Síkbarajzolható gráfok reprezentációi, mint az információszervezés egyik eszköze

BSc szakdolgozat

írta: Bodó Emese Viola

témavezető: Nagy Zoltán Lóránt

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Budapest, 2015

Tartalomjegyzék

1. Előszó

Ezen szakdolgozat eredeti címe 'A síkbarajzolható gráfok reprezentációi' volt. Ahogy egyre többet olvastam gráf-reprezentációkhoz kapcsolódó tételekről, nem csak más matematikai területekkel ismerkedtem meg, de számos tudomány-határterületbeli szép alkalmazásával találkoztam. Részben ez adta az ötletet és bátorságot, hogy a szakdolgozatom ne tisztán matematikából álljon, hanem helyet kapjon egy másik olyan téma is, ami közel áll a szívemhez, ez pedig a pedagógia. Évek óta tanítok és mindig igyekszek az anyagot úgy átadni, hogy azzal egy hosszútávú, biztos tudást szerezzenek a tanítványaim. Különböző szemléletű, tudásbázisú és képességű gyerekekkel és felnőttekkel volt dolgom, ami segített abban, hogy megismerjem sokféle tanuló módszerét és gondolkodását. Eddigi tapasztalataim azt igazolják, hogy ehhez a tananyag mély megértése mellett a rendszer átlátása a kulcs. A szakdolgozatom célja egy olyan modell megtalálása, amivel ezt tudományosabb szintre lehetne emelni. A kapcsolatok hangsúlyozása és a lényegi információ kiemelése a feladat, melyet gráfokkal és azok reprezentáltjaival szeretnék immáron egy matematikai struktúraként leírni.

2. Síkbarajzolható gráfok

A síkbarajzolható gráfok az első és egyben kiinduló pontja ennek a dolgozatnak. Tanulmányaim során különféle, látszólag nem gráfelméleti feladat kapcsán is előkerültek. Példa erre az úthálózatok modellezése, különböző adatstruktúrák, illetve a folyamfeladatok fizikában való alkalmazásai, elektromosságtannal való kapcsolata. Számtalan gráftulajdonság meghatározására nem áll rendelkezésünkre olyan algoritmus, ami kellően hatékonyan választ adna, azaz például nincs polinomiális futásidejű algoritmus rá. Sok esetben azonban belátható, hogy síkbarajzolható gráfok esetén a tulajdonság automatikusan következik, valamilyen korlát adható rá, vagy ebben az esetben már van alkalmas algoritmus. Ilyen tulajdonság például a gráfok színezhetősége és az izomorfia eldöntése.

Számomra ezeknek a gráfoknak azon vonása lesz érdekes, hogy alkalmasak olyan struktúrák ábrázolására, melyek leírását egy összefüggő szövegben olvasva nehéz, vagy akár lehetetlen volna átlátni, míg egy egyszerű pontokból és vonalakból álló rajz segítséget ad a megértéshez. Ennek a fejlettebb szintjeit jelentik majd a reprezentációk, amikor is a hagyományostól eltérő módon ábrázoljuk a gráfokat.

Ehhez először a síkbarajzolható gráfokhoz kapcsolódó alapdefiníciókat, állításokat és tételeket kell áttekintenünk. Az alapvető gráfelméleti fogalmakat ismertnek tekintjük.

Alapvető definíciók és tételek

2.1. Definíció (Síkbarajzolható gráf - planar graph)**.** Egy $G = (V, E)$ gráfot síkbarajzolhatónak nevezünk, ha lerajzolható úgy a síkban, hogy élei Jordan görbék és azok csak a végpontjaikban metszik egymást.

2.2. Definíció (Gráf síkbarajzoltja - plane map)**.** Egy gráf síkbarajzoltján a gráf egy fix síkba való beágyazását értjük.

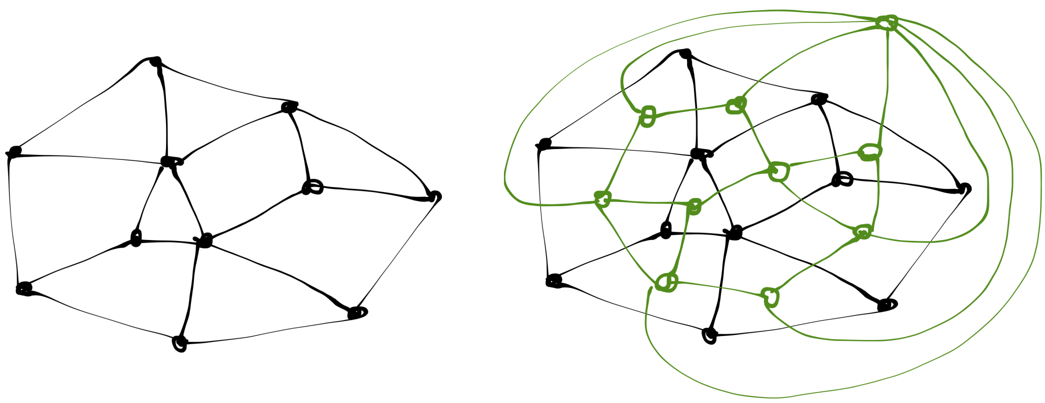
Ezt a kifejezést gyakran használjuk a gráf beágyazásának képére is, azaz a sík azon részhalmazára, amely a csúcsoknak megfelelő pontokat és az éleknek megfelelő Jordan-görbéket tartalmazza.

2.3. Definíció (Tartomány - face)**.** Egy síkgráf beágyazottjának komplementere olyan véges sok tartományt jelent a síkon, melyek ívekkel csatlakoznak egymáshoz és páronként diszjunktak.

2.4. Állítás. Amennyiben 2-összefüggő gráfokról beszélünk, a tartományokat azonosíthatjuk lapokkal. Ez a megfelelő poliéderes megfeleltetés következménye.

Egy G=(V,E) síkgráf pontjainak, éleinek és tartományainak számát általában n, m és f jelöli.

2.5. Definíció (Duális - dual)**.** Minden síkbarajzolt $G = (V, E)$ gráfnak létezik egy $G^* = (V^*, E^*)$ duális gráfja. Ennek pontjai az eredeti G gráf lapjai, és amennyiben két lap k élen csatlakozik egymáshoz, G^*-ban k él köti össze őket. Tehát minden E-beli élhez egy E^*-beli él tartozik, így $|E^*| = |E|$.



G síkbarajzolt gráf és G a duálisával

2.6. Definíció (Háromszögelés - triangulation)**.** Egy gráf síkbarajzoltját háromszögelésnek nevezünk, ha minden lapját pontosan 3 él határol. Megjegyzendő, hogy egy háromszögelésben lehetnek párhuzamos élek, de ezek közül semelyik kettő nem határolhatja ugyanazt a lapot.

Minden egyszerű síkbarajzolható gráfba bevehetünk plusz éleket úgy, hogy minden lapja háromszög legyen, de közben egyszerű maradjon a gráf.

2.7. Tétel (Euler formula)**.** [3] Minden összefüggő síkbarajzolt gráfra teljesül, hogy $n - m + f = 2$, ahol n a pontok, m az élek, f pedig a lapok számát jelöli.

A matematikai állításoknak és tételeknek rend szerint nem csak egy bizonyítása van. Ennek különböző okai lehetnek, akár egy ténylegesen egyszerűbb magyarázat megtalálása, akár egy teljesen más eszköztár használata.
Erdős Pál egy 1993-as előadásán a következőképpen fogalmazott: "Van ez a viccem, hogy Istennek van egy végtelen... egy transzfinit könyve, amiben benn van minden tétel és a legszebb bizonyítások. ... Szoktam mondani, hogy istenben nem is kell hinni mindenkinek, de a könyvben kell hinni. És még azt is föltehetjük, hogy a könyv az tulajdonképpen maga isten."
Az Euler formula bizonyítások közül a legszebbnek a lapokra vonatkozó indukciós bizonyítást találtam. Ez ugyanis alapvető eszközöket használ és a matematikai bizonyítások legtöbbjéhez képest kifejezetten rövid.
Bizonyítás: Legyen G-nek egyetlen lapja. Ekkor aciklikus, mivel ha lenne benne kör, akkor már legalább két lapja lenne. G összefüggő is, ami feltétele a tételnek, ekkor G egy fa, amire teljesül, hogy $m = n - 1$. Ekkor természetesen teljesül a tétel.

$$n - (n - 1) + 1 = 2$$

Tegyük fel, hogy $k-1$ ($k \geq 2$) lap esetén a tétel teljesül. Legyen G olyan összefüggő síkbarajzolt gráf, melynek k darab lapja van. Ekkor vegyünk egy e élt, ami határol egy lapot, és ezt vegyük ki a gráfból. Jelöljük ezt a gráfot $G-e$-vel. Ezzel az a két lap, amit e választott el egymástól, egyesült. Így $G-e$-nek éppen $k-1$ lapja lesz és összefüggő síkbarajzolt gráf marad. Ekkor a feltevés szerint érvényes a tétel, azaz:

$$n(G-e) - m(G-e) + f(G-e) = 2.$$

Használva az alábbi összefüggéseket

$$n(G-e) = n(G), m(G-e) = m(G) - 1, f(G-e) = f(G) - 1,$$

pont az Euler formulát kapjuk:

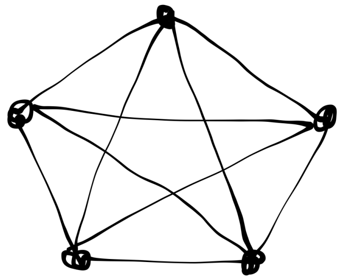
$$n(G) - m(G) + f(G) = 2. \blacksquare$$

2.8. Tétel (Tutte)**.** [10] Ha $G = (V, E)$ olyan 3-összefüggő egyszerű gráf, amely nem tartalmaz felosztott K_5-t és felosztott $K_{3,3}$-at, akkor beágyazható a síkba úgy, hogy minden élt egyenes szakasz reprezentál, két élnek csak a végpontja lehet közös, és a tartományok konvexek.

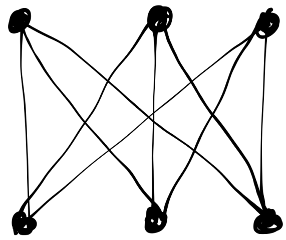
Bizonyítás: Amennyiben $|V| = 4$, úgy a gráf a teljes négyes, amelynek létezik a kívánt beágyazása. Tegyük most fel, hogy $|V| \geq 5$.

2.9. *Lemma.* Legyen $G = (V, E)$ egy legalább öt pontú 3-összefüggő irányítatlan gráf. Ekkor G-nek létezik olyan éle, amelyet összehúzva 3-összefüggő gráfot kapunk.

A fenti lemma szerint létezik olyan $x'x''$ él, amelyet összehúzva egy G_1 3-összefüggő gráfot kapunk, amely a lemma szerint nem tartalmaz felosztott K_5-t és $K_{3,3}$-at. Az összehúzott pontot jelölje x. Indukció folytán G_1-nek létezik a kívánt beágyazása. Mivel $G_1 - x$ 2-összefüggő, így $G_1 - x$ minden tartományát a gráf egy köre határolja. Ezek közül jelölje K azon (esetleg végtelen) tartomány határát, amelyik az x-et belsejében tartalmazza. Állítjuk, hogy az x' és x'' egyikének van olyan (a másiktól különböző) szomszédja, amely nem szomszédja a másiknak. Ha ugyanis nem ez volna a helyzet, akkor a 3-összefüggőség miatt léteznek u, v, z pontok melyek mind az x'-nek mind az x''-nek szomszédai. Ekkor viszont az x', x'', u, v, z pontok a K kör segítségével egy felosztott teljes ötöst határoznak meg. Legyen tehát u mondjuk az x'-nek egy olyan szomszédja, amely nem szomszédos x''-vel. Az u-tól indulva a K körön haladva mindkét irányban lesz egy első pont, amely szomszédja x''-nek. Jelöljük ezt a két pontot s-sel illetve t-vel. Mivel x'' legalább harmadfokú, s és t különböző. Azt állítjuk, hogy x' valamennyi szomszédja a körnek ugyanazon az s és t közötti ívén van, mint az u pont, mert ha mondjuk a v pont az átellenes íven volna, akkor az x', x'', u, v, s, t a körrel egy felosztott $K_{3,3}$-at határoznának meg. Emiatt az x pontot szét lehet "nyitni" úgy, hogy a G gráf kívánt síkba rajzolását kapjuk. $\blacksquare$



K_5



$K_{3,3}$

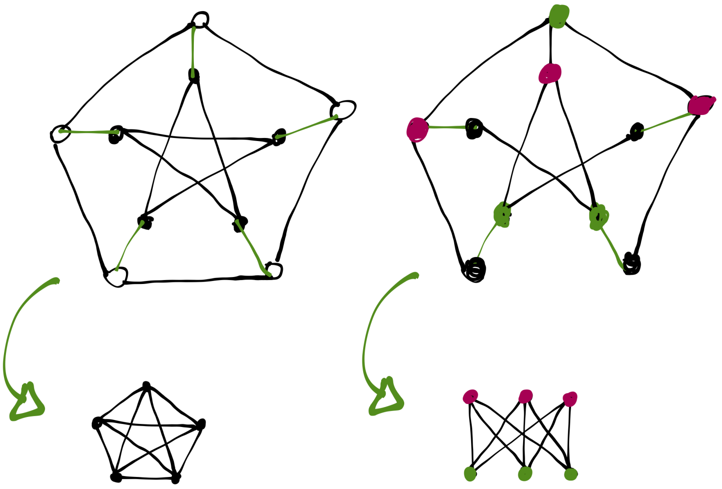
2.10. Tétel (Kuratowski). [10] Egy gráf akkor és csak akkor síkbarajzolható, ha nem tartalmaz sem topologikus K_5-öt, sem topologikus $K_{3,3}$-mat.

