Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Samu Viktória

A Helmholtz-egyenlet

BSc Szakdolgozat

Témavezető:

Dr. Tóth Árpád

Analízis Tanszék

Budapest, 2014

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Tóth Árpádnak az érdekes témát és a felfolgzása során nyújtott rengeteg segítséget. Köszönöm, hogy végig hitt bennem, és hogy segített leküzdeni a közös munkánk során felmerült akadályokat. Nélküle ez a szakdolgozat nem jöhetett volna létre.

Köszönet illeti továbbá családomat és barátaimat az egyetemi évek alatt tőlük kapott támogatásért, és tanáraimat, amiért megszerettették velem a matematikát.

Tartalomjegyzék

Bevezetés **5**

1. Egy dimenzióban: *A rezgő húr* **7**

2. A Laplace operátor polárkoordinátákban **12**
2.1. Első bizonyítás 12
2.2. Második bizonyítás 16

3. Két dimenzióban: *A rezgő dob* **17**
3.1. A körszimmetrikus eset 19
3.2. Általános eset 23

4. Numerikus vizsgálat **26**

Irodalomjegyzék **32**

Függelék **33**

Ábrák jegyzéke

1.1. A rezgő húr 7

4.1. A J_0 Bessel-függvény 26
4.2. A körszimmetrikus rezgés egy fix időpillanatban λ_{01} és λ_{02} esetén 28
4.3. A körszimmetrikus rezgés egy fix időpillanatban λ_{03} és λ_{04} esetén 28
4.4. A körszimmetrikus rezgés egy fix időpillanatban λ_{05} esetén 29
4.5. A J_m Bessel-függvények $m = 0, 1, 2, 3, 4$ esetén 29
4.6. A kör alakú dob rezgése egy fix időpillanatban λ_{11} és $\lambda 12$ esetén 31
4.7. A körszimmetrikus rezgés egy fix időpillanatban λ_{13} és $\lambda 14$ esetén 31

Bevezetés

Dolgozatom témája a Helmholtz-egyenlet, amely az alábbi parciális differenciálegyenlet:

$$\Delta f + k^2 \cdot f = 0,$$

ahol Δ a Laplace-operátor, f egy függvény, k pedig egy skalár. n-dimenziós Descartes-féle koordinátarendszerben az egyenlet az alábbi alakban írható fel:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + k^2 \cdot f = 0$$

A Helmholtz-egyenletet sokszor használják olyan fizikai problémák vizsgálatakor, ahol parciális differenciálegyenletek fordulnak elő. Az eredeti egyenleten alkalmazva a változók szétválasztásának módszrét olyan az időtől független egyenletet kapunk, amelynek alakja megegyezik a fentiével.

Elsőként egy egydimenziós problémát fogok vizsgálni, amellyel a hétköznapi életben sokszor találkozunk. A húr rezgését az egydimenziós hullámegyenlet írja le, ezen a problémán alapul sok hangszer, például a gitár, a hegedű és a zongora is.

Ezután megnézem, hogy polárkoordinátákban a Laplace-operátor miért az alábbi alakban írható fel:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

A 3. fejezetben egy 2-dimenziós esettel, egy kör alakú lemez rezgéseivel, az ezeket leíró hullámegyenlettel és az időtől független Helmholtz-egyenlettel fogok foglalkozni. Részletesen meg fogom vizsgálni a körszimmetrikus megoldásokat és megnézem, mennyiben tér el ettől az általános eset.

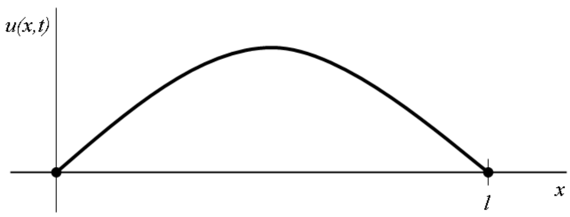
Ebben a fejezetben fogom használni a Laplace-operátor polárkoordinátás alakját, hiszen ekkor a Helmholtz-egyenlet a következőképpen fog kinézni:

$$\frac{\partial^2 f(r,\varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial f(r\varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 f(r,\varphi)}{\partial \varphi^2} + \lambda^2 \cdot f(r,\varphi) = 0$$

A 4. fejezetben a MATLAB segítségével fogom megkeresni a rezgő dob problémájának konkrét megoldásait és ezek közül néhányat ábrázolni is fogok.

1. fejezet

Egy dimenzióban: *A rezgő húr*



1.1. ábra. A rezgő húr

A regző húr mozgását hullámegyenlet írja le. Jelölje $u(x,t)$ a húr x-tengelytől való távolságát x helyen és t időpillanatban, a húr hossza pedig legyen l. Tudjuk, hogy a húr két vége le van rögzítve a vízszintes tengely magasságában, és meg van adva a $t = 0$ időpillanatban a húr helyzete ($f(x)$) és sebessége ($g(x)$).

Ekkor tehát a következő egyenlet megoldását keressük:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{1.1}$$

minden $0 < x < l$ és minden $t > 0$ esetén, ahol teljesülnek az alábbi peremfeltételek:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \tag{1.2}$$

és az alábbi kezdeti feltételek:

$$u(x,0) = f(x), \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x). \tag{1.4}$$

Először is tegyük fel, hogy $u(x,t)$ előáll $X(x) \cdot T(t)$ alakban, azaz szétválasztható változójú. Ekkor $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = X(x) \cdot T''(t)$ és $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = X''(x) \cdot T(t)$, tehát az egyenletünk:

$$X(x) \cdot T''(t) = c^2 \cdot X''(x) \cdot T(t) \; .$$

Ebből az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{T''(t)}{T(t)} \; . \tag{1.5}$$

(1.5)-ben a bal oldal független t-től, a jobb oldal pedig független x-től. Ez akkor és csak akkor lehetséges, ha mindkét oldal ugyanazzal konstanssal egyenlő. Jelöljük ezt a konstanst σ-val. Ekkor $\frac{X''(x)}{X(x)} = \sigma = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{T''(t)}{T(t)}$-ből az alábbi két egyenletet kapjuk:

$$X''(x) - \sigma \cdot X(x) = 0 \tag{1.6}$$

$$T''(t) - \sigma \cdot c^2 \cdot T(t) = 0 \; . \tag{1.7}$$

(1.6) megoldása $X(x) = a \cdot \cos(\sqrt{-\sigma} \cdot x) + b \cdot \sin(\sqrt{-\sigma} \cdot x)$, (1.7) megoldása pedig $T(t) = \alpha \cdot \cos(\sqrt{-\sigma} \cdot c \cdot t) + \beta \cdot \sin(\sqrt{-\sigma} \cdot c \cdot t)$ alakú, ahol $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tetszőleges. Ezt a következő állításban látjuk be.

