Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Győrbíró Tamás

Klasszikus Függvényterek

BSc Szakdolgozat

Témavezető:

Kovács Sándor

Numerikus Analízis Tanszék

Budapest, 2014

Tartalomjegyzék

Előszó

Jelen szakdolgozat célja az, hogy betekintést nyújtson a funkcionálanalízis legfontosabb függvénytereinek világába. Tekintettel arra, hogy az egyes fejezetekben, illetve alfejezetekben tárgyalt függvényosztályok önmagukban is olyan hatalmas és szerteágazó területei a matematikának, hogy teljességre törekvő összefoglalásuk nem férne bele a szakdolgozat kereteibe, számos alapvető eredményt csak felsorolásszerűen, bizonyítás nélkül említek meg, valamint néhány érdekesebb segédtétel, illetve állítás bizonyításától is el kell tekinteni, de ezen bizonyítások hiányát mindig jelezni fogom.
A legfőbb kérdések, amelyek a szakdolgozat fejezeteit végigkísérik, a teljesség, prekompaktság, szeparábilitás, valamint a duális terek karakterizálása. Számos olyan állítást is szerepelni fog, melynek bizonyítása egy vagy több korábban tárgyalt eredményre épül, így érzékeltetve a témakörök erős koherenciáját.
Az 1. fejezetben, mint speciális függvénytereket, külön vizsgáljuk a sorozatok tereit. A 2. fejezetben a klasszikus analízisben megismert legfontosabb függvénytereket vesszük sorba, ezzel is megalapozva a 3. fejezetben tárgyalt Hölder- és Szoboljev-tereknek, melyek különböző differenciálegyenletek megoldhatóságának kérdésében és megoldásában játszanak igen fontos szerepet, amely a 4. fejezet témája.

Budapest, 2014. december 20.

Győrbíró Tamás

1. fejezet

Sorozatterek

Jelölje $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozatok halmazát, ekkor a $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ halmaz vektortér a sorozatok körében szokásos

$$a + b := (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \lambda a := (\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad (a, b \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}},\ \lambda \in \mathbb{K}) \tag{1.1}$$

műveletekre nézve. A továbbiakban a $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ vektortér altereit vizsgáljuk.

1.1. Definíciók, alapvető tulajdonságok

Ebben a pontban áttekintjük a legfontosabb sorozattereket, és azok alapvető tulajdonságait.

1.1.1. Definíció. *Vezessük be a következő jelöléseket:*

1. $c := \left\{a \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} :\ \exists A \in \mathbb{K} :\ \lim_{n\to\infty} a_n = A\right\}$ *(konvergens sorozatok)*
2. $c_0 := \left\{a \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} :\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0\right\}$ *(nullsorozatok)*
3. $c_{00} := \left\{a \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} :\ \exists N \in \mathbb{N} :\ a_n = 0\ (n \geq N)\right\}$ *(kvázinullsorozatok)*
4. $l_p := \left\{a \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} :\ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty\right\}$ $(0 < p < \infty)$
5. $l_\infty := \left\{a \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} :\ \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < \infty\right\}$ *(korlátos sorozatok)*

1.1.2. Megjegyzés. Elemi számításokkal igazolható, hogy az 1.1.1 Definícióban megadott halmazok az (1.1) műveletekkel ellátva mind lineáris alterei a $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ vektortérnek, továbbá tetszőleges $0 < p < q < \infty$ esetén teljesülnek a következő relációk:

$$l_p \subsetneq l_q \subsetneq c_0 \subsetneq c \subsetneq l_\infty$$

1.1.3. Definíció. *Adott $a := (a_n) \in l_p$ sorozatra jelölje*

$$\|a\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad (0 < p < \infty), \quad \textit{illetve} \quad \|a\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|.$$

1.1.4. Megjegyzés. Az 1.1.3 Definícióban bevezetett $\|\cdot\|_p$ függvény nemnegatív, abszolút homogén, és csak a konstans 0 sorozaton veszi fel a 0 értéket. A háromszög-egyenlőtlenség belátása a következő két fontos egyenlőtlenséggel történik.

1.1.5. Tétel. (Hölder-egyenlőtlenég) *Legyen $a := (a_n) \in l_p$, $b := (b_n) \in l_q$, ahol $1 \le p \le \infty$, illetve q a p-hez tartozó konjugált kitevő. Ekkor*

$$ab := (a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_1, \qquad \textit{és} \qquad \|ab\|_1 \le \|a\|_p \|b\|_q .$$

1.1.6. Tétel. (Minkowski-egyenlőtlenség) *Legyen $a := (a_n), b := (b_n) \in l_p$, ahol $1 \le p \le \infty$, ekkor*

$$\|a+b\|_p \le \|a\|_p + \|b\|_p .$$

1.1.7. Megjegyzés. Az

$$(x+y)^p \le x^p + y^p \le 2^{1-p}(x+y)^p \quad (x, y \in \mathbb{R}_0^+,\ 0 < p < 1) \tag{1.2}$$

elemi egyenlőtlenségekből rögtön következnek az alábbi becslések:

$$\|a+b\|_p \le 2^{\frac{1}{p}-1}\left(\|a\|_p + \|b\|_p\right), \quad \|a+b\|_p^p \le \|a\|_p^p + \|b\|_p^p \qquad (a, b \in l_p,\ 0 < p < 1) \tag{1.3}$$

Jelölje tetszőleges $a \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ sorozatra $\operatorname{supp}(a) \subset \mathbb{N}$ azt a halmazt, amelyen az a sorozat 0-tól különböző értéket vesz fel, ekkor ha (1.3)-ban $\|a\|_p = \|b\|_p$, és $\operatorname{supp}(a) \cap \operatorname{supp}(b) = \emptyset$, akkor a becslések nyilván élesek, tehát $0 < p < 1$ esetben csak a háromszög-egyenlőtlenségnél gyengébb megkötést jelentő (1.3) teljesül, ilyenkor az $(l_p, \|\cdot\|_p)$ teret p-normált térnek nevezzük.

1.1.8. Megjegyzés. Az egyszerűbb jelölés érdekében tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén jelölje a továbbiakban $\overline{1,n} := \{1, \ldots, n\}$.

Az $(l_p, \|\cdot\|_p)$ normált terek legfontosabb tulajdonságait írja le a következő tétel:

1.1.9. Tétel.

1. *Az $(l_p, \|\cdot\|_p)$ pár minden $1 \le p \le \infty$ esetén Banach-teret alkot.*

2. *Ez a Banach-tér $1 \le p < \infty$ esetén szeparábilis - ekkor egy mindenütt sűrű megszámlálható altér például a*

$$c_{00}^{\mathbb{Q}} := \left\{a \in c_{00} :\ a_n \in \mathbb{Q}\ (n \in \mathbb{N})\right\}$$

   halmaz -, de $p = \infty$ esetén nem szeparábilis.

3. *Tetszőleges $A \subset l_p$ $(1 \le p < \infty)$ halmaz pontosan akkor prekompakt, ha korlátos, és*

$$\sup_{a\in A} \sum_{j=n}^{\infty} |a_j|^p \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty) \tag{1.4}$$

   teljesül.

4. *$0 < p \le q \le \infty$ esetén minden $a \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ sorozatra teljesül, hogy $\|a\|_q \le \|a\|_p$, továbbá tetszőleges $a \in l_1$ sorozat esetén $\lim_{p\to\infty} \|a\|_p = \|a\|_\infty$.*

Bizonyítás. Csak a 2. és a 3. pont bizonyítását részletezzük.

(2.) : $1 \le p < \infty$ esetén evidens, hogy $c_{00}^{\mathbb{Q}} \subset l_p$, és tetszőleges $a := (a_n) \in l_p$ sorozatra

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists m_0 \in \mathbb{N} : \quad \sum_{k=m}^{\infty} |a_k|^p < \epsilon \quad (m \ge m_0).$$

Legyen

$$\widetilde{a} := (a_1, \ldots, a_{m_0}, 0, \ldots) \in c_{00} \quad \Rightarrow \quad \|a - \widetilde{a}\|_p^p < \epsilon,$$

tehát a tetszőlegesen approximálható c_{00}-beli sorozattal, és világos, hogy $c_{00}^{\mathbb{Q}}$ megszámlálható, és sűrű c_{00}-ban.

Ha $p = \infty$, akkor felhasználhatjuk a 2.1.6 Állítást, ugyanis ekkor $l_\infty = B(\mathbb{N})$ figyelembe vételével rögtön következik, hogy az $(l_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ tér nem szeparábilis.

(3.′) : Tegyük fel, hogy az A halmaz prekompakt. Ekkor A korlátos, és minden $\epsilon > 0$-ra létezik véges fedő $\epsilon^{\frac{1}{p}}$-háló A-hoz, legyen egy ilyen $\epsilon^{\frac{1}{p}}$-háló $M = \{m^1, \ldots, m^r\} \subset l_p$. Mivel M véges halmaz, és tetszőleges $j \in \overline{1,r}$ esetén $m^j \in l_p$, ezért

$$\exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : \quad \sum_{k=n_\epsilon}^{\infty} |m_k^j|^p < \epsilon \quad (j \in \overline{1,r}).$$

Legyen $a \in A$ tetszőleges, és legyen $m^j \in M$ olyan sorozat, mellyel $\left\|a - m^j\right\|_p < \epsilon^{\frac{1}{p}}$, ekkor

$$\sum_{k=n}^{\infty} |a_k|^p \le 2^{p-1} \left(\sum_{k=n}^{\infty} |a_k - m_k^j|^p + \sum_{k=n}^{\infty} |m_k^j|^p \right) < 2^p \epsilon \quad (n \ge n_\epsilon)\,,$$

tehát (1.4) is teljesül, így a feltétel szükségességét beláttuk.