Bizonyítás: Az Euler formula szerint $f + n = m + 2$, ahol f a lapok száma, n a csúcsoké, m pedig az éleké. A teljes ötös nem síkbarajzolható, mert ha indirekt az lenne, akkor $f = 10 + 2 - 5 = 7$. Mivel pedig minden tartományt legalább három él határol, az élek száma legalább $7 \cdot 3/2$, és így legalább 11 lenne, holott csak 10. A $K_{3,3}$ sem síkbarajzolható, mert különben $f = 9 + 2 - 6 = 5$ lenne. Mivel pedig minden kör legalább négyélű, így az élek száma legalább $4f/2 = 10$ volna, holott csak 9. Következik, hogy a felosztott K_5 vagy $K_{3,3}$ sem síkbarajzolható, és így egy ilyeneket tartalmazó gráf sem az.
A megfordításhoz tegyük fel indirekt, hogy G egy ilyen részgráfokat nem tartalmazó gráf, amely nem rajzolható síkba. Feltehető, hogy G minimális csúcsszámra, azon belül élszámra nézve. Nyilván feltehető, hogy G összefüggő, hiszen ha nem az, akkor a komponensei már síkba rajzolhatók, és így G maga is az volna. Hasonlóképp látható, hogy G-ben nincsenek hurkok és párhuzamos élek, azaz G egyszerű.
Állítjuk, hogy G 2-összefüggő. Ha ugyanis t elvágó pont volna, akkor létezne V-nek két X, Y részhalmaza, melyekre $t \in X \cap Y$, $V = X \cup Y, |X| \geq 2, |Y| \geq 2$, nincs él $X - Y$ és $Y - X$ között, továbbá az X illetve az Y által feszített G_1 és G_2 részgráfok összefüggőek. Ekkor mind G_1, mind G_2 síkbarajzolható, amelyeket t-nél történő összeillesztésével G egy síkbarajzolását kapnánk.
Most belátjuk, hogy G 3-összefüggő. Mivel a teljes négyes síkbarajzolható, ezért a legfeljebb négypontú gráfok is azok, így $|V| \geq 5$. Tegyük fel indirekt, hogy x, y elvágja a gráfot. Ekkor létezik V -nek két X, Y részhalmaza, melyekre $X \cap Y = \{x, y\}$, $V = X \cup Y$, $|X| \geq 3$, $|Y| \geq 3$, nincs él $X - Y$ és $Y - X$ között, továbbá X illetve az Y által feszített G_1 és G_2 részgráfok összefüggőek. Legyen G_X az X által feszített gráf plusz az $e = xy$ él, míg G_Y az Y által feszített gráf plusz e. Állítjuk, hogy G_X nem tartalmaz sem K_5, sem $K_{3,3}$ részgráfot. Valóban, ha tartalmazna, akkor az szükségképpen használná az új e élt, hiszen G-ben nincs a fenti részgráfok egyike sem. Ugyanakkor G_Y-ban létezik út x és y között, és akkor az e élt ezen útra cserélve egy G-beli K_5 vagy $K_{3,3}$ részgráfot kapnánk. Analóg kapjuk, hogy G_Y sem tartalmaz ilyen részgráfokat. Indukcióval adódik, hogy mind G_X, mind G_Y síkbarajzolható. Ráadásul mindkettőnek létezik olyan síkbarajzolása is, amelyben a szóbanforgó e él a végtelen lap határán van. (Ugyanis egy síkgráf a gömbre is felrajzolható, és akkor az e által határolt egyik T lap egy belső pontjából a gömböt egy tőle diszjunkt síkra vetítve a kívánt síkbarajzolást kapjuk.) emiatt a két síkbarajzolás összeilleszthető e mentén úgy, hogy a $G + e$ egy síkbarajzolását kapjuk.
Végül 3-összefüggő gráfokra a tétel következik az előző tételből. ■

A Kuratowski tételt követően néhány évvel Wagner is publikált egy hasonló feltételt adó tételt a síkbarajzolhatóságra. Ehhez a következő definíció szükséges.

2.11. Definíció (Minor)**.** Azt mondjuk, hogy egy G gráf minorként tartalmaz egy H gráfot (vagy hogy a H G-nek minorja), ha G-ből kiindulva élek összehúzásával és elhagyásával elő lehet állítani egy H-val izomorf gráfot.

2.12. Tétel (Wagner)**.** [10] Egy gráf akkor és csak akkor síkbarajzolható, ha nem tartalmaz sem K_5, sem $K_{3,3}$ minort.



K_5 $K_{3,3}$

A két tétel ekvivalens, holott elsőre Kuratowski állítása erősebbnek tűnhet, ugyanis a felosztott K_5 és $K_{3,3}$ is könnyedén konvertálható minorrá élek összehúzásával. Ezzel szemben a minor nem mindig alakítható át a megfelelő felosztottá. A megoldást az adja, hogy a K_5 és $K_{3,3}$ esetében belátható, hogy ha valamelyiket minorként tartalmazza a gráf, akkor valamelyik felosztottját is. Ebből pedig következik, hogy a két állítás egyenértékű.
A Kuratowski és Wagner tételek bizonyításából a következő eredmény adódik.

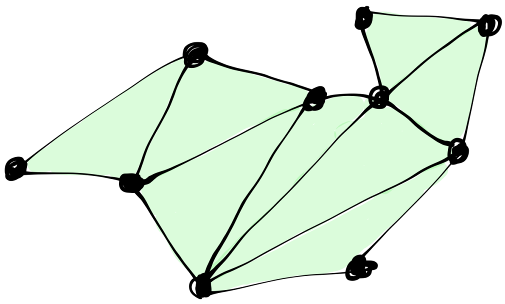
2.13. Tétel (Fáry-Wagner)**.** Minden síkgráf lerajzolható a síkra metszés nélkül úgy, hogy minden éle egyenes szakasz.

A tételre David R. Wood bizonyítása a következő cikkben jelent meg: [19].

Outerplanar gráfok

A síkbarajzolható gráfoknak egy szűkebb csoportját alkotják az outerplanar gráfok. Ezek bemutatása következik.

2.14. Definíció (Outerplanar gráf - outerplanar graph)**.** Egy síkbarajzolható gráfot outerplanarnak nevezünk, ha lerajzolható úgy a síkba, hogy minden csúcsa ugyanazon a lapon van.

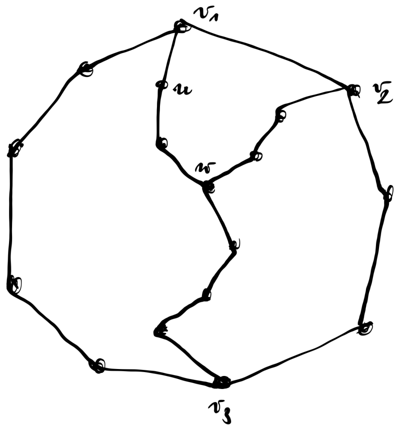


Outerplanar gráf

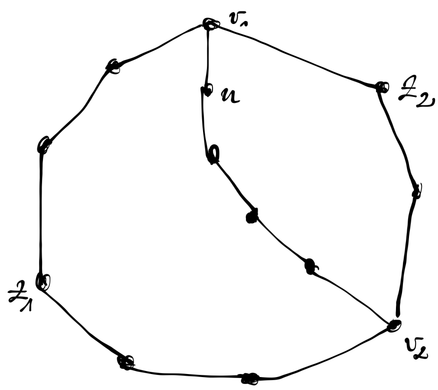
Az outerplanar gráfok is reprezentálhatóak kizárt minorokkal es kizárt topologikus részgráfokkal, mint a síkgráfok.

2.15. Tétel (Chartrand and Harary)**.** [5] Egy G gráf akkor és csak akkor outerplanar, ha nem tartalmaz sem topologikus $K_{2,3}$-at, sem topologikus K_4-et.

Bizonyítás: A tétel szükséges és elégséges feltételt is ad, tehát mindkét irányt be kell látni. A szükségesség magától értetődő, hiszen a K_4 és $K_{2,3}$ nem outerplanar gráfok. Valóban, ha outerplanar lenne, akkor egy csúcsot hozzájuk adva a külső tartományban, azt minden korábbi csúccsal összekötve síkgráfot kapnánk, a de az nem lehet, mert a K_5 és $K_{3,3}$ nem azok.
A másik irányt, miszerint ez elégséges feltétel is, indirekt bizonyítjuk, azaz feltesszük, hogy G nem tartalmaz sem topologikus $K_{2,3}$-at, sem topologikus K_4-et, mégsem outerplanar.
Ha a G gráf nem síkbarajzolható, akkor Kuratowski tétele alapján biztosan tartalmaz vagy egy K_5-öt vagy egy $K_{3,3}$-at, következésképp tartalmaznia kell egy K_4-et vagy egy $K_{2,3}$-at is. Ezért G síkbarajzolható kell hogy legyen.
Ha G nem outerplanar, akkor tartalmaznia kell egy olyan B kétszeresen összefüggő maximális részgráfot, ami szintén nem outerplanar és legalább két csúcsa van. Vegyük azt a síkbarajzoltját B-nek, ahol a lehető legtöbb csúcs kerül a külső körre (a külső lapot határoló körre) Z. Z nem a Hamilton kör, hiszen akkor outerplanar lenne. Ekkor van legalább egy u pont a Z belsejében. Legyen u olyan, hogy egy Z-n lévő v_1 csúccsal szomszédos. Mivel B kétszeresen összefüggő, $deg(u) \geq 2$. Ezért van egy P út valamely v_2 csúcsba, mely szintén a Z-n van. Ekkor két esetet kell megvizsgálnunk.
Első eset: ha v_1 és v_2 egymást követő két csúcs a Z-n.
Ebben az esetben kell hogy legyen egy v_2-től különböző w csúcs a P-n, aminek a foka legalább 3, különben az u csúcs, uv_1 él, P út bevételével és a v_1v_2 él kihagyásával egy hosszabb kört találtunk volna, mint Z. Ekkor van egy út w-ből egy v_3 Z-n fekvő pontba. (Lásd ábra) A Z kör és a w pontból induló 3 út által meghatározott részgráf topologikus K_4.
Második eset: ha v_1 és v_2 nem egymást követő csúcsok Z-n.
A Z kör és az u-n átmenő út v_1-ből v_2-be egy olyan részgráfot alkotnak, amely topologikus $K_{2,3}$. (Lásd ábra) ■



Topologikus K_4



Topologikus $K_{2,3}$

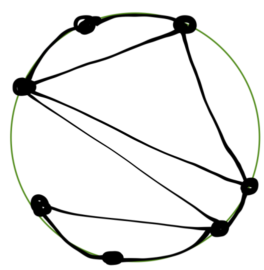
A síkbarajzolható gráfokhoz hasonlóan itt is igaz a Wagner tételbeli megközelítés, miszerint egy G gráf akkor és csak akkor outerplanar, ha nem tartalmaz sem K_4, sem $K_{2,3}$ minort.

Egy másik szükséges és elégséges feltételt ad a következő tétel.

2.16. Tétel. Egy G gráf akkor és csak akkor outerplanar, ha a duálisának, G^*-nak létezik olyan v csúcsa, melyre teljesül, hogy a $G^* - v$ gráf nem tartalmaz kört.