1.1. Állítás. *Az $y''(t) + c^2 \cdot y(t) = 0$ ($c \in \mathbb{R}$) egyenlet megoldásai $a \cdot \cos(c \cdot t) + b \cdot \sin(c \cdot t)$ alakúak, ahol $a, b \in \mathbb{C}$ tetszőleges.*

Bizonyítás. Írjuk fel a deriváltakat:

$$\begin{aligned}
y'(t) &= a \cdot (-\sin(c \cdot t) \cdot c) + b \cdot \cos(c \cdot t) \cdot c = -ac \cdot \sin(ct) + bc \cdot \cos(ct) \\
y''(t) &= -ac \cdot \cos(ct) \cdot c + bc \cdot (-\sin(ct) \cdot c) = -a \cdot c^2 \cdot \cos(ct) - b \cdot c^2 \cdot \sin(ct) = \\
&= -c^2 \cdot (a \cdot \cos(ct) + b \cdot \sin(ct)) = -c^2 \cdot y(t)
\end{aligned}$$

Ebből megkapjuk, hogy $y''(t) + c^2 \cdot y(t) = 0$, tehát $y(t)$ valóban megoldás.
□

A megoldást a következőképpen kaptuk meg:

Másodrendű differenciálegyenleteket visszavezethetünk az elsőrendű esetre az $x_1 := y$, $x_2 := y'$ helyettesítéssel. Ekkor teljesülnek a következők: $x_1' = x_2$ és $x_2' = -c^2 \cdot x_1$.

Ekkor az $x''(t) = A \cdot x(t)$ elsőrendű lineáris differenciálegyenletet kapjuk, ahol $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c^2 & 0 \end{pmatrix}$.

Ennek a megoldása: $x(t) = e^{At} \cdot r$, ahol $r \in \mathbb{R}^2$ tetszőleges.

e^{At}-t a Hermite-féle interpolációs polinom segítségével számoljuk ki.

$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -c^2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + c^2$, ebből $\lambda_1 = c \cdot i$, $\lambda_2 = -c \cdot i$.

Mivel a minimálpolinom foka 2, az interpolációs polinom $p_t(z) = a_t \cdot z + b_t$ alakú lesz. Ebből kapjuk majd meg e^{At}-t, ugyanis $p_t(A) = e^{At}$.

Tudjuk: $p_t(ci) = e^{ci \cdot t} = a_t \cdot ci + b_t$ és $p_t(-ci) = e^{-ci \cdot t} = a_t \cdot (-ci) + b_t$.

Ebből

$$\begin{aligned} e^{ci \cdot t} - a_t \cdot ci &= e^{-ci \cdot t} + a_t \cdot ci \\ e^{c \cdot it} - e^{-c \cdot it} &= 2 \cdot a_t \cdot ci \\ \frac{e^{c \cdot it} - e^{-c \cdot it}}{c \cdot 2i} &= a_t, \text{ azaz} \\ \frac{1}{c} \cdot \sin(ct) &= a_t \ . \end{aligned}$$

b_t ebből kifejezhető:

$$b_t = e^{ci \cdot t} - \frac{e^{c \cdot it} - e^{-c \cdot it}}{2 \cdot ci} \cdot ci = \frac{2e^{c \cdot it} - e^{c \cdot it} + e^{-c \cdot it}}{2} = \frac{e^{c \cdot it} + e^{-c \cdot it}}{2} = \cos(ct)$$

p_t tehát: $p_t(z) = \frac{\sin(ct)}{c} \cdot z + \cos(ct)$. Mivel $e^{At} = p_t(A) = a_t \cdot A + b_t \cdot I$,

$$e^{At} = \frac{\sin(ct)}{c} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c^2 & 0 \end{pmatrix} + \cos(ct) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\sin(ct)}{c} \\ -c \cdot \sin(ct) & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(ct) & 0 \\ 0 & \cos(ct) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(ct) & \frac{\sin(ct)}{c} \\ -c \cdot \sin(ct) & \cos(ct) \end{pmatrix}$$

$x(t) = e^{At} \cdot r$ $(r \in \mathbb{R}^2)$, tehát $x(t) = \begin{pmatrix} \cos(ct) & \frac{\sin(ct)}{c} \\ -c \cdot \sin(ct) & \cos(ct) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$.

Nekünk $y(t)$ kell, és mivel $y = x_1$, ezért $y(t) = \begin{pmatrix} \cos(ct) & \frac{\sin(ct)}{c} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = r_1 \cdot \cos(ct) + r_2 \cdot \frac{1}{c} \cdot \sin(ct)$.

Mivel r_1, r_2 tetszőleges, a megoldás a következő alakban írható fel:

$$y(t) = a \cdot \cos(ct) + b \cdot \sin(ct) \text{ , ahol } a, b \in \mathbb{C} \text{ tetszőleges.}$$

Ezzel pont az állításban szereplő megoldást kaptuk.

A rezgő húr problémájánál kapott egyenletek megoldása tehát: $X(x) = a \cdot \cos(\sqrt{-\sigma} \cdot x) + b \cdot \sin(\sqrt{-\sigma} \cdot x)$ és $T(t) = \alpha_0 \cdot \cos(\sqrt{-\sigma} \cdot c \cdot t) + \beta_0 \cdot \sin(\sqrt{-\sigma} \cdot c \cdot t)$.

A következő lépésben azt nézzük meg, mikor teljesülnek a peremfeltételek.

$$X(0) = 0 \Leftrightarrow a \cdot \cos(0) + b \cdot \sin(0) = 0 \Leftrightarrow a \cdot 1 + 0 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \Leftrightarrow X(x) = b \cdot \sin(\sqrt{-\sigma} \cdot x),$$

$$X(l) = 0 \Leftrightarrow b \cdot \sin(\sqrt{-\sigma} \cdot l) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{-\sigma} \cdot l = k \cdot \pi \ (k \in \mathbb{Z}) \ \Leftrightarrow \sqrt{-\sigma} = \frac{k\pi}{l}$$

Azaz:

$$\begin{aligned} u(x,t) = X(x)T(t) = b \sin(\frac{k\pi}{l} \cdot x) \left(\alpha_0 \cos(\frac{ck\pi}{l} \cdot t) + \beta_0 \sin(\frac{ck\pi}{l} \cdot t) \right) = \\ = \sin(\frac{k\pi}{l} \cdot x) \left(\alpha \cos(\frac{ck\pi}{l} \cdot t) + \beta \sin(\frac{ck\pi}{l} \cdot t) \right). \end{aligned}$$

Mivel $b, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tetszőleges, ezért $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ is az.