(3.″) : Tegyük fel, hogy $A \subset l_p$ korlátos, illetve (1.4) teljesül A-ra. Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban legyen $p = 1$, de a bizonyítás menete bármely $1 < p < \infty$ értékre teljesen hasonló. Legyen $(a^k)_k$ tetszőleges sorozat A-ban, ekkor mivel az A halmaz korlátos, ezért $(a^k)_k$ korlátos l_1-ben, így minden rögzített $j \in \mathbb{N}$-re $(a_j^k)_k \subset \mathbb{K}$ korlátos sorozat, tehát alkalmazható a Bolzano-Weierstrass tétel, ami szerint rekurzíve megadható a következő tulajdonságú részsorozatok sorozata és egy $b := (b_k) \subset \mathbb{K}$ sorozat:

$$(a^{0,k})_k := (a^k)_k, \ m \in \mathbb{N} \text{ fix} \quad \Rightarrow \quad \exists \ (a^{m,k})_k \subset (a^{m-1,k})_k : \ a_j^{m,k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} b_j \quad (j \in \overline{1,m})$$

Tekintsük a $(d^k)_k := (a^{k,k})_k$ átlós részsorozatot, ekkor a konstrukció miatt

$$(d^k)_{k=r}^{\infty} = (a^{k,k})_{k=r}^{\infty} \subset (a^{r,k})_{k=r}^{\infty} \ (r \in \mathbb{N}) \quad \Rightarrow \quad d_r^k = a_r^{r,l_k} \overset{l_k\to\infty}{\longrightarrow} b_r \ (r \in \mathbb{N}),$$

ahol a $d_r^k = a_r^{r,l_k}$ egyenlőség elegendően nagy $k \in \mathbb{N}$ indextől teljesül. Ezek alapján pedig

$$\forall \epsilon > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ \exists k_0 := k_0(\epsilon, n) \in \mathbb{N} : \quad |d_r^k - b_r| < \frac{\epsilon}{2n} \quad (k \ge k_0, \ r \in \overline{1,n}),$$

$$\text{ezért } \forall \epsilon > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ \exists m_0 := m_0(\epsilon, n) \in \mathbb{N} : \quad |d_r^k - d_r^m| < \frac{\epsilon}{n} \quad (k \ge m \ge m_0, \ r \in \overline{1,n}).$$

Az eddigi eredményeket figyelembe véve már következik az alábbi felső becslés:

$$\left\|d^k - d^m\right\|_1 = \sum_{r=1}^{n} |d_r^k - d_r^m| + \underbrace{\sum_{r=n+1}^{\infty} |d_r^k - d_r^m|}_{\le 2 \sup_{a \in A} \sum_{j=n+1}^{\infty} |a_j| < 2\epsilon} < 3\epsilon \quad (k \ge m \ge m_0, \ n \ge n_0),$$

ahol n_0 a feltételből választott, az egyenlőtlenséget teljesítő szám. Mindezek szerint $(d^k)_k$ Cauchy-sorozat l_1-ben, ezért az 1. pont szerint konvergens, tehát az A halmaz valóban prekompakt. □

1.1.10. Állítás. *A* $(c, \|\cdot\|_\infty)$*, illetve* $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ *alterek zárt, szeparábilis alterei az* $(l_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ *Banach-térnek, így maguk is Banach-terek, viszont* $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ *nem zárt altér, ebben az esetben a* $\overline{c_{00}} = c_0$ *egyenlőség teljesül.*

1.1.11. Megjegyzés. Legyen $a := (a_n) \in c$, ekkor jelölje $Lim(a) := \lim_{n\to\infty} a_n$ a limesz funkcionált. Evidens, hogy Lim folytonos és lineáris, valamint $Ker(Lim) = c_0$, tehát c_0 zárt altér.

1.1.12. Definíció. *Jelölje*

$$\zeta := \Big\{(n_1, n_2, \ldots, n_r) : \ n_1 < \ldots < n_r, \ r \in \mathbb{N}\Big\}$$

az $\mathbb{N}$ *felosztásainak halmazát, ekkor a*

$$J := \left\{ a \in c_0 : \ \sup_{Z\in\zeta} \left\{ \left(\sum_{k=1}^{r-1} |a_{n_{k+1}} - a_{n_k}|^2 + |a_{n_r} - a_{n_1}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} < \infty \right\}$$

halmazt az

$$\|a\|_J := \sup_{Z\in\zeta} \left\{ \left(\sum_{k=1}^{r-1} |a_{n_{k+1}} - a_{n_k}|^2 + |a_{n_r} - a_{n_1}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (a \in J)$$

normával James-térnek nevezzük.

1.1.13. Megjegyzés. Az 1.1.12 Definícióban bevezetett J térre $J \subsetneq c_0$, ugyanis tekintsük az

$$a := (a_n), \qquad a_n := (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

módon definiált sorozatot, ekkor nyilván $a \in c_0$, de $a \notin J$.

1.1.14. Állítás. $(J, \|\cdot\|_J)$ *Banach-tér.*

Bizonyítás. Elemi számításokkal igazolható, hogy $(J, \|\cdot\|_J)$ normált teret alkot, ezért rátérünk a teljesség bizonyítására. Jelölje tetszőleges $Z := (n_1, \ldots, n_r) \in \zeta$ és $a := (a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ esetén

$$|a|_Z := \left(\sum_{k=1}^{r-1} |a_{n_{k+1}} - a_{n_k}|^2 + |a_{n_r} - a_{n_1}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Legyen $(a^n)_n$ Cauchy-sorozat J-ben, ekkor

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \quad \|a^m - a^n\|_J < \sqrt{2\epsilon} \quad (m \geq n \geq N). \tag{1.5}$$

Tetszőleges $j > i$ $(i, j \in \mathbb{N})$ esetén a speciális $(i, j) \in \zeta$ felosztással

$$2|a_j^m - a_j^n - a_i^m + a_i^n|^2 \leq \|a^m - a^n\|_J^2 < 2\epsilon \quad (m \geq n \geq N).$$

Mivel tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ esetén $a^k \in c_0$, ezért a $j \to \infty$ határátmenettel azt kapjuk, hogy $|a_i^n - a_i^m|^2 \leq \epsilon$, azaz bármely $i \in \mathbb{N}$-re az $(a_i^n)_n \subset \mathbb{K}$ Cauchy-sorozat, tehát konvergens. Jelölje $a := (a_n)$ az így kapott határsorozatot, ekkor tetszőleges $Z \in \zeta$ felosztás esetén érvényes, hogy $\lim_{n\to\infty} |a^n|_Z = |a|_Z$. Indirekt tegyük fel, hogy az $\big\{|a|_Z : Z \in \zeta\big\}$ halmaz nem korlátos, ekkor

$$\exists Z : \ |a|_Z > 1 + \sup_{n\in\mathbb{N}} \{\|a^n\|_J\}, \quad \text{de} \quad |a|_Z = \lim_{n\to\infty} |a^n|_Z \leq \liminf_{n\to\infty} \|a^n\|_J \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \{\|a^n\|_J\},$$

ami természetesen ellentmondás, tehát $a \in J$, valamint (1.5)-ből az $m \to \infty$ határátmenettel

$$\lim_{n\to\infty} \|a - a^n\|_J = 0,$$

amivel az állítást beláttuk. $\square$

Végül egy olyan sorozattérre mutatunk példát, amely izometrikusan izomorf az $(l_1, \|\cdot\|_1)$ térrel.

1.1.15. Definíció. *Jelölje*

$$bv := \left\{ a \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \ |a_1| + \sum_{n=2}^{\infty} |a_n - a_{n-1}| < \infty \right\}$$

a korlátos változású sorozatok vektorterét, és lássuk el a bv halmazt az

$$\|a\|_{bv} := |a_1| + \sum_{n=2}^{\infty} |a_n - a_{n-1}| \quad (a \in bv)$$

normával.

1.1.16. Állítás. *A $(bv, \|\cdot\|_{bv})$ pár Banach-tér, amely izometrikusan izomorf az $(l_1, \|\cdot\|_1)$ térrel.*

Bizonyítás. Tetszőleges $a := (a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ esetén vezessük be az $a_0 := 0$ segédtagot, illetve legyen ψ a

$$\psi : bv \to l_1, \qquad \psi(a) := (a_k - a_{k-1})_{k \in \mathbb{N}} \quad (a \in bv)$$

módon definiált leképezés, ekkor ψ nyilván lineáris, valamint izometrikus is, mivel

$$\|a\|_{bv} = |a_1| + \sum_{k=2}^{\infty} |a_k - a_{k-1}| = \|\psi(a)\|_1 \quad (a \in bv).$$

Legyen $b := (b_k) \in l_1$ tetszőleges, ekkor a

$$d := (d_n), \qquad d_n := \sum_{k=1}^{n} b_k \quad (n \in \mathbb{N})$$

módon definiált sorozatra nyilván $\|d\|_{bv} = \|b\|_1 < \infty$, így $d \in bv$, illetve $\psi(d) = b$, tehát ψ szürjektív. Továbbá ψ injektív is, mivel izometrikus, így bv izometrikusan izomorf az l_1 térrel, amely Banach-tér. □

1.2. Duális terek

Ebben a pontban az eddig bevezetett sorozatterek duális, illetve biduális tereivel foglalkozunk.

1.2.1. Tétel.

1. *Legyen $1 \leq p < \infty$, illetve q a p-hez tartozó konjugált kitevő. Ekkor a*

$$T : l_q \to (l_p)^* : \ a \mapsto \xi_a, \quad \textit{ahol} \quad \xi_a(b) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \quad (b \in l_p)$$

   leképezés egy izometrikus izomorfizmus.

2. *Az*

$$S : l_1 \to (c_0)^* : \ a \mapsto \psi_a, \quad \textit{ahol} \quad \psi_a(b) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \quad (b \in c_0)$$

   leképezés szintén izometrikus izomorfizmus.

