Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Bärnkopf Pál

Mátrixok permanensére vonatkozó egyenlőtlenségek

BSc szakdolgozat

Témavezető:

Frenkel Péter

Algebra és Számelmélet Tanszék

Budapest, 2015

Köszönetnyilvánítás

Ezúton is szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Frenkel Péternek, hogy megírhattam nála ezt a szakdolgozatot. Köszönöm a szakdolgozat elkészítésében nyújtott segítségét, türelmét és hogy bármiyen kérdéssel fordulhattam hozzá, valamint, hogy világos és precíz magyarázataival segítette munkámat.

Köszönöm gimnáziumi matematika tanáromnak, Pálfiné Kovács Erikának, hogy megszerettette velem a matematikát, Hermann Péternek, hogy felkeltette érdeklődésemet az algebra iránt.

Köszönettel tartozom még szüleimnek, testvéreimnek, családom többi tagjának, ezentúl barátaimnak, hogy támogattak az elmúlt három évben, meg előtte is, és évfolyam társaimnak, akik sokszor hatékonyan közreműködtek, egy-egy felkészülésben ill. a LaTeX rejtelmeinek felderítésében.

Budapest, 2015. május 13.

Bärnkopf Pál

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Az ember matematikával foglalkozva hamar találkozik a determináns fogalmával, de kevesebb figyelem jut a permanensre. Pedig ez minden hallgató álma: nem kell a kifejtés során a $(-1)^n$-es szorzóval foglalkozni. Ennél természetesen többet is tud a permanens, számtalan kombinatorikai alakalmazása van és a matematika más területeivel foglalkozva is sokszor jó szolgálatot tehet.

A szakdolgozatban első felében először nemnegatív egész elemű (sokszor (0,1)) mátrixokra látunk be egyenlőtlenségeket, később a mátrixok egy speciális osztályára, a teljesen felbonthatatlan mátrixokra térünk át, a fogalmak és alapvető összefüggések végiggondolása után ezekre a mátrixokra is különféle felső és alsó becsléseket bizonyítunk. Ezek a tételek sokszor kombinatorikai állításokkal állíthatók párba, erre is látunk majd példát, de ahol nem találunk kombinatorikai analogont, ott is szép és érdekes algebrai ismeretekkel gazdagodhatunk.

Amikor az ember először találkozik a permanenssel, a nagy hasonlóság hatására óhatatlanul is igyekszik valami kapcsolatot találni a determinánssal. A szakdolgozat második felében egy általánosabb fogalommal, a q-permanensekkel foglalkozunk, ami valóban összeköti a determinánst és a permanenst. Ahhoz, hogy a q-permanensekkel érdemileg tudjuk foglalkozni, már egy komolyabb eszköztárra lesz szükségünk, ennek kiépítése után a q-permanensekre is belátunk egy-két alapvető egyenlőtlenséget.

2. Alsó becslések

2.1. Általános eredmények

1. Definíció. Legyen $A = (a_{ij})$ egy $m \times n$-es mátrix, ahol $m \leq n$. Ebben az esetben A permanensén ($\mathrm{Per}(A)$), az alábbi összeget értjük:

$$\mathrm{Per}(A) = \sum_{\sigma} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{m\sigma(m)},$$

ahol az összegzés az összes $\sigma : \{1, \ldots, m\} \to \{1, ..., n\}$ injektív függvényre megy.

2. Definíció. Legyen $A = (a_{ij})$ egy $n \times n$-es mátrix, S_n az n-edfokú szimmetrikus csoport, ekkor A permanense a következő összeg:

$$\mathrm{per}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

1. Jelölés. Legyen $\Gamma_{r,n}$ azon ω-k halmaza, melyekre $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_r), 1 \leq \omega_i \leq n, i = 1, \ldots, r$. Legyen $G_{r,n}$ a $\Gamma_{r,n}$-beli monoton növő sorozatok halmaza, $Q_{r,n}$ pedig a $\Gamma_{r,n}$-beli szigorúan monoton növő sorozatok halmaza, azaz

$$G_{r,n} = \{(\omega_1, \ldots, \omega_r) \in \Gamma_{r,n} | 1 \leq \omega_1 \leq \cdots \leq \omega_r \leq n\}$$
$$Q_{r,n} = \{(\omega_1, \ldots, \omega_r) \in \Gamma_{r,n} | 1 \leq \omega_1 < \cdots < \omega_r \leq n\}$$

2. Jelölés. Legyen $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}$, és $\alpha \in G_{h,m}, \beta \in G_{k,n}$. Ekkor $A[\alpha|\beta]$ jelölje azt a $h \times k$-as mátrixot, amelynek (i, j)-edik eleme $a_{\alpha_i \beta_j}$. Ha $\alpha \in Q_{h,m}$ és $\beta \in Q_{k,n}$, akkor $A[\alpha|\beta]$ részmátrixa A-nak. Továbbá, ha $\alpha \in Q_{h,m}$ és $\beta \in Q_{k,n}$, akkor $A(\alpha|\beta)$ azt a $(m-h) \times (n-k)$-as részmátrixát jelöli A-nak, amely kiegészítője $A[\alpha|\beta]$-nak, azaz amely A-ból az α-nak megfelelő sorok és a β-nak megfelelő oszlopok elhagyásával keletkezik.

2.1.1. Tétel. *(Laplace kifejtési tétele)*
(1) Ha A egy $m \times n$-es mátrix, $2 \leq m \leq n$, és $\alpha \in Q_{r,m}$, akkor

$$\mathrm{Per}(A) = \sum_{\omega \in Q_{r,m}} \mathrm{Per}(A[\alpha|\omega]) \, \mathrm{Per}(A(\alpha|\omega)).$$

(2) Valamint minden i-re, ahol $1 \leq i \leq m$, $\mathrm{Per}(A) = \sum_{t=1}^{n} a_{it} \, \mathrm{Per}(A(i|t))$.

2.1.2. Tétel. *(Frobenius-König I): Legyen A egy $n \times n$-es nemnegatív mátrix. Ekkor* $\mathrm{per}(A) = 0$ *akkor és csak akkor, ha A tartalmaz egy $s \times (n - s + 1)$ méretű csupa nulla részmátrixot valamely $s \in \{1, \ldots, n\}$ esetén.*

Bizonyítás. A szükségességet n szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Legyen $\mathrm{per}(A) = 0$. $n = 1$-re $A = [0]$. Tegyük fel, hogy a feltétel szükséges, minden kisebb, mint $n \times n$ méretű nemnegatív mátrixra. Nézzük meg, hogy ebből következik-e $n \times n$-esre: Ha A minden eleme nulla, akkor nyilván lesz megfelelő méretű nulla részmátrix. Tegyük fel, hogy $a_{hk} > 0$. Ekkor $0 = \mathrm{per}(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{hj} \mathrm{per}(A(h|j))$ és mivel az $a_{hj} \mathrm{per}(A(h|j))$ szorzatok mindegyike nem negatív és a_{hk} pozitív, így $\mathrm{per}(A(h|k)) = 0$ kell, hogy legyen. Az indukciós feltétel miatt található egy $s_1 \times t_1$ méretű csupa nulla részmátrixa $A(h|k)$-nak, amelyre $s_1 + t_1 = (n - 1) + 1$. Permutáljuk meg A sorait és oszlopait úgy, hogy a nulla részmártix a jobb fölső sarokban jelenjen meg.

$$B = PAQ = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} n - t_1 & t_1 \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1 \\ n - s_1 \end{array} & \begin{pmatrix} X & 0 \\ Y & Z \end{pmatrix} \end{array}$$

(A sorok és oszlopok permutátlása csak kényelmi szepmontokat szolgál, nem lényegi része a bizonyításnak.) Nyilván, sem $n - s_1$, sem $n - t_1$ nem lehet nulla, hiszen s_1, t_1 pozitív számok és összegük n. Mivel $n - s_1 = t_1$ és $n - t_1 = s_1$, így X és Y s_1 ill. t_1 méretű négyzetes mátrixok. Így $0 = \mathrm{per}(A) = \mathrm{per}(X)\,\mathrm{per}(Y)$, ebből következik, hogy $\mathrm{per}(X)$ vagy $\mathrm{per}(Y)$ 0 kell, hogy legyen. Az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy $\mathrm{per}(X) = 0$. Ekkor az indukciós feltétel miatt X tartalmaz egy $u \times v$ méretű csupa nulla részmátrixot, ahol $u + v = s_1 + 1$. Feltehető, hogy $X[\alpha_1, \ldots, \alpha_u|\beta_1, \ldots, \beta_v] = 0$, ám ekkor $B[\alpha_1, \ldots, \alpha_u|\beta_1, \ldots, \beta_v] = 0$. Így a $C = X[\alpha_1, \ldots, \alpha_u|\beta_1, \ldots, \beta_v, s_1 + 1, s_1 + 2, \ldots, n]$ csupa nulla részmátrix B-ben. Ennek u sora és $(v + n - s_1)$ oszlopa van, $u + v + n - s_1 = s_1 + 1 + n - s_1 = n + 1$. Tehát a szükségességet beláttuk. $\square$

Az elégségesség bizonyításához tegyük fel, hogy A tartalmaz egy $s \times t$ méretű csupa nulla részmátrixot, ahol $s + t = n + 1$. Permutáljuk A sorait és oszlopait a következőképpen:

$$B = PAQ = \begin{array}{cc} & t \\ s & \begin{pmatrix} 0 & K \\ L & M \end{pmatrix} \end{array}$$

A Laplace kifejtési tétel szerint

$$\mathrm{per}(A) = \mathrm{per}(B) = \sum_{\omega \in Q_{s,n}} \mathrm{per}(B[1, \dots, s|\omega]) \, \mathrm{per}(B(1, \dots, s|\omega)).$$

De $B[1, \dots, s|\omega]$ egy $s \times s$ méretű részmátrixa $B[1, \dots, s|1, \dots, n]$-nek, viszont ez utóbbi, csak $n - t = s + t - 1 - t = s - 1$ nem nulla oszlopot tartalmaz, így minden $B[1, \dots, s|\omega]$ részmátrix tartalmaz nulla oszlopot, ezért $\mathrm{per}(B[1, \dots, s|\omega]) = 0$, $\forall \omega \in Q_{s,n}$–re. Ebből következik, hogy $\mathrm{per}(A) = 0$, az állítást ezzel beláttuk. ■

2.1.3. Tétel. *(Frobenius-König II.): Legyen A egy $m \times n$-es nemnegatív mátrix, $m \le n$. Ekkor* $\mathrm{Per}(A) = 0$ *akkor és csak akkor, ha a tartalmaz egy $s \times (n - s + 1)$ méretű nullmátrixot.*

Bizonyítás. Legyen

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$$

ahol C egy $(n - m) \times n$ méretű mátrix, amelynek minden eleme egy. Ekkor a Frobenius-König I. tétel szerint $\mathrm{per}(B) = 0$ akkor és csak akkor, ha B (és ezzel A) tartalmaz egy $s \times (n - s + 1)$ méretű csupa nulla részmátrixot, és $\mathrm{per}(B) = (n - m)! \, \mathrm{Per}(A)$ akkor és csak akkor 0, ha $\mathrm{Per}(A) = 0$. ■

2.1.4. Megjegyzés. A fenti két Frobenius-König tétel valóban a gráfelméletből már ismert tételek: Legyen G páros gráf, A a G gráf páros adjacencia mátrixa, (azaz $a_{ij} = 1$, ha az első pontosztály i. és a második pontosztály j. pontja között megy él, és 0 különben), ekkor $\mathrm{per}(A)$, ill. $\mathrm{Per}(A)$ a teljes párosítások, ill. a kisebb pontosztályt fedő párosítások számát adja meg. Ez pontosan akkor nulla, ha nem teljesül a Hall-feltétel, azaz van s pont úgy az egyik pontosztályban, hogy kevesebb, mint s elemű a szomszédságuk, ekkor legalább $n - s + 1$ pont nincs benne a szomszédságukban, így A-ban van egy $s \times (n - s + 1)$-es 0 részmátrix.