(1.1) linearitása miatt a $\sin(\frac{k\pi}{l} \cdot x) \left(\alpha \cdot \cos(\frac{ck\pi}{l} \cdot t) + \beta \cdot \sin(\frac{ck\pi}{l} \cdot t) \right)$ alakú megoldások bármely lineáris kombinációja is megoldás, tehát:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(\frac{k\pi}{l} \cdot x) \left(\alpha_k \cdot \cos(\frac{ck\pi}{l} \cdot t) + \beta_k \cdot \sin(\frac{ck\pi}{l} \cdot t) \right) .$$

Most vizsgáljuk meg a kezdeti feltételeket. (1.3) szerint:

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cdot \sin(\frac{k\pi}{l} \cdot x) . \tag{1.8}$$

Mivel $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(\frac{k\pi}{l} \cdot x) \left(-\alpha_k \cdot \sin(\frac{ck\pi}{l} \cdot t) \cdot \frac{ck\pi}{l} + \beta_k \cdot \cos(\frac{ck\pi}{l} \cdot t) \cdot \frac{ck\pi}{l} \right)$, ezért (1.4) szerint:

$$g(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \cdot \frac{ck\pi}{l} \cdot \sin(\frac{k\pi}{l} \cdot x) . \tag{1.9}$$

Tudjuk, hogy minden kellően sima $h(x)$ függvény a $[0,l]$ intervallumon Fourier-sorba fejthető a következő módon:

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin(\frac{k\pi}{l} \cdot x) \ ,$$

ahol a b_k együtthatókat az alábbi formula adja meg:

$$b_k = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l h(x) \sin(\frac{k\pi}{l} \cdot x) dx \ .$$

Ez alapján (1.8)-ban és (1.9)-ben az α_k és β_k együtthatók a következőképpen alakulnak:

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{2}{l} \cdot \int_0^l f(x) \sin(\frac{k\pi}{l} \cdot x) dx, \\ \beta_k \cdot \frac{ck\pi}{l} &= \frac{2}{l} \cdot \int_0^l g(x) \sin(\frac{k\pi}{l} \cdot x) dx. \end{aligned}$$

Ezzel tehát megkaptuk az egydimenziós hullámegyenlet (1.1) megoldását:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(\frac{k\pi}{l} \cdot x) \left(\alpha_k \cdot \cos(\frac{ck\pi}{l} \cdot t) + \beta_k \cdot \sin(\frac{ck\pi}{l} \cdot t) \right) \ ,$$

ahol:

$$\alpha_k = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l f(x) \sin(\frac{k\pi}{l} \cdot x) dx,$$

$$\beta_k = \frac{2}{ck\pi} \cdot \int_0^l g(x) \sin(\frac{k\pi}{l} \cdot x) dx.$$

2. fejezet

A Laplace operátor polárkoordinátákban

A kör alakú dob rezgésének vizsgálatához szükségünk lesz a Laplace-operátor polárkoordinátákban felírt alakjára.

2.1. Első bizonyítás

2.1. Definíció. *A Laplace-operátor kétváltozós függvény esetén Descartes-féle koordináta-rendszerben:*

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \ .$$

2.2. Állítás. *A Laplace-operátor alakja polárkoordinátákban:*

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \ .$$

Bizonyítás. Helyettesítsünk polárkoordinátákkal: $x := r \cdot \cos\varphi$, $y := r \cdot \sin\varphi$.

Ekkor $f(x, y) = f(r \cdot \cos\varphi, r \cdot \sin\varphi)$.

Az első paricális deriváltak kiszámításához a következőket fogjuk felhasználni:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(x^2 + y^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{r} = \cos\varphi,$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(x^2 + y^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y = \frac{y}{r} = \sin\varphi,$$

$$\frac{y}{x} = \frac{r \cdot \sin\varphi}{r \cdot \cos\varphi} = \tan\varphi \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = \arctan\frac{y}{x},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} \cdot \frac{y}{x^2} = -\frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{y}{x^2}$$

$$= -\frac{x^2}{r^2} \cdot \frac{y}{x^2} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{r \cdot \sin\varphi}{r^2} = -\frac{\sin\varphi}{r},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x^2}{r^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{r^2} = \frac{r \cdot \cos\varphi}{r^2} = \frac{\cos\varphi}{r}.$$

Az első paricális deriváltak ezek alapján:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial\varphi} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \cos\varphi \cdot \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial\varphi} =: G,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial\varphi} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \sin\varphi \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial\varphi} =: H,$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \cos\varphi \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \sin\varphi \cdot \frac{\partial f}{\partial y},$$

$$\frac{\partial f}{\partial\varphi} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial\varphi} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial\varphi} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial\varphi} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi}(r \cdot \cos\varphi) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi}(r \cdot \sin\varphi)$$

$$= -r \cdot \sin\varphi \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + r \cdot \cos\varphi \cdot \frac{\partial f}{\partial y}.$$

A második parciális deriváltakat G és H függvények segítségével számoljuk ki:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial G}{\partial x} = \cos\varphi \cdot \frac{\partial G}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r} \cdot \frac{\partial G}{\partial\varphi},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial H}{\partial x} = \sin\varphi \cdot \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r} \cdot \frac{\partial H}{\partial\varphi},$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \cos\varphi \cdot \frac{\partial G}{\partial r} + \sin\varphi \cdot \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\cos\varphi \cdot \frac{\partial H}{\partial \varphi} - \sin\varphi \cdot \frac{\partial G}{\partial \varphi}\right).$$

G és H függvények parciális deriváltjai:

$$\frac{\partial G}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\varphi \cdot \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\varphi \cdot \frac{\partial f}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\sin\varphi}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) = \cos\varphi \cdot$$

$$\cdot \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \left(\frac{-\sin\varphi}{r^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{-\sin\varphi}{r} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi \partial r}\right) = \cos\varphi \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{\sin\varphi}{r} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi \partial r} + \frac{\sin\varphi}{r^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi},$$

$$\frac{\partial G}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\cos\varphi \cdot \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) = \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\cos\varphi \cdot \frac{\partial f}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\sin\varphi}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)$$

$$= \left(-\sin\varphi \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + \cos\varphi \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \varphi}\right) - \left(\frac{\cos\varphi}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{\sin\varphi}{r} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\right)$$

$$= \cos\varphi \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \varphi} - \sin\varphi \cdot \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\cos\varphi}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi} - \frac{\sin\varphi}{r} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2},$$

$$\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\sin\varphi \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\sin\varphi \cdot \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\cos\varphi}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) = \sin\varphi \cdot$$

$$\cdot \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \left(\frac{-\cos\varphi}{r^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{\cos\varphi}{r} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi \partial r}\right) = \sin\varphi \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{\cos\varphi}{r^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{\cos\varphi}{r} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi \partial r},$$

$$\frac{\partial H}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\sin\varphi \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) = \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\sin\varphi \cdot \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\cos\varphi}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)$$

$$= \left(\cos\varphi \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + \sin\varphi \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \varphi}\right) + \left(\frac{-\sin\varphi}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{\cos\varphi}{r} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)$$

$$= \cos\varphi \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + \sin\varphi \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \varphi} - \frac{\sin\varphi}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{\cos\varphi}{r} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Ezek alapján már megadható Δf:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \cos\varphi \cdot \frac{\partial G}{\partial r} + \sin\varphi \cdot \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\cos\varphi \cdot \frac{\partial H}{\partial \varphi} - \sin\varphi \cdot \frac{\partial G}{\partial \varphi}\right)$$

$$= \left(\cos^2\varphi \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{\cos\varphi \cdot \sin\varphi}{r} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial\varphi\partial r} + \frac{\cos\varphi \cdot \sin\varphi}{r^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)$$

$$+ \left(\sin^2\varphi \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{\sin\varphi \cdot \cos\varphi}{r^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi} - \frac{\sin\varphi \cdot \cos\varphi}{r} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial\varphi\partial r}\right)$$

$$+ \frac{1}{r} \cdot \left(\cos^2\varphi \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + \cos\varphi \cdot \sin\varphi \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\varphi} - \frac{\cos\varphi \cdot \sin\varphi}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{\cos^2\varphi}{r} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\right)$$

$$+ \frac{1}{r} \cdot \left(-\sin\varphi\cos\varphi \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\varphi} + \sin^2\varphi \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{\sin^2\varphi}{r} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\right)$$

$$= \left(\cos^2\varphi \sin^2\varphi\right) \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \left(\left(\cos^2\varphi \sin^2\varphi\right) \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos^2\varphi \sin^2\varphi}{r} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}.$$