Bizonyítás. A két bizonyítás nagyon hasonló, ezért csak az elsőt részletezzük.
A $T : l_q \to (l_p)^*$ leképezés nyilván lineáris, és az 1.1.5 Tétel miatt folytonos is, valamint a $\|\xi_a\| \leq \|a\|_q$ egyenlőtlenség is teljesül. T injektív, ugyanis legyen $a \in l_q$ olyan sorozat, amelyre $\xi_a(b) = 0$ minden $b \in l_p$ esetén. Jelölje $(x^i)_i \subset l_p$ azokat a sorozatokat, melyekre $x^i_n := \delta_{i,n}$ $(i, n \in \mathbb{N})$, ekkor

$$0 = \xi_a(x^i) = a_i \quad \Rightarrow \quad a \equiv 0.$$

Legyen $\xi \in (l_p)^*$, és definiáljuk az $a := (a_i)$ sorozatot az $a_i := \xi(x^i)$ módon. Azt kell belátnunk, hogy $a \in l_q$, illetve $\xi = \xi_a$ teljesül. Ehhez vezessük be a következő segédsorozatot:

$$z_n = \begin{cases} \frac{|a_n|^q}{a_n} & \text{ha } a_n \neq 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Ekkor rögzített $N \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{i=1}^N |z_i|^p = \sum_{i=1}^N |a_i|^{p(q-1)} = \sum_{i=1}^N |a_i|^q \overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^N a_i z_i = \sum_{i=1}^N z_i \xi(x^i) =$$

$$= \xi\left(\sum_{i=1}^N z_i x^i\right) \leq \|\xi\| \left(\sum_{i=1}^N |z_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \overset{(**)}{=} \|\xi\| \left(\sum_{i=1}^N |a_i|^q\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ebből $(*)$ és $(**)$ alapján

$$\left(\sum_{i=1}^N |a_i|^q\right)^{1-\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^N |a_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|\xi\| \quad (N \in \mathbb{N}),$$

ahonnan az $N \to \infty$ határátmenetet elvégezve kapjuk, hogy $a \in l_q$, és a normák egyenlősége is teljesül. Már csak azt kell belátnunk, hogy $\xi_a = \xi$, de ez igaz, ugyanis mindkét leképezés folytonos, valamint az $(x^i)_i$ sorozatok által kifeszített sűrű altéren megegyeznek. □

1.2.2. Következmény. Az 1.2.1 Tétel szerint $1 \leq p < \infty$ esetén $(l_p)^* \cong l_q$ teljesül, ahol q a p-hez tartozó konjugált kitevő, így tetszőleges $1 < p < \infty$ értékre az l_p tér reflexív Banach-tér.

1.2.3. Következmény. A $(c, \|\cdot\|_\infty)$ tér minden folytonos lineáris funkcionálja a következő alakba írható:

$$\psi(a) = \alpha Lim(a) + \xi_x(a) \quad (\psi \in c^*,\ \alpha \in \mathbb{K},\ a \in c,\ x \in l_1)$$

Bizonyítás. Jelölje $e := (1, 1, \ldots)$ a konstans 1 sorozatot, ekkor nyilvánvalóan $a \in c$ pontosan akkor teljesül, ha $a - Lim(a)e \in c_0$, azaz

$$c = \Big\{a = b + \lambda e, \text{ ahol } b \in c_0,\ \lambda := Lim(a) \in \mathbb{K}\Big\}. \tag{1.6}$$

Legyen $\psi \in c^*$ tetszőleges, ekkor ψ-nek c_0-ra történő megszorítása is korlátos lineáris funkcionál, ezért az 1.2.1 Tétel és (1.6) szerint

$$\psi(a) = \psi(b) + Lim(a) \underbrace{\psi(e)}_{=:M} = MLim(a) + \sum_{k=1}^\infty x_k b_k,$$

ahol $x \in l_1$ az 1.2.1 Tételben látott reprezentáns sorozat. Ebből a $b_k = a_k - Lim(a)$ helyettesítéssel a keresett előállítást kapjuk. □

1.2.4. Következmény. A c_0 tér nem reflexív Banach-tér, ugyanis az 1.2.1 Tétel alapján $(c_0)^{**} \cong l_\infty$, viszont az 1.1.9 és 1.1.10 Állítások szerint c_0 szeparábilis, míg l_∞ nem szeparábilis.

Az $(l_\infty)^*$ tér meghatározása további előkészületeket igényel.

1.2.5. Definíció. *Jelölje*

$$\widetilde{m}(\mathbb{N};\mathbb{K}) := \Big\{\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{K} : \ A \cap B = \emptyset \ \Rightarrow \ \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)\Big\}$$

halmazt, azaz a $\mathcal{P}(\mathbb{N})$-en értelmezett additív leképezéseket, és legyen tetszőleges $\mu \in \widetilde{m}(\mathbb{N};\mathbb{K})$ függvényre

$$|\mu|(\mathbb{N}) := \sup\left\{\sum_{j=1}^{m} |\mu(A_j)| : \ \{A_j\}_{j=1}^m \textit{ páronként diszjunktak, és } \bigcup_{j=1}^{m} A_j = \mathbb{N}\right\}.$$

Jelölje továbbá

$$m(\mathbb{N};\mathbb{K}) := \big\{\mu \in \widetilde{m}(\mathbb{N};\mathbb{K}) : \ |\mu|(\mathbb{N}) < \infty\big\}.$$

1.2.6. Megjegyzés. A továbbiakban jelölje $\tau(\mathbb{N})$ az $\mathbb{N}$ partícióinak halmazát, azaz

$$\tau(\mathbb{N}) := \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \tau_m(\mathbb{N}) := \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \Big\{\{A_j\}_{j=1}^m \subset \mathcal{P}(\mathbb{N}) \text{ páronként diszjunktak, és } \bigcup_{j=1}^{m} A_j = \mathbb{N}\Big\}.$$

1.2.7. Állítás. *Az $\Big(m(\mathbb{N};\mathbb{K}), \|\cdot\|_{m(\mathbb{N};\mathbb{K})}\Big)$ pár, ahol $\|\mu\|_{m(\mathbb{N};\mathbb{K})} := |\mu|(\mathbb{N})$, egy Banach-tér.*

Bizonyítás. Könnyen belátható, hogy $\Big(m(\mathbb{N};\mathbb{K}), \|\cdot\|_{m(\mathbb{N};\mathbb{K})}\Big)$ normált tér, ezért rátérünk a teljesség bizonyítására. Legyen $(\mu_n)_n$ Cauchy-sorozat $m(\mathbb{N};\mathbb{K})$-ban, ekkor tetszőleges $A \subset \mathbb{N}$ halmazra $\{A, A^c\} \in \tau(\mathbb{N})$, így $\|\cdot\|_{m(\mathbb{N};\mathbb{K})}$ definíciója miatt

$$\|\mu_n - \mu_m\|_{m(\mathbb{N},\mathbb{K})} \geq |\mu_n(A) - \mu_m(A)| + |\mu_n(A^c) - \mu_m(A^c)| \geq |\mu_n(A) - \mu_m(A)|,$$

tehát a $(\mu_n(A))_n \subset \mathbb{K}$ sorozat Cauchy, ezért a

$$\mu(A) := \lim_{n\to\infty} \mu_n(A)$$

határérték létezik, és a limesz tulajdonságai miatt nyilván $\mu \in \widetilde{m}(\mathbb{N};\mathbb{K})$. Legyen $\epsilon > 0$ adott, ekkor tetszőleges $\{A_i\}_{i=1}^r \in \tau(\mathbb{N})$ esetén

$$\exists N \in \mathbb{N} : \quad |\mu_m(A_i) - \mu(A_i)| \leq \frac{\epsilon}{r} \quad (m \geq N, \ i \in \overline{1,r}).$$

Ha $m \geq N$, akkor

$$\sum_{i=1}^{r} |\mu(A_i)| \leq \sum_{i=1}^{r} |\mu(A_i) - \mu_m(A_i)| + \sum_{i=1}^{r} |\mu_m(A_i)| \leq \epsilon + |\mu_m|(\mathbb{N}) \leq \epsilon + \underbrace{\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\mu_n\|_{m(\mathbb{N};\mathbb{K})}}_{=:K},$$

ahol K a $(\mu_n)_n$ sorozat Cauchy-tulajdonsága miatt véges, így $\mu \in m(\mathbb{N};\mathbb{K})$. □

1.2.8. Definíció. *Jelölje*

$$t := \Big\{a \in l_\infty : \ \textit{az } \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \textit{ halmaz véges}\Big\}$$

a lépcsős sorozatok halmazát.

1.2.9. Tétel.

1. *A lépcsős sorozatok halmaza a* $\|\cdot\|_\infty$ *normával sűrű az* l_∞ *térben.*

2. *Tetszőleges* $a \in t$ *sorozatra és* $\mu \in m(\mathbb{N};\mathbb{K})$ *halmazfüggvényre legyen*

$$\widetilde{\mu}(a) := \sum_{j=1}^{r} \xi_j \mu(A_j), \quad \textit{ahol} \quad A_j := \left\{ i \in \mathbb{N} : \ a_i = \xi_j \right\} \quad (j \in \overline{1,r}).$$

   Ekkor

$$|\widetilde{\mu}(a)| \le \|a\|_\infty \|\mu\|_{m(\mathbb{N};\mathbb{K})} .$$

3. *Legyen* $a \in l_\infty$, *és konvergáljon egy* $(b^k)_k \subset t$ *sorozat* $\|\cdot\|_\infty$ *normában az* a*-hoz, ekkor létezik a* $\lim_{k\to\infty} \widetilde{\mu}(b^k) \in \mathbb{K}$ *határérték, és ez nem függ a választott lépcsős sorozattól, ezért a*

$$\hat{\mu}(a) := \lim_{k\to\infty} \widetilde{\mu}(b^k) \quad (a \in l_\infty) \tag{1.7}$$

   módon kitrejeszthetjük a $\widetilde{\mu}$ *függvényt az egész* l_∞ *térre.*

Bizonyítás. Az első állítás nyilvánvaló, a második állítás pedig rögtön következik abból az egyszerű észrevételből, hogy $\{A_j\}_{j=1}^r \in \tau(\mathbb{N})$, ezért rátérünk az utolsó pont bizonyítására.
Ha $\lim_{k\to\infty} \left\|a - b^k\right\|_\infty = 0$, akkor a második pont alapján $\left(\widetilde{\mu}(b^k)\right)_k$ Cauchy-sorozat $\mathbb{K}$-ban, ugyanis $(b^k)_k$ Cauchy-sorozat l_∞-ben. Az egyértelműséghez elegendő azt belátni, hogy

$$\lim_{k\to\infty} \left\|b^k\right\|_\infty = 0 \ \left((b^k)_k \subset t\right) \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \left|\widetilde{\mu}(b^k)\right| = 0,$$

ami szintén a második állításból következik. □

1.2.10. Tétel. *A*

$$T : m(\mathbb{N};\mathbb{K}) \to (l_\infty)^* : \ \mu \mapsto \hat{\mu} \quad (\mu \in m(\mathbb{N};\mathbb{K}))$$

leképezés izometrikus izomorfizmus, ahol $\hat{\mu}$ *az (1.7)-ben látott módon van értelmezve.*