2.1.5. Tétel. *([5], [7]) Ha A egy $m \times n$-es (0,1) mátrix, $m \leq n$, és ha A sorösszegei nagyobb egyenlők, mint m, akkor* $\operatorname{Per}(A) > 0$.

Bizonyítás. Ha minden sorösszeg nagyobb egyenlő m, akkor minden sorban van legalább m db 1-es, így legfeljebb $n - m$ db 0 van minden sorban. Ezért, ha A tartalmaz egy $s \times t$ méretű nullmátrixot, akkor $t \leq n - m$ és mivel m sor van $s \leq m$. $s + t \leq m + (n - m) = n$, tehát a Frobenius-König II. tétel miatt $\operatorname{Per}(A)$ nem tűnhet el. ■

2.1.6. Tétel. *([5], [6]) Legyen A egy $m \times n$-es (0,1) mátrix, $m \leq n$, és A minden sorában legyen legalább t db 1-es. Amennyiben $t \geq m$, akkor* $\operatorname{Per}(A) \geq \frac{t!}{(t-m)!}$.
Ha $t < m$ és $\operatorname{Per}(A) > 0$, *akkor* $\operatorname{Per}(A) \geq t!$.

Bizonyítás. Az állítást m szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Az előző tétel alapján feltehetjük, hogy $\operatorname{Per}(A) > 0$, mert, ha $t < m$, akkor feltétel, ha pedig $t \geq m$, akkor minden sorban legalább m db 1-es van.
$m = 1$-re: Ha $\operatorname{Per}(A) > 0$, akkor $\operatorname{Per}(A) \geq 1 = 0!$, tehát az állítás második fele biztosan igaz, és $\operatorname{Per}(A)$ ebben az esetben az egyesek számával lesz egyenlő, ezért $\operatorname{Per}(A) \geq t = \frac{t!}{(t-1)!}$.
Tegyük fel, hogy $m > 1$ és a tétel teljesül minden mátrixra, amelynek m-nél kevesebb sora van. A permanense pozitív, így a König-Frobenius II. tétel alapján minden $A[\omega_1, \dots, \omega_k | 1, \dots, n], \omega \in Q_{k,m}, k = 1, \dots, m$ tartalmaz legalább k nemnulla oszlopot. Tegyük fel először, hogy valamely h-ra, $1 \leq h \leq m - 1$ és valamely ω-ra, $\omega \in Q_{h,m}$, az $A[\omega_1, \dots, \omega_h | 1, \dots, n]$ részmátrixnak pontosan h nemnulla oszlopa van. Másképpen, léteznek P, Q permutációmátrixok, melyekre

$$PAQ = \begin{array}{cc} & h \\ h & \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix} \end{array}.$$

PAQ első h sorának mindegyikében a t db pozitív elem B-ben kell, hogy legyen, azaz B minden sorában legalább t db 1-es kell, hogy legyen, így $t \leq h \leq m - 1$. Tehát, $\operatorname{Per}(A) = \operatorname{Per}(PAQ) = \operatorname{Per}(B)\operatorname{Per}(D) > 0$. Ebből $\operatorname{Per}(B) > 0$ és $\operatorname{Per}(D) > 0$. De a $h \times h$-as B mátrix teljesíti a tétel feltételeit, ezért az indukció miatt $\operatorname{Per}(B) \geq t!$. Így $\operatorname{Per}(A) = \operatorname{Per}(B)\operatorname{Per}(D) \geq t! \operatorname{Per}(D) \geq t!$.

Ha A nem hozható a fenti alakra, akkor minden $k\times n$-es részmátrixában ($1 \leq k \leq m-1$) van $k+1$ nemnulla oszlop. Számoljuk a permanenst A első sora szerint kifejtve: $\mathrm{Per}(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \mathrm{Per}(A(1|j))$. Mivel minden $k \times n$-es részmátrixa A-nak tartalmaz $k+1$ nemnulla oszlopot, ezért minden $k\times(n-1)$-es részmátrixában van legalább k nemnulla oszlop. Igaz ez $k = m-1$-re is, így a König-Frobenius II tétel szerint $\mathrm{Per}(A(1|j)) > 0, j = 1, \ldots, n$. Innen az indukciós feltétel szerint

$$\mathrm{Per}(A(1|j)) \geq \begin{cases} (t-1)! & \text{ha } t-1 \leq m-1 \\ \frac{(t-1)!}{(t-m)!} & \text{ha } t-1 \geq m-1 \end{cases}$$

De $t-1 \leq m-1$, ha $t \leq m$ és $t-1 \geq m-1$, ha $t \geq m$. Ezért, ha $t \leq m$, akkor az eddigiek alapján

$$\mathrm{Per}(A) \geq \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(t-1)! = (t-1)! \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \geq t!,$$

mert $\sum_{j=1}^{n} a_{1j} \geq t$.
Ugyanígy, ha $t \geq m$, akkor

$$\mathrm{Per}(A) \geq \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \frac{(t-1)!}{(t-m)!} = \frac{(t-1)!}{(t-m)!} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \geq \frac{t!}{(t-m)!}.$$

■

3. Jelölés. Legyen $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ egy valós szám n-es, jelölje $\alpha^*= (a_1{}^*, a_2{}^*, \ldots, a_n{}^*)$ az α elemeinek monoton csökkenő sorrendbe rendezettjét ($a_1{}^* \geq a_2{}^* \geq \cdots \geq a_n{}^*$) és $\alpha' = (a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ az α elemeinek monoton növekvő sorrendbe rendezettjét ($a'_1 \leq a'_2 \leq \cdots \leq a'_n$).

3. Definíció. Ha A egy $n \times n$-es (0,1) mátrix, $r_1, r_2, \ldots, r_n$ sorösszegekkel, akkor jelölje $\bar{A}$ azt a (0,1) mátrixot, amely i-edik sorának az első $r_i{}^*$ eleme egyes, a többi nulla, $i = 1, 2, \ldots, n$, ezt a mátrixot maximális mátrixnak nevezzük.

2.1.7. Tétel. *([8], [9]) Ha A egy $n \times n$-es (0,1) mátrix, és sorösszegei rendre $r_1, r_2, \ldots, r_n$, akkor $\mathrm{per}(A) \geq \prod_{i=1}^{n}\{r_i+i-n\}$, ahol $\{r_i+1-n\} = \max(0, r_i+1-n)$, és ha $\mathrm{per}(A) \neq 0$, akkor egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha létezik egy P permutációmátrix, melyre $AP = \bar{A}$.*

Bizonyítás. Ha $r_n = 0$, akkor az állítás nyilván teljesül. Ezzel a megállapítással az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy $a_{nj} = 1, j = 1, \ldots, r_n$. A bizonyításhoz n szerinti indukciót használunk.
A permanenst A utolsó sora szerint kifejtve azt kapjuk, hogy

$$\mathrm{per}(A) = \sum_{j=1} r_n \,\mathrm{per}(A(n|j)) \geq \sum_{j=1}^{r_n} \prod_{i=1}^{n-1} \{(r_i - a_{ij}) + i - (n-1)\} \geq \sum_{j=1}^{r_n} \prod_{i=1}^{n-1} \{r_i + i - n\},$$

ugyanis $1 - a_{ij} \geq 0$. Így

$$\mathrm{per}(A) \geq r_n \prod_{i=1}^{n-1} \{r_i + i - n\} = \prod_{i=1}^{n} \{r_i + i - n\}.$$

Az állítás első felével készen vagyunk, a következőkben már csak azt kell vizsgálnunk, hogyan tejesülhet egyenlőség. Feltesszük, hogy $\mathrm{per}(A) = \prod_{i=1}^{n} (r_i + i - n) > 0$ és $a_{nj}1, j = 1, \ldots, r_n$ és $a_{nj} = 0, j = r_n + 1, \ldots, n$. Mivel a tételben szereplő egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül, ezért a bizonyítás során föntebb előforduló egyenlőtlenségeknek is egyenlőséggel kell teljesülnie, ebből következik, hogy $a_{ij} = 1, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, r_n$. Más megfogalmazásban, az első r_n oszlop összes eleme 1 kell, hogy legyen. Ebből következik, hogy $A(n|1) = \cdots = A(n|r_n)$. Azaz,

$$0 < \mathrm{per}(A) = \sum_{i=1}^{r_n} \mathrm{per}(A(n|j)) = r_n \,\mathrm{per}(A(n|1)),$$

és így $\mathrm{per}(A(n|1)) > 0$. Mivel

$$\mathrm{per}(A) = r_n \prod_{i=1}^{n-1} (r_i + i - n)$$

és $\mathrm{per}(A) = r_n \,\mathrm{per}(A(n|1))$ ezért

$$\mathrm{per}(A(n|1)) = \prod_{i=1}^{n-1} (r_i + i - n) = \prod_{i=1}^{n-1} ((r_i - 1) + i - (n-1)),$$

az indukciós feltevés szerint az $A(n|1)$ egy maximális mátrix legfeljebb az utolsó $n - r_n$ oszlopát megpermutálva. De A első oszlopának minden eleme 1 és az utolsó sor első r_n eleme 1, a többi 0. Tehát, ha A utolsó $n - r_n$ oszlopát úgy permutáljuk meg, $A(n|1)$ oszlopaival tettük, akkor $\bar{A}$-t kapjuk. Így $\exists P$ permutáció mátrix, melyre $AP = \bar{A}$. $\square$

A következőkben az állítás megfordítását igazoljuk, ehhez elég belátnunk, hogy ha $A = \bar{A}$, akkor $\mathrm{per}(A) = \prod_{i=1}^{n}\{r_i + i - n\}$. Itt a $\mathrm{per}(A) \neq 0$ feltétel sem szükséges, ha $r_n = 0$, akkor $\mathrm{per}(A)$ is és $\prod_{i=1}^{n}\{r_i + i - n\}$ is nulla. Ezért feltehető, hogy $r_n > 0$. $A = \bar{A}$-ból következik, hogy $A(n|1) = \cdots = A(n|r_n)$, ebből

$$\mathrm{per}(A) = \sum_{i=1}^{r_n} \mathrm{per}(A(n|j)) = r_n \, \mathrm{per}(A(n|1)) = r_n \prod_{i=1}^{n-1}\{(r_i - 1) + i - (n-1)\}$$

az indukciós feltevés szerint és mivel

$$r_n \prod_{i=1}^{n-1}\{(r_i - 1) + i - (n-1)\} = \mathrm{per}(A) = \prod_{i=1}^{n}\{r_i + i - n\},$$

így az állítás második felét is beláttuk. ■

2.2. Teljesen felbonthatatlan mátrixok

4. Definíció. Egy $n \times n$-es A mátrix részben felbontható, ha valamely pozitív egész $s < n$-re A tartalmaz egy $s \times (n - s)$ méretű csupa nulla részmátrixot. Ha nem létezik ilyen részmátrix, akkor A teljesen felbonthatalan mátrix. Az 1×1-es mátrixot is teljesen felbonthatatlannak tekintjük, ha nemnulla mátrix. Az A mátrix csaknem felbontható, ha teljesen felbonthatatlan, de ha bármelyik nemnulla elemét nullára cseréljük, a kapott mátrix részben felbontható.