Ezzel pont az állításban szereplő képletet kaptuk. □

2.2. Második bizonyítás

2.3. Állítás. *A Laplace-operátor alakja polárkoordinátákban:*

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \ .$$

Bizonyítás. A bizonyítás alapötlete az, hogy

$$\Delta f = div(grad(f)) \text{ , ahol}$$

$$div(F(x,y)) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \qquad \text{és}$$

$$grad(f(x,y)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} .$$

Használjuk a divergencia és a gradiens polárkoordinátás alakját:

$$div(F) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(r \cdot F_1) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi}(F_2) \ ,$$

$$grad(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} & \frac{\partial f}{r \cdot \partial \varphi} \end{pmatrix} \ .$$

Ekkor:

$$div(grad(f)) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial f}{r \cdot \partial \varphi}\right) =$$

$$= \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial r} \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + r \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} =$$

$$= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \ .$$

Ez pedig pont az állításban szereplő képlet. □

3. fejezet

Két dimenzióban: *A rezgő dob*

Tekintsünk egy olyan kör alakú membránt, amely nyugalmi helyzetben egy origó középpontú, a sugarú körlappal írható le, és a határain le van lerögzítve. Jelölje $u(x,y,t)$ az (x,y) pontnak az xy síktól való távolságát t időpillanatban. Ekkor a membrán (a dobbőr) rezgéseit a kétdimenziós hullámegyenlet írja le:

$$\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2} = c^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2} \right), \tag{3.1}$$

ahol $t > 0$ és $x^2+y^2 < a$, valamint teljesül a peremfeltétel: $u(x,y,t) = 0$ ha $x^2+y^2 = a$.

Mivel kör alakú membránt vizsgálunk, érdemes polárkoordinátákat használni. Legyen tehát $x = r \cdot \cos\varphi$ és $y = r \cdot \sin\varphi$.

Az egyenlet jobb oldalán $c^2 \cdot \Delta u$ van, az előző fejezetben pedig már láttuk, hogy a Laplace-operátor hogy írható át polárkoordinátákba. A következő egyenletet kapjuk tehát:

$$\frac{\partial^2 u(r,\varphi,t)}{\partial t^2} = c^2 \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u(r,\varphi,t)}{\partial r} + \frac{\partial^2 u(r,\varphi,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u(r,\varphi,t)}{\partial \varphi^2} \right), \tag{3.2}$$

minden $0 < r < a$, minden $0 \le \varphi \le 2\pi$ és minden $0 < t$ esetén, az alábbi peremfeltételekkel:

$$u(a,\varphi,t) = 0 \qquad \text{ha } 0 \le \varphi \le 2\pi \tag{3.3}$$

$$u(r,0,t) = u(r,2\pi,t) \qquad \text{ha } 0 \le r \le a \text{ és } 0 \le t \tag{3.4}$$

$$\partial_\varphi u(r,0,t) = \partial_\varphi u(r,2\pi,t) \qquad \text{ha } 0 \le r \le a \text{ és } 0 \le t \tag{3.5}$$

és az alábbi kezdeti feltételekkel:

$$u(r,\varphi,0) = f(r,\varphi) \qquad \text{ha } 0 \leq r \leq a \text{ és } 0 \leq \varphi \leq 2\pi \tag{3.6}$$

$$\partial_t u(r,\varphi,0) = g(r,\varphi) \qquad \text{ha } 0 \leq r \leq a \text{ és } 0 \leq \varphi \leq 2\pi \tag{3.7}$$

Itt $f(r,\varphi)$ jelöli a kezdeti alakot és $g(r,\varphi)$ jelöli a kezdeti sebességet.

Két különböző esetet fogok a későbbiekben vizsgálni. Elsőként azt speciális esetet nézem meg részletesen, amikor $u(r,\varphi,t)$ körszimmetrikus, ekkor u független lesz φ-től. Ezután megnézem, hogyan változnak a megoldások, ha u-ról nem teszem fel, hogy körszimmetrikus. Mindkét esetben egységsugarú membránnal fogok dolgozni.

3.1. A körszimmetrikus eset

Nézzük meg tehát, hogyan lehetnek az egységsugarú membrán rezgései körszimmetrikusak. Ekkor u független φ-től, tehát a (3.2) egyenlet leegyszerűsödik a következőképpen:

$$\frac{\partial^2 u(r,t)}{\partial t^2} = c^2 \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u(r,t)}{\partial r} + \frac{\partial^2 u(r,t)}{\partial r^2} \right) \tag{3.8}$$

A perem- és kezdeti feltételek pedig az alábbiak lesznek:

$$u(1,t) = 0 \tag{3.9}$$

$$u(r,0) = f(r) \qquad \text{ha } 0 \le r \le 1 \tag{3.10}$$

$$\partial_t u(r,0) = g(r) \qquad \text{ha } 0 \le r \le 1 \tag{3.11}$$

Alkalmazzuk a változók szétválasztásának módszerét, azaz tegyük fel, hogy $u(r,t)$ előáll $R(r) \cdot T(t)$ alakban. Ekkor a parciális derváltak a következőképpen írhatók fel:

$$\begin{aligned}
\partial_t u(r,t) &= \partial_t (R(r) \cdot T(t)) = R(r) \cdot T'(t) \\
\partial_t^2 u(r,t) &= R(r) \cdot T''(t) \\
\partial_r u(r,t) &= \partial_r (R(r) \cdot T(t)) = R'(r) \cdot T(t) \\
\partial_r^2 u(r,t) &= R''(r) \cdot T(t)
\end{aligned}$$

Ekkor az egyenlet az alábbi formába írható:

$$R(r) \cdot T''(t) = c^2 \cdot \left(R''(r) \cdot T(t) + \frac{1}{r} \cdot R'(r) \cdot T(t) \right) \tag{3.12}$$

Osszuk az egyenlet mindkét oldalát $c^2 \cdot R(r) \cdot T(t)$-vel. Ekkor:

$$\frac{1}{c^2} \cdot \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{1}{R(r)} \cdot \left(R''(r) + \frac{1}{r} \cdot R'(r) \right)$$