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy T lineáris leképezés, illetve tetszőleges $\mu \in m(\mathbb{N};\mathbb{K})$ estén $\hat{\mu} \in (l_\infty)^*$. Az 1.2.9 Tétel 2. pontjából következik, hogy T folytonos, valamint a $\|\hat{\mu}\| \le \|\mu\|_{m(\mathbb{N};\mathbb{K})}$ egyenlőtlenség teljesül. Jelölje tetszőleges $A \subset \mathbb{N}$ esetén $\chi^A := (\chi^A_n)_n$ az A halmaz karakterisztikus sorozatát. Adott $\xi \in (l_\infty)^*$ funkcionál esetén definiáljuk a μ_ξ halmazfüggvényt a

$$\mu_\xi(A) := \xi(\chi^A) \quad (A \subset \mathbb{N}) \tag{1.8}$$

módon, ekkor μ_ξ nyilván addítív, valamint

$$\|\mu_\xi\|_{m(\mathbb{N};\mathbb{K})} \overset{(1.8)}{=} \sup\left\{ \sum_{k=1}^{n} \xi(\chi^{A_k}) : \ \{A_k\}_{k=1}^n \in \tau(\mathbb{N}) \right\} = \sup\left\{ \xi\left(\sum_{k=1}^{n} (\chi^{A_k}) \right) : \ \{A_k\}_{k=1}^n \in \tau(\mathbb{N}) \right\} \le \|\xi\|,$$

tehát $\mu_\xi \in m(\mathbb{N};\mathbb{K})$, és $\|\mu_\xi\|_{m(\mathbb{N};\mathbb{K})} = \|\xi\|$ is teljesül, továbbá ξ folytonossága és linearitása miatt $\hat{\mu}_\xi = \xi$, így T izometrikus izomorfizmus $m(\mathbb{N};\mathbb{K})$ és $(l_\infty)^*$ terek között. □

Végül az 1.1.12 Definícióban bevezetett J térnek említjük meg egy érdekes tulajdonságát.

1.2.11. Megjegyzés. (James-tétel) A J tér izometrikusan izomorf biduális terével, viszont nem reflexív Banach-tér, ugyanis a $\widetilde{J} : J \to J^{**}$ kanonikus beágyazás esetén $\mathrm{Im}(\widetilde{J})$ kodimenziója J^{**}-ban 1.

2. fejezet

Alapvető függvényterek

Ebben a fejezetben olyan önmagukban is fontos függvénytereket fogunk vizsgálni, amelyek ismerete nélkülözhetetlen lesz a későbbi fejezetek szempontjából. A továbbiakban is a különböző függvényekhalmazokon mindig a szokásos pontonkénti műveleteket tekintjük.

2.1. Korlátos, folytonos és egyenletesen folytonos függvények

2.1.1. Definíció. *Legyen* $(\mathbb{X}, d)$ *metrikus tér,* $(\mathbb{Y}, \|\cdot\|_{\mathbb{Y}})$ *normált tér, ekkor*

1. $B(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) := \left\{ f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y} : \ \sup_{x \in \mathbb{X}} \|f(x)\|_{\mathbb{Y}} < \infty \right\}$ *(korlátos függvények)*
2. $C(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) := \left\{ f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y} : \ f \text{ folytonos } \mathbb{X}\text{-en} \right\}$ *(folytonos függvények)*
3. $UCB(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) := \left\{ f \in B(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) : \ f \text{ egyenletesen folytonos } \mathbb{X}\text{-en} \right\}$ *(korlátos és egyenletesen folytonos függvények)*

Az előző halmazokat lássuk el az

$$\|f\|_{\infty} := \sup_{x \in \mathbb{X}} \|f(x)\|_{\mathbb{Y}}$$

leképezéssel.

2.1.2. Állítás. *Legyen* $(\mathbb{X}, d)$ *metrikus tér,* $(\mathbb{Y}, \|\cdot\|_{\mathbb{Y}})$ *Banach-tér, ekkor*

1. $(B(\mathbb{X}, \mathbb{Y}), \|\cdot\|_{\infty})$ *Banach-tér.*
2. $(C(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \cap B(\mathbb{X}, \mathbb{Y}), \|\cdot\|_{\infty})$ *zárt altere a* $B(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ *térnek.*
3. $(UCB(\mathbb{X}, \mathbb{Y}), \|\cdot\|_{\infty})$ *zárt altere a* $B(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$*, valamint a* $C(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \cap B(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ *térnek is.*

2.1.3. Megjegyzés. Jelölje $\mathbb{Y} = \mathbb{K}$ esetén

$$B(\mathbb{X}) := B(\mathbb{X}, \mathbb{K}), \quad C(\mathbb{X}) := C(\mathbb{X}, \mathbb{K}), \quad UCB(\mathbb{X}) := UCB(\mathbb{X}, \mathbb{K}).$$

2.1.4. Megjegyzés. Ha $(\mathbb{X}, d)$ kompakt metrikus tér, akkor a Heine-tétel alapján

$$UCB(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = C(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \cap B(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = C(\mathbb{X}, \mathbb{Y}).$$

2.1.5. Megjegyzés. A 2.1.1 Definíció 1. pontja akkor is értelmes, ha nem tesszük fel, hogy az $\mathbb{X}$ téren értelmezve van valamilyen metrika, hanem egyszerűen egy $H \neq \emptyset$ halmazt tekintünk. Ekkor továbbra is érvényben marad, hogy a $B(H) := B(H, \mathbb{K})$ tér az $\|f\|_{B(H)} := \|f\|_\infty$ normával Banach-teret alkot.

2.1.6. Állítás. *Ha H végtelen halmaz, akkor a $(B(H), \|\cdot\|_\infty)$ Banach-tér nem szeparábilis.*

Bizonyítás. Mivel H végtelen halmaz, ezért

$$\exists x := (x_n) \subset H : \quad x_i \neq x_j \quad (i, j \in \mathbb{N} : \ i \neq j).$$

Evidens, hogy a $B(H)$ tér végtelen elemű. Legyen $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset B(H)$ tetszőleges megszámlálható halmaz, és definiáljuk a $g \in B(H)$ függvényt a következőképpen:

$$g(x) := \begin{cases} f_n(x_n) + 1 & \text{ha } x = x_n : |f_n(x_n)| < 1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Ekkor nyilván $\|g - f_n\|_\infty \geq 1$ $(n \in \mathbb{N})$, tehát a $g \in B(H)$ függvényt nem lehet tetszőlegesen approximálni $\{f_n\}$ elemeivel, ezért $\{f_n\}$ nem sűrű $B(H)$-ban. $\square$

A következőekben a $C[a, b] := C([a, b], \mathbb{R})$ $(a, b \in \mathbb{R})$ tér szeparábilitását vizsgáljuk a Bernstein-féle polinomok segítségvel. A későbbiekben ennél egy sokkal általánosabb eredményt is be fogunk látni.

2.1.7. Definíció. *Adott $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény és $n \in \mathbb{N}$ index esetén az f-hez tartozó n-edik Bernstein-polinomot a következőképpen definiáljuk:*

$$B_n f(x) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad (x \in [0, 1])$$

2.1.8. Lemma. *Jelölje $h_n(x) := x^n \quad (x \in [0, 1],\ n \in \mathbb{N}_0)$, ekkor*

$$B_n h_0(x) = h_0(x), \quad B_n h_1(x) = h_1(x), \quad (B_n h_2)(x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n} \qquad (x \in [0, 1],\ n \in \mathbb{N})$$

Bizonyítás. Jelölje

$$p_{nk}(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad (k \in \mathbb{N}_0,\ n \in \mathbb{N} :\ 0 \leq k \leq n,\ x \in [0, 1]) \tag{2.1}$$

- $B_n h_0(x) = h_0(x)$ azt jelenti, hogy
  $$\sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x) = 1,$$
  ami triviális a binomiális tételből.
- $B_n h_1(x) = h_1(x)$ azt jelenti, hogy
  $$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} p_{nk}(x) = x,$$
  ami teljesül, ugyanis
  $$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} p_{nk}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{k+1}(1-x)^{n-k-1} = x \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-k-1}}_{p_{n-1,k}(x)} = x.$$

- $(B_n h_2)(x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$ azt jelenti, hogy
$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 p_{nk}(x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n},$$
ekkor az előző esethez hasonlóan
$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 p_{nk}(x) = x \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-k-1}.$$
Ha $n = 1$, akkor az állítás nyilvánvalóan teljesül, $n > 1$ esetén pedig
$$\frac{k+1}{n} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{k+1}{n-1} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 p_{nk}(x) = x \frac{n-1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n-1} p_{n-1,k}(x) =$$
$$= x \frac{n-1}{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n-1} p_{n-1,k}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n-1} p_{n-1,k}(x) \right) = x \frac{n-1}{n} \left(x + \frac{1}{n-1} \right) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n},$$
amivel az összes esetet beláttuk. □

2.1.9. Lemma. *Legyen* $n \in \mathbb{N}, \ x \in [0,1]$, *ekkor*
$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \cdot p_{nk}(x) = \frac{x(1-x)}{n} < \frac{1}{4n}$$

Bizonyítás. A zárójel felbontása után a 2.1.8 Lemmából rögtön következik az állítás. □

2.1.10. Tétel. (Weierstrass-féle approximációs tétel)
Jelölje
$$\mathcal{P} := \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{R} : \ \exists p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ polinom \ : \ f = p|_{[a,b]} \right\},$$
ekkor minden $f \in C[a,b]$ *függvény tetszőleges pontossággal egyenletesen közelíthető polinomokkal, azaz*
$$\forall f \in C[a,b] \ \forall \epsilon > 0 \ \exists p \in \mathcal{P} : \quad \|f - p\|_\infty < \epsilon.$$