A tétel bizonyítása megtalálható a Maciej M. Syslo Characterizations of Outerplanar graphs című cikkében. [16]

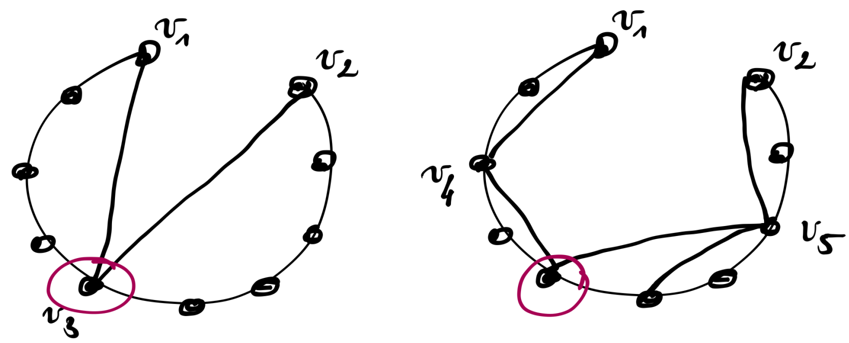
A következő állítás az outerplanar gráfok azon tulajdonságát fogalmazza meg formálisan, hogy minden outerplanar gráf reprezentálható úgy síkgráfként, hogy egy körre (egységkörre) rajzoljuk a pontjait, ezek közül néhányat egyenes vonallal összekötünk, persze metszésmentesen, majd a kör ívei közül néhányat elhagyunk.



Körre rajzolt outerplanar gráf

2.17. Állítás. Egy outerplanar gráf akkor és csak akkor kétszeresen összefüggő, ha a külső lapot határoló élek és pontok egyetlen egyszerű kört alkotnak ismétlődő csúcsok nélkül.

Bizonyítás: Az állítás egyik iránya könnyen belátható. Ha a külső lapot határoló élek és pontok egyetlen egyszerű kört alkotnak ismétlődő csúcsok nélkül és a gráf outerplanar, akkor a kétszeres összefüggőség garantált, mivel bármely élt kivéve a gráfból az összefüggő marad.
A másik irány, miszerint a kétszeres összefüggőségből következik, hogy egy outerplanar gráfnak a külső lapot határoló élei és pontjai egyetlen egyszerű kört alkotnak ismétlődő csúcsok nélkül, indirekt bizonyítható. Megmutatjuk, hogy ha nincs ez a bizonyos külső kör, akkor nem is lehet az outerplanar gráf kétszeresen összefüggő. Indirekt tegyük fel, hogy G kétszeresen összefüggő outerplanar gráf, de a külső lapot határoló élei és pontjai nem alkotnak kört.
Lerajzoljuk le G-t úgy, hogy egy kör (most geometriai értelemben) mentén helyezkedjenek el a pontjai, de van legalább kettő, v_1 és v_2 pont, melyek egymás mellett helyezkednek el, és nincsenek összekötve. Mivel a kétszeres összefüggőség adott, mind v_1-ből, mind v_2-ből indul még ki legalább egy él, ami nem a kör íve. Ekkor két eset lehetséges.
Első eset: v_1 és v_2 is a közös v_3 csúccsal van összekötve, ám itt rögtön sérül a 2-összefüggőség, hiszen v_3-at elhagyva szétesik a gráf.
Második eset: v_1 össze van kötve egy v_4 csúccsal és v_2 egy v_5-tel. Ilyenből lehet több is. Vegyük azokat, melyek a legközelebb vannak egymáshoz az íven. Ekkor v_4-ből és v_5-ből is csak olyan pontokba mehet él, ami a kettőjük közti íven van. Így ismét tudunk találni egy olyan köztes csúcsot, mely elhagyásával a gráf nem lesz többé összefüggő. ■



Elvágó pont az első és a második esetben

A következő állítás egyszerű, ám annál érdekesebb következménye a fent megfogalmazottaknak.

2.18. Állítás. Egy outerplanar gráfban akkor és csak akkor van Hamilton-kör, ha kétszeresen összefüggő. Ekkor a Hamilton-kör egyértelmű és éppen a külső lapot határoló kör az.

Ennél általánosabban azt is állíthatjuk, hogy a leghosszabb kör hossza egy outerplanar gráfban megegyezik a legnagyobb kétszeresen összefüggő komponens pontjainak számával. Ebből kifolyólag a Hamilton-kör és leghosszabb kör keresési feladat lineáris időben megoldható ebben a gráfcsaládban, míg tetszőleges gráfok esetén, sőt síkbarajzolható gráfok esetén is ez NP-teljes probléma.

3. Síkbarajzolható gráfok reprezentációi

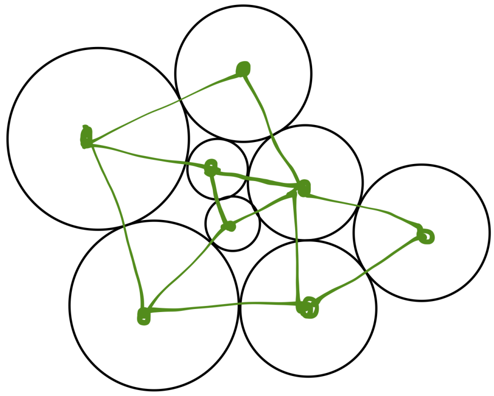
Egy gráfot lerajzolhatunk a csúcsainak megfelelő pontokkal és ezeket összekötő vonalakkal, melyek természetesen az éleknek felelnek meg. Egy gráf ilyen módon való geometriai ábrázolása a legegyszerűbb és egyben a legnépszerűbb is. Ugyanakkor felmerül a kérdés, hogy lehetne-e "jobban" ábrázolni a gráfot.
Sok múlik azon, hogy mit várunk a gráf geometriai képétől. Ha bizonyos gráftulajdonságot szeretnénk leolvasni vagy valamilyen gráfalgoritmust futtatni, akkor előfordulhat, hogy a hagyományos reprezentáció mégsem a legalkalmasabb. Csupán a gráf szerkezetének átlátása is lehet a célunk, ám ekkor sem biztos, hogy ha a pontos-vonalas ábrázolást választjuk, akkor fogjuk a gráf számunkra érdekes tulajdonságát megfelelően látni. Mindemellett a hagyományos ábrázolásmód sem egyértelmű. A későbbiekben bemutatásra kerül egy olyan módszer is, amely éppen azt a kérdést fogja megválaszolni, hogyan érdemes elhelyezni a gráf csúcsait a síkon.
Ha alkalmazás-centrikusan tekintünk a problémára, akkor jelentős szerepet játszik az is, hogy maga a gráf milyen jellegű információt hivatott ábrázolni. Például lehetnek a csúcsok városok és az élek a közöttük haladó utak, vagy egy közösségi oldal felhasználóit feleltessük meg a gráf pontjainak és a köztük lévő ismeretségek legyenek az élek. Ezekben az esetekben tökéletesen megelégszünk a pontok-vonalak segítségével kapott ábrázolással. Azonban ezeknél komplexebb rendszerek is leírhatóak gráfokkal, melyek reprezentálására már új eszközöket fog igényelni.
Célom egy olyan reprezentáció megtalálása, mellyel azt a gráfot lehetne a legszemléletesebben ábrázolni, ami egy adott iskolai tananyag főbb pontjait köti össze a köztük húzódó kapcsolatok mentén. Az egyes információ darabkákat szeretném a gráf képébe be is írni, ezek lehetnek tételek, definíciók vagy bármi más kulcsmegjegyzés is. A kapcsolódó pontok legyenek a legközelebb egymáshoz vagy akár érintsék, metsszék egymást. Így a tananyag főbb összefüggéseit is és magukat a kulcsinformációkat is ábrázolni tudnánk.
Ebben a fejezetben összegyűjtöttem néhány gráfreprezentációt, melyek különböző eszközöket használnak, különböző feltételeket szabnak és nem elhanyagolható módon különböző gráfok ábrázolására alkalmasak.

Mielőtt konkrét reprezentációkat vizsgálnánk meg, érdemes bevezetni egy jelölést. Ezt vektor-címkézésnek nevezzük. Egy $G = (V, E)$ gráf d-dimenziós vektor-címkézése egy térbeágyazása G-nek, $x : V \to \mathbb{R}^d$. Továbbá használjuk még az $x(i)$-t rövidítő $(x_i : i \in V)$ jelölést is. Ez mutatja az egyes gráfcsúcsok helyét a d-dimenziós térben. Ezek alapján az $i \to x_i$ leképezésre gondolhatunk úgy, mint a gráf egy lerajzolása. Ekkor természetesen a megfelelő pontok egyenes szakaszokkal vannak összekötve, melyek az éleket hivatottak reprezentálni. A későbbiekben ezen megfeleltetéssel fogunk egyes reprezentációkat definiálni. Esetünkben gráfok síkbeli reprezentációt szeretnénk ilyen módon leírni, tehát $d = 2$, azaz a gráf csúcsainak síkbeli koordinátáit fogjuk érteni a nekik megfelelő vektorok koordinátáin.

Körpakolás

3.1. Definíció (Körpakolás - circle packing)**.** Körpakolásnak nevezzük körök egy összefüggő halmazát, ahol a körök belseje egymástól diszjunkt. Körök összefüggésén azok érintkezését értjük.

3.2. Definíció (Érintő gráf - tangency graph)**.** Egy körpakolásnak az érintő gráfja az a gráf, melynek pontjai egy-egy körhöz tartoznak, és az élei pedig azokhoz a körpárokhoz, amelyek érintik egymást.



Érintő gráf

Ha a körpakolás síkon, vagy ezzel ekvivalens módon a gömbön van, akkor ennek az érintő gráfját érme gráfnak - coin graph hívjuk. Az érme gráfok mindig egyszerűek, összefüggőek és síkbarajzolhatók. Ezen állítás másik irányát az alábbi körpakolásról szóló tétel/tételek biztosítják.

3.3. Tétel (Koebe)**.** [2] Legyen G háromszorosan összefüggő, síkbarajzolható gráf. Ekkor a gráf pontjai megfeleltethetőek köröknek, melyek belseje diszjunkt, és a gráf két pontja pontosan akkor élszomszédos, ha az őket reprezentáló körök érintkeznek.

A tételt Koebe után Andrejev és Thurston általánosították.

3.4. Tétel (Koebe-Andrejev-Thurston)**.** [13] Ha a G véges gráf síkbarajzoltja háromszögelés, akkor egyértelműen létezik egy körpakolás, aminek éppen G az érintő gráfja. Az egyértelműség Möbius transzformációk és tükrözések erejéig értendő.

A tétel bizonyítása Lovász László és Vesztergombi Katalin Geometric representations of graphs című könyvében megtalálható. Sokszor az ilyen és ehhez hasonló tételek esetében a bizonyítás a létezést és egyértelműséget csak "elméleti" szempontból vezeti le. Ezzel szemben a Koebe-Andrejev-Thurston tétel bizonyítása egy eljárást ad a reprezentáció előállítására.

3.5. Definíció (Érintő rendszer - contact system)**.** Az érintő rendszer olyan görbék (nyílt vagy zárt) halmaza a síkon, melyek közül semelyik kettő nem keresztezi, legfeljebb érintheti egymást. A rendszerben érintési pontnak nevezzük a görbék metszéspontját.

3.6. Definíció (Érintő reprezentáció - contact representation)**.** Egy $G = (V, E)$ gráf érintő reprezentációjának nevezzük azt a $C = \{c(v) : v \in V\}$ érintő rendszert, ahol két görbe pontosan akkor érinti egymást, ha a hozzájuk tartozó csúcsok élszomszédosak.

3.7. Definíció (Primál-duál érintő-reprezentáció - primal-dual contact representation)**.** Jelölje a $G = (V, E)$ gráf duálisát $G^* = (V^*, E^*)$. A primál-duál érintő-reprezentáció $(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ a G gráf azon reprezentációja, ahol a $\mathcal{V} = \{c(v) : v \in V\}$ és a $\mathcal{F} = \{c(f) : f \in V^*\}$ két külön reprezentáció, $\mathcal{V}$ a G-hez, $\mathcal{F}$ pedig a G^*-hoz tartozó. Ekkor minden uv élre, ami az f és g lapot határolja, a $c(u)$ és $c(v)$ ugyanabban a pontban metszik egymást, mint $c(f)$ és $c(g)$.

Andrejev belátta, hogy a fent definiált primál-duál érintő-reprezentáció is elkészíthető körökkel. Ezt fogalmazza meg az alábbi tétel.

3.8. Tétel (Andrejev)**.** [11] Minden háromszorosan összefüggő síkbarajzolható gráfnak létezik primál-duál reprezentációja érintkező körökkel.

Érintkező háromszöges reprezentáció

Koebe körökkel való reprezentációja egyben azt is jelenti, hogy érintkező sokszögekkel is reprezentálható minden síkbarajzolható gráf. Ez következménye a fent leírt tételeknek, ám ennél többet is állíthatunk. Fraysseix látta be, hogy a síkbarajzolható gráfok érintkező háromszögekkel is ábrázolhatóak. A következő néhány tétel és állítás ezt fogalmazza meg.