A kapott egyenlet bal oldala csak t-től, jobb oldala csak r-től függ, ami csak akkor lehetséges, ha mindkét oldal egy k konstanssal egyenlő. Ebből az alábbi két egyenletet kapjuk:

$$k = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{T''(t)}{T(t)} \tag{3.13}$$

$$k = \frac{1}{R(r)} \cdot \left(R''(r) + \frac{1}{r} \cdot R'(r) \right) \tag{3.14}$$

A (3.13) egyenletet átírhatjuk $T''(t) = kc^2 \cdot T(t)$ alakba. Ennek a megoldásai $k > 0$ esetén exponenciálisan nőnek vagy csökkennek, $k = 0$ esetén lineárisak, $k < 0$ esetén periodikusak. Fizikailag elvárható, hogy a rezgő dob problémájára adott megoldás időben periodikus legyen, ezért csak a harmadik esetet fogjuk nézni, amikor $k = -\lambda^2$ alakú. Ekkor az egyenlet $T''(t) + \lambda^2 c^2 \cdot T(t) = 0$ alakú, aminek pedig az (1.1) tétel alapján ismerjük a megoldásait:

$$T(t) = a \cdot \cos(\lambda c \cdot t) + b \cdot \sin(\lambda c \cdot t) \tag{3.15}$$

A (3.14) egyenletet rendezzük a következőképpen $k = -\lambda^2$ felhasználásával:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R(r)} \cdot \left(R''(r) + \frac{1}{r} \cdot R'(r)\right) &= -\lambda^2 \\
R''(r) + \frac{1}{r} \cdot R'(r) &= -\lambda^2 \cdot R(r) \\
R''(r) + \frac{1}{r} \cdot R'(r) + \lambda^2 \cdot R(r) &= 0 \\
r \cdot R''(r) + R'(r) + \lambda^2 r \cdot R(r) &= 0
\end{aligned}$$

Keressük ennek az egyenletnek a megoldását hatványsor alakban, azaz tegyük fel, hogy

$$R(r) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m r^m \quad ,$$

ahol a c_m-ekre szeretnénk egy rekurziót megadni. Ekkor a deriváltak a kövtkezőképpen néznek ki:

$$\begin{aligned}
R'(r) &= \sum_{m=1}^{\infty} c_m m r^{m-1} = c_1 + \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2) r^{n+1} && \text{m=n+1 helyettesítéssel} \\
R''(r) &= \sum_{m=2}^{\infty} c_m m(m-1) r^{m-2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1) r^n && \text{m=n+2 helyettesítéssel}
\end{aligned}$$

Ebből az egyenlet az alábbi módon írható fel:

$$rR''(r) + R'(r) + \lambda^2 r R(r) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1) r^{n+1} + c_1 + \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2) r^{n+1} + \lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^{n+1} =$$

$$= c_1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left((n+2)^2 c_{n+2} + \lambda^2 c_n\right) \cdot r^{n+1} = 0$$

Válasszuk c_1-et 0-nak. Ekkor:

$$(n+2)^2 c_{n+2} + \lambda^2 c_n = 0 \quad \forall n \text{ , azaz}$$
$$c_{n+2} = \frac{-\lambda^2}{(n+2)^2} \cdot c_n$$

Válasszuk c_0-t 1-nek. Ekkor c_n-ek a következőképpen alakulnak:

$$\begin{aligned}
c_0 &= 1 \\
c_1 &= 0 \\
c_2 &= \frac{-\lambda^2}{2^2} \\
c_3 &= 0 \\
c_4 &= \frac{-\lambda^2}{4^2} \cdot c_2 = \frac{\lambda^4}{4^2 \cdot 2^2} \\
&\vdots \\
c_{2k} &= \frac{(-1)^k \cdot \lambda^{2k}}{(k!)^2 \cdot 4^k} \\
c_{2k+1} &= 0
\end{aligned}$$

A megoldás tehát:

$$R(r) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m r^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2 \cdot 4^m} \cdot (\lambda r)^{2m} \text{ ,}$$

ami pontosan a $J_0(\lambda r)$ elsőfajú Bessel-függyvénnyel egyenlő.

A (3.9) peremfeltétel szerint $u(1,t) = 0$, ami akkor teljesül, ha $R(1) = 0$. Ez a következőt jelenti:

$$R(1) = J_0(\lambda) = 0 \text{ ,}$$

tehát λ lehetséges értékei pontosan a Bessel-függvény gyökei lesznek. Ha egység helyett a sugárt néznénk, akkor a gyökök $\frac{1}{a}$-szorosa lenne jó.

A J_0 Bessel-függvénynek végtelen sok pozitív gyöke van, jelölje az n-edik gyököt a λ_{0n}, ekkor $0 < \lambda_{01} < \lambda_{02} < \dots$

A (3.14) egyenlet peremfeltételnek eleget tévő megoldásai tehát:

$$R(r) = J_0(\lambda_{0n} r) \qquad n = 1, 2, \dots \tag{3.16}$$

A (3.8) egyenletnek megoldásai tehát:

$$u(r,t) = R(r) \cdot T(t) = a \cdot \cos(\lambda_{0n} c \cdot t) + b \cdot \sin(\lambda_{0n} c \cdot t) \cdot J_0(\lambda_{0n} r) \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

ahol λ_{0n} a J_0 Bessel-függvény n-edik pozitív gyökét jelöli.

3.2. Általános eset

Ha $u(r,\varphi,t)$-ről nem tesszük fel, hogy körszimmetrikus, a (3.2) egyenlettel és a (3.3) - (3.7) perem- és kezdeti feltételekkel dolgozunk, annyi változással, hogy most egységnyi a sugár.

Keressük a megoldást $u(r,\varphi,t) = R(r)\cdot\Phi(\varphi)\cdot T(t)$ alakban. Ekkor a deriváltak a következők:

$$
\begin{aligned}
\partial_t^2 u(r,\varphi,t) &= R(r)\cdot\Phi(\varphi)\cdot T''(t)\\
\partial_r u(r,\varphi,t) &= R'(r)\cdot\Phi(\varphi)\cdot T(t)\\
\partial_r^2 u(r,\varphi,t) &= R''(r)\cdot\Phi(\varphi)\cdot T(t)\\
\partial_\varphi^2 u(r,\varphi,t) &= R(r)\cdot\Phi''(\varphi)\cdot T(t)
\end{aligned}
$$

A (3.2) egyenlet pedig a következőképpen fog kinézni:

$$R(r)\cdot\Phi(\varphi)\cdot T''(t) = c^2\cdot\left(\frac{1}{r}\cdot R'(r)\cdot\Phi(\varphi)\cdot T(t) + R''(r)\cdot\Phi(\varphi)\cdot T(t) + \frac{1}{r^2}\cdot R(r)\cdot\Phi''(\varphi)\cdot T(t)\right)$$

Osszuk az egyenlet mindkét oldalát $c^2\cdot R(r)\cdot\Phi(\varphi)\cdot T(t)$-vel:

$$\frac{1}{c^2}\cdot\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{1}{r}\cdot\frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} \tag{3.17}$$