Bizonyítás. Mint az könnyen belátható, átparaméterezés segítségével az állítást visszavezethetjük a $[0,1]$ intervallumra, ezért a bizonyítást elegendő csupán ebben az esetben elvégezni.
Legyen tehát $f \in C[0,1]$, ekkor a 2.1.4 Megjegyzés alapján
$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \quad x, y \in [0,1], \ |x - y| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}.$$
Ha $x \in [0,1], \ n \in \mathbb{N}$, akkor
$$|B_n f(x) - f(x)| \overset{2.1.8}{=} \left| \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) p_{nk}(x) - f(x) \sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x) \right| \le \sum_{k=0}^{n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| p_{nk}(x).$$
Jelölje $x \in [0,1]$ esetén
$$N_\delta(x) := \left\{ k \in \mathbb{N}_0 : \ 0 \le k \le n, \ \left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta \right\}, \ M_\delta(x) := \left\{ k \in \mathbb{N}_0 : \ 0 \le k \le n, \ \left|\frac{k}{n} - x\right| \ge \delta \right\},$$

ekkor

$$\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta \Rightarrow \left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|<\frac{\epsilon}{2}, \quad \text{és} \quad \left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\le 2\,\|f\|_\infty \qquad (x\in[0,1])$$

felhasználásával

$$\sum_{k\in N_\delta(x)}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|p_{nk}(x)\le\frac{\epsilon}{2}\sum_{k=0}^{n}p_{nk}(x)\overset{2.1.8}{=}\frac{\epsilon}{2},$$

valamint

$$\sum_{k\in M_\delta(x)}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|p_{nk}(x)\le 2\,\|f\|_\infty\cdot\sum_{k\in M_\delta(x)}\left(\frac{1}{\delta}\left(\frac{k}{n}-x\right)\right)^2\cdot p_{nk}(x)\overset{2.1.9}{\le}\frac{\|f\|_\infty}{2\delta^2 n}.$$

Legyen $N\in\mathbb{N}$ olyan index, hogy

$$\frac{\|f\|_\infty}{2\delta^2 n}<\frac{\epsilon}{2} \quad (n\ge N),$$

ekkor az előzőek alapján

$$\|B_n f-f\|_\infty\le\frac{\epsilon}{2}+\frac{\|f\|_\infty}{2\delta^2 n}<\epsilon \quad (n\ge N,\ x\in[0,1]),$$

amivel az állítást beláttuk. □

2.1.11. Következmény. A 2.1.10 Tétel szerint tetszőleges $a,b\in\mathbb{R}$ $(a\ne b)$ számokkal a $C[a,b]$ tér szeparábilis, ugyanis a valós együtthatós polinomok halmaza sűrű $C[a,b]$-ben, amelyek nyilván tetszőleges pontossággal egyenletesen approximálhatóak racionális együtthatós polinomokkal, melyek viszont megszámlálhatóak.

A folytonos függvények duális terének vizsgálatát is a speciális $C[a,b]$ esetben végezzük, de az erre vonatkozó tétel kimondása további előkészületeket igényel.

2.1.12. Definíció. *Legyen $a,b\in\mathbb{R}$ $(a\le b)$, valamint $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, ekkor jelölje*

$$V_a^b(f):=\sup\left\{\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|:\ n\in\mathbb{N},\ a=x_0\le x_1\le\ldots\le x_n=b\right\}$$

az f függvény teljes megváltozását az $[a,b]$ intervallumon. Ezzel a jelöléssel élve legyen

$$BV[a,b]:=\left\{f:[a,b]\to\mathbb{R}:\ V_a^b(f)<\infty\right\}$$

az $[a,b]$ intervallumon korlátos változású függvények halmaza. Továbbá jelölje

$$\|f\|_{BV}:=|f(a)|+V_a^b(f) \quad (f\in BV[a,b]).$$

2.1.13. Megjegyzés. Az egyszerűbb jelölés érdekében legyen

$$\tau[a,b]:=\Big\{(x_0,\ldots,x_n):\ n\in\mathbb{N},\ x_0=a,\ x_n=b,\ x_0\le\ldots\le x_n\Big\}$$

az $[a,b]$ intervallum felosztásainak halmaza.

2.1.14. Megjegyzés. Elemi számításokkal igazolható, hogy $BV[a,b]$ lineáris altér a $B[a,b]:=B([a,b],\mathbb{R})$ vektortérben, $(BV[a,b],\|\cdot\|_{BV})$ normált teret alkot, és tetszőleges $f\in BV[a,b]$ függvényre teljesül az $\|f\|_\infty\le\|f\|_{BV}$ egyenlőtlenség.

2.1.15. Állítás. $(BV[a,b], \|\cdot\|_{BV})$ *Banach-tér.*

Bizonyítás. A 2.1.14 Megjegyzés alapján maradt a teljesség bizonyítása. Legyen $(f_n)_n$ Cauchy-sorozat $(BV[a,b], \|\cdot\|_{BV})$-ben, ekkor szintén a 2.1.14 Megjegyzés miatt $(f_n)_n$ Cauchy-sorozat $(B[a,b], \|\cdot\|_\infty)$-ben, ezért a 2.1.2 Tétel alapján

$$\exists f \in B[a,b]: \quad \lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0. \tag{2.2}$$

Mivel tetszőleges $g \in BV[a,b]$ függvény esetén $V_a^b(g) \le \|g\|_{BV}$, ezért minden $\epsilon > 0$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$ index, amelyre

$$\sum_{j=1}^{k} |(f_m(x_j) - f_n(x_j)) - (f_m(x_{j-1}) - f_n(x_{j-1}))| < \frac{\epsilon}{2} \quad (n, m \ge N,\ (x_0, \ldots, x_k) \in \tau[a,b]).$$

Ezért ha $(x_0, \ldots, x_k) \in \tau[a,b]$, akkor (2.2) miatt

$$\exists n_k \in \mathbb{N}: \quad \|f_n - f\|_\infty < \frac{\epsilon}{4k} \quad (n_k \le n),$$

ezek alapján pedig

$$\sum_{j=1}^{k} |(f_n(x_j) - f(x_j)) - (f_n(x_{j-1}) - f(x_{j-1}))| < \frac{\epsilon}{2} + 2\sum_{j=1}^{k} \|f_{n_k} - f\|_\infty < \epsilon \quad (N \le n_k \le n). \tag{2.3}$$

Szuprémumot véve adódik, hogy $V_a^b(f_n - f) \le \epsilon$ $(N \le n)$, azaz $f_n - f \in BV[a,b]$, így mivel $BV[a,b]$ vektortér, $f \in BV[a,b]$ is teljesül. Továbbá (2.3) alapján $\lim_{n\to\infty} V_a^b(f_n - f) = 0$, ezért $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{BV} = 0$, amivel az állítást beláttuk. □

2.1.16. Lemma. (Jordan-tétel) $f \in BV[a,b]$ *pontosan akkor teljesül, ha* f *előállítható két monoton növekvő függvény különbségeként.*

Bizonyítás. Legyen $f \in BV[a,b]$, és tekintsük a

$$g(x) := V_a^x(f) \ (x \in (a,b]), \quad g(a) := 0$$

módon definiált függvényt, ekkor könnyen láthatóan mind g, mind $g + f$ monoton növekvő az $[a,b]$ intervallumon. A másik irány következik abból az elemi észrevételből, hogy a monoton függvények korlátos változásúak. □

2.1.17. Definíció. *Legyen* $f, g \in B([a,b], \mathbb{R})$, $F := (x_0, \ldots, x_n) \in \tau[a,b]$, $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ $(k \in \overline{1,n})$ *tetszőleges, ekkor az* f *függvény* F *felosztáshoz és* t_k $(k \in \overline{1,n})$ *értékekhez tartozó,* g*-re vonatkozó Riemann-Stieltjes integrálközelítő összegét a következőképpen definiáljuk:*

$$\sigma_F(f; g) := \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \, |g(x_k) - g(x_{k-1})|$$

Tegyük fel, hogy

$$(F_n)_n \subset \tau[a,b], \ \lim_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \lim_{n\to\infty} \sigma_{F_n}(f; g) \in \mathbb{R},$$

ekkor azt mondjuk, hogy az f *függvény Riemann-Stieltjes integrálható a* g*-re vonatkozóan* $[a,b]$*-n, és a határértéket az* f g*-re vonatkozó Riemann-Stieltjes integráljának nevezzük, jelölésben*

$$\int_a^b f \, dg := \lim_{n\to\infty} \sigma_{F_n}(f; g).$$

A Riemann-Stieltjes integrálokkal kapcsolatban az alábbi eredményekre lesz szükségünk, melyek bizonyításától eltekintünk:

2.1.18. Lemma.

1. *$f \in C[a,b]$, $g \in BV[a,b]$ függvények esetén létezik az f-nek a g-re vonatkozó Riemann-Stieltjes integrálja.*
2. *Legyen $g \in BV[a,b]$, ekkor*
$$\int_a^b f\,dg = 0 \quad (\forall f \in C[a,b])$$
pontosan akkor teljesül, ha a g függvénynek az a és b végpontokban, valamint minden folytonossági pontjában ugyanaz az értéke.

2.1.19. Definíció. *Az*
$$NBV[a,b] := \Big\{f_N \in BV[a,b]: \quad f_N(a) = 0, \quad f_N(t) = f_N(t+0)\ (t \in (a,b))\Big\}$$
halmazt az $\|f_N\|_{NBV} := V_a^b(f_N)$ leképezéssel normált korlátos változású függvényeknek nevezzük.

2.1.20. Megjegyzés. Megmutatható, hogy $(NBV[a,b], \|\cdot\|_{NBV})$ zárt lineáris altere a $(BV[a,b], \|\cdot\|_{BV})$ térnek, így maga is Banach-tér.

Ennyi előkészület után már rátérhetünk a $(C[a,b])^*$ tér meghatározására.

2.1.21. Tétel. (Riesz-tétel) *A*
$$\widetilde{T}: NBV[a,b] \to (C[a,b])^*: \ g_N \mapsto \psi, \quad \textit{ahol} \quad \psi(f) := \int_a^b f\,dg_N \quad (f \in C[a,b])$$
leképezés izometrikus izomorfizmus.