2.2.1. Állítás. *Egy $n \times n$-es nemnegatív A mátrix ($n \geq 2$) akkor és csak akkor teljesen felbonthatatlan, ha $\mathrm{per}(A(i|j)) > 0$ minden i-re és j-re.*

Bizonyítás. Frobenius-König I. tételből következik, hogy $\mathrm{per}(A(h|k)) = 0$ valamely h-ra és k-ra akkor és csak akkor, ha az $A(h|k)$ részmátrix és ezzel az A mátrix is tartalmaz egy $s \times t$ méretű nullmátrixot, ahol $s+t = (n-1)+1$. Ez viszont a teljesen felbonthatatlan mátrix definíciója miatt pontosan akkor teljesül, ha A nem teljesen felbonthatatlan. ■

4. Jelölés. E_{ij} jelölje azt a mátrixot, melynek (i, j)-edik eleme 1, a többi eleme pedig 0.

2.2.2. Tétel. *(Az összeg permanensére vonatkozó tétel) ([2]) Ha A egy $n \times n$-es teljesen felbonthatatlan (0,1) mátrix, akkor $\mathrm{per}(A + \sum_{t=1}^{m} E_{i_t j_t}) \geq \mathrm{per}(A) + m$, ha $i_1, \ldots, i_m, j_1, \ldots, j_m \in \{1, \ldots, n\}$.*

Bizonyítás. Mivel A (0,1) mátrix, az előző állításból következik, hogy $\mathrm{per}(A(i|j)) \geq 1$ minden i-re és j-re. Ezért $\mathrm{per}(A+E_{i_1j_1}) = \mathrm{per}(A) + per(A(i_1|j_1)) \geq \mathrm{per}(A)+1$. Világos, hogy $A + E_{i_1j_1}$ is teljesen felbonthatatlan, így az eredményből m szerinti indukcióval következik az állítás. ■

2.2.3. Állítás. *Legyen*

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & B_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{r-1} & B_{r-1} \\ B_r & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_r \end{bmatrix}$$

egy nemnegatív $n \times n$-es mátrix, ahol A_i teljesen felbonthatatlan $n_i \times n_i$ méretű mátrix, $i = 1, \ldots, r$ és $B_i \neq 0, i = 1, \ldots, r$. Ekkor A teljesen felbonthatatlan.

Bizonyítás. Indirekt módon tegyük fel, hogy A részben felbontható mátrix, azaz $A[\alpha|\beta] = 0$ valamely $\alpha \in Q_{s,n}$ és $\beta \in Q_{t,n}$-re, ahol $s + t = n$. Legyen s_j azon sorok száma α-ból és t_j azon oszlopok száma β-ból, amelyek metszik az A_j részmátrixot, $j = 1, \ldots, r$. Ekkor $s_1 + s_2 + \ldots, s_r = s > 1$, így legalább egy s_j pozitív és hasonlóan legalább egy t_j nemnulla. Mivel mindegyik A_j részmátrix teljesen felbonthatatlan és tartalmaz egy $s_j \times t_j$ méretű nulla részmátrixot (hacsak s_j vagy t_j nem nulla), ezért $s_j + t_j \leq n_j$ kell, hogy teljesüljön minden j-re és egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha $s_j = 0$ vagy $t_j = 0$. De $n = s + t = \sum_{j=1}^{r} s_j + \sum_{j=1}^{r} t_j = \sum_{j=1}^{r}(s_j + t_j) \leq \sum_{j=1}^{r} n_j = n$ és ebből látható, hogy $s_j + t_j = n_j$ minden j-re, vagyis minden j-re teljesül az egyik egyenlőség $s_j = 0$ és $t_j = 0$ közül. Viszont nem lehet mindegyik s_j nulla vagy mindegyik t_j nulla, ezért léteznie kell egy k számnak úgy, hogy $s_k = n_k$ és $t_{k+1} = n_{k+1}$ (az indexeket modulo r számolva). Ebből pedig következik, hogy B_k egy nulla részmátrix, ami ellentmond a feltételeknek. ■

5. Definíció. Egy nemnegatív elemű mátrixot duplán sztochasztikusnak nevezünk, ha minden sorában és minden oszlopában az elemek összege 1.

6. Definíció. Egy nemnegatív mátrixra azt mondjuk, hogy duplán sztochasztikus mintázatú, ha létezik egy duplán sztochasztikus mátrix, amellyel azonos a nulla mintázatuk (azaz az egyik mátrixban egy adott elem pontosan akkor nulla, ha a másik mátrixban is a megfelelő elem nulla).

2.2.4. Állítás. *Minden teljesen felbonthatatlan mátrix duplán sztochasztikus mintázatú.*

Bizonyítás. Legyen $A = (a_{ij})$ egy $n \times n$-es teljesen felbonthatatlan mátrix. Ekkor a teljes felbonthatatlanság ekvivalens átfogalmazása szerint $\mathrm{per}(A(i|j)) > 0$ minden i, j-re. Legyen $S = (s_{ij})$ a következőképpen definiált $n \times n$-es mátrix:

$$s_{ij} = \frac{a_{ij}\,\mathrm{per}(A(i|j))}{\mathrm{per}(A)} \qquad (i, j = 1, \dots, n).$$

Világos, hogy S nemnegatív és ugyanaz a nulla mintázata, mint A-nak. Valamint minden $i = 1, \dots, n$-re

$$\sum_{j=1}^{n} s_{ij} = \frac{1}{\mathrm{per}(A)} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\mathrm{per}(A(i|j)) = \frac{1}{\mathrm{per}(A)}\,\mathrm{per}(A) = 1,$$

és hasonlóan minden $j = 1, \dots, n$-re

$$\sum_{i=1}^{n} s_{ij} = \frac{1}{\mathrm{per}(A)} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,\mathrm{per}(A(i|j)) = 1.$$

Tehát S duplán sztochasztikus mátrix, ezért A duplán sztochasztikus mintázatú. ■

2.2.5. Tétel. *(Felbontási tétel) ([10]) Ha A csaknem felbontható nemnegatív mátrix, akkor léteznek P, Q permutációmátrixok és egy $r > 1$ egész szám, hogy*

$$PAQ = \begin{bmatrix} A_1 & E_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & E_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{r-1} & E_{r-1} \\ E_r & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_r \end{bmatrix}$$

ahol minden E_i részmátrixnak pontosan egy pozitív eleme van és minden A_i négyzetes blokk csaknem felbonthatatlan.

Bizonyítás. Legyen A egy csaknem felbontható mátrix. Az előző állítás szerint létezik egy $S = (s_{ij})$ duplán sztochasztikus mátrix, amelynek A-val megegyező nulla mintázata van. Legyen S legkisebb pozitív eleme c és $s_{hk} = c$. Mivel S csaknem felbontható, $S - s_{hk}E_{hk}$ részben felbontható, azaz léteznek a P_1, Q_1 permutációmátrixok, hogy

$$P_1(S - s_{hk}E_{hk})Q_1 = \begin{array}{cc} & t \\ s & \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix} \end{array}$$

ahol a nulla blokk $s \times t$ méretű, $s + t = n$. Másképpen

$$P_1SQ_1 = \begin{array}{cc} & t \\ s & \begin{pmatrix} X & Y \\ F & Z \end{pmatrix} \end{array},$$

ahol F-nek pontosan egy nemnulla eleme van és az c.
Az így kapott P_1SQ_1 duplán sztochasztikus (mert S az volt), ezért $n = s(P_1SQ_1) = s(X)+s(F)+s(Z)+s(Y) = (t-c)+c+(s-c)+s(Y) = n-c+s(Y)$, ahol $s(M)$ a mátrix elemeinek összegét jelöli. Így $s(Y) = c$, de mivel c a minimális elem volt, Y-nak pontosan egy nemnulla eleme kell, hogy legyen. Ha X és Z mindketten teljesen felbonthatatlanok, akkor csaknem felbonthatók, mert tegyük fel, hogy X vagy Z teljesen felbonthatatlan, de nem csaknem felbontható. Az általánosság megsértése nélkül feltehető, hogy az X mátrix ilyen tulajdonságú. Legyen (i, j) olyan, hogy $i \leq n - s, j \leq t, s_{ij} = 1$ és $A - E_{ij}$ teljesen felbonthatatlan. Ekkor $S - E'_{ij}$ részben felbontható, mert S csaknem felbontható, viszont $X - E_{ij}, Z$ teljesen felbonthatatlanok, Y, F nem nullák és egy korábbi tétel szerint az ilyen alakú mátrixok teljesen felbontatatlanok. Itt ellentmondásra jutottunk, így X és Z, ha teljesen felbonthatatlanok, akkor részben felbonthatók is. Ez esetben pedig készen vagyunk, hiszen P_1SQ_1-nek és P_1AQ_1-nek ugyanaz lesz a nulla mintázata.

Ha X vagy Z részben felbontható, akkor a sorok és oszlopok permutálásával az S mátrix a következő alakra hozható:

$$PAQ = \begin{bmatrix} A_1 & B_{12} & B_{13} & \cdots & B_{1p} & & & & & \\ 0 & A_2 & B_{23} & \cdots & B_{2p} & & & & & \\ 0 & 0 & A_3 & \cdots & B_{3p} & & & Y_2 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_p & & & & & \\ & & & & & A_{p+1} & B_{p+1,p+2} & B_{p+1,p+3} & \cdots & B_{p+1,r} \\ & & & & & 0 & A_{p+2} & B_{p+2,p+3} & \cdots & B_{p+2,r} \\ & & Y_1 & & & 0 & 0 & A_{p+3} & \cdots & B_{p+3,r} \\ & & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & \cdots & A_r \end{bmatrix}$$

ahol az A_i mátrixok $n_i \times n_i$ méretűek és teljesen felbonthatatlanok és Y_1-ek és Y_2-nek pontosan egy pozitív eleme van és az c.

Világos, hogy Y_1-ben a pozitív elemnek a bal alsó $n_r \times n_1$-es blokkba kell esnie, ellenkező esetben ugyanis az első n_1 oszlop tartalmazna egy $(n-n_1)\times n_1$ méretű nullmátrixot vagy az utolsó n_r sor tartalmazna egy $n_r \times (n-n_r)$ méretű nullmátrixot, így a PSQ mátrix (és ezzel együtt S is) részben felbontható lenne. Hasonló megfontolással látszik, hogy Y_2 egyetlen pozitív elemének az A_p-t tartalmazó sorok és A_{p+1}-et tartalmazó oszlopok valamelyikébe kell esnie.

