléma.

4.3. Gráfosztályok felismerése

Neil Robertson és Paul D. Seymour 3. fejezetben említett, gráfminorokról szóló hosszú munkájának egy részeredménye a következő tétel is:

4.3.1. Tétel. *Egy minorképzésre zárt gráfosztály pontosan akkor korlátos favastagságú, ha nem tartalmazza az összes síkbarajzolható gráfot.*

Ebből, és Hans L. Bodlaender 2. fejezetben tárgyalt tételéből (miszerint bármely rögzített $k \in \mathbb{N}$ esetén létezik olyan lineáris idejű algoritmus, amely eldönti, hogy egy $G = (V, E)$ gráf favastagsága kisebb vagy egyenlő-e, mint k, és ha igen, megadja G egy legfeljebb k szélességű fa-felbontását) következik, hogy:

4.3.2. Tétel. *Minden olyan minorképzésre zárt gráfosztály, amely nem tartalmazza az összes síkbarajzolható gráfot, lineáris időben felismerhető.*

4.4. Tutte-polinom

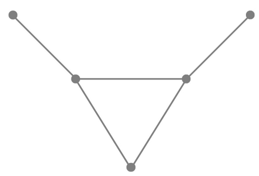
Egy gráf Tutte-polinomja egy olyan kétváltozós polinom, amely a gráf éleinek és csúcsainak kapcsolódásáról tárol információt. Segítségével fontos kombinatorikai mennyiségeket lehet kiszámítani, például a gráf feszítőfáinak számát, a sehol sem nulla folyamok számát, vagy a gráf kromatikus polinomját, és ezáltal a kromatikus számot is.

4.4.1. Definíció. *A $G = (V, E)$ gráf Tutte-polinomja a következő:*

$$T(x, y) = \sum_{A \subseteq E} (x-1)^{p(A)-p}(y-1)^{p(A)+|A|-|V|},$$

ahol p az összefüggő komponensek száma G-ben, $p(A)$ pedig az összefüggő komponensek száma a $G' = (V, A)$ gráfban.

A következő ábrán egy gráf és a hozzá tartozó Tutte-polinom látható.



$$T(x, y) = x^4 + x^3 + x^2y$$

Általános gráfok esetében nem létezik polinomiális idejű algoritmus a Tutte-polinom kiszámítására, a korlátos favastagságú gráfok osztályán belül azonban igen. Így ezeknek a gráfoknak a körében polinomiális időben kiszámítható például a kromatikus szám, ami egyébként NP-teljes feladat.

Irodalomjegyzék

[1] Stefan Arnborg, Derek G. Corneil, Andrzej Proskurowski, *Complexity of finding embeddings in a k-tree*, SIAM J. Algebraic Discrete Methods, 8:277-284, 1987

[2] Hans L. Bodlaender, *A linear time algorithm for findig tree-decompositions of small tree-width*, Proceedings of the twenty-fifth annual ACM symposium on Theory of computing, 1993

[3] Hans L. Bodlaender, *A tourist guide through treewidth*, Acta Cybernetica, Volume 11, 1993

[4] Hans L. Bodlaender, Ton Kloks, *Better algorithms for the pathwidth and treewidth of graphs*, Proceedings of the 18th International Colloquium on Automata, Languages and Programming, 1991

[5] Bruno Courcelle, *The monadic second-order logic of graphs. I. Recognizable sets of finite graphs*, Information and Computation 12-75, 1990

[6] Uriel Feige, Robert Krauthgamer, *Treewidth and graph minors*, egyetemi jegyzet, 2012 (http://www.wisdom.weizmann.ac.il/ robi/teaching/2012a-AdvancedAlgorithms/Lecture9+10-Treewidth.pdf)

[7] Stephan Holzer, *Bounded Treewidth*, 2008 (http://www14.informatik.tu-muenchen.de/konferenzen/Jass08/courses/1/holzer/Holzer_Paper.pdf)

[8] Andreas Krause, *Bounded Treewidth Graphs*, 2003 (http://www14.in.tum.de/konferenzen/Jass03/presentations/krause.pdf)

[9] Neil Robertson, Paul D. Seymour, *Graph minors. II. Algorithmic aspects of tree-width*, J. Algorithms, 7:309-322, 1986

[10] Uli Wagner, *Graphs and Algorithms: Advanced Topics - Treewidth*, egyetemi jegyzet, 2010 (http://www.ti.inf.ethz.ch/ew/lehre/GA10/lec-treewidth-new.pdf)

[11] Dan Weiner, *Forbidden minors and minor-closed graph properties*, 2006 (http://www.math.uchicago.edu/ may/VIGRE/VIGRE2006/PAPERS/Weiner.pdf)