Bizonyítás. Legyen $\psi \in (C[a,b])^*$ tetszőleges. Először belátjuk, hogy található ψ-hez olyan $z \in BV[a,b]$ függvény, melyre $V_a^b(z) \le \|\psi\|$, valamint
$$\psi(f) = \int_a^b f\mathrm{d}z \quad (\forall f \in C[a,b]). \tag{2.4}$$
Mivel C[a,b] lineáris altere a $B[a,b]$ vektortérnek, ezért a Hahn-Banach tétel szerint ψ kiterjeszthető az egész $B[a,b]$ térre normatartó módon, azaz
$$\exists \Psi \in (B[a,b])^*: \quad \Psi(f) = \psi(f)\ (\forall f \in C[a,b]), \quad \text{és} \quad \|\Psi\| = \|\psi\|.$$
Definiáljuk a $z(t) := \Psi(\chi_{[a,t]})$ $(t \in [a,b])$ függvényt, ekkor nyilván $z(a) = 0$. Tetszőleges $(x_0, \ldots, x_n) \in \tau[a,b]$ esetén legyen $\lambda_i := \operatorname{sgn}\big(z(x_i) - z(x_{i-1})\big)$ $(i \in \overline{1,n})$. Ezekkel a jelölésekkel
$$\sum_{i=1}^n |z(x_i) - z(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^n \lambda_i\big(z(x_i) - z(x_{i-1})\big) = \sum_{i=1}^n \lambda_i\big(\Psi(\chi_{[a,x_i]}) - \Psi(\chi_{[a,x_{i-1}]})\big) =$$
$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i\big(\Psi(\chi_{(x_{i-1},x_i]})\big) = \Psi\underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_{(x_{i-1},x_i]}\right)}_{=:w} \le \|\Psi\| = \|\psi\|,$$
ugyanis $\|w\|_\infty = 1$, ha van olyan $i \in \overline{1,n}$, melyre $\lambda_i \ne 0$, de az egyenlőtlenség nyilván $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ esetben is teljesül. Ekkor az egyenlőtlenségben szuprémumot véve azt kapjuk, hogy z korlátos változású, és $V_a^b(z) \le \|\psi\|$.

(2.4) belátásához legyen $f \in C[a,b]$, illetve $F_n := (x_0, \dots, x_n) \in \tau[a,b]$ tetszőleges, ekkor

$$f_n(t) := \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\left(\chi_{[a,x_i]}(t) - \chi_{[a,x_{i-1}]}(t)\right) \quad \Rightarrow \quad \Psi(f_n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\big(z(x_i) - z(x_{i-1})\big). \tag{2.5}$$

Ha $(F_n)_n$ olyan felosztássorozat, melyre $\lim_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0$, akkor a 2.1.18 Lemma szerint (2.5) jobb oldalára

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\big(z(x_i) - z(x_{i-1})\big) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f \mathrm{d}z,$$

valamint $f \in C[a,b]$ miatt f egyenletesen folytonos, ezért

$$\sup_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f(t)| \leq \max_{i\in\overline{1,n}} \sup_{t\in(x_{i-1},x_i]} |f(x_i) - f(t)| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Rightarrow \quad \|f_n - f\|_\infty \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

így Ψ folytonossága miatt $\Psi(f_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Psi(f)$, ezért f folytonossága és (2.5) alapján

$$\psi(f) = \Psi(f) = \int_a^b f \mathrm{d}z \quad (\forall f \in C[a,b]),$$

amivel (2.4)-et beláttuk.

A probléma az, hogy a z függvény nincs egyértelműen meghatározva. Megmutatjuk, hogy ha a z függvényt egy megfelelő $z_N \in NBV[a,b]$ függvénnyel helyettesítjük, akkor az így kapott T leképezés már bijekció $(C[a,b])^*$ és $NBV[a,b]$ terek között.

Normáljuk a z függvényt a következő módon:

$$z_N(t) := \begin{cases} 0 & \text{ha } t = a \\ z(t+0) & \text{ha } t \in (a,b) \\ z(b) & \text{ha } t = b \end{cases}$$

Mivel z korlátos változású, ezért a 2.1.16 Lemma alapján minden $t \in (a,b)$ esetén létezik a $z(t+0) \in \mathbb{R}$ határérték, így z_N jól definiált. Belátjuk, hogy $z_N \in NBV[a,b]$, $V_a^b(z_N) \leq V_a^b(z)$, valamint

$$\psi(f) = \int_a^b f \mathrm{d}z_N = \int_a^b f \mathrm{d}z \quad (\forall f \in C[a,b]). \tag{2.6}$$

Legyen $(x_0, \dots, x_n) \in \tau[a,b]$ tetszőleges, ekkor nyilván

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists c_i > x_i : \quad |z(x_i + 0) - z(c_i)| < \frac{\epsilon}{2n} \qquad (i \in \overline{1, n-1}),$$

így

$$|z_N(x_i) - z_N(x_{i-1})| = |z(x_i + 0) - z(x_{i-1} + 0)| \leq |z(c_i) - z(c_{i-1})| + \frac{\epsilon}{n} \quad (i \in \overline{1, n-1}),$$

ahonnan a $c_0 := a,\ c_n := b$ végpontokkal együtt

$$\sum_{i=1}^{n} |z_N(x_i) - z_N(x_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^{n} |z(c_i) - z(c_{i-1})| + \epsilon \leq V_a^b(z) + \epsilon.$$

Itt szuprémumot véve azt kapjuk, hogy z_N korlátos változású, amiből z_N konstrukciója alapján következik, hogy $z_N \in NBV[a,b]$. Továbbá mivel ϵ tetszőleges volt, ezért az $\epsilon \to 0$ határátmenetet elvégezhetjük, ahonnan $V_a^b(z_N) \leq V_a^b(z)$ is adódik.

(2.6) bizonyításához vegyük figyelembe, hogy z_N definíciója miatt z folytonossági pontjaiban, valamint az a és b végpontokban is teljesül a $z_N(t) - z(t) = 0$ egyenlőség, ezért a 2.1.18 Lemmából éppen (2.6)-ot nyerjük. Teljesül továbbá, hogy

$$|\psi(f)| = \left| \int_a^b f \mathrm{d} z_N \right| \leq \sup_{t \in [a,b]} |f(t)| \, V_a^b(z_N) = V_a^b(z_N) \, \|f\|_\infty \quad (f \in C[a,b]),$$

ezért $\|\psi\| \leq V_a^b(z_N)$, amiből a korábban nyert $V_a^b(z_N) \leq \|\psi\|$ eredménnyel összevetve kapjuk, hogy

$$\|\psi\| = V_a^b(z_N) = \|z_N\|_{NBV}.$$

Továbbá ψ egyértelműen meghatározza a z_N függvényt, ugyanis ha létezik egy olyan $\widetilde{z}_N \in NBV[a,b]$ függvény, amellyel

$$\psi(f) = \int_a^b f \mathrm{d} z_N = \int_a^b f \mathrm{d} \widetilde{z}_N \quad (\forall f \in C[a,b]) \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f \mathrm{d}(z_N - \widetilde{z}_N) = 0 \quad (\forall f \in C[a,b]),$$

így ismét a 2.1.18 Lemma miatt $z_N(t) - \widetilde{z}_N(t) = 0$ az a és b végpontokban, valamint a $z_N - \widetilde{z}_N$ függvény folytonossági pontjaiban. Mivel $z_N - \widetilde{z}_N$ korlátos változású, és a 2.1.16 Lemma alapján a korlátos változású függvények folytonossági pontjai sűrűn helyezkednek el $[a,b]$-ben, ezért

$$z_N(t+0) = \widetilde{z}_N(t+0) \ (\forall t \in (a,b)) \quad \Rightarrow \quad z_N(t) = \widetilde{z}_N(t) \ (\forall t \in [a,b]).$$

Összefoglalva az eddigi eredményeket azt kaptuk, hogy létezik egy $T : (C[a,b])^* \to NBV[a,b]$ leképezés, mely tetszőleges $\psi \in (C[a,b])^*$ funkcionálhoz egyértelműen hozzárendel egy olyan $z_N \in NBV[a,b]$ függvényt, amelyre

$$\psi(f) = \int_a^b f \mathrm{d} z_N \ (f \in C[a,b]), \quad \text{és} \quad \|\psi\| = \|z_N\|_{NBV}.$$

Evidens, hogy tetszőleges $y_N \in NBV[a,b]$ esetén a

$$\xi(f) := \int_a^b f \mathrm{d} y_N \quad (f \in C[a,b])$$

funkcionálra $\xi \in (C[a,b])^*$, és $T(\xi) = y_N$. Továbbá T izomorfizmus is, mivel a Riemann-Stieltjes integrál linearitása miatt teljesül, hogy

$$T(\psi_1) = u_N, \ T(\psi_2) = v_N \ \Rightarrow \ T(\lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2) = \lambda_1 u_N + \lambda_2 v_N \quad (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}).$$

Mindezek alapján $T : (C[a,b])^* \to NBV[a,b]$ egy izometrikus izomorfizmus, tehát az állítást bebizonyítottuk. □

A következő tétel tetszőleges $(\mathbb{X}, d)$ kompakt metrikus tér esetén ad szükséges és elégséges feltételt egy $A \subset C(\mathbb{X})$ halmaz prekompakt voltára.

2.1.22. Definíció. *Legyen $(\mathbb{X}, d)$ kompakt metrikus tér, ekkor egy $A \subset C(\mathbb{X})$ részhalmazt egyenlő mértékben egyenletesen folytonosnak nevezünk, ha*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \quad x, y \in \mathbb{X}, \ d(x,y) < \delta \ \Rightarrow \ \sup_{f \in A} |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

2.1.23. Tétel. (Arzela-Ascoli tétel) *Legyen* $(\mathbb{X}, d)$ *kompakt metrikus tér, ekkor egy* $A \subset C(\mathbb{X})$ *halmaz pontosan akkor prekompakt, ha korlátos, és egyenlő mértékben egyenletesen folytonos.*

Bizonyítás. A bizonyítás menete nagyon hasonlít az 1.1.9 Tétel 3. pontjának bizonyításához.

Legyen $A \subset C(\mathbb{X})$ tetszőleges prekompakt halmaz, ekkor korlátos is, és minden $\epsilon > 0$ esetén létezik $M_\epsilon := \{f_1, \ldots, f_m\} \subset C(\mathbb{X})$ véges fedő ϵ-háló A-hoz. M véges, és elemei egyenletesen folytonosak, ezért

$$\exists \delta > 0 : \quad x, y \in \mathbb{X},\ d(x,y) < \delta \Rightarrow \max_{j \in \overline{1,m}} |f_j(x) - f_j(y)| < \epsilon.$$

Legyen $x, y \in \mathbb{X}$, melyekre $d(x,y) < \delta$, illetve legyen $f \in A$ tetszőleges, ekkor

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_j(x)| + |f_j(x) - f_j(y)| + |f_j(y) - f(y)| < 3\epsilon \quad (\|f - f_j\|_\infty < \epsilon).$$

Mivel $f \in A$ tetszőleges volt, ezért A egyenlő mértékben egyenletesen folytonos.