PSQ duplán sztochasztikus mátrix, ezért A_1-nek egy oszlopösszege $1-c$, a többi 1. c minimalitásából következik, hogy ez pont azt jelenti, hogy A_1-ben pontosan egy sorösszeg $1-c$, a többi 1. Megint csak a c minimalitásából következik, hogy $B_{12}, B_{13}, \ldots, B_{1p}$ mátrixok egy kivételével mind nullmátrixok, és a nemnulla mátrixnak pontosan egy eleme nem nulla (és az c). Egyszerűen látszik, hogy B_{12}-nek kell lenni a nemnulla mátrixnak, különben lenne egy $(n-n_2)\times n_2$ méretű nulla részmátrix PSQ-ban és így az részben felbontható lenne. Ebből hasonló okok miatt következik, hogy B_{23}-nak egy pozitív eleme van és a $B_{24}, \ldots, B_{2p}$ mátrixok mind nullmátrixok. A módszert tovább folytatva azt kapjuk, hogy PSQ, és így PAQ is, olyan alakú, hogy a főátlóban teljesen felbonthatatlan A_i mátrixok állnak, a főátló fölötti átlóban olyan mátrixok, amelyeknek pontosan egy elemük pozitív és a bal alsó $n_r \times n_1$-es blokk is pontosan egy pozitív elemet tartalmaz (a többi elem nulla). Mivel S-ről (illetve A-ról) tudjuk, hogy csaknem felbontható, így egy korábbi tétel alapján az A_i mátrixok csaknem felbonthatók kell, hogy legyenek, így PAQ valóban a kívánt alakú. ■

2.2.6. Tétel. *([11]) Ha A teljesen felbonthatatlan $n \times n$-es (0,1) mátrix, $r_1, \ldots, r_n$ sorösszegekkel, akkor* $\operatorname{per}(A) \geq \max_i r_i$ *és egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha legalább $n-1$ sorösszeg 2.*

Bizonyítás. A teljes felbonthatatlanság ekvivalens átfogalmazása szerint $\operatorname{per}(A(i|j)) \geq 1$ minden i-re és j-re, mert egy (0,1) mátrix permanensének legkisebb nemnulla értéke 1 lehet. Így $\operatorname{per}(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \operatorname{per}(A(i|j)) \geq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = r_i$ minden i-re, ebből az egyenlőtlenség következik. □

Az egyenlőség teljesülésének vizsgálatához a következő tételt látjuk be:

2.2.7. Tétel. *([12]) Ha $A = (a_{ij})$ teljesen felbonthatatlan $n \times n$-es (0,1) mátrix, akkor* $\operatorname{per}(A) \geq s(A) - 2n + 2$, *ahol $s(A)$ az A összes elemének összegét jelöli.*

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy A csaknem felbontható. Ekkor a felbontási tétel szerint léteznek P és Q permutációmátrixok úgy, hogy

$$PAQ = \begin{bmatrix} A_1 & E_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & E_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{r-1} & E_{r-1} \\ E_r & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_r \end{bmatrix}$$

ahol minden $i = 1, 2, , \cdots, r$-re A_i csaknem felbonható és E_i-nek pontosan egy eleme 1 és $r \geq 2$. Alkalmazzunk n szerinti indukciót. Könnyen látszik, hogy $n = 1$ és $n = 2$ esetén az egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül. Tegyük föl, hogy az állítás teljesül, minden csaknem felbontható $t \times t$ méretű mátrixra, $t < n$. Legyen A_i $n_i \times n_i$ méretű $(i = 1, 2, \ldots, r)$. Az összeg permanensére vonatkozó tétel és az indukciós feltevés szerint:

$$\operatorname{per}(A) = \operatorname{per}(PAQ) \geq \prod_{i=1}^{r} \operatorname{per}(A_i) + r \geq \prod_{i=1}^{r} (s(A_i) - 2n_i + 2) + 1.$$

Ha $a_1, \ldots, a_r$ pozitív egész számok, akkor $\prod_{i=1}^{r} a_i \geq \sum_{i=1}^{r} a_i - (r-1)$.

Ugyanis r szerinti teljes indukciót alkalmazva $a_1 \geq a_1$ triviálisan teljesül és az indukciós feltevés, a

$$\sum_{i=1}^{r} a_i - (r-1) = \sum_{i=1}^{r}(a_i - 1) + 1$$

egyenlőség és az $a_r \geq 1$ egyenlőtlenség szem előtt tartásával:

$$\prod_{i=1}^{r} a_i = \left(\prod_{i=1}^{r-1} a_i\right) a_r \geq \left(\sum_{i=1}^{r-1}(a_i - 1) + 1\right) a_r \geq$$

$$\geq \sum_{i=1}^{r-1}(a_i - 1)a_r + (a_r - 1) + 1 \geq \sum_{i=1}^{r}(a_i - 1) + 1 = \sum_{i=1}^{r} a_i - (r-1).$$

Ezt $a_i = s(A_i) - 2n_i + 2, i = 1, \ldots, r$-re alkalmazva (alkalmazható, mert $s(A_i) \geq 2n_i$, ha $i \geq 2$ és $s(A_i) = 1$, ha $n_i = 1$) azt kapjuk, hogy

$$\mathrm{per}(A) \geq \sum_{i=1}^{r}(s(A_i) - 2n_i + 2) - (r-1) + 1 = \sum_{i=1}^{r} s(A_i) - 2n + 2r - r + 2 =$$

$$= s(a) - r - 2n + 2r - r + 2 = s(A) - 2n + 2.$$

Most tegyük fel, hogy A tetszőleges (a tétel feltételeinek megfelelő) teljesen felbonthatatlan mátrix. Ha A nem csaknem felbontható, akkor kell, hogy legyen egy $a_{i_1 j_1} = 1$ eleme, így $A - E_{i_1 j_1}$ mátrix is teljesen felbonthatatlan (0,1) mátrix. Ha $A - E_{i_1 j_1}$ nem csaknem felbontható, akkor létezik egy $a_{i_2 j_2} = 1$ eleme úgy, hogy $A - E_{i_1 j_1} - E_{i_2 j_2}$ is teljesen felbonthatatlan, és így tovább. Végül egy csaknem felbontható B mátrixot kapunk, amelyre $A = B + \sum_{t=1}^{m} E_{i_t j_t}$. Az összeg permanensére vonatkozó tétel szerint $\mathrm{per}(A) \geq \mathrm{per}(B) + m$ és B csaknem felbonthatatlan, ezért a csaknem felbonthatatlan mátrixokra kapott becslést és az $s(B) + m = s(A)$ egyenlőséget felhasználva: $\mathrm{per}(A) \geq s(b) - 2n + 2 + m = s(A) - 2n + 2$. Ezzel a tételt beláttuk. □

Visszatérhetünk az egyenlőség teljesülésének vizsgálatához. Feltehetjük az általánosság megsértése nélkül, hogy $r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_n$ és ezt szeretnénk belátni, hogy $\mathrm{per}(A) = r_1$ akkor és csak akkor, ha $r_2 = \cdots = 2$. Az előbbi tétel alapján $\mathrm{per}(A) \geq s(A) - 2n + 2 = r_1 + \sum_{i=2}^{n}(r_i - 2)$ ezért, ha a kívánt egyenlőség teljesül, akkor $r_1 = \mathrm{per}(A) \geq r_1 + \sum_{i=2}^{n}(r_i - 2)$, és mivel $r_i - 2 \geq 0$ minden i-re (hiszen A teljesen felbonthatatlan), ezért $r_2 = \cdots = r_n = 2$ kell, hogy teljesüljön.

Megfordítva, legyen A teljesen felbonthatatlan (0,1) mátrix $r_1 \geq r_2 = \cdots = r_n = 2$ sorösszegekkel. $\mathrm{per}(A) = r_1$ teljesüléséhez elég lenne belátnunk, hogy $\mathrm{per}(A(1|j)) = 1$, amikor $a_{ij} = 1$. Ennél egy valamivel erősebb állítás is teljesül: $\mathrm{per}(A(1|j)) = 1, j = 1, \ldots, n$. Ezt elég csaknem felbontható mátrixokra belátni, ugyanis tegyük fel, hogy A teljesen felbonthatatlan, ám nem csaknem felbontható, ekkor létezik egy j_1, melyre $a_{1j_1} = 1$ és $A - E_{1j_1}$ teljesen felbonthatatlan (0,1) mátrix. Ugyanígy, ha $A - E_{1j_1}$ nem csaknem felbontható, akkor létezik egy j_2 szám, melyre $a_{1j_2} = 1$ és $A - E_{1j_1} - E_{1j_2}$ teljesen felbonthatatlan, és így tovább. Végül muszáj egy csaknem felbontható mátrixot kapnunk: $B = A - \sum\limits_{t=1}^{m} E_{1j_t}$, amely sorösszegei $r_1 - m \geq r_2 = \cdots = r_n = 2$. Végül $B(1|j) = A(1|j), j = 1, \ldots, n$, így $\mathrm{per}(B(1|j)) = \mathrm{per}(A(1|j))$ tehát valóban elég csak csaknem felbontható mátrixokra vizsgálódnunk.

Így az általánosság elvesztése nélkül feltehetjük, hogy A csaknem felbontható mátrix $r_1 \geq r_2 = \cdots = r_n = 2$ sorösszegekkel. A Q és R permutációmátrixokat válasszuk meg úgy, hogy a QAR mátrix a felbontási tételnek megfelelő alakú legyen, azaz $r \geq 2$, A_1 $n_1 \times n_1$ méretű csaknem felbontható mátrix, $A_i = 1, i = 2, \ldots, n$ és minden E_i pontosan egy pozitív elemet tartalmaz. Legyen Q és R úgy választva, hogy E_1 és E_r pozitív eleme az $(1, n_1 + 1)$ és az $(n, 1)$ cellákban legyen. Először vizsgáljuk meg, hogy mit kapunk $r_1 = 2$-re (ekkor $n_1 = 1$). Ebben az esetben QAR az $n \times n$-es identitás mátrix (I_n) és a főátló feletti átlóban 1-eseket tartalmazó $n \times n$-es permutáció mátrix (P_n) összegeként. Könnyen belátható, hogy ebben az esetben $I_n + P_n$ minden $(n-1) \times (n-1)$-es részmátrixának permanense 1 lesz. Világos, hogy QAR első sorösszege r_1 és így A_1 első sorösszege $r_1 - 1$, a többi sorösszege 2 és A_1 teljesen felbonthatatlan, így $\mathrm{per}(A_1(1|j)) = 1, j = 1, \ldots, n_1$. A QAR mátrix felépítéséből (A_1 felépítésére való megkötés nélkül) látszik, hogy $\mathrm{per}((QAR)(1|j)) = \mathrm{per}(A_1(1|j)), j = 1, \ldots, n_1$ és $\mathrm{per}(QAR(1|j)) = \mathrm{per}(A_1(1|1)), j = n_1 + 1, \ldots, n$, mert $j > n_1$ esetén a permanens minden nem nulla kifejtési tagjában szerepelnie kell az a_{n1} elemnek. Így valóban $\mathrm{per}(A(1|j)) = 1, j = 1, \ldots, n$, ezért $\mathrm{per}(A) = r_1$, tehát az állítás igaz. ■

2.2.8. Következmény. *Ha A teljesen felbonthatatlan (0,1) mátrix, úgy, hogy a legnagyobb sajátértéke $r(A)$, akkor* $\mathrm{per}(A) \geq r(A)$, *és egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha A minden sorösszege 2.*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy $r(A) \leq \max\limits_i r_i$, és egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha minden sorösszeg megegyezik. Az előző tétellel összevetve pont az állítást kapjuk. ■

3. Egy kétoldali becslés

Egy alsó és felső becslést egy állításba véve könnyen kaphatunk egy kétoldali becslést, de ez nem mutatna túl azon, mint ha két külön állítást fogalmaznánk meg. A következő két egyenlőtlenséget azért érdemes egyben kezelni, mert két formailag analóg kifejezéssel tudjuk a pemanenst alulról és fölülről becsülni.