A (3.17) egyenlet bal oldala csak t-től függ, a jobb oldala azonban független t-től. Ez csak akkor lehetséges, ha az egyenlet mindkét oldala egy l konstanssal egyenlő. Ebből az alábbi két egyenletet kapjuk:

$$l = \frac{1}{c^2}\cdot\frac{T''(t)}{T(t)} \tag{3.18}$$

$$l = \frac{1}{r}\cdot\frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} \tag{3.19}$$

Nééezük először a (3.18) egyenletet:

$$
\begin{aligned}
T''(t) &= l\cdot c^2\cdot T(t)\\
T''(t) - lc^2\cdot T(t) &= 0
\end{aligned}
$$

Már korábban láttuk, hogy a fenti egyenletnek csak azok a megoldásai jók, ahol $l < 0$. Legyen tehát $l = -\lambda^2$. Ekkor az egyenlet $T''(t) + \lambda^2 c^2 \cdot T(t) = 0$ alakú, ennek pedig (1.1) állítás szerint tudjuk a megoldásait:

$$T(t) = A \cdot \cos(\lambda c \cdot t) + B \cdot \sin(\lambda c \cdot t) \tag{3.20}$$

Most nézzük (3.19)-at és használjuk fel, hogy $l = -\lambda^2$:

$$\begin{aligned}
-\lambda^2 &= \frac{1}{r} \cdot \frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} \\
-\lambda^2 r^2 &= r \cdot \frac{R'(r)}{R(r)} + r^2 \cdot \frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} \\
-\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} &= r \cdot \frac{R'(r)}{R(r)} + r^2 \cdot \frac{R''(r)}{R(r)} + \lambda^2 r^2
\end{aligned}$$

A fenti egyenlet bal oldala csak φ-től, jobb oldala csak r-től függ, ez pedig csak akkor lehet, ha mindkét oldal egy k konstanssal egyenlő:

$$k = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} \tag{3.21}$$

$$k = r \cdot \frac{R'(r)}{R(r)} + r^2 \cdot \frac{R''(r)}{R(r)} + \lambda^2 r^2 \tag{3.22}$$

(3.21)-at nézzük először:

$$\begin{aligned}
\Phi''(\varphi) &= -k \cdot \Phi(\varphi) \\
\Phi''(\varphi) + k \cdot \Phi(\varphi) &= 0
\end{aligned}$$

Ennek az egyenletnek csak azok a megoldásai periodikusak, ahol $k > 0$, nekünk pedig csak a periodikus megoldások jók csak. Legyen ezért $k = m^2$. Ekkor (1.1) állítás alapján a megoldásai:

$$\Phi(\varphi) = C \cdot \cos(m \cdot \varphi) + D \cdot \sin(m \cdot \varphi) \tag{3.23}$$

Most nézzük (3.22)-et és használjuk fel, hoogy $k = m^2$:

$$\begin{aligned}
r \cdot \frac{R'(r)}{R(r)} + r^2 \cdot \frac{R''(r)}{R(r)} + \lambda^2 r^2 &= m^2 \\
r \cdot \frac{R'(r)}{R(r)} + r^2 \cdot \frac{R''(r)}{R(r)} &= m^2 - \lambda^2 r^2 \\
r^2 \cdot R''(r) + r \cdot R(r) &= (m^2 - \lambda^2 r^2) R(r)
\end{aligned}$$

A következő egyenletet kapjuk tehát:

$$r^2 \cdot R''(r) + r \cdot R(r) + (\lambda^2 r^2 - m^2)R(r) = 0 \tag{3.24}$$

Ennek a körszimmetrikus esethez hasonlóan egy Bessel-függvény lesz a megoldása: $R(r) = J_m(\lambda r)$.

A peremfeltételek miatt:

$$R(1) = J_m(\lambda \cdot 1) = 0 \ ,$$

tehát λ lehetséges értékei éppen a J_m Bessel-függvény gyökei lesznek. Jelöljük ezeket λ_{mn}-nel, ha $n = 1, 2, \dots$

A (3.24) egyenlet megoldásai tehát:

$$R(r) = J_m(\lambda_{mn} r) \qquad m = 0, 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots \tag{3.25}$$

Azt kaptuk tehát, hogy a (3.2) egyenlet megoldásai (3.20), (3.23) és (3.25) alapján:

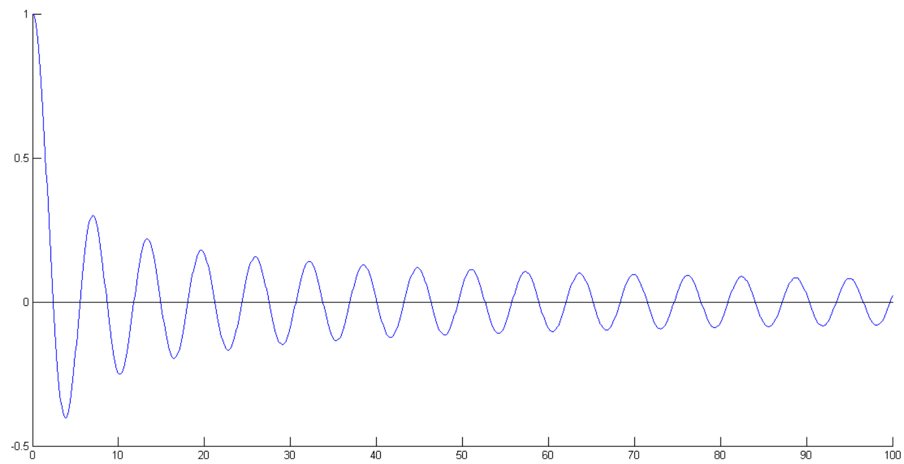
$$u(r, \varphi, t) = R(r) \cdot \Phi(\varphi) \cdot T(t) = (A \cdot \cos(\lambda_{mn} ct) + B \cdot \sin(\lambda_{mn} ct)) \cdot (C \cdot \cos(m\varphi) + D \cdot \sin(m\varphi)) \cdot J_m(\lambda_{mn} r) \ ,$$

ahol $m = 0, 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots$ és λ_{mn} a J_m Bessel-függvény n-edik pozitív gyökét jelöli.