A másik irány belátásához legyen $(f_k)_k$ tetszőleges sorozat A-ban, ekkor A egyenlő mértékben egyenletes folytonossága miatt rögzített $\epsilon > 0$ esetén

$$\exists \delta > 0 : \quad \forall x, y \in \mathbb{X},\ d(x,y) < \delta \ \Rightarrow\ |f_k(x) - f_k(y)| < \epsilon \quad (k \in \mathbb{N}).$$

$(\mathbb{X}, d)$ kompakt metrikus tér, ezért szeparábilis is, így

$$\exists N = \{x_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{X} : \ \overline{N} = \mathbb{X} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{X} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_\delta(x_j), \tag{2.7}$$

ahol $K_\delta(x_j)$ jelöli az x_j középpontú δ sugarú nyílt gömbi környezetet. Ekkor $\mathbb{X}$ kompaktsága folytán (2.7)-ben kiválasztható véges fedés, azaz

$$\exists m \in \mathbb{N} : \quad \mathbb{X} = \bigcup_{j=1}^{m} K_\delta(x_j). \tag{2.8}$$

Ekkor A korlátossága miatt $(f_k(x_j))_k \subset \mathbb{K}$ minden $j \in \mathbb{N}$ esetén korlátos sorozat, ezért alkalmazhatjuk a Bolzano-Weierstrass tételt, miszerint rekurzíve kiválaszthatóak az $(f_k)_k$ sorozat alkalmas részsorozatai, és egy $y := (y_n) \subset \mathbb{K}$ sorozat, melyekkel

$$(f_k^0)_k := (f_k)_k,\ j \in \mathbb{N} \text{ fix} \quad \Rightarrow \quad \exists (f_k^j)_k \subset (f_k^{j-1})_k : \ f_k^j(x_i) \stackrel{k \to \infty}{\longrightarrow} y_i \quad (i \in \overline{1,j}).$$

Tekintsük a $(g_k)_k = (f_k^k)_k$ átlós sorozatot, ekkor nyilvánvalóan

$$(g_k)_{k=l}^\infty \subset (f_k^l)_{k=l}^\infty \ (l \in \mathbb{N}) \quad \Rightarrow \quad g_k(x_i) \stackrel{k \to \infty}{\longrightarrow} y_i \ (i \in \overline{1,m}). \tag{2.9}$$

A $(g_k)_k \subset (f_k)_k$ és a (2.8) eredményeket figyelembe véve adódik, hogy

$$\forall x \in \mathbb{X}\ \exists k \in \overline{1,m} : \quad |g_j(x) - g_j(x_k)| < \epsilon \quad (j \in \mathbb{N}), \tag{2.10}$$

továbbá (2.9) miatt

$$\exists N := N(\epsilon) \in \mathbb{N} : \quad |g_j(x_k) - g_r(x_k)| < \epsilon \quad (j, r \geq N,\ k \in \overline{1,m}). \tag{2.11}$$

A (2.10) és (2.11) eredményekből már következik, hogy tetszőleges $x \in \mathbb{X}$ esetén

$$|g_j(x) - g_r(x)| \leq |g_j(x) - g_j(x_k)| + |g_j(x_k) - g_r(x_k)| + |g_r(x_k) - g_r(x)| < 3\epsilon \quad (j, r \geq N,\ d(x, x_k) < \delta).$$

Tehát $\|g_j - g_r\|_\infty \leq 3\epsilon$ $(j, r \geq N)$, azaz $(g_k)_k$ Cauchy-sorozat $C(\mathbb{X})$-ben, ezért a 2.1.2 Tétel és a 2.1.4 Megjegyzés alapján konvergens. $\square$

2.2. Folytonosan differenciálható függvények

2.2.1. Megjegyzés. A továbbiakban jelölje tetszőleges $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ multiindex esetén

$$|\alpha| := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \quad \text{illetve} \quad D^\alpha := \partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}.$$

Adott $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ multiindex esetén $\alpha \leq \beta$ jelentse azt a részbenrendezést, hogy $\alpha_i \leq \beta_i$ $(i \in \overline{1,n})$, továbbá

$$\binom{\beta}{\alpha} := \prod_{i=1}^{n} \binom{\beta_i}{\alpha_i} \quad (\alpha \leq \beta).$$

2.2.2. Definíció. *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, $m \in \mathbb{N}_0$, ekkor*

1. $C^m(\Omega) := \Big\{ f : \Omega \to \mathbb{K} : \ \exists D^\alpha f \in C(\Omega) \quad (\alpha \in \mathbb{N}_0^n, \ |\alpha| \leq m) \Big\}$, *illetve* $C^\infty(\Omega) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} C^k(\Omega)$
2. $C_c^m(\Omega) := \Big\{ f \in C^m(\Omega) : \ \mathit{supp}(f) \subset \Omega \ \textit{kompakt} \Big\}$, *illetve* $C_c^\infty(\Omega) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} C_c^k(\Omega)$
3. $\overline{C}^m(\Omega) := \Big\{ f \in C^m(\Omega) : \ D^\alpha f \in UCB(\Omega) \quad (\alpha \in \mathbb{N}_0^n, \ |\alpha| \leq m) \Big\}$, *valamint*
$$\|f\|_{\overline{C}^m(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_\infty \quad \big(f \in \overline{C}^m(\Omega)\big)$$
4. *Ha Ω korlátos is, akkor*
$$C^m(\overline{\Omega}) := \Big\{ f \in C^m(\Omega) : \ D^\alpha f \ \textit{folytonosan kiterjed } \overline{\Omega}\textit{-ra} \quad (\alpha \in \mathbb{N}_0^n, \ |\alpha| \leq m) \Big\}$$

2.2.3. Megjegyzés. A 2.1.4 Megjegyzéshez hasonlóan, ha $m \in \mathbb{N}_0$, valamint $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos és nyílt halmaz, akkor $C^m(\overline{\Omega}) = \overline{C}^m(\Omega)$.

2.2.4. Állítás. *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, $m \in \mathbb{N}_0$, ekkor $\Big(\overline{C}^m(\Omega), \|\cdot\|_{\overline{C}^m(\Omega)}\Big)$ Banach-tér.*

Bizonyítás. Ha $(f_k)_k$ Cauchy-sorozat $\overline{C}^m(\Omega)$-ban, akkor minden $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| \leq m$ multiindexre $(D^\alpha f_k)_k$ Cauchy-sorozat $\overline{C}(\Omega)$-ban, ezért a 2.1.2 Tétel alapján

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \ |\alpha| \leq m \ \exists f^\alpha \in \overline{C}(\Omega) : \quad \|D^\alpha f_k - f^\alpha\|_\infty \overset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Jelölje $f := f^{(0,\ldots,0)}$, ekkor elegendő azt megmutatni, hogy $D^\alpha f = f^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{N}_0^n, \ |\alpha| \leq m)$. Ezt elég minden elsőrendű deriváltra belátni, mivel abból indukcióval minden magasabb rendű deriválthoz eljuthatunk. Az egyszerűség kedvéért legyen $\alpha_1 := (1, 0, \ldots, 0)$, erre tudjuk, hogy

$$\lim_{k \to \infty} \|D^{\alpha_1} f_k - f^{\alpha_1}\|_\infty = 0.$$

Ekkor $(x_1^0, \ldots, x_n) \in \Omega$ esetén kellően kis $h > 0$ számmal a Newton-Leibniz tétel alapján

$$\frac{f_k(x_1^0 + h, x_2, \ldots, x_n) - f_k(x_1^0, x_2, \ldots, x_n)}{h} = \frac{1}{h} \int_{x_1^0}^{x_1^0 + h} D^{\alpha_1} f_k(s, x_2, \ldots, x_n) \mathrm{d}s \quad (k \in \mathbb{N})$$

teljesül, mivel $f_k \in \overline{C}^1(\Omega)$ $(k \in \mathbb{N})$. Itt elvégezhetjük a $k \to \infty$ határátmenetet, ekkor

$$\frac{f(x_1^0 + h, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1^0, x_2, \ldots, x_n)}{h} = \frac{1}{h} \int_{x_1^0}^{x_1^0 + h} f^{\alpha_1}(s, x_2, \ldots, x_n) \mathrm{d}s,$$

ahonnan a $h \to 0$ határátmenet után a kívánt állítást kapjuk. $\square$

2.2.5. Megjegyzés. A 2.2.3 Megjegyzés alapján $m \in \mathbb{N}_0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos és nyílt halmaz esetén $\left(C^m(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{C^m(\overline{\Omega})}\right)$ szintén Banach-tér.