3.0.9. Megjegyzés. Ha $A = (a_{ij})$ $n \times n$-es mátrix, ahol $a = \min\limits_{i,j} a_{ij} > 0$, akkor nyilván $\operatorname{per}(A) \geq n!a^n$, ahol egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a_{ij} = a$ minden i-re és j-re. És $\operatorname{per}(A) \geq n! \prod\limits_{i=1}^{n} a_{in}*$ és egyenlőség akkor és csak akkor áll fönn, ha minden sor az $(1, 1, \ldots, 1)$ vektor pozitív számszorosa. (Ahol, a korábbi jelöléseknek megfelelően, ha $A_{(i)} = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$ az i-edik sora A-nak, akkor $(a_{i1}*, a_{i2}*, \ldots, a_{in}*)$ jelöli az $A_{(i)}$ sor elemeinek monoton csökkenő sorrendbe rendezettjét és $(a'_{i1}, a'_{i2}, \ldots, a'_{in})$ jelöli az $A_{(i)}$ sor elemeinek monoton növekvő sorrendbe rendezettjét. Így $a_{in}*$ az i-edik sor legkisebb eleme.)

3.0.10. Tétel. *([8]) Legyen $A = (a_{ij})$ $n \times n$-es nemnegatív mátrix. Ekkor*

$$\prod_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{i} a'_{it} \leq \operatorname{per}(A) \leq \prod_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{i} a^*_{it}$$

és ha A pozitív, akkor egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha A első $n-1$ sora az $(1, 1, \ldots, 1)$ vektor pozitív számszorosa.

Bizonyítás. Az állítást n szerinti indukcióval bizonyítjuk. $n = 2$-re könnyen látszik, hogy mindkét oldali egyenlőtlenség és az egyenlőségről megfogalmazott állítás is teljesül. Legyen $n \geq 3$ és tegyük fel, hogy az állítás teljesül minden $(n-1) \times (n-1)$-es mátrixra. A permanenst A utolsó sora szerint kifejtve és az indukciós feltevést használva kapjuk, hogy

$$\operatorname{per}(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{nj} \operatorname{per}(A(n|j)) \geq \sum_{j=1}^{n} a_{nj} \prod_{i=1}^{n-1} \sum_{t=1}^{i} (A(n|j))'_{it}.$$

Nyilván

$$\sum_{t=1}^{i} (A(n|j))'_{it} \geq \sum_{t=1}^{i} a'_{it} \qquad i = 1, \ldots, n-1, \ j = 1, \ldots, n$$

(mert a második szummában egy bővebb halmazból választjuk ki az i legkisebb elemet), így

$$\operatorname{per}(A) \geq \sum_{j=1}^{n} a_{nj} \prod_{i=1}^{n-1} \sum_{t=1}^{i} a'_{it} = \left(\prod_{i=1}^{n-1} \sum_{t=1}^{i} a'_{it} \right) \left(\sum_{j=1}^{n} a_{nj} \right) = \prod_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{i} a'_{it}.$$

A fölső becslés hasonló módon látható be. □

Az egyenlőség feltétele nyilván elégséges mindkét oldalon, hiszen ekkor

$$\begin{aligned} a'_{11}(a'_{21}+a'_{22})\cdots(a'_{n1}+\cdots+a'_{nn}) &= \\ = a'_{11}\cdot 2\cdot a'_{21}\cdot 3\cdot a'_{31}\cdots(n-1)\cdot a'_{(n-1)1}\cdot(a'_{n1}+\cdots+a'_{nn}) &= \\ = (n-1)!a_{11}a_{21}\cdots a_{(n-1)1}(a_{n1}+\cdots+a_{nn}) = \mathrm{per}(A)&. \end{aligned}$$

És ugyanígy a másik oldalon. □

Most tegyük föl, hogy az állításban szereplő egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül. Ekkor az egyenlőtlenség bizonyításában felírt két egyenlőtlenségnek is egyenlőséggel kell teljesülnie, így az első egyenlőtlenségből az indukciós feltevés miatt azt kapjuk, hogy $A(n|j)$ első $n-2$ sora az $(1,1,\ldots,1)$ vektor többszöröse. Ezért $n \geq 3$ esetben azt kapjuk, hogy $a_{i1} = a_{i2} = \cdots = a_{in}$ teljesül $i = 1,\ldots,n-2$-re. A másik egyenlőtlenséget (amely most szintén egyenlőséggel teljesül a feltételek miatt) $i = n-1$-re vizsgáljuk:

$$\sum_{t=1}^{n-1}(A(n|j))1_{n-1,t} = \sum_{t=1}^{n-1} a'_{n-1,t} \qquad (j = 1,\ldots,n)$$

ebből pedig

$$\left(\sum_{t=1}^{n} a_{n-1,t}\right) - a_{n-1,j} = \sum_{t=1}^{n-1} a'_{n-1,t} \qquad (j = 1,\ldots,n).$$

Így $a_{n-1,1} = a_{n-1,2} = \cdots = a_{n-1,n}$. A szükségesség bizonyítása a jobb oldalon is csaknem ugyanígy működik, így az állítás valóban teljesül. ■

4. Felső becslések

4.0.11. Lemma. *Ha $t_1, \ldots, t_r$ nemnegatív valós számok, akkor*

$$((t_1 + \cdots + t_r)/r)^{t_1+\cdots+t_r} \le t_1^{t_1} \cdots t_r^{t_r}.$$

(0^0-t 1-nek tekintjük ebben az állításban.)

Bizonyítás. Ez a lemma közvetlen következménye az $x \log x$ függvény konvexitásának. Hiszen a konvexitás miatt:

$$\left(\frac{t_1 + \cdots + t_r}{r}\right) \log \left(\frac{t_1 + \cdots + t_r}{r}\right) \le \frac{t_1 \log t_1 + \cdots + t_r \log t_r}{r}$$

az egyenlőtlenséget r-rel végig szorozva ($r > 0$) és mindkét oldalt az e kitevőjébe helyezve (e^x szigorúan monoton növő függvény) a kívánt egyenlőtlenséget kapjuk. ■

5. Jelölés. Ebben a fejezetben $\sigma i := \sigma(i)$.

4.0.12. Lemma. *Legyen $A = (a_{ij})$ egy $n \times n$-es (0,1) mátrix, és legyen S azon σ permutációk halmaza, melyekre $\prod_{i=1}^n a_{i,\sigma i} = 1$. Ekkor*

$$\prod_{i=1}^n \prod_{k:a_{ik}=1} (\mathrm{per}(A(i|k)))^{\mathrm{per}(A(i|k))} = \prod_{\sigma\in S} \prod_{i=1}^n \mathrm{per}(A(i|\sigma i)),$$

és

$$\prod_{i=1}^n r_i^{\mathrm{per}\, A} = \prod_{\sigma\in S} \prod_{i=1}^n r_i.$$

Bizonyítás. Az állítás első fele azért teljesül, mert ha $a_{ik} = 1$, akkor vagy létezik $\sigma \in S$, amelyre $k = \sigma i$, ekkor $\mathrm{per}(A(i|k)) = |\{\sigma \in S | \sigma i = k\}|$, vagy nem létezik ilyen, így $\mathrm{per}(A(i|k)) = 0$, de ekkor $\mathrm{per}(A(i|k))^{\mathrm{per}(A(i|k))} = 1$, így ezek a tényezők nem játszanak szerepet a bal oldalon, így az egyenlőség valóban teljesül. □

Az állítás második fele pedig azért teljesül, mert $\mathrm{per}(A) = |S|$, hiszen a permanens most pont azoknak a permutációknak a száma, ahol a diagonális szorzat nem nulla. ■

4.0.13. Tétel. *([13]) Legyen A egy $n \times n$-es (0,1) mátrix $r_1, \ldots, r_n > 0$ sorösszegekkel, ekkor*

$$\mathrm{per}(A) \le \prod_{i=1}^n (r_i!)^{1/r_i}.$$

Bizonyítás. A tétel bizonyításához teljes indukciót használunk. A kettővel ezelőtti lemma szerint

$$(\operatorname{per} A)^{n \operatorname{per} A} = \prod_{i=1}^{n} (\operatorname{per} A)^{\operatorname{per} A} = \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \operatorname{per} A(i|k) \right)^{\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \operatorname{per} A(i|k)} \leq$$
$$\leq \prod_{i=1}^{n} \left(r_i^{\operatorname{per} A} \prod_{k: a_{ik}=1} \operatorname{per} A(i|k)^{\operatorname{per} A(i|k)} \right),$$

ebből az előző lemma szerint

$$(\operatorname{per} A)^{n \operatorname{per} A} \leq \prod_{\sigma \in S} \left(\left(\prod_{i=1}^{n} r_i \right) \left(\prod_{i=1}^{n} \operatorname{per} A(i|\sigma i) \right) \right).$$

Az indukciós feltevést alkalmazva minden $A(i|\sigma i)$-re:

$$\prod_{i=1}^{n} \operatorname{per} A(i|\sigma i) \leq \prod_{i=1}^{n} \left(\prod_{j \neq i,\, a_{j,\sigma i}=0} r_j!^{1/r_j} \right) \left(\prod_{j \neq i,\, a_{j,\sigma i}=1} (r_j - 1)!^{1/(r_j-1)} \right) =$$
$$= \prod_{j=1}^{n} \left(\prod_{j \neq i,\, a_{j,\sigma i}=0} r_j!^{1/r_j} \right) \left(\prod_{j \neq i,\, a_{j,\sigma i}=1} (r_j - 1)!^{1/(r_j-1)} \right) =$$
$$= \prod_{j=1}^{n} r_j!^{(n-r_j)/r_j} (r_j - 1)!^{(r_j-1)/(r_j-1)}.$$

Az első egyenlőség azért teljesül, mert csak a szorzások sorrendjét cseréltük meg, a másodikat pedig úgy kaptuk, hogy megszámoltuk az $r_j!^{1/r_j}$ és $(r_j - 1)!^{1/(r_j-1)}$ tényezők számát. Világos, hogy fix σ-ra és j-re azon i-k száma, melyekre $i \neq j$ és $a_{j,\sigma i} = 0$ teljesül $n - r_j$, és azoknak a száma, melyekre $i \neq j$ és $a_{j,\sigma i} = 1$ teljesül $r_j - 1$ (mivel $a_{j,\sigma j} = 1$). Ebből viszont:

$$(\operatorname{per} A)^{n \operatorname{per} A} \leq \prod_{\sigma \in S} \left(\left(\prod_{i=1}^{n} r_i \right) \left(\prod_{j=1}^{n} r_j!^{(n-r_j)/r_j} (r_j - 1)! \right) \right) =$$
$$= \prod_{\sigma \in S} \left(\left(\prod_{j=1}^{n} r_j^{r_j/r_j} \right) \left(\prod_{j=1}^{n} r_j^{(n-r_j)/r_j} (r_j - 1)!^{(n-r_j)/r_j} (r_j - 1)!^{r_j/r_j} \right) \right) =$$
$$= \prod_{\sigma \in S} \left(\prod_{i=1}^{n} r_i^{n/r_i} \right) = \left(\prod_{i=1}^{n} r_i^{1/r_i} \right)^{n \operatorname{per} A},$$

így az állítást beláttuk. ∎

4.0.14. Megjegyzés. A bizonyítás során előfordult, hogy $(r_j - 1)$-el osztottunk, elvileg semmi nem zárja ki, hogy legyen olyan j, amire $r_j = 1$, ám ezt az esetet vissza tudjuk vezetni arra az esetre, amikor minden $r_i > 1$.