4. fejezet

Numerikus vizsgálat

Az előző fejezetben láttuk, hogy a rezgő dob problémájának megoldásában szerepelnek a Bessel-függvények. Az alábbi ábrán a körszimmetrikus esetben kapott J_0 Bessel-függvény látható:



4.1. ábra. A J_0 Bessel-függvény

Az ábrán is látszik, hogy J_0 gyökeinél a függvény előjelet vált, ezért érdemes megnézni, hogy hol vannak ezek az előjelváltások. A MATLAB segítségével ezeket az alábbi módon 1 tizedesjegy pontossággal tudjuk megbecsülni a $[0, 15]$ intervallumon:

```
x=0:0.1:15;
y=besselj(0,x);
y(y>0)=1;
```

```
y(y<0)=0;
find(diff(y)~=0)*0.1

ans =

    2.5000    5.6000    8.7000   11.8000   15.0000
```

A gyököket tehát a kapott értékek közelében kell keresnünk. Ezt a következőképpen tehetjük meg:

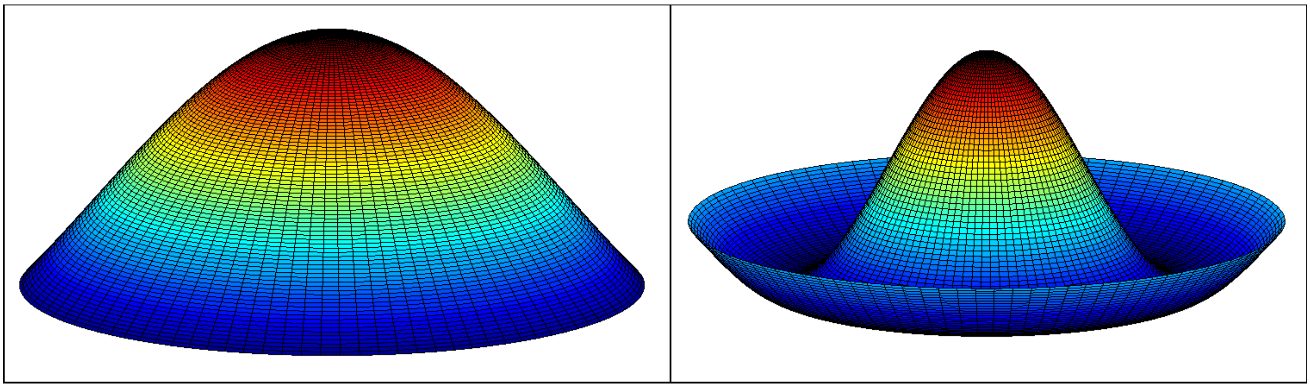
```
f=@(x)(besselj(0,x));
format long
lambda=zeros(1,5);
lambda(1)=fzero(f,2.5);
lambda(2)=fzero(f,5.6);
lambda(3)=fzero(f,8.7);
lambda(4)=fzero(f,11.8);
lambda(5)=fzero(f,15)

lambda =

  2.404825557695773   5.520078110286311   8.653727912911013

11.791534439014281  14.930917708487787
```

A 2. sorban szereplő *format long* parancs miatt a kapott eredmény 15 tizedesjegy pontossággal közelíti meg J_0 gyökeit.

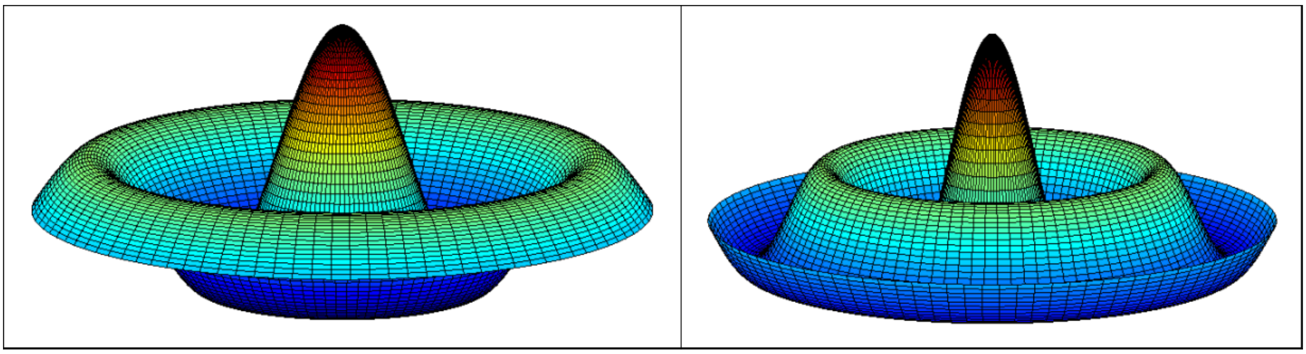
Ha a a J_0 Bessel-függvény valamelyik gyökét jelöli, akkor a körszimmetrikus eset megoldásait egy fix t időpillanatban a következőképpen lehet ábrázolni:

```
r=0:0.01:1;
f=@(x)(besselj(0,x));
n=length(r);
phi=linspace(0,2*pi,n);
z = f(a*r)'*ones(1,n);
y = a*r'*sin(phi);
x = a*r'*cos(phi);
surf(x,y,z)
```

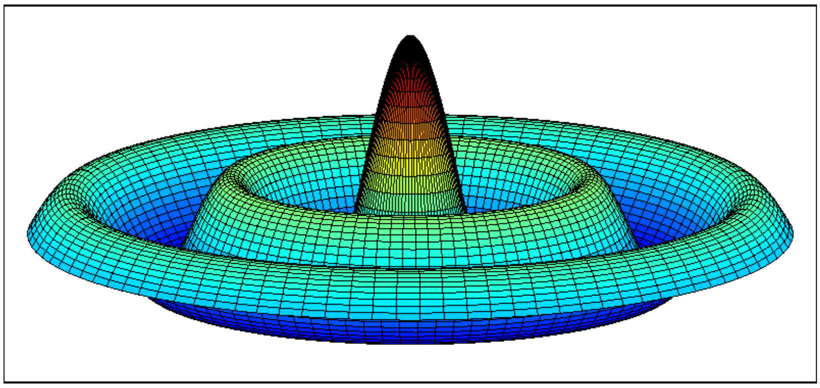
Az első 5 gyök esetében az alábbi ábrákat kapjuk:



4.2. ábra. A körszimmetrikus rezgés egy fix időpillanatban λ_{01} és λ_{02} esetén

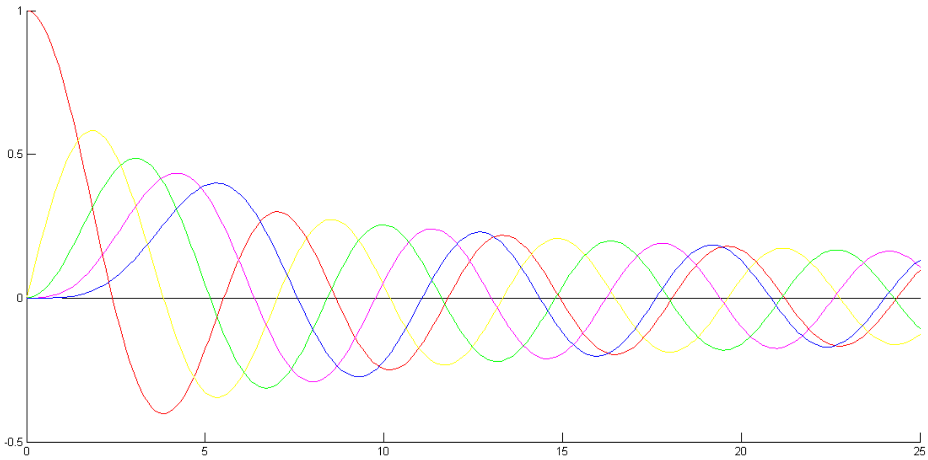


4.3. ábra. A körszimmetrikus rezgés egy fix időpillanatban λ_{03} és λ_{04} esetén