A 2.1.10 Tétel $C(\mathbb{X}) := C(\mathbb{X}, \mathbb{R})$ térre való általánosításához, ahol $(\mathbb{X}, d)$ tetszőleges kompakt metrikus tér, a Weierstrass-Stone tételt fogjuk felhasználni, ám ennek kimondásához szükségünk lesz az alábbi eredményekre, melyek bizonyításától eltekintünk:

2.2.6. Definíció. *Legyen $A \subset C(\mathbb{X})$ tetszőleges halmaz, ekkor azt mondjuk, hogy A szétválasztó, ha*

$$x, y \in \mathbb{X},\ x \neq y \quad \Rightarrow \quad \exists f \in A :\ f(x) \neq f(y).$$

2.2.7. Lemma. *Legyen $V \subset C(\mathbb{X})$ olyan vektortér, amelyre $1 \in V$. Ekkor V pontosan akkor szétválasztó, ha*

$$x, y \in \mathbb{X},\ x \neq y,\ a, b \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \exists f \in V :\ f(x) = a,\ f(y) = b.$$

2.2.8. Lemma. *Legyen $A \subset C(\mathbb{X})$ olyan részalgebra $C(\mathbb{X})$-ben, melyre $1 \in A$. Ekkor tetszőleges véges $F \subset A$ részhalmaz esetén a $\max_{f \in F}\{f\}$, illetve $\min_{f \in F}\{f\}$ felső, illetve alsó burkoló függvényekre teljesül, hogy $\max_{f \in F}\{f\}, \min_{f \in F}\{f\} \in \overline{A}$.*

2.2.9. Tétel. (Weierstrass-Stone tétel) *Legyen $(\mathbb{X}, d)$ kompakt metrikus tér, valamint $A \subset C(\mathbb{X})$ olyan szétválasztó részalgebra $C(\mathbb{X})$-ben, melyre $1 \in A$, ekkor az A halmaz sűrű $C(\mathbb{X})$-ben.*

Bizonyítás. Legyen $f \in C(\mathbb{X})$ tetszőleges, ekkor elegendő belátnunk, hogy

$$\forall \epsilon > 0\ \exists f_\epsilon \in \overline{A} : \quad \|f_\epsilon - f\|_\infty < \epsilon.$$

Legyen tehát $\epsilon > 0$ rögzített, valamint $x, y \in \mathbb{X},\ x \neq y$, ekkor a 2.2.7 Lemma alapján van olyan $h_{x,y} \in A$ függvény, melyre $h_{x,y}(x) = f(x),\ h_{x,y}(y) = f(y)$. Definiáljuk az

$$\Omega_{x,y} := \left\{ z \in \mathbb{X} :\ h_{x,y}(z) < f(z) + \frac{\epsilon}{2} \right\} \subset \mathbb{X} \quad (x, y \in \mathbb{X})$$

halmazokat. Ekkor nyilván minden $x, y \in \mathbb{X}$ esetén $x, y \in \Omega_{x,y}$, valamint $h_{x,y}$ folytonossága miatt $\Omega_{x,y}$ nyílt, ugyanis egy nyílt halmaz $h_{x,y}$ szerinti ősképeként definiáltuk. Teljesül továbbá, hogy

$$\mathbb{X} = \bigcup_{y \in \mathbb{X}, y \neq x} \{x, y\} \subset \bigcup_{y \in \mathbb{X}, y \neq x} \Omega_{x,y} \subset \mathbb{X} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{X} = \bigcup_{y \in \mathbb{X}, y \neq x} \Omega_{x,y} \quad (x \in \mathbb{X}).$$

Itt $\mathbb{X}$ kompakt, az $\Omega_{x,y}$ halmazok pedig nyíltak, így minden $x \in \mathbb{X}$ esetén kiválasztható egy véges $F_x \subset \mathbb{X}$ részhalmaz, melyre $\mathbb{X} = \bigcup_{y \in F_x} \Omega_{x,y}$. Legyen $h_x := \min_{y \in F_x}\{h_{x,y}\}$ $(x \in \mathbb{X})$. Ekkor tetszőleges $x \in \mathbb{X}$ esetén a 2.2.8 Lemma szerint $h_x \in \overline{A}$, valamint

$$h_x(z) \leq f(z) + \frac{\epsilon}{2} \quad (x, z \in \mathbb{X}) \tag{2.12}$$

is teljesül h_x konstrukcióját figyelembe véve. Definiáljuk ezek után az

$$\Omega^x := \left\{ z \in \mathbb{X} :\ h_x(z) > f(z) - \frac{\epsilon}{2} \right\} \subset \mathbb{X} \quad (x \in \mathbb{X})$$

halmazokat. Ekkor felhasználva azt az egyszerű észrevételt, hogy $x \in \Omega^x$ $(x \in \mathbb{X})$, az imént látott gondolatmenet mintájára következik, hogy létezik egy olyan $F \subset \mathbb{X}$ véges halmaz, amelyre $\mathbb{X} = \bigcup_{x \in F} \Omega^x$.

Legyen $f_\epsilon := \max_{x\in F}\{h_x\}$, ekkor ismét a 2.2.8 Lemmából következik, hogy $f_\epsilon \in \overline{A}$, valamint f_ϵ konstrukciója miatt

$$f_\epsilon(z) \geq f(z) - \frac{\epsilon}{2} \quad (z \in \mathbb{X}), \tag{2.13}$$

így (2.12) és (2.13) alapján a kíván tulajdonságú f_ϵ függvényt kaptuk. □

2.2.10. Következmény. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos és nyílt halmaz. Ekkor a

$$\mathcal{P}_{\mathbb{Q}} := \left\{p(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha x^\alpha : \ a_\alpha \in \mathbb{Q}, \ m \in \mathbb{N}_0, \ \alpha \in \mathbb{N}_0^n\right\}$$

racionális együtthatós polinomok halmaza sűrű $C(\overline{\Omega})$-ban, ugyanis a 2.2.9 Tétel feltételei könnyen láthatóan teljesülnek $\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}$-ra, így $C(\overline{\Omega})$ szeparábilis.

A folytonosan differenciálható függvények duális terének vizsgálatát a speciális $C^1[a,b]$ esetben végezzük, felhasználva a korábban látott 2.1.21 Tételt, valamint az alábbi segédtételt:

2.2.11. Lemma. *Legyenek $\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}$ Banach-terek, valamint $\psi : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, $\xi : \mathbb{X} \to \mathbb{Z}$ folytonos lineáris operátorok. Tegyük fel, hogy ξ szuperjektív, valamint Ker$(\xi) \subset$ Ker(ψ), ekkor létezik olyan $\mu : \mathbb{Z} \to \mathbb{Y}$ folytonos lineáris operátor, amelyre $\psi = \mu\xi$.*

Bizonyítás. Legyen $z \in \mathbb{Z}$ tetszőleges, és tekintsük z-nek az $X_z := \xi^{-1}[z] \subset \mathbb{X}$ ősképét. Nyilvánvaló, hogy a $\mathrm{Ker}(\xi) \subset \mathrm{Ker}(\psi)$ feltételből következik, hogy ψ minden $x \in X_z$ elemhez ugyanazt az $y_z \in \mathbb{Y}$ elemet rendeli. Definiáljuk a $\mu : \mathbb{Z} \to \mathbb{Y}$ operátort a $\mu(z) := y_z$ hozzárendeléssel, ekkor az előzőek szerint μ jól definiált. Evidens, hogy μ lineáris, valamint folytonos is, ugyanis tekintsünk egy tetszőleges $G \in \mathbb{Y}$ nyílt halmazt. Ekkor a μ operátor konstrukciója miatt a $\mu^{-1}[G]$ őskép felírható $\xi(\psi^{-1}[G])$ alakban. Itt azonban a ψ operátor folytonos, ezért tetszőleges nyílt halmaz ψ szerinti ősképe nyílt, valamint a ξ operátor szuperjektív, így a Banach-féle nyíltleképezés tétel miatt tetszőleges nyílt halmaz ξ szerinti direkt képe szintén nyílt, ezért a $\xi(\psi^{-1}[G])$ halmaz is nyílt lesz, tehát μ folytonos. □

2.2.12. Tétel. *A $C^1[a,b]$ tér minden folytonos lineáris funkcionálja egyértelműen a*

$$\nu(f) = \alpha f(a) + \int_a^b f' dg_N \quad \big(\nu \in (C^1[a,b])^*, \ f \in C^1[a,b], \ \alpha \in \mathbb{R}, \ g_N \in NBV[a,b]\big)$$

alakba írható.

Bizonyítás. Definiáljuk a $\widetilde{C}^1[a,b] \subset C^1[a,b]$ alteret a következőképpen:

$$\widetilde{C}^1[a,b] := \left\{f \in C^1[a,b] : \ f \text{ integrálfüggvénye valamely } g \in C[a,b] \text{ függvénynek, és } f(a) = 0\right\}$$

Ekkor nyilvánvaló, hogy a

$$D := \frac{d}{dx} : \ \widetilde{C}^1[a,b] \to C[a,b]$$

korlátos lineáris operátor szuperjektív. Legyen $\nu \in (C^1[a,b])^*$ tetszőleges, és szorítsuk meg ν-t a $\widetilde{C}^1[a,b]$ altérre, jelölje ezt a funkcionált $\widetilde{\nu}$. A $\psi := \widetilde{\nu}$ és $\xi := D$ szereposztással teljesül a 2.2.11 Lemma feltétele, ugyanis ha $f \in \mathrm{Ker}(D)$, akkor f konstans függvény, ezért az $f(a) = 0$ feltételből következik, hogy $f \equiv 0$, ami nyilván eleme $\mathrm{Ker}(\widetilde{\nu})$-nak. A 2.2.11 Lemma szerint tehát

$$\exists \mu \in (C[a,b])^* : \quad \widetilde{\nu}(h) = \mu(Dh) \quad (h \in \widetilde{C}^1[a,b]). \tag{2.14}$$

Evidens, hogy

$$\forall f \in C^1[a,b]\ \exists h \in \widetilde{C}^1[a,b]:\ f(x) = f(a) + h(x)\ (x \in [a,b]) \quad \Rightarrow \quad \nu(f) = \nu(f(a)) + \nu(h), \tag{2.15}$$

továbbá a 2.1.21 Tétel alapján

$$\nu(h) = \widetilde{\nu}(h) \overset{(2.14)}{=} \mu(Dh) \overset{2.1.21}{=} \int_a^b h' \mathrm{d}g_N \quad (h \in \widetilde{C}^1[a,b],\ g_N \in NBV[a,b]) \tag{2.16}$$

alakba írható. Mivel $h = f - f(a)$, ezért $f' = h'$, így ha $\alpha := \nu(1)$, akkor (2.15) és (2.16) felhasználásával pont a kívánt előállítást kapjuk. $\square$

2.3. L_p-terek

A pont elején feltesszük, hogy $(X, \mathcal{A}, \mu)$ tetszőleges mértéktér, $(\mathbb{Y}, \|\cdot\|_{\mathbb{Y}})$ Banach-tér, és röviden összefoglaljuk az $L_p(X;\mathbb{Y})$-terek azon eredményeit, melyekre a későbbiekben szükségünk lesz.

2.3.1. Definíció. *Egy $f : X \to \mathbb{Y}$ függvényt lényegében korlátosnak nevezünk, ha*

$$\exists M \in \mathbb{R}: \quad \mu\left(\left\{x \in X:\ \|f(x)\|_{\mathbb{Y}} > M\right\}\right) = 0,$$

és minden ilyen tulajdonságú $M \in \mathbb{R}$ számot az f függvény lényeges korlátjának mondunk. Továbbá jelölje

$$ess\sup \|f\|_{\mathbb{Y}} := \inf\left\{M > 0:\