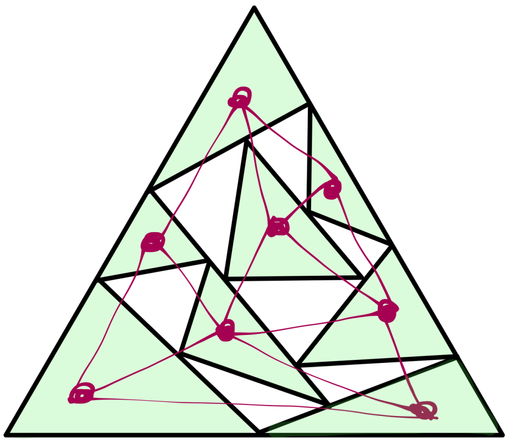
3.9. Tétel (Fraysseix)**.** [11] Minden síkbarajzolható gráf reprezentálható érintkező háromszögekkel.

Ennél többet is mondhatunk, ugyanis ahogy a körös reprezentációnál, itt is beszélhetünk primál-duál reprezentációról.

3.10. Definíció (Fedés - tiling)**.** Egy G gráf primál-duál háromszögekkel történő érintő-reprezentációját fedésnek nevezzük, ha a pontokhoz tartozó háromszögek és a zárt lapokhoz tartozó háromszögek egy háromszög fedését írják le.

Szigorú fedésről beszélünk, ha minden érintkezési pont pontosan három csúcshoz vagy laphoz tartozó háromszög pontja.

3.11. Tétel (Fraysseix)**.** [11] Minden háromszorosan összefüggő G síkbarajzolható gráfnak létezik olyan primál-duál érintő-reprezentációja háromszögekkel, ami szigorú fedés.



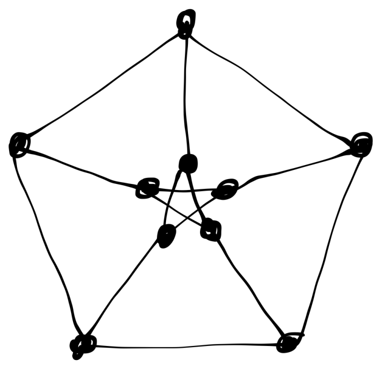
Primál-duál érintő-reprezentáció háromszögekkel

Rubber band reprezentáció

A síkbarajzolható gráfok rubber band, más néven gumiszalagos reprezentálásával Tutte foglalkozott. Azt vizsgálta, hogyan rajzolható le egy 3-szorosan összefüggő síkbarajzolható gráf egyenes élekkel és konvex lapokkal.

Legyen $G = (V, E)$ egy összefüggő gráf és vegyük ekkor a $\emptyset \neq S \subseteq V$ részhalmazt. Rögzítsük d-t, ami annak a térnek a dimenziója, ahol a gráfot ábrázolni szeretnénk és egy $x^0 : S \to \mathbb{R}^d$ leképezést. Ezt egészítjük ki egy $x : V \to \mathbb{R}^d$ reprezentációvá.
Mielőtt pontosan definiálnánk a rubber band reprezentációt, nézzünk egy ugyan nem formális, de annál szemléletesebb leírást rá. Az S halmaz pontjait rögzítjük az x^0 szerint, a többi pontot pedig úgy helyezzük el, mintha a pontokat összekötő élek rugók lennének, és ezek nyugalmi helyzete állt volna be. Mint ahogyan azt Hooke törvényéből tudjuk, az erő arányos a rugók megnyúlásával, az energia pedig annak négyzetével. A rugók éppen úgy fognak beállni, hogy ez az energia minimális legyen. Később látni fogjuk, hogy ez az elhelyezkedés egyértelmű lesz. Ezt hívjuk tehát a G gráf x^0-t kiegészítő rubber band reprezentációjának. Az S halmaz pontjait rögzített, míg a $V \setminus S$ pontjait szabad pontoknak nevezzük.
Ennek a pontos leírása a következő:

3.12. Definíció (rubber band reprezentáció - Rubber band representation)**.** Jelölje $x_i = (x_{i1}, ..., x_{id})^T \in \mathbb{R}^d$ az $i \in V$ pont helyvektorát. Ekkor $x_i = x_i^0$ minden $x_i \in S$ pontra. Ekkor definiálhatjuk a reprezentáció energiáját úgy, mint $\epsilon(x) = \sum_{ij \in E} |x_i - x_j|^2 = \sum_{ij \in E} \sum_{k=1}^{d} (x_{ik} - x_{jk})^2$. A minimális energiájú reprezentációt keressük, ahol az a peremfeltétel, hogy $x_i = x_i^0$ minden $x_i \in S$ pontra.



A Petersen-gráf rubber band reprezentációja

3.13. *Lemma.* Az $\epsilon(x)$ függvény szigorúan konvex.

Bizonyítás: Az $\epsilon(x)$ függvényt úgy definiáltuk, mint $\epsilon(x) = \sum_{ij \in E} |x_i - x_j|^2 = \sum_{ij \in E} \sum_{k=1}^{d} (x_{ik} - x_{jk})^2$. Ebben az $(x_{ik} - x_{jk})^2$ rész nyilván konvex. Konvexek összege pedig szintén konvex marad.
A szigorú konvexitás pedig úgy látható be, hogy indirekt feltesszük, hogy az $\epsilon((x + y)/2) = 1/2(\epsilon(x) + \epsilon(y))$, $x \neq y : V \to \mathbb{R}^d$. Majd az $\epsilon(x)$ definíciója alapján arra jutunk, hogy ez csak akkor lehet, ha $x = y$, ami pedig ellentmondás. ∎

Mindezt azért fontos megjegyeznünk, mert így valóban értelmes ezen függvény minimalizálásáról beszélnünk.

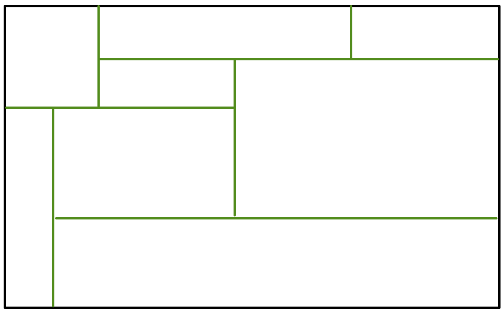
Legyen $G = (V, E)$ 3-szorosan összefüggő síkbarajzolható gráf és p_0 egy tetszőleges lapja. Továbbá legyen C_0 a p_0-t határoló kör. Ekkor rögzítsük C_0 pontjait (ez lesz S a fenti terminológiában) egy konvex sokszög csúcsaiként a síkon úgy, hogy a pontok sorrendje ne változzon. Így megkapjuk az $x^0 : S \to \mathbb{R}^2$ megfeleltetést. Ezzel megadható az $x : i \to v_i$ beágyazás is, ami éppen a rubber band reprezentációja G-nek, ami ezt az x^0-t egészíti ki. A korábbiakból tudjuk, hogy azon pontok, amik nincsenek a C_0-on az energiafüggvénynek megfelelően helyezkednek el, azaz $\epsilon(x)$-et minimalizálva. Tutte fő eredménye a témában a következő tétel:

3.14. Tétel (Tutte)**.** [13] Ha G egy 3-szorosan összefüggő síkbarajzolható gráf, akkor minden rubber band reprezentációja G-nek (konvex sokszögként rögzített p_0 lap esetén) a G gráf egy síkbarajzoltját adja.

A rubber band reprezentációt használhatjuk a k-szoros összefüggőség tesztelésére is. Ebben az irányban Linial, Lovász és Wigderson eredményei érdemelnek figyelmet [12].

Téglalapos ábrázolás - rectangle representation

3.15. Definíció (Téglalap-felosztás - rectangular dissection)**.** Egy téglalapot osszunk további téglalapokra vízszintes és függőleges szakaszokkal. Ezt a konfigurációt jelölje R.



Téglalap-felosztás

3.16. Definíció (Váz - skeleton)**.** Legyen R téglalapok olyan összefüggő halmaza, ahol a téglalapok belseje diszjunkt egymástól. Ekkor a téglalapok éleinek uniója R vázát adja, ezt $skel(R)$ jelöli.

Ezt a vázat tekinthetjük egy $G = (V, E)$ gráf reprezentációjának, ahol V az R-ben lévő téglalapok csúcsaiból áll, míg E az ezeket összekötő élek halmaza. Ezt a gráfot $G_{skel(R)}$ jelöli. $G_{skel(R)}$-nek négy kettő fokú csúcsa van, a többinek három vagy négy a foka. Élei vízszintes és függőleges szakaszokból állnak.

3.17. Definíció (Téglalapos ábrázolás - rectangle representation)**.** Ha egy G gráfot az R reprezentálja, azaz $G = G_{skel(R)}$, akkor ezt a G gráf téglalapos ábrázolásának nevezzük.

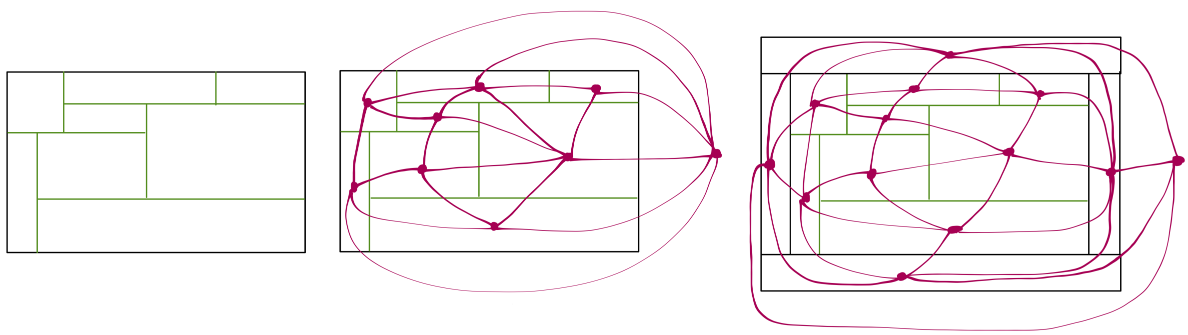
Gráfok reprezentálásakor nem csupán maga a reprezentálhatóság kérdése érdekes, hanem maga a megvalósítás is. A téglalapos ábrázolás esetén az egyik kulcs eredmény a következő:

3.18. Tétel. [9] Legyen G olyan síkbarajzolható gráf, melynek négy kitüntetett (sarok)csúcsának foka kettő, valamint a többi csúcs foka is legfeljebb három. Ekkor létezik olyan algoritmus, ami eldönti, hogy G váza-e egy téglalapos reprezentációnak, és amennyiben igen, akkor elő is állítja ezt a reprezentációt lineáris időben.

A tétel bizonyítása több részből áll. Szükség van hozzá a G gráf úgynevezett trimmed angle gráfjára, melyet úgy állítunk elő, hogy az eredeti gráfot és duálisát összeolvasztjuk. Ebből a gráfból néhány összefüggést kiolvashatunk a téglalapos ábrázoláshoz. Ezt követően megirányítjuk a gráfot bizonyos szabályoknak megfelelően és ezen irány mentén haladva tudjuk felrajzolni a rectangular dissection-t. A bizonyítás szépsége itt is az, hogy nem csak eldönteni tudjuk egy input gráfról, hogy lehet-e ilyen módon ábrázolni, hanem eljárást is ad a reprezentáció előállítására.
A teljes leírás megtalálható Felsner Rectangle and Square Representations of Planar Graphs című cikkében.
Az ide tartozó irodalomban különböző kiegészített és általánosított verziói megtalálhatóak a tételnek, illetve magának a téglalapos reprezentációnak. Ilyen például, amikor megengedjük, hogy az élek megtörjenek, azaz vízszintes és függőleges szakaszokból álljanak. Ezzel megőrizzük az ortogonális ábrázolási módot, miközben tágítjuk az így reprezentálható gráfok körét. Ekkor persze a téglalapot merőleges határú idomokkal fedjük. Egy másik megközelítés, ami a fokszám szigorú kikötését enyhítené, a pontokat is kis téglákkal ábrázolja. Ha megengedjük az élek megtörését és a téglákat is, akkor már minden síkbarajzolható gráfot le tudunk téglalapokkal rajzolni.

3.19. Definíció (Téglalapos duális - rectangular dual)**.** Legyen $F(R)$ az R-ben szereplő téglalapok halmaza, mely tartalmazza a külső, a többit magában foglaló téglalapot is. R duálisa az a $G^*(R)$ gráf, mely pontjainak halmaza éppen $F(R)$ és élei az olyan téglalap párok, melyeknek van közös oldalszakaszuk. Amennyiben G reprezentálható, mint egy R rectangular dissection duálisa, azaz $G = G^*(R)$, G-t az R téglalapos duálisának nevezzük.