4.4. ábra. A körszimmetrikus rezgés egy fix időpillanatban λ_{05} esetén

Az általánosabb esetben a J_m Bessel-függvényt kaptuk a megoldás részeként, ahol $m = 0, 1, 2, \ldots$. Az alábbi ábrán az $m = 0, 1, 2, 3, 4$ eset látható:



4.5. ábra. A J_m Bessel-függvények $m = 0, 1, 2, 3, 4$ esetén

Vizsgáljuk most a J_1 Bessel-függvényt. A gyököket a J_0-nál látott módszerhez hasonlóan fogjuk megkeresni, azzal a különbséggel, hogy mivel $J_1(0) = 0$, az előjelváltásoknál 0.1-től fogjuk indítani a keresést:

```
x=0.1:0.1:15;
y=besselj(1,x);
y(y>0)=1;
```

```
y(y<0)=0;
find(diff(y)~=0)*0.1

ans =

    3.8000    7.0000   10.1000   13.3000
```

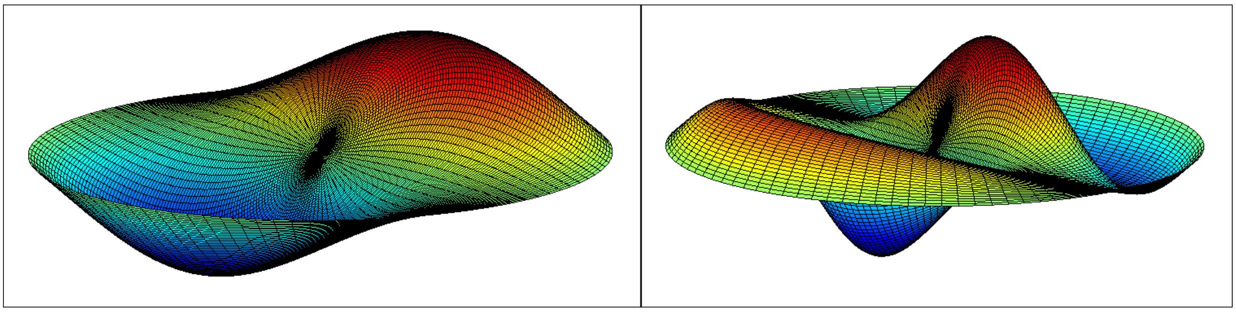
Keressük a gyököket ezek az értékek közelében:

```
f=@(x)(besselj(1,x));
format long
lambda=zeros(1,4);
lambda(1)=fzero(f,3.8);
lambda(2)=fzero(f,7);
lambda(3)=fzero(f,10.1);
lambda(4)=fzero(f,13.3)

lambda =

   3.831705970207512   7.015586669815619  10.173468135062720  13.323691936314223
```

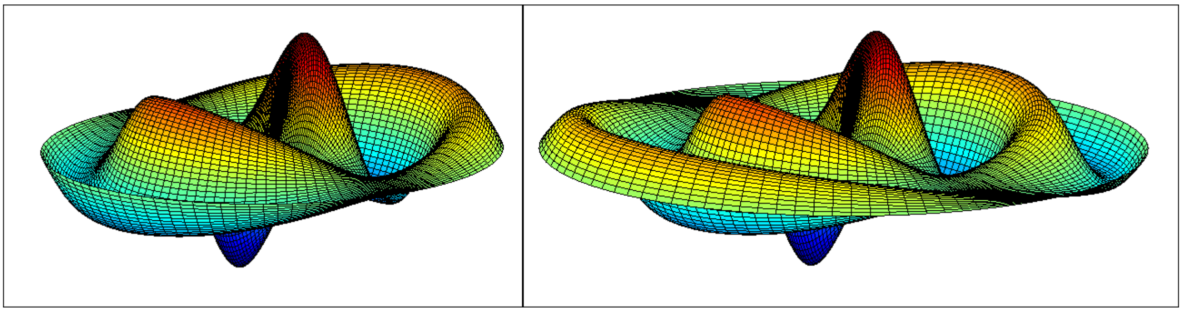
Ha a a J_1 Bessel-függvény valamelyik gyökét jelöli, akkor a megoldást egy fix t időpillanatban a következőképpen lehet ábrázolni:

```
r=0:0.01:1;
f=@(x)(besselj(1,x));
n=length(r);
phi=linspace(0,2*pi,n);
z =f(a*r)'*cos(phi);
y = a*r'*sin(phi);
x = a*r'*cos(phi);
surf(x,y,z)
```

Az első 4 gyök esetében az alábbi ábrákat kapjuk:



4.6. ábra. A kör alakú dob rezgése egy fix időpillanatban λ_{11} és $\lambda 12$ esetén



4.7. ábra. A körszimmetrikus rezgés egy fix időpillanatban λ_{13} és $\lambda 14$ esetén

Irodalomjegyzék

[1] Elias M. Stein, Rami Shakarchi: *Fourier Analysis: An Introduction.*
Princeton University Press 2003.

[2] Stanley J. Farlow: *An Introduction To Differential Equations And Their Applications.*
1994.

[3] Wikipedia - Vibrations of a circular membrane
http://en.wikipedia.org/wiki/Vibrations_of_a_circular_membrane

Függelék

Bessel-függvények

A Bessel-függvények definíció szerint az alábbi, ún. Bessel differenciálegyenlet megoldásai:

$$x^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + (x^2 - m^2) = 0$$

Mivel ez egy másodrendű differenciálegyenlet, két lineárisan független megoldása kell, hogy legyen. Ha m egész, akkor a két független megoldást J_m-mel és Y_m-mel szokás jelölni, ahol J_m-et elsőfajú, Y_m-et másodfajú Bessel-függvénynek hívjuk. J_m az a megoldás, amelyik a 0-ban véges, míg Y_m-nek 0-ban szingularitása van.

Mivel nekünk a feladatban csak olyan függvények voltak jók, amelyek 0-ban végesek, a megoldásokban csak J_m szerepel.

Ha a Bessel differenciálegyenlet megoldásait hatványsor alakban keressük a Frobenius-módszerrel[2], azaz

$$y = x^\alpha \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ ,$$

akkor látni fogjuk, hogy $\alpha = m$ és a_n-re a következő rekurziót kapjuk:

$$a_n = -\frac{1}{n(2m+n)} \cdot a_{n-2} \ .$$

Ebből kapjuk meg J_m Taylor-sorát:

$$J_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(m+n)!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m} \ ,$$

és ezt a Taylor-sor alakot használtuk a rezgő dob problémájának megoldásához.

A feladat szempontjából létfontosságú továbbá, hogy J_m aszimptotikusan az alábbi függvénnyel egyenlő:

$$J_m(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot \cos\left(z - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \ .$$