4.0.15. Lemma. *([3]) Legyenek $r_1, \dots, r_c$ pozitív egészek, ekkor*

$$\sum_{j=1}^{c} \frac{2}{r_j} \prod_{t=1}^{c} \frac{r_t}{r_t + 1} \leq 1.$$

Bizonyítás. Jelölje E_s az $1/r_1, \dots, 1/r_c$ számok s-edik szimmetrikus polinomját. Ekkor

$$0 \leq \prod_{t=1}^{c} (1 - 1/r_t) = 1 - E_1 + E_2 - E_3 + \cdots + (-1)^c E_c$$

ebből

$$1 + E_1 + E_2 - E_3 + \cdots + (-1)^c E_c \geq 2E_1$$

ekkor nyilván

$$\prod_{t=1}^{c} (1 + 1/r_t) \geq 2E_1$$

és ebből valóban következik az állítás. ■

4.0.16. Tétel. *([3]) Legyen A egy $n \times n$-es (0,1) mátrix $r_1, \dots, r_n$ sorösszegekkel, ekkor*

$$\operatorname{per}(A) \leq \prod_{i=1}^{n} \frac{r_i + 1}{2}.$$

Bizonyítás. A bizonyítást n szerinti indukcióval végezzük. Mivel a permanens invariáns a sorok felcserélésére, feltehetjük, hogy $a_{i1} = 1$ $(i = 1, \dots, c)$ és $a_{i1} = 0$ $(i = c+1, \dots, n)$. Ekkor az indukciós feltevés szerint

$$\operatorname{per} A(i|1) = \left(\prod_{\substack{1 \leq t \leq c \\ t \neq i}} \frac{r_t}{2} \right) \left(\prod_{j=c+1}^{n} \frac{r_j + 1}{2} \right) = \frac{2}{r_i} \left(\prod_{t=1}^{c} \frac{r_t}{r_t + 1} \right) \left(\prod_{j=1}^{n} \frac{r_j + 1}{2} \right),$$

$i = 1, \dots, c$. A permanenst A első oszlopa szerint kifejtve:

$$\operatorname{per}(A) = \sum_{i=1}^{c} \operatorname{per} A(i|1) \leq \sum_{i=1}^{c} \frac{2}{r_i} \left(\prod_{t=1}^{c} \frac{r_t}{r_t + 1} \right) \left(\prod_{j=1}^{n} \frac{r_j + 1}{2} \right) \leq \prod_{j=1}^{n} \frac{r_j + 1}{2}$$

az előző lemma szerint. ■

4.0.17. Tétel. *([4]) Legyen A egy $n \times n$-es (0,1) mátrix, amelynek minden sorösszege $r_i \geq 3$. Legyen N az A mátrix pozitív elemeinek száma. Ekkor*

$$\mathrm{per}(A) \leq 2^{N-2n}.$$

Bizonyítás. Indukcióval könnyen látszik, hogy $k \geq 3$ esetén $(k+1)/2 \leq 2^{k-2}$. Az előző tétel és a fenti megállapítás szerint:

$$\mathrm{per}(A) \leq \prod_{i=1}^{n} \frac{r_i + 1}{2} \leq \prod_{i=1}^{n} 2^{r_i - 2} = 2^{\sum_{i=1}^{n} r_i - 2n} = 2^{N-2n}.$$

■

4.0.18. Lemma. *([4]) Legyen A egy teljesen felbonthatatlan nemnegatív egész elemű mátrix. Tegyük fel, hogy valamely i-re, j-re $a_{ij} \geq 2$. Ekkor* $\mathrm{per}(A) \leq \mathrm{per}(A - E_{ij}) - 1$.

Bizonyítás. Mivel A teljesen felbonthatatlan, ezért $\exists l \neq j : \;\; a_{il} \geq 1$. Fejtsük ki a permanenst az i-edik sor szerint:

$$\mathrm{per}(A) = a_{ij}\,\mathrm{per}(A(i|j)) + a_{il}\,\mathrm{per}(A(i|l)) + \sum_{k \neq i,l} a_{ik}\,\mathrm{per}(A(i|k)) \geq$$
$$\geq 2\,\mathrm{per}(A(i|j)) + 1$$

vagyis $\mathrm{per}(A(i|j)) \leq (\mathrm{per}(A) - 1)/2$. Másképp kifejtve az i-edik sor szerint:

$$\mathrm{per}(A) = \mathrm{per}(A - E_{ij}) + \mathrm{per}(A(i|j)) \leq \mathrm{per}(A - E_{ij}) + (\mathrm{per}(A) - 1)/2.$$

Ezt átrendezve pont az állításban szereplő egyenlőtlenséget kapjuk. ■

4.0.19. Tétel. *([4]) Legyen A $n \times n$-es teljesen felbonthatatlan nemnegatív egész elemű mátrix, ekkor*

$$\mathrm{per}(A) \leq 2^{s(A)-2n} + 1,$$

ahol $s(A)$ az A elemeinek összegét jelöli.

Bizonyítás. Az állítást n-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. Legyen a egy $n \times n$-es, nemnegatív egész elemű, teljesen felbonthatatlan mátrix. Ha $n = 1$, akkor az eredmény könnyen látszik, ezért tegyük fel, hogy $n \geq 2$. Ha létezik $a_{ij} \geq 2$ eleme az A mátrixnak, akkor legyen $A_1 = A - E_{ij}$. Ekkor $s(A_1) = s(A) - 1$ és az előző lemma szerint $\operatorname{per}(A) \leq 2\operatorname{per}(A_1) - 1$. Ha A_1-nek van egy eleme, melyre $a_{kl} \geq 2$, akkor legyen $A_2 = A_1 - E_{kl}$. Ekkor $\operatorname{per}(A_1) \leq 2\operatorname{per}(A_2) - 1$, így $\operatorname{per}(A) \leq 2^2\operatorname{per}(A_2) - (2^2 - 1)$.

Az előző lemma alkalmazásának ismétlésével nemnegatív egész elemű, teljesen felbonthatatlan mátrixok egy $A = A_0, A_1, A_2, \dots$ sorozatát kapjuk, melyekre $\operatorname{per}(A) \leq 2^j\operatorname{per}(A_j) - (2^j - 1)$ és $s(A_j) = s(A) - j$ $(j = 0, 1, 2, \dots)$.

Végül egy B $(0,1)$ mátrixot kapunk, amely $B = A_m$ $(m \geq 0)$. Legyen r_i a B mátrix i-edik sorösszege $(i = 1, \dots, n)$. Két esetet különböztetünk meg:

(1) $r_i \geq 3$ minden i-re. Ekkor az előző tétel értelmében

$$\operatorname{per}(B) \leq 2^{s(B)-2n} - 1,$$

így

$$\operatorname{per}(A) \leq 2^m(2^{s(B)-2n} - 1) - (2^m - 1) = 2^{s(A)-2n} + 1 - 2^{m+1} < 2^{s(A)-2n} + 1.$$

(2) Létezik egy i, amire $r_i = 2$, mondjuk legyen ez $i = 1$. Legyenek az első sorban az egyesek az első és a második oszlopban. Képezzük a B mátrixból a B' mátrixot úgy, hogy adjuk össze B első két oszlopát, ez legyen az első oszlop, majd töröljük az első sort. Így B' egy $(n-1) \times (n-1)$-es teljesen felbonthatatlan mátrix lesz és $\operatorname{per}(B') = \operatorname{per}(B)$, $s(B') = s(B) - 2$ valamint B' elemei a $\{0; 1; 2\}$ halmazból kerülnek ki, így alkalmazható az indukciós feltevés:

$$\operatorname{per}(B) = \operatorname{per}(B') \leq 2^{s(B')-2(n-1)} + 1 = 2^{s(B)-2n} + 1.$$

Ebből

$$\operatorname{per}(A) \leq 2^m(2^{s(B)-2n} + 1) - (2^m - 1) = 2^{s(A)-2n} + 1.$$

Tehát az állítást beláttuk. ■

5. A permanens egy általánosítása

5.1. Szükséges ismeretek

Ebben a részben a determinánst (vagy a permanenst) szeretnénk általánosítani, majd láthatjuk, hogy tényleg egy kézenfekvő megoldás lesz a q-permanensek nyújtotta lehetőség, ám ahhoz, hogy ezzel érdemben tudjunk foglalkozni és alapvető egyenlőtlenségeket tudjunk itt is bizonyítani, egy-két szükséges előismeretet nem árt felidézni.

7. Definíció. A $v_1, v_2, ..., v_n \in \mathbb{R}^m$ vektorok tenzorszorzata, $v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n$, olyan $\mathbb{R}^{m^n}$-beli vektor, melynek az elemeit úgy kapjuk, hogy minden vektornak egy elemét kiválasztjuk, ezeket összeszorozzuk. Az összes így előálló szorzat tetszőleges, de előre rögzített sorrendben egy vektorba írva alkotja a tenzorszorzatot.

5.1.1. Megjegyzés. Ismert tény, hogy két tenzorszorzatként előálló vektor skaláris szorzata a tényezők páronként vett skaláris szorzatainak szorzata, azaz

$$\langle v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n, z_1 \otimes z_2 \otimes \cdots \otimes z_n \rangle = \langle v_1, z_1 \rangle \langle v_2, z_2 \rangle \cdots \langle v_n, z_n \rangle$$

8. Definíció. A $v_1, v_2, ..., v_n \in \mathbb{R}^m$ vektorok Gram-mátrixa az $A \in M_n(C)$ mátrix, ha $a_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$.

5.1.2. Megjegyzés. Egy $A \in M_n(\mathbb{C})$ mátrix akkor és csak akkor pozitív szemidefinit, ha alkalmas m-re léteznek $v_1, v_2, ..., v_n \in \mathbb{C}^m$ vektorok, melyek Gram-mátrixa A. Ugyanis, ha A a $v_1, v_2, ..., v_n \in \mathbb{R}^m$ vektorok Gram-mátrixa, akkor $A = BB^*$, ahol B sorai a $v_1, v_2, ..., v_n \in \mathbb{R}^m$ vektorok és a BB^* alakú mátrixokról tudjuk, hogy pozitív szemidefinitek, ha pedig A pozitív szemidefinit, akkor létezik egy pozitív szemidefinit $\sqrt{A}$ mátrix, melyere $\sqrt{A}^2 = A$ (ugyanis A pozitív szemidefinitsége miatt A felbontható $S^{-1}DS$ szorzatra, ahol S unitér és $D = diag(d_1, d_2, ..., d_n)$, $d_i \geq 0$, így $\sqrt{D} = diag(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, ..., \sqrt{d_n})$ választással $\sqrt{A} = S^{-1}\sqrt{D}S$ teljesíti a a megadott feltételeket) így $\sqrt{A}$ sorait $v_1, v_2, ..., v_n$-nek választva A pont a $v_1, v_2, ..., v_n$ vektorok Gram-mátrixa lesz.

9. Definíció. Legyen S_n az n-ed fokú szimmetrikus csoport. Egy $\sigma \in S_n$-re legyen $l(\sigma)$ a σ-ban előforduló inverziók száma. (σ-ban egy (i, j) pár inverzióban áll, ha $1 \leq i < j \leq n$ és $\sigma(i) > \sigma(j)$.)

6. Jelölés. A következőkben egy négyzetes A mátrix esetén az $A \geq 0$ jelölést arra fogjuk használni, ha az A mátrix (önadjungált és) pozitív szemidefinit, az $A \geq B$ pedig azt jelöli, hogy A, B és $A - B$ is pozitív szemidefinit.

10. Definíció. Legyen A egy $n \times n$-es mátrix, q egy komplex szám, ekkor A q-permanense ($\operatorname{per}_q A$) a következő összeg:

$$\sum_{\sigma \in S_n} q^{l(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

5.1.3. Megjegyzés. $q = -1$-re a már jól ismert determinánst kapjuk ($\operatorname{per}_{-1} A = \det A$), $q = 1$-re a permanenst ($\operatorname{per}_1 A = \operatorname{per} A$), $q = 0$-ra pedig a főátlóbeli elemek szorzatát ($\operatorname{per}_0 A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$), ha a $0^0 = 1$ konvenciót használjuk.