Megjegyzendő, hogy ugyan szeretnénk azt hinni, hogy $G^*(R)$ a $G_{skel(R)}$ duálisa, ami majdnem igaz, de a külső lapba menő többszörös éleknél problémába ütközünk.



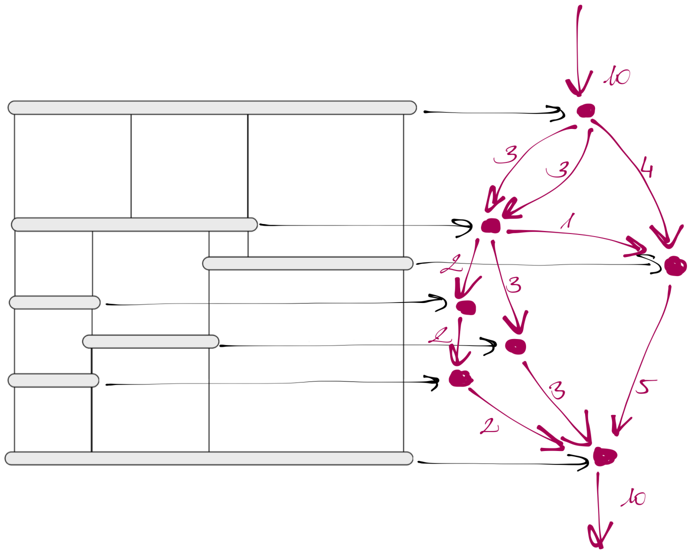
R G*(R) G*(R⁺)

Problémás esetek elkerülése végett szokás egy úgynevezett keretet adni a téglalap-felosztáshoz, ami négy téglalapból áll. Az így kapott $G^*(R^+)$ kiegészítetthez a duális esetén a külső laphoz tartozó csúcs, ezt jelölje v_∞, ennek a foka pontosan négy lesz az ábra szerint.

3.20. Tétel. [9] Legyen G síkbarajzolható háromszögelés egy kijelölt v_∞ csúccsal, melynek foka 4. Ekkor G pontosan akkor téglalapos duális, ha négyszeresen összefüggő.

Négyzetes reprezentáció - square tilings

Vegyünk egy téglalapot és osszuk fel véges sok négyzetre, amik oldalai párhuzamosak a téglalap oldalaival. Ehhez a következőképpen definiálhatunk egy gráfot. Minden maximális hosszú vízszintes szakasz, ami a négyzetek oldalaiból áll feleljen meg egy pontnak. (Választhatjuk éppen ezen szakaszok felezőpontját is.) Minden négyzet két ilyen vízszintes szakaszt köt össze, ami lehetővé teszi, hogy ezeket a gráf éleinek feleltessünk meg. A gráf éleit fentről lefelé megirányíthatjuk, ekkor egyetlen forrás (a téglalap felső éle) és egyetlen nyelő (az alsó téglalap él) lesz az immár irányított gráfban.



Négyzetes reprezentáció és a hozzá tartozó gráf

Könnyen látható, hogy az így kapott gráf síkbarajzolható. Ám sokkal érdekesebb kérdés, hogy egy gráfot mikor tudunk a fenti módon reprezentálni. Erre ad választ a következő tétel.

3.21. Tétel. [13] Minden összefüggő síkbarajzolható G gráfhoz, aminek van két kiemelt csúcsa a külső lapján, egyértelműen létezik egy τ négyzetes representáció, amire $G \cong G_\tau$.

4. Boxicity

A következő szakaszban a gráfok egy tulajdonsága, a boxicity lesz a középpontban. Ez a gráftulajdonság azt írja le, hogy egy gráfot hány dimenziós összemetsző dobozokkal/téglákkal reprezentálhatunk. Ezek közül a kétdimenziós eset lesz érdekes a szakdolgozatom szempontjából, hiszen ez éppen alkalmas lesz a tananyagok már említett módon való ábrázolására. Ahogyan minden korábbi reprezentációnál, sajnos itt is csak különböző megkötések árán kapunk kétdimenziós modellt. A következőkben bemutatásra kerül néhány konkrét gráf és annak boxicity-je, illetve olyan gráfcsaládok melyeknél felső korlát adható a boxicity-re.

4.1. Definíció (Metszetgráf - intersection graph)**.** Legyen $\mathcal{S}$ halmazok egy családja. Az $\mathcal{S}$ metszetgráfja a $G = (V, E)$, melynek pontjai $\mathcal{S}$ halmazaihoz tartoznak, valamint $(v_i, v_j) \in E$, ha a megfelelő $S_i \cap S_j$ metszet nem üres.

4.2. Definíció (Intervallumgráf - interval graph)**.** A valós számegyenes zárt intervallumainak metszetgráfja.

4.3. Állítás. Annak eldöntése, hogy egy gráf intervallumgráf-e, $\mathcal{O}(|E| + |V|)$ idő alatt lehetséges.

Az erre vonatkozó algoritmus szépsége az egyszerűségében rejlik. Az eljárás lényege, hogy maximális klikkek sorrendjét kell felállítanunk a csúcsok tartalmazására nézve, így magukat az intervallumokat fogjuk megtalálni.
Az intervallumgráfoknak vannak különböző általánosított verziói, illetve könnyen belátható, hogy beletartoznak bizonyos nagyobb gráfcsaládokba, mint a merevkörű gráfok és a perfekt gráfok. Részei annak a gráfcsaládnak is, melyet azon gráfok alkotnak, amik egy körön vett köríveknek a metszetgráfjai. Egy általánosítást ad, ha olyan trapézok metszetgráfját vesszük, amik párhuzamos oldalai ugyanazon a két párhuzamos egyenesen fekszik.
Általánosítás és bővítés helyett persze szűkíthetjük is az intervallumgráfok körét. A következő fogalom egy ilyen alosztályt mutat be.

4.4. Definíció (Egység intervallumgráf - unit interval graph)**.** A G intervallumgráf akkor egység intervallumgráf, ha van olyan intervallumos reprezentációja, ahol minden intervallum egységnyi hosszú.

4.5. Definíció (Boxicity)**.** Egy $G = (V, E)$ gráf boxicity-je az a legkisebb n egész szám, amire teljesül, hogy G előáll, mint $\mathbb{R}^n$-beli téglák metszetgráfja (ahol a téglák élei párhuzamosak a koordináta tengelyekkel).
Ezzel ekvivalens módon úgy is definiálhatjuk egy gráf boxicity-jét, mint az a legkisebb n szám, melyre létezik n darab intervallumgráf, hogy $G_i = (V, E_i)$, $1 \leq i \leq n$ és $E = E_1 \cap ... \cap E_n$, azaz G élei azon élekből állnak, amik benne vannak mindegyik intervallumgráfban.
Egy G gráf boxicity-jét $box(G)$-vel jelöljük.

Különböző gráfcsaládok boxicity-jére különböző alsó és felső becslések léteznek. A következő néhány állítás és példa ezt hivatott illusztrálni.

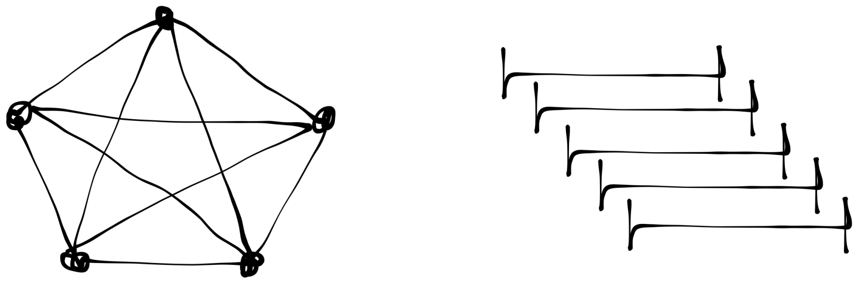
4.6. Állítás. Egy gráf boxicity-je akkor és csak akkor 1, ha intervallumgráf.

Bizonyítás: A definícióból következik. ■

Most pedig a teljes gráfok, a körök, a $2n$ csúcsú, n osztályú Turán-gráf és a teljes páros gráfok boxicity-jét vizsgáljuk.

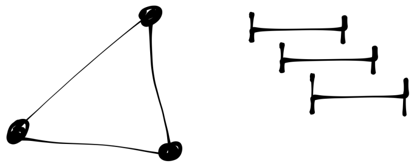
4.7. Állítás. $Box(K_n) = 1$.

Bizonyítás: A teljes gráf minden csúcsa össze van kötve az összes többivel, azaz a csúcsokat ábrázoló téglák mindegyike metszi az összes többit. Ezt egy dimenziós téglákkal, azaz intervallumokkal is le tudjuk írni. ■



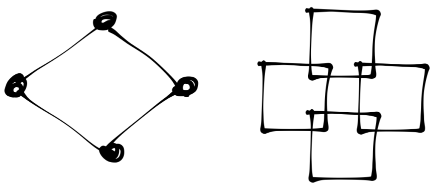
A K_5 gráf és annak intervallumokkal való reprezentáltja

4.8. Állítás. (i) $Box(C_3) = 1$:



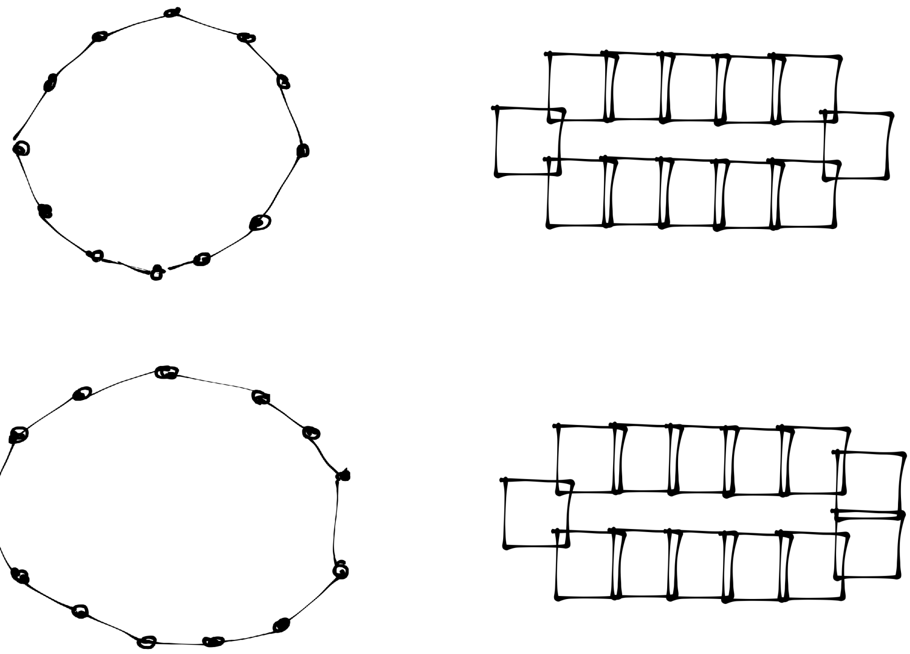
A C_3 gráf és annak intervallumokkal való reprezentáltja

(ii) $Box(C_n) = 2$, ha az $n > 3$:



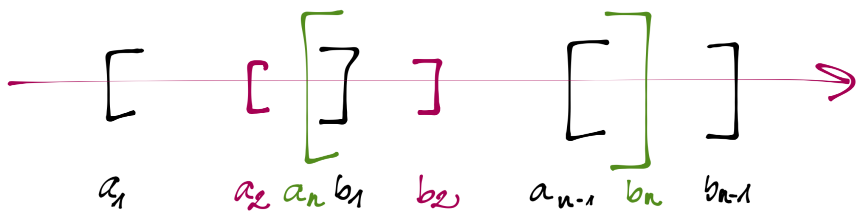
A C_4 gráf és annak téglalapokkal való reprezentáltja

Bizonyítás: (i) A 3 pontú kör éppen a teljes 3-as, K_3, ezért intervallumgráf.
(ii) A C_n gráf reprezentálható téglalapokkal az alábbi módon (páros és páratlan estre bontva):



A C_n gráf és annak téglalapokkal való reprezentáltja

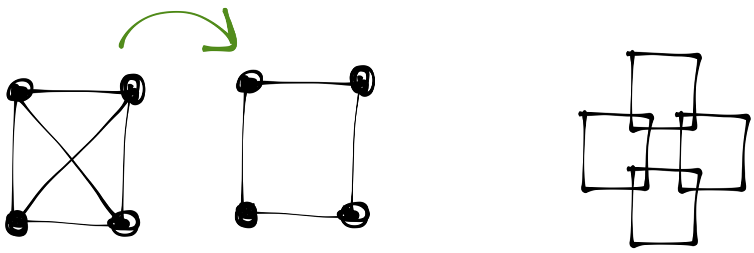
Ez mutatja, hogy $Box(C_n) \leq 2$, ha $n > 3$. Be kell még látni, hogy nem intervallumgráf. Indirekt tegyük fel, hogy intervallumgráf. Ekkor tekintsük a számegyenesen vett reprezentációját. Az i. intervallum bal és jobb végpontját jelölje rendre a_i és b_i. Feltehető, hogy az i. és az $i+1$. a metsző (ciklukusan véve), valamint az $a_i \leq a_{i+1}$ minden i-re. I_1 és I_{n-1} diszjunkt, azaz $b_1 < a_{n-1}$, de $I_n \cap I_{n-1} \neq \emptyset$, azaz $b_n \geq a_{n-1}$. Azt is tudjuk, hogy $I_1 \cap I_n \neq \emptyset$, ami pedig azt jelenti, hogy $b_1 \geq a_n$. Ellentmondásra ott jutunk, hogy $b_1 \in I_2$, ami diszjunkt I_n-től, mégis a b_1 pontnak mindkettőben benne kellene lennie. Ehhez még szükséges megjegyezni, hogy a C_n esetén az intervallumok nem lehetnek tartalmazóak. ■



A fenti intervallumok ábrázolása számegyenesen

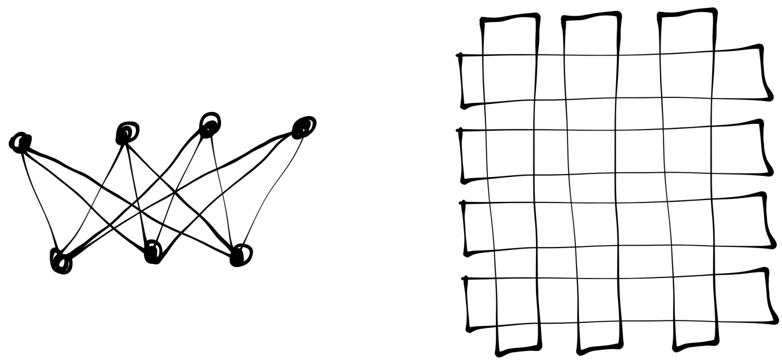
4.9. Állítás. $Box(T_{2n,n}) = n$.

Ez az eredmény Roberts nevéhez fűződik, ezért gyakran nevezik ezt a gráfot Roberts-gráfnak is, de a n-koktél parti gráf elnevezés is ismert.

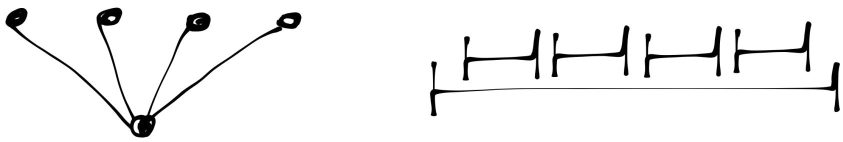


A $T_{4,2}$ gráf és annak téglalapokkal való reprezentáltja

4.10. Állítás. $Box(K_{n,m}) = 2$, amennyiben $n \geq 2$ és $m \geq 2$. Ha az n vagy az m éppen 1, akkor $Box(K_{n,m}) = 1$.



A $K_{4,3}$ gráf és annak téglalapokkal való reprezentáltja

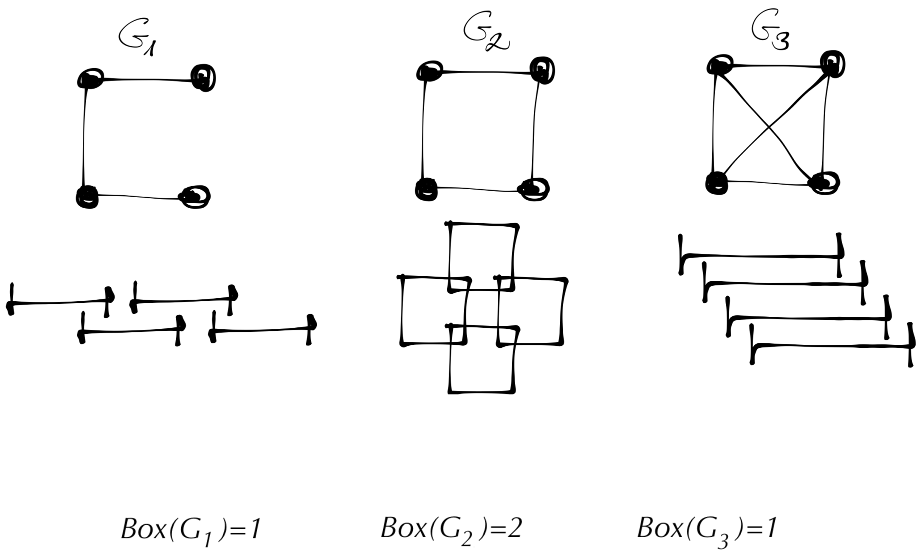


A $K_{4,1}$ gráf és annak intervallumokkal való reprezentáltja

Érdekes megjegyezni, hogy míg sok gráftulajdonság monoton, például új élek hozzáadásával a gráf összefüggősége monoton nő, a boxicity nem lesz ilyen.

4.11. Állítás. A boxicity, mint gráftulajdonság nem monoton.

Bizonyítás: Ha monoton volna, akkor vagy monoton nőne, vagy monoton csökkenne. Vegyük a C_4 gráfot, melynek boxicity-je 2, majd tekintsük azt a gráfot, melyet a C_4-ből kapunk, ha egy élt elveszünk, ennek boxicity-je már csak 1. Ekkor ha a boxicity monoton volna, akkor növekvő kellene, hogy legyen. A K_4, melyet élek hozzáadásával kapunk, azonban ismét 1-es boxicity-vel rendelkezik.



A boxicity tehát nem lehet monoton. ■

Adott G gráfról eldönteni, hogy $box(G) = 1$ teljesül-e, lineáris időben megoldható probléma, azonban annak eldöntése, hogy $box(G) \leq 2$ teljesül-e, már NP-teljes feladat. Érdekes, hogy ismét az síkbarajzolható és outerplanar gráfok rendelkeznek ezt a problémát átívelő tulajdonsággal.

4.12. Állítás. Minden outerplanar gráf boxicity-je legfeljebb 2, míg minden síkbarajzolható gráfé legfeljebb 3.

4.13. Tétel (Chandran)**.** [7] Minden legfeljebb Δ fokszámú G gráf boxicity-jére teljesül, hogy $box(G) \leq 2\Delta^2$.

A tétel bizonyításához Chandran alapötlete a következő. Ha G előáll, mint G_1, G_2, ..., G_k gráfok metszete, akkor $box(G) \leq \sum_{i=1}^{k}(box(G_i))$. A teljes levezetés megtalálható Louis Esperet Boxicity of graphs with bounded degree című cikkében.

5. Az iskolai tananyag összefüggéseinek ábrázolása

Motiváció

Ha egy témakörrel hosszú ideig foglalkozunk, fontos a megfelelő motiváció és kitartás. A témám variálása, illetve annak egy más irányba való terelése adott lehetőséget arra, hogy egy kimeríthetetlen forrásból

merítsek erőt. Azokból a pillanatokból, amikor a diákjaim egy rég óta kaotikusnak, értelmetlennek, misztikumnak képzelt dolgot hirtelen megértenek. Elképesztő milyen örömet okoz, amikor végre átlátunk a ködön, ezt az alábbi, tanítványaimtól származó mondatok is mutatják. "Ezt eddig miért nem mondta így senki?" - angol óra, felnőtt férfi. "Emese, amikor itt vagyok mindig azt érzem, hogy van remény!" - matek vizsgára készülő lány.
Az iskolában elhangzó anyag olyan összetett struktúra, melyet csupán folyószövegből sokszor nehéz megérteni. Szükség van egy másik szemszögből, valamiképp logikusabban szemlélni a rendszert. Ezt a látásmódot hiányolom a tankönyvekből. Az egyes fejezetek végén szereplő összefoglalás címszó alatt lévő pár sorban összeszedett gondolatok sajnos nagyon ritkán adnak erre megoldást, holott éppen aktuális lenne az elmúlt néhány alfejezetben tanult információt rendszerezni, helyre tenni a fejekben. Gyakran nem több ez, mint a vastagbetűs részek összevágása, képlettár vagy ennek egy hiányos kombinációja.
A következő fejezetben egy matematikai alapú modellt szeretnék bemutatni, ami a tanulás támogatását segítheti. Középpontban a tananyag "gráfja" áll, ami a különböző információ morzsákat és a köztük lévő kapcsolatokat mutatja. Ezeket a későbbiekben pontosabban definiáljuk. Ezen gráf valamely reprezentáltja alkalmas lenne egy olyan összefoglalás megvalósítására, ami nem csak a lényeget kiemeli és összeszedi egy adott témakörből, de logikusan ábrázolja azt.
A cél tehát az, hogy a fentiekben hiányolt logikai kapcsolatokra mutasson rá az ábra, szemléletes legyen és mindemellett tartalmas.

Konstruktív pedagógia

A konstruktív pedagógia egy meglehetősen új pedagógiai irányzat, az 1980-as években kezdtek el foglalkozni vele komolyabban. Tulajdonképpen sokkal inkább szemléletmód, mint módszertan. Lényege, hogy tudományos megfigyelésekre és eredményekre alapozva kíván egy olyan modellt felállítani, mely hatékonyabbá tenné az összetett emberi tanulási folyamatokat. Fellelhető benne számos modern ágazat nyoma, mint a fejlődéstan, kognitív pszichológia, illetve a reformpedagógia.
A konstruktív pedagógia szerint tudásunk bővítésekor a meglévő rendszerhez igyekszünk integrálni az új információkat, az eddigi sémák, és keretek közé, ha lehet; ha nem, bővítünk, új sémát hozunk létre. Minden, ami ezt az absztrakciós folyamatot, ami a megértést és a memória-kezelést érintve segíti, örömmel fogadunk.
Ebből nyilvánvalóan következik, hogy a tanulás folyamata alatt a befogadónak éppolyan nagy szerepe van, sőt nagyobb mint az átadónak. A tanulóban meglévő kognitív struktúrák (meglévő tudás, előismeret) így a középpontba helyeződik.
Jelen állapotában az irányzat sokkal inkább elméleti, mintsem gyakorlati. Még nincs egy kifejlett konkrét "recept" a fent leírt tanulási folyamat leghatékonyabb elérésére, csupán elméleti keretet ad az oktatáshoz. Ennek ellenére néhány gyakorlati alapelvet és iránymutatót megfogalmazhatunk:
- Amikor új információt kell beépítenünk a már meglévő tudásunkba, akkor fontos, hogy ezt helyesen tegyük és ne mosódjon át valami másba, míg integrálni próbáljuk.
- Valóban be is épüljön az új információ. Amikor tanulunk, hajlandóak vagyunk az új tudást csak mint valami lebegő fogalom hozzákötni a többihez, úgymond látszatbeépülés történik. Ekkor persze tökéletesen vissza tudjuk adni az anyagot a tanárnak, ám gyorsan a kognitív lomtárba fog kerülni az információ. Hasonló a helyzet, ha az új tudáselem úgy tűnik, hogy ellenkezik a korábban megszerzettel, ekkor nem tud megfelelően integrálódni, így kétféle kimenetel is bekövetkezhet. Vagy a korábbi tudásunkba vetett hitünk inog meg, vagy pedig az újat dobjuk félre, így hosszútávon egyiket sem fogjuk tudni megfelelően

használni.
- Az egyéni valóságinterpretációnak jelentős szerepe van a konstruktív tanulási folyamat során, ehhez azonban olyan egyedi módszerek megtalálása szükséges, mely lehetővé teszi ennek kialakulását.
- A frontális oktatásnak (erősen sematizálva: aktív tanár, passzív, elsősorban befogadó diák) van helye a tanulásban, ám jelentős szerep jut az egyéni vagy kis csoportos tanításnak. A differenciált oktatás lehetőséget ad az egyedi módszerek alkalmazására. Egy osztály csoportokra bontása azonban közel sem egyszerű feladat. A különböző képességű, nemű és lelkesedésű diákok szétosztása a feladatunk. A csoportmunka, vagy akár páros munka aktív segítője lehet a kognitív kapcsolatok kialakulásának, hiszen a diákoknak muszáj, hogy maguk építsék fel a rendszerüket, önálló gondolatokat kell megfogalmazniuk, melyet társaikkal együtt technikailag is könnyebben tehetnek meg, valamint élvezetesebb lesz így egy tanóra, ennek révén nehezebben veszítik el figyelmüket és motivációjukat a tárgytól.
A kognitív pszichológia hatása erősen érezhető, de fontos kiemelni, hogy a tanulás nem csupán kognitív folyamat. A tanuló érzései, gondolatai és tapasztalatai mind közrejátszanak. Ezt a komplex rendszert kell átlátni, amikor tanítunk.
Ennek a konstruktív tanulási folyamatnak lehetne eszköze az az összefoglalás, mely a kapcsolatokat ábrázolja és a lényegi információt tartalmazza. A diákoknak pedig segítség kell ahhoz, hogy a kapcsolatokra rájöjjenek és az összefüggéseket megértsék. Ezért a megfelelő pedagógiai módszertan mellett az effajta segédanyagok használata is pozitívan járulna hozzá a tudás megszerzéséhez.