A következőkben bevezetjük a Schur-hatvány mátrix fogalmát. Egy A $n \times n$-es mátrixra és $\sigma \in S_n$-re legyen $d_\sigma(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$ az A σ-hoz tartozó diagonális szorzata. Legyen A egy $n \times n$-es mátrix, ekkor a Schur hatvány mátrixot jelöljük $\Pi(A)$-val és definiáljuk a következőképpen: a sorait és oszlopait indexeljük S_n elemeivel és $\sigma, \tau \in S_n$ esetén a (σ, τ) helyen $d_{\sigma\tau^{-1}}(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)\tau(i)}$ álljon.

Könnyen látható, hogy $\Pi(A)$ principális részmátrixa lesz A n-szer önmagával vett Kronecker-szorzatának ($\otimes^n A = A \otimes A \otimes \cdots \otimes A$), így, ha $A \geq 0$, akkor $\Pi(A) \geq 0$ is teljesül az alábbi lemma miatt.

5.1.4. Lemma. *(1) A Kronecker-szorzás megtartja a pozitív szemidefinitséget, azaz ha $A \in M_n(\mathbb{C})$, $B \in M_k(\mathbb{C})$ $A, B \geq 0$, akkor $A \otimes B \geq 0$.*

(2) A principális részmátrix vétel is megtartja a pozitív szemidefinitséget.

(3) Az Hadamard-szorzás is megtartja a pozitív szemidefinitséget, azaz ha $A \in M_n(\mathbb{C})$, $B \in M_n(\mathbb{C})$ $A, B \geq 0$, akkor $A \circ B \geq 0$.

Bizonyítás.

(1) Mivel $A \geq 0$, ezért léteznek $v_1, v_2, ..., v_n$ vektorok, melyekre $a_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$ és mivel $B \geq 0$, ezért léteznek $w_1, w_2, ..., w_k$ vektorok, melyekre $b_{rs} = \langle w_r, w_s \rangle$. Ekkor

$$(A \otimes B)_{ir,js} = a_{ij} b_{rs} = \langle v_i, v_j \rangle \langle w_r, w_s \rangle = \langle v_i \otimes w_r, v_j \otimes w_s \rangle = \langle u_{ir}, u_{js} \rangle,$$

ahol $u_{ij} = \langle v_i, w_j \rangle$. Tehát az $A \otimes B$ mátrix előáll az $u_{11}, u_{12}, ..., u_{nk}$ vektorok Gram-mátrixaként, így valóban pozitív szemidefinit. $\square$

(2) Legyen $A \in M_n(\mathbb{C})$ és $B \in M_m(\mathbb{C})$ és legyen B principális részmátrixa A-nak, azaz $\exists i_1, i_2, ..., i_{n-m}$, hogy az A mátrix $i_1, ..., i_{n-m}$-edik sorait és oszlopait elhagyva a B mátrixot kapjuk. Ez esetben tetszőleges $v \in \mathbb{C}^m$ vektorra $v^*Bv = w^*Aw$, ahol $w_k = 0$, ha $k \in \{i_1, i_2, ..., i_{n-m}\}$, a többi helyen pedig rendre a v vektor elemei állnak. Így, ha $A \geq 0$, akkor tetszőleges $w \in \mathbb{C}^n$ vektorra $w^*Aw \geq 0$, így tetszőleges $v \in \mathbb{C}^m$ vektorra $v^*Bv \geq 0$, tehát a B mátrix is pozitív szemidefinit. □

(3) Mivel $A \geq 0$, ezért léteznek $v_1, \ldots, v_n$ vektorok, melyek Gram-mátrixa A, és mivel $B \geq 0$, ezért léteznek $w_1, \ldots, w_n$ vektorok, melyek Gram-mátrixa B. Ekkor $(A \circ B)_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle \langle w_i, w_j \rangle$ ez pedig egy korábban szerepelt megjegyzés szerint pont $\langle v_i \otimes w_i, v_j \otimes w_j \rangle$. Így $A \circ B$ pont a $v_i \otimes w_i$ vektorok Gram-mátrixa, tehát valóban pozitív szemidefinit. ■

Legyen q egy komplex szám, definiáljuk az $n! \times n!$ méretű Γ_q mátrixot (nyilván Γ_q függ az n-től, de most nem használjuk ezt a tényt, hanem rögzített n-re definiáljuk): Γ_q sorai és oszlopai legyenek S_n elemeivel indexelve, ha $\sigma, \tau \in S_n$ akkor a (σ, τ) pozícióban $q^{l(\tau\sigma^{-1})}$ álljon.

5.1.5. Állítás. *$\Gamma_q \geq 0$, ha $q \in [-1; 1]$.*

Bizonyítás. Legyen $u, v \in \mathbb{R}^2$, $|u| = |v| = 1$ és $\langle u, v \rangle = q$ (mivel $q \in [-1, 1]$, ilyen u és v feltétlen létezik).

$$w_{ij}^\sigma := \begin{cases} u & \text{ha } \sigma(i) < \sigma(j) \\ v & \text{ha } \sigma(i) > \sigma(j) \end{cases}$$

$$w^\sigma := \bigotimes_{i<j} w_{ij}^\sigma,$$

ekkor

$$\langle w^\sigma, w^\tau \rangle = \prod_{i<j} \langle w_{ij}^\sigma, w_{ij}^\tau \rangle = q^{\#\{i<j | w_{ij}^\sigma \neq w_{ij}^\tau\}} = q^{l(\tau\sigma^{-1})} = \Gamma_{\sigma,\tau}$$

azaz Γ_q előáll adott vektorok Gram-mátrixaként, így valóban pozitív szemidefinit. ■

Legyen $\Pi_q(A) = \Pi(A) \circ \Gamma_q$, ahol $\circ$ a Hadamard-szorzást jelöli. A fentieket használva

$$\mathrm{per}_q A = \frac{1}{n!} \langle \Pi_q(A) 1, 1 \rangle,$$

ahol 1 a csupa egyesből álló oszlopvektor.

5.1.6. Lemma. *(1) Ha X_1, X_2, Y_1, Y_2 olyan mátrixok, hogy X_1Y_1 és X_2Y_2 értelmes, akkor $X_1Y_1 \otimes X_2Y_2 = (X_1 \otimes X_2)(Y_1 \otimes Y_2)$.*

(2) A Kronecker-szorzás és az adjungálás felcserélhető, azaz $A^* \otimes B^* = (A \otimes B)^*$.

Bizonyítás.

(1) Legyen $X_1 = (x_{ij}^{(1)})_{k\times l}, Y_1 = (y_{ij}^{(1)})_{l\times m}, X_2 = (x_{ij}^{(2)})_{n\times p}, Y_2 = (y_{ij}^{(2)})_{p\times g}$ ekkor

$$(X_1Y_1 \otimes X_2Y_2)_{ir,js} = (X_1Y_1)_{ij}(X_2Y_2)_{rs} = \sum_{h=1}^{l} x_{ih}^{(1)} y_{hj}^{(1)} \sum_{h=1}^{p} x_{rh}^{(2)} y_{hs}^{(2)} =$$
$$= \sum_{h,t=1,1}^{l,p} x_{ih}^{(1)} x_{r,t}^{(2)} y_{hj}^{(1)} y_{t,s}^{(2)} = \sum_{h,t=1,1}^{l,p} (X_1 \otimes X_2)_{ir,ht}(Y_1 \otimes Y_2)_{ht,js} =$$
$$= ((X_1 \otimes X_2)(Y_1 \otimes Y_2))_{ir,js}$$

□

(2) $A = (a_{ij}), B = (b_{rs})$, ekkor

$$(A^* \otimes B^*)_{ir,js} = a_{ij}^* b_{rs}^* = \overline{a}_{ji}\overline{b}_{sr} = \overline{(A \otimes B)}_{js,ir} = ((A \otimes B)^*)_{ir,js}.$$

■

5.2. Egyenlőtlenségek

Eljutottunk odáig, hogy a q-permanensekre is meg tudjunk fogalmazni fontos egyenlőtlenségeket, nekünk most a következő tételben szereplő két egyenlőtlenség lesz a fontos, ezeket fogjuk belátni és majd azt is láthatjuk, milyen szép következményei vannak ennek a tételnek.

5.2.1. Tétel. *([1]) Ebben a tételben a q-permanensekre két alapvető egyenlőtlenséget fogunk bizonyítani:*
(1) Szuperadditivitás: Ha $A \geq 0$, $B \geq 0$ és $q \in [-1, 1]$, akkor

$$\operatorname{per}_q(A + B) \geq \operatorname{per}_q(A) + \operatorname{per}_q(B).$$

(2) Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség: Ha $q \in [-1, 1]$, akkor

$$|\operatorname{per}_q(BC^*)|^2 \leq \operatorname{per}_q(CC^*)\operatorname{per}_q(BB^*).$$

Bizonyítás.

(1) Ehhez a bizonyításhoz először egy segédállítást bizonyítunk:

5.2.2. Állítás. $\Pi(A+B) \geq \Pi(A)+\Pi(B)$, *ha* $A, B \geq 0$.

Bizonyítás. $\Pi(A+B)$-ről és $(\Pi(A)+\Pi(B))$-ről tudjuk, hogy pozitív szemidefinitek, így az kell, hogy $\Pi(A+B)-\Pi(A)-\Pi(B)$ is az.
$A, B \geq 0$ ezért legyen $a_{ij} = \langle v_i, v_j\rangle, b_{ij} = \langle w_i, w_j\rangle$ legyen $v_\sigma = \bigotimes_{i=1}^{n} v_{\sigma(i)}$ és $w_\sigma = \bigotimes_{i=1}^{n} w_{\sigma(i)}$ választhatjuk úgy a v_i-ket és w_i-ket, hogy $v_i \perp w_j \forall i, j$-re teljesüljön. Ekkor $a_{ij}+b_{ij} = \langle v_i \oplus w_i, v_j \oplus w_j\rangle$ és

$$(v \oplus w)_\sigma = \bigotimes_{i=1}^{n} (v_{\sigma(i)} \oplus w_{\sigma(i)}) = \sum_{\vee} (v_{\sigma(1)} \vee w_{\sigma(1)}) \otimes \cdots \otimes (v_{\sigma(n)} \vee w_{\sigma(n)}),$$

ahol ez egy 2^n tagú szumma úgy, hogy minden tagban a $\vee$-vel elválasztott vektorok közül az egyiket választom és az így kapható összes kombinációt képzem.