Mind mapping

A mind map, más néven gondolattérkép szorosan kapcsolódik a témához. Ennek lényege, hogy egy fő, központi gondolatból kiindulva felépítsünk logikai kapcsolatok révén egy olyan térképet, ami éppen azt ábrázolja, hogy mi miből következik, a legfontosabb összefüggésektől kezdve az apróbb részletekig.
A mind map elkészítésének legfőbb lépései:
1. Megkeresni a kulcsgondolatot.
2. Ebből kiágaztatni a legfontosabb kapcsolódó fogalmakat.
3. Az így kapott új végpontokból ismét kiágaztatni a kapcsolódó ötleteket.
4. Az előző lépést iterálni addig, amíg ki nem fogyunk az ábrázolandó anyagból.

A mind map-eknek fontos tulajdonsága még, hogy színesek, különféle formákat és képeket használnak, ami egy plusz vizuális ingert ad, ha nem is a megértést, de egy szintén nagyon fontos tényezőt ad a koncepcióhoz, ami pedig az, hogy szemléletes és könnyen megjegyezhető lesz. Gyakori eset, hogy pontosan emlékezünk, hogy a könyvben melyik oldalon, melyik kép mellett és milyen betűtípussal volt írva az az információdarabka, amire éppen szükségünk van, de maga a szó, vagy képlet nem fog eszünkbe jutni. Ha viszont a kép, ami mellett ez volt kapcsolódik ahhoz, ami eszünkbe kell, hogy jusson, vagy éppen a lapon való elhelyezkedése nem volt véletlen, akkor ha ezekre emlékszünk azzal mintegy körülírhatjuk a szóban forgó gondolatot, ami immáron jelentősen több eséllyel fogjuk felidézni.

A mind mapping egy roppant hasznos kiegészítés ugyan a tanuláshoz és részben ez adta az ötletet a tankönyvi összefoglalások rendhagyó módon való megközelítésére, azonban egy az egyben nem lehet azt mondani, hogy egy lineáris vezetésű összefoglalás helyett rajzoljunk egy mind map-et minden fejezet végére a könyvekbe. A mind map hatékonyságának kulcsa ugyanis abban rejlik, hogy mindenkinek magának kell elkészíteni. Nincs egy általános forma/szín/kép/betűtípus az egyes információdarabokra, hogy arról

mindenki pontosan ugyanarra emlékezzen vissza.
Ez azonban nem változtat a tényen, hogy a tananyag összefüggéseit érdemes egy gráffal ábrázolni, aminek csúcsai a kulcsfogalmak, legfontosabb állítások és fő állomások a tananyagban, élei pedig az ezek közti kapcsolatok.

A tananyag felépítése

Az egyes tantervek felépítése különböző lehet, de vannak általános sémák, amik alapján dolgoznak. Ilyen például a lineáris vezetésű, amikor az egyes témakörök hierarchikusan egymásra épülnek. Ez lehet kronológia vagy bonyolultság szerint, illetve akár a gyakorlati szinttől az elvontabb elméleti anyag felé haladó is. Egy másik változat a koncentrikus felépítés, amikor gyakorlatilag két vagy három egyre mélyebb lineáris vezetésű tanterv van egymásra építve. Ilyen lehet például az 5-8. évfolyamig tanult tananyag, majd a 9-12. évfolyamban tanult tananyag. Egy a korábbi két verziótól eltérő tanterv a moduláris, amikor is a különböző egységek nem szorosan kapcsolódnak egymáshoz, elhatárolva tanítják őket. Ez persze nem jeleni azt, hogy a modulok közt nem volnának összefüggések, csupán azok sorrendje kevésbé kötött. Ez ad lehetőséget a moduláris tanítás során a tanulócsoportok sajátosságaihoz való alkalmazkodásra. Az eddigiek bizonyos értelemben vett összeolvasztása a teraszos tanmenet, amikor lineárisan haladunk egy egy modulon belül, de megvan az a szabadságunk is, hogy egy saját logikai sorrendet is kövessünk. Az utolsó kiemelt metódus pedig a spirális felépítés, melynek lényege a folyamatos ismétlés, az alapfogalmak és főbb pontok újra és újra visszatérnek a tanagyagban előrehaladás során.
Ha egy kisebb anyagra gondolunk és annak felépítését vizsgáljuk, ott is ezekhez hasonló modellt figyelhetünk meg. Legnépszerűbb a lineáris vezetés, az egyes fejezeteken belül legtöbb esetben apránként ismerkedünk meg az új téma elemeivel és azokat egymásra építjük fel. Ez az egymásra épülés az, ami nagyon fontos, hogy megfelelően rögzüljön, illetve hogy valóban kötni tudjuk a korábban megismert és már beépült egységekhez. Ezeket a kisebb egységeket fűzhetjük fel különböző módokon, ezzel megalkotva a tanmenetet.
[4]

Reprezentálhatóság

A fent említett kapcsolatokat szeretném tehát egy gráffal és annak egy alkalmas reprezentációjával szemléletesebbé tenni. Ehhez szükséges definiálni, mit is értünk kapcsolat alatt és mik legyenek azok az egységek, amiket már nem szeretnénk még apróbb részekre szétbontani. Sok múlik a célunkon, hogy kinek is készítjük az ábrát és mekkora anyagról.
Ha a diák tudását csak rendszerezni szeretnénk, akkor elegendő csak az adott anyagot tekintenünk, nem szükséges visszanyúlni a korábbi témakörökhöz. Ezzel szemben ha elsődleges célunk, hogy az új tudáselemet bekapcsoljuk a rendszerbe, akkor érdemes egy korábbi ponttól vagy pontokból elindulni. Ha egy nagyobb témakört szeretnénk átfogni, érdemes csupán a legfontosabb pontokat kiemelni. Ha ezek után egy-egy pont kérdéses, akkor ahhoz az al-anyaghoz is készíthetünk egy arra specializált verziót.
A gráf csúcsai olyan fogalmak, tételek, megjegyzések legyenek, amik önmagukban egységet alkotnak, azaz ha csak azt a pontot olvassuk, akkor is legyen értelme. Az élek meghatározása ennél valamivel összetettebb feladat, hiszen itt a logikai kapcsolatokat kell figyelembe vennünk. Természetes módon ha egy állításból következik egy másik vagy a két állítás ekvivalens, esetleg egy fogalom bevezetése után egy azt tartalmazó tételt fogalmazunk meg, egyértelműen kapcsolatokat detektálhatunk. Ettől a ponttól kezdve

azonban magunkra vagyunk utalva és mindenkinek a saját logikájának megfelelően kell a maradék összefüggésből kiválasztania azokat, amik számára fontosak. Ez valamelyest szabadságot ad, ám ha például túl sok élt szeretnénk bevenni, előfordulhat, hogy túlzottan sűrű gráfot kapunk, ami a reprezentálhatóságot nehezíti.
A következőkben a $Box(G) \leq 2$ tulajdonságú gráfokkal szeretnénk foglalkozni és azt úgy reprezentálni, hogy a dobozok metszetei csak a határokat tartalmazzák, mivel az egyes téglákba fog az információ kerülni.

6. Megvalósítás

Az eddigi munkám mind elméleti bemutatása volt valaminek, ami valójában egy nagyon is gyakorlati probléma. Ezért a következőekben egy konkrét témához valósítottam meg azt az összefoglalót, ami bemutatná a fenti elmélet alkalmazását.
A választásom a komplex számokra esett. Nem csupán mert ez önmagában is matematikához kapcsolódik, hanem mert ez egy olyan kérdéskör, melynek összefüggései kulcsfontosságúak, azok megértése elengedhetetlen, valamint számos matematikai tudományterület használja őket. Az egyes pontok kapcsolódnak egymáshoz, de nincs túlzottan sok összefüggés sem. Ez fogja lehetővé tenni a megfelelő ábrázolást.
Az elkészített összefoglaló valóban egy összefoglalás, azaz nem azt szolgálja, hogy az olvasója ennek segítségével építse fel tudását, hanem a már meglévő elemeket rendszerezze. Végig megy a teljes anyagon, tehát az elméleti anyag egészét fedi, valamint a kapcsolatokra mutat rá, mellyel az anyag átfogóbb megértését segíti.

A komplex számok

Ebben a részben tehát a komplex számok témaköréhez kétféle összefoglalást készítettem el. Az egyik egy összefüggő leírás, a másik pedig a kapcsolati gráf alapján megvalósított alternatív összefoglaló. Ehhez az anyagot az IB (International Baccalaureate), egy nemzetközi matematika érettségire készítő könyv szolgáltatta, a Cambridge University Press Mathematics Higher Level for the IB Diploma című könyve [8]. Ez középiskolásoknak szóló, de emelt szintű tananyag, valamivel bővebb, mint a magyar rendszerben matematikát tanulóké.

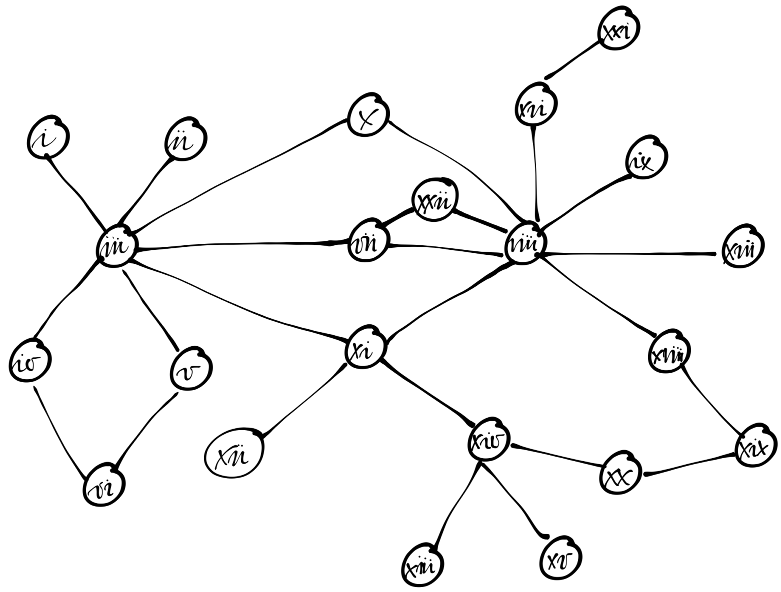
Összefüggő leírás

Komplex számok:
(i) Komplex számhalmaz jelölése: $\mathbb{C}$
(ii) $i^2 = -1$.
(iii) A komplex szám általános alakja: $z = x + iy$, ahol x és y valós. Ezt az alakot nevezzük a komplex szám algebrai alakjának.
(iv) Valós rész: $Re(z) = Re(x + iy) = x$
(v) Képzetes (imaginárius) rész: $Im(z) = Im(x + iy) = y$.
(vi) Két komplex számot egyenlőnek mondunk, ha megegyezik a valós és a képzetes részük is.
(vii) Argand diagram: a hagyományos koordináta-rendszer x és y tengelyét megfeleltetjük $Re(z)$-nek és $Im(z)$-nek. A komplex számokat ábrázolni tudjuk a síkon, ahol a komplex szám valós és képzetes része a pontok koordinátáit jelentik. Ezt nevezzük a komplex számsíknak.