$$(\Pi(A)+\Pi(B))_{\sigma\tau} = \langle v_\sigma, v_\tau\rangle + \langle w_\sigma, w_\tau\rangle$$

$$(\Pi(A+B))_{\sigma\tau} = \langle (v\oplus w)_\sigma, (v \oplus w)_\tau\rangle =$$
$$\left\langle \sum_{\vee} (v_{\sigma(1)} \vee w_{\sigma(1)}) \otimes \cdots \otimes (v_{\sigma(n)} \vee w_{\sigma(n)}), \sum_{\vee} (v_{\tau(1)} \vee w_{\tau(1)}) \otimes \cdots \otimes (v_{\tau(n)} \vee w_{\tau(n)}) \right\rangle =$$
$$\sum_{\vee} \left\langle \sum_{\vee} (v_{\sigma(1)} \vee w_{\sigma(1)}) \otimes \cdots \otimes (v_{\sigma(n)} \vee w_{\sigma(n)}), (v_{\tau(1)} \vee w_{\tau(1)}) \otimes \cdots \otimes (v_{\tau(n)} \vee w_{\tau(n)}) \right\rangle =$$
$$\sum_{\vee} \langle \underline{(v_{\sigma(1)} \vee w_{\sigma(1)}) \otimes \cdots \otimes (v_{\sigma(n)} \vee w_{\sigma(n)})}, \underline{(v_{\tau(1)} \vee w_{\tau(1)}) \otimes \cdots \otimes (v_{\tau(n)} \vee w_{\tau(n)})} \rangle,$$

ahol az aláhúzott vektorok ugyanazt a $v-w$ mintázatot jelölik. Ebből látható, hogy $\Pi(A+B)$ előáll 2^n pozitív szemidefinit mátrix összegeként (a megfelelő $v-w$ mintázatú tenzorszorzatok Gram-mátrixainak összegeként) és ebből két mátrixot hagyunk el, hogy megkapjuk $\Pi(A+B)-\Pi(A)-\Pi(B)$-t, nyilván a maradék (2^n-2) db pozitív szemidefinit mátrix összege is pozitv szemidefinit lesz, így az állítás valóban teljesül. □

Az állításból egyszerűen következik, hogy $\Pi_q(A+B) \geq \Pi_q(A)+\Pi_q(B)$, mert ez csak mindkét oldal Γ_q-val való Hadamard-szorzását jelenti, és a Hadamard-szorzás megtartja a pozitív szemidefinitséget. Ebből viszont következik, hogy

$$0 \leq \langle (\Pi_q(A+B)-\Pi_q(A)-\Pi_q(B))1, 1\rangle =$$
$$= \langle \Pi_q(A+B)1, 1\rangle - \langle \Pi_q(A)1, 1\rangle - \langle \Pi_q(B)1, 1\rangle = \mathrm{per}(A+B) - \mathrm{per}(A) - \mathrm{per}(B),$$

és ebből valóban az állítás adódik. □

(2) $\Gamma_q \geq 0$ miatt Γ_q felírható speciális diád szorzatok összegeként:

$$\Gamma_q = \eta_1\eta_1^* + \cdots + \eta_m\eta_m^*$$

ez az előállítás megkapható például a mátrix AA^* alakú felbontásából. Legyen $\xi_i = \bar{\eta_i}$ $i = 1, 2, \ldots, m$-re.

Ha x egy $n!$ dimenziós vektor, amelynek elemei S_n-nel vannak indexelve, akkor legyen $\widehat{x}$ egy n^n dimenziós vektor, amelynek elemei az $(i_1, ..., i_n)$, $i_j \in \{1, 2, ..., n\}$ számsorozatokkal vannak indexelve, úgy, hogy az $(i_1, ..., i_n)$-nek megfelelő elem $\widehat{x}$ megfelelő eleme, ha $(i_1, ..., i_n)$ az $1, \ldots, n$ számok egy permutációja és nulla különben.

Az eddig megállapítottak alapján

$$n!|\operatorname{per}_q(BC^*)| = |\langle \Pi_q(BC^*)1, 1\rangle| =$$
$$= |\langle (\Pi(BC^*) \circ \Gamma_q)1, 1\rangle| = \left|\sum_{i=1}^{m} \langle (\Pi(BC^*) \circ \eta_i\eta_i^*)1, 1\rangle\right|.$$

A mátrixok szorzását elvégezve és a skalárszorzatokat összehasonlítva ez épp

$$\left|\sum_{i=1}^{m} \langle \Pi(BC^*)\xi_i, \xi_i\rangle\right|.$$

Felhasználva, hogy $\Pi(A)$ principális részmátrixa $\otimes^n A$-nak, azt kapjuk, hogy ez egyenlő

$$\left|\sum_{i=1}^{m} \langle (\otimes^n BC^*)\widehat{\xi_i}, \widehat{\xi_i}\rangle\right|.$$

Az előző lemma és a háromszög-egyenlőtlenség szerint

$$\left|\sum_{i=1}^{m} \langle (\otimes^n BC^*)\widehat{\xi_i}, \widehat{\xi_i}\rangle\right| \leq \sum_{i=1}^{m} \left|\langle \otimes^n C^*\widehat{\xi_i}, \otimes^n B^*\widehat{\xi_i}\rangle\right|;$$

ez a Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij egyenlőtlenség miatt kisebb vagy egyenlő, mint

$$\sum_{i=1}^{m} \langle \otimes^n C^*\widehat{\xi_i}, \otimes^n C^*\widehat{\xi_i}\rangle^{1/2} \langle \otimes^n B^*\widehat{\xi_i}, \otimes^n B^*\widehat{\xi_i}\rangle^{1/2}.$$

Visszaalakítva ez ugyanaz, mint

$$\sum_{i=1}^{m} \langle (\otimes^n CC^*)\widehat{\xi_i}, \widehat{\xi_i}\rangle^{1/2} \langle (\otimes^n BB^*)\widehat{\xi_i}, \widehat{\xi_i}\rangle^{1/2} = \sum_{i=1}^{m} \langle \Pi(CC^*)\xi_i, \xi_i\rangle^{1/2} \langle \Pi(BB^*)\xi_i, \xi_i\rangle^{1/2}$$

és a következő egyenlőtlenség is igaz (nemnegatív tagokat adunk hozzá):

$$\sum_{i=1}^{m} \langle \Pi(CC^*)\xi_i, \xi_i\rangle^{1/2} \langle \Pi(BB^*)\xi_i, \xi_i\rangle^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{m} \langle \Pi(CC^*)\xi_i, \xi_i\rangle \sum_{i=1}^{m} \langle \Pi(BB^*)\xi_i, \xi_i\rangle \right)^{1/2} =$$
$$= n!\{\operatorname{per}_q(CC^*) \operatorname{per}_q(BB^*)\}^{1/2}.$$

Ezzel az állítást beláttuk. ■

7. Jelölés. Tetszőleges $m \geq 2$ egész és q komplex számra

$$[m]_q! := (1+q)(1+q+q^2)\cdots(1+q+q^2+\cdots+q^{m-1})$$

és $[0]_q! = [1]_q! = 1$.

5.2.3. Megjegyzés. Legyen H a csupa egyesből álló mátrix, ekkor

$$\operatorname{per}_q H = \sum_{\pi \in S_n} q^{l(\pi)} = [n]_q!$$

Az első egyenlőség a definícióból értelemszerű, mert mindig egy lesz $q^{l(\pi)}$ együtthatója (csupa egyesből álló szorzat). A második egyenlőség pedig azért teljesül, mert az $(1+q+\cdots+q^{k-1})$ tényező feleljen meg a k. (a k. oszlopból jövő) elemnek a diadikus szorzatból, ha ez az elem i előtte álló elemmel áll inverzióban, akkor a neki megfelelő zárójelből válasszuk a q^i tagot. Így a két oldalon ugyanazt az eredményt kapjuk.

5.2.4. Következmény. *(1) Ha A négyzetes mátrix, akkor* $|\operatorname{per}_q A|^2 \leq \operatorname{per}_q(AA^*)$.

(2) Ha $A = HU$, ahol U unitér és $H \geq 0$, akkor $|\operatorname{per}_q A|^2 \leq \operatorname{per}_q(H^2)$.

(3) Ha A sorösszegei rendre $r_1, r_2, ..., r_n$, akkor

$$\operatorname{per}_q(AA^*) \geq \frac{[n]_q!}{n^n} \prod_{i=1}^{n} |r_i|^2.$$

(4) Ha A pozitív szemidefinit mátrix és $q \in [-1;1]$, akkor

$$\operatorname{per}_q(A) \geq \det(A)$$

Bizonyítás. (1) Könnyen látszik a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenséget alkalmazva A-ra és az egységmátrixra.

(2) Szintén a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenségből adódik, ugyanis $UU^* = I$ és $HH^* = H^2$, hiszen H önadjungált.

(3) Tekintsük a J_n mátrixot, melynek minden eleme $\frac{1}{n}$. Ekkor egyrészt

$$\operatorname{per}(J_n) = \frac{[n]_q!}{n^n}$$

minden sorból $\frac{1}{n}$-et kiemelve, másrészt

$$|\operatorname{per}_q(AJ_n)|^2 \leq \operatorname{per}_q(J_n^2)\operatorname{per}_q(AA^*)$$

a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség szerint (hiszen $J_n^* = J_n$). Az AJ_n mátrix i-edik sorának minden eleme $\frac{r_i}{n}$, így

$$\operatorname{per}_q(AJ_n) = \frac{[n]_q!}{n^n}\prod_{i=1}^{n} r_i,$$

így az eddigiekből a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\left|\frac{[n]_q!}{n^n}\prod_{i=1}^{n} r_i\right|^2 \leq \frac{[n]_q!}{n^n}\operatorname{per}_q(AA^*),$$

ami kis rendezés után valóban a fent állított egyenlőtlenség.

(4) Mivel A pozitív szemidefinit mátrix, létezik egy T alsóháromszög mátrix, melyre $A = TT^*$. Ekkor a determinánsok szorzástétele szerint

$$\det(A) = \det(TT^*) = \det(T)\det(T^*).$$

De T alsóháromszög mátrix, így $\det(T) = \operatorname{per}_q(T)$ és $\det(T^*) = \operatorname{per}_q(T^*)$. Ezért $\det(A) = \operatorname{per}_q(T)\operatorname{per}_q(T^*)$. Valamint az (1) következmény szerint

$$\operatorname{per}_q(T) \leq \sqrt{\operatorname{per}_q(TT^*)} = \sqrt{\operatorname{per}_q(A)}$$

és

$$\operatorname{per}_q(T^*) \leq \sqrt{\operatorname{per}_q(TT^*)} = \sqrt{\operatorname{per}_q(A)},$$

amiből az állítás valóban adódik. ∎

Hivatkozások

[1] R. B. Bapat, A. K. Lal: *Inequalities for the q-Permanent*, Linear algebra and its applications (1994) 397-409

[2] Henryk Minc: *Permanents*, Encyclopedia of mathematics and its applications Volume 6 (1978) 31-36, 38-43, 51-64, 107-109

[3] Henryk Minc: *Upper bounds for permanents of (0,1)-matrices*, Bull. Amer. Math. Soc. 69 (1963) 789-791

[4] Thomas H. Foregger: *An upper bound for the permanent of a fully indecomposable matrix*, Proc. Amer. Math. Soc. 49 (1975) 319-324

[5] Marshall Hall, Jr.: *Distinct representatives of subsets*, Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948) 922-926

[6] H. B. Mann, and H. J. Ryser: *Systems of distinct representatives*, Amer. Math. Monthly 60 (1953) 397-401

[7] Henryk Minc: *A remark on a theorem of M. Hall*, Canad. Math. Bull. 17 (1974) 547-548

[8] W. B. Jurkat and H. J. Ryser: *Matrix factorizations of determinants and permanents*, J. Algebra 3 (1966) 1-27

[9] Henryk Minc: *A lower bound for permanents of (0,1)-matrices*, Proc. Amer. Math. Soc. 18 (1967) 1128-1132

[10] Richard Sinkhorn and Paul Knopp: *Problems involving diagonal products in nonnegative matrices*, Transl. Amer. Math. Soc. 136 (1969) 67-75

[11] Henryk Minc: *(0,1)-matrices with minimal permanents*, Israel J. Math. 15 (1973) 27-30

[12] Henryk Minc: *On lower bounds for permanents of (0,1)-matrices*, Procl. Amer. Math. Soc. 22 (1969) 117-123

[13] A. Schrijver: *A short proof of Minc's conjecture*, J. Combinatorial Theory, Ser. A 25 (1978) 80-83