(viii) Trigonometrikus alak: a komplex számot az origótól való távolság (r) és a valós tengellyel bezárt szög (θ) segítségével is meghatározhatunk. Ekkor $z = r \cdot cis\theta$, ahol $cis\theta = cos\theta + isin\theta$. Az r-et a z szám hosszának (modulusának), a θ szöget pedig a z szögének (argumentumának, jel.: $arg(z)$) is szokták nevezni.
(ix) Két komplex szám egyenlősége trigonometrikus alakban: ha megegyezik a modulusuk és az argumentumuk is.
(x) Váltás az alakok között: algebrai alakról trigonometrikus alakra: $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ és $tan\theta = y/x$ és fordítva: $x = r \cdot cos\theta$ és $y = r \cdot sin\theta$.
(xi) Konjugált: a $z = x + iy$ komplex szám konjugált párja a $\overline{z} = x - iy$ komplex szám, trigonometrikus alakban a $z = r \cdot cis\theta$ konjugáltja a $\overline{z} = r \cdot cis(-\theta)$.
(xii) A konjugálás tulajdonságai: $z + \overline{z}$ és $z \cdot \overline{z}$ valós, továbbá $z \cdot \overline{z} = |z|^2$. Ha z és w komplex, akkor $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$, $\overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}$, $\overline{z/w} = \overline{z}/\overline{w}$, valamint $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.
(xiii) Ha a másodfokú egyenletnek ($ax^2 + bx + c = 0$) a diszkriminánsa ($D = b^2 - 4ac$) negatív, nincs valós megoldása, de komplex igen. Ezt a megoldóképletből a következőképp kapjuk: $x_{1,2} = (-b \pm i\sqrt{-D})/(2a)$.
(xiv) Ha egy valós együtthatós polinomnak ($p(x)$) egy komplex szám (z) gyöke, akkor annak konjugáltja ($\overline{z}$) is, azaz ha $p(z) = 0$, akkor $p(\overline{z}) = 0$ is teljesül. Sőt, ugyanannyi-szoros gyök z és $\overline{z}$.
(xv) Az algebra alaptétele: egy n-edfokú polinomnak pontosan n darab gyöke van a komplex számok körében, a gyököket multiplicitásával számolva.
(xvi) Műveletek trigonometrikus alakban: z és w komplex számok, ekkor $z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot cis(arg(z) + arg(w))$, $z/w = |z|/|w| \cdot cis(arg(z) - arg(w))$ és $z^n = |z|^n \cdot cis(n \cdot arg(z))$. Ez utóbbit De Moivre tételnek is hívják.
(xvii) Euler alak: a $z = r \cdot cis\theta$ felírható a következő alakban is: $r \cdot e^{i\theta}$.
(xviii) Komplex gyökök: a $z^n = 1$ egyenlet megoldásait, z_1, z_2, ..., z_n, az n. komplex egységgyököknek nevezzük. $z_1 = cis((2\pi)/n)$, $z_2 = cis((4\pi)/n)$, ..., $z_n = cis((2n\pi)/n) = 1$.
(xix) Gyökvonás komplex számokból, azaz a $z^n = w$ egyenlet megoldásának menete: írjuk fel a z és a w számokat trigonometrikus alakban, azaz $z = r_z \cdot cis\theta_z$ és $w = r_w \cdot cis\theta_w$, majd használjuk a De Moivre tételt a z^n-re. Ekkor $r_z = \sqrt[n]{r_w}$ és $n \cdot \theta_z = \theta_w$ adódik. A w szám argumentumához adjunk hozzá 2π-ket, hogy az egyenletek rendezése után megkapjuk az n darab különböző szöget. Az így kapott megoldások: $z_1 = \sqrt[n]{r_w} \cdot cis(\theta/n)$, $z_2 = \sqrt[n]{r_w} \cdot cis((\theta + 2\pi)/n)$, ..., $z_n = \sqrt[n]{r_w} \cdot cis((\theta + (n-1) \cdot 2\pi)/n)$.
(xx) A komplex gyökök segítségével egy egész együtthatós polinomot felírhatunk legfeljebb másodfokú egész együtthatós tényezők szorzataként.
(xxi) Komplex számok segítségével beláthatunk kombinatorikai azonosságokat. A binomiális tételt és a komplex számok hatványait használva újabb összefüggéseket mutathatunk meg.
(xxii) Geometriai vonatkozás: a komplex számsík megfeleltethető az Euklideszi síknak. A 2-dimenziós geometriai transzformációk egységes és egyszerű leírását kaphatjuk meg. Pl.: komplex szám konjugálása az x-tengelyre való tükrözésnek, az egy hosszú komplexszel való szorzás pedig az origó körüli forgatásnak felel meg.

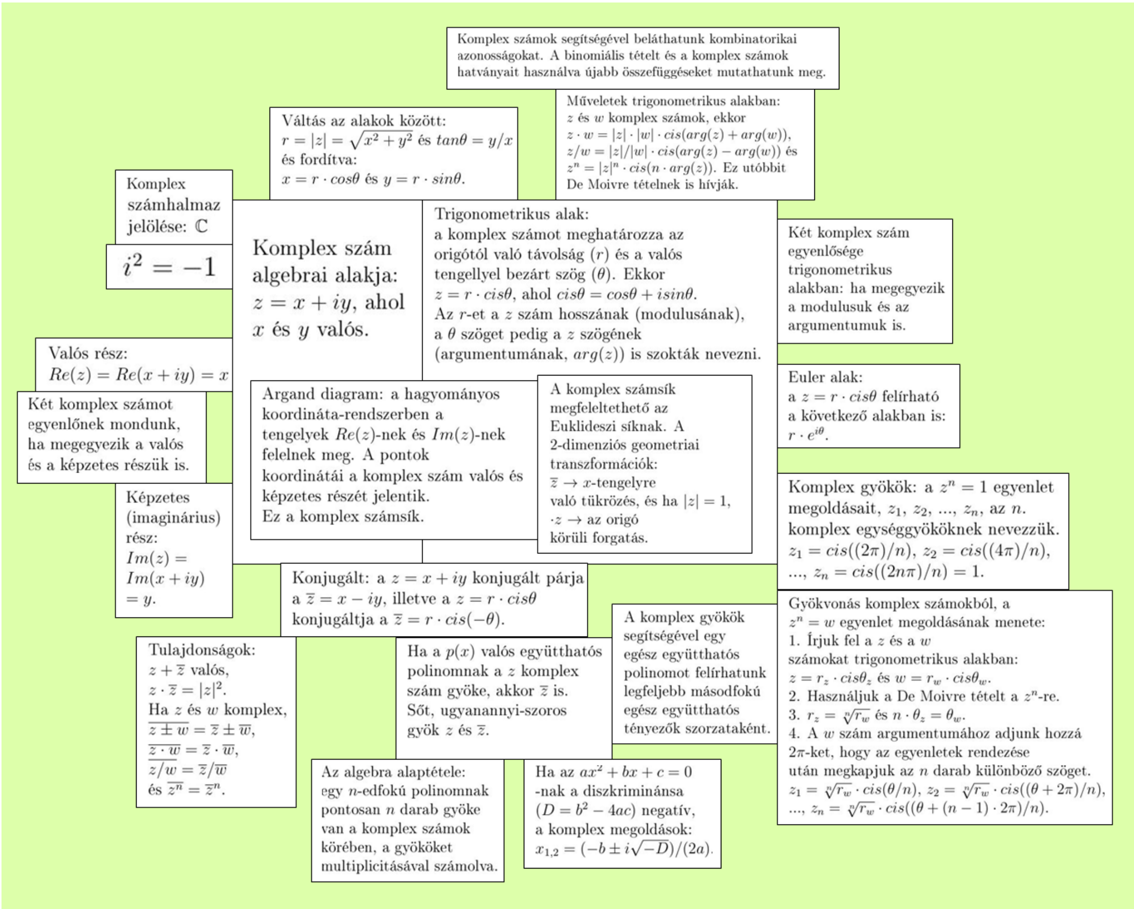
A gráf és annak reprezentáltja

A fent leírt pontok összefüggéseit, kapcsolatait az alábbi gráf ábrázolja.



Ennek a gráfnak a boxicity-je éppen 2, azaz alkalmas arra, hogy téglalapok metszetgráfjaként reprezentáljuk. Ezt a reprezentációt készítettem el és töltöttem ki a komplex számokról összegyűjtött információval. A néhány pontban történt kisebb átfogalmazásoktól eltekintve a kétféle leírás pontosan ugyanazt a mennyiségű és színvonalú anyagot tartalmazza.

A dobozok elhelyezésekor az összemetszéseken kívül más szempontokat is figyelembe vettem. Természetesen a méreteiknek arányosnak kell lennie a beleírandó információ mennyiségével, valamint az egész elrendezés alkalmas kell legyen arra, hogy azt egy lapra le tudjuk rajzolni, azaz hogy ne nyúljon el túlzottan egyik irányba sem. Egy más jellegű észrevétel, hogy minthogy balról jobbra és fentről lefelé olvasunk, igyekeztem ezt követni az ábrázoláskor is. Nincs egy kiemelt kezdő elem, ezért automatikusan a bal felső saroktól indulva olvassuk.



Elemzés

Az első verzió előnyei:

- Az összes szükséges definíció, állítás és tétel össze van gyűjtve.
- Ezek tulajdonságai, valamint az alkalmazásukhoz szükséges elmélet is kiemelésre kerül.
- Az egyes elemek a tankönyvnek megfelelő sorrendbe vannak rendezve.

Ha mindössze ennyivel több állna a gyerekek rendelkezésére, az is hasznos lenne, mivel egy felmerülő kérdésre egyszerűbben találnak választ egy tömör összefoglalóban, mint a teljes könyvben keresgélve.

A második megvalósítás további pozitívumai:

- Megjelennek a logikai kapcsolatok.
- Kiemeli a tanagyag alappilléreit, onnan vezeti le az összetettebb elemeket.

Az első körben említett előnyök ugyanúgy vonatkoznak a dobozos ábrázolásra is. Amivel ez többet ad a tanulónak az az, hogy amikor kérdése merül fel, akkor gyakran a probléma egy korábbi részlet meg nem értéséből fakad. Például ha a trigonometrikus alakban végzett műveleteket szeretné áttekinteni, előbb szükséges a megfelelő jelölések értelmezése, amiket éppen az alatta szereplő dobozban talál. Hasonlóan ha a konjugáltak fogalmát vizsgáljuk, érdemes megnézni a belőle kiágazó dobozokat, melyek annak tulajdonságait írják le, illetve a gyakorlatban való megjelenésére mutat példát.

Hivatkozások

[1] Bellantoni, Stephen; Hartman, I. Ben-Arroyo; Przytycka, Teresa M.; Whitesides, Sue. "Grid intersection graphs and boxicity." Discrete mathematics 114.1 (1993): 41-49.

[2] Bobenko, Alexander; Springborn, Boris. "Variational principles for circle patterns and Koebe's theorem." Transactions of the American Mathematical Society 356.2 (2004): 659-689.

[3] Bondy, J. Adrian; Murty, Uppaluri S. R. "Graph theory with applications." Vol. 290. London: Macmillan, 1976.

[4] Bruner, Jerome S. "Új utak az oktatás elméletéhez (Toward a Theory of Instruction)." Budapest, Gondolat (1974).

[5] Chartrand, Gary; Harary, Frank. "Planar permutation graphs." Annales de l'institut Henri Poincaré (B) Probabilités et Statistiques. Vol. 3. No. 4. Gauthier-Villars, (1967).

[6] Cozzens, Margaret B.; Roberts, Fred S. "Computing the boxicity of a graph by covering its complement by cointerval graphs." Discrete Applied Mathematics 6.3 (1983): 217-228.

[7] Esperet, Louis. "Boxicity of graphs with bounded degree." European Journal of Combinatorics 30.5 (2009): 1277-1280.

[8] Fannon, Paul; Kadelburg, Vesna; Woolley, Ben; Ward, Stephen. "Mathematics Higher Level for the IB Diploma" (2012): 476-526.

[9] Felsner, Stefan. "Rectangle and square representations of planar graphs." Thirty Essays on Geometric Graph Theory. Springer New York, 2013. 213-248.

[10] Frank, András. "Gráfelmélet" (2014) Egyetemi jegyzet.

[11] Goncalves, Daniel; Léveque, Benjamin; Pinlou, Alexandre. "Triangle contact representations and duality." Discrete and Computational Geometry 48.1 (2012): 239-254.

[12] Linial, Nathan; Lovász, Laszlo; Wigderson, Avi. "Rubber bands, convex embeddings and graph connectivity." Combinatorica 8.1 (1988): 91-102.

[13] Lovász, Laszlo; Vesztergombi, Katalin. "Geometric representations of graphs." Paul Erdos and his Mathematics (1999).

[14] Matthews, Michael R. "Constructivism and science education: Some epistemological problems." Journal of Science Education and Technology 2.1 (1993): 359-370.

[15] Sysło, Maciej M. "Characterizations of outerplanar graphs." Discrete Mathematics 26.1 (1979): 47-53.

[16] Sysło, Maciej M. "Outerplanar graphs: characterizations, testing, coding, and counting", Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math. Astronom. Qhys. 26 (1978) 675-684.

[17] Thomassen, Carsten. "Planarity and duality of finite and infinite graphs." Journal of Combinatorial Theory, Series B 29.2 (1980): 244-271.

[18] Tutte, William T. "Convex representations of graphs." Proceedings London Mathematical Society 10.38 (1960): 304-320.

[19] Wood, David R. "A Simple Proof of the Fáry-Wagner Theorem." arXiv preprint cs/0505047 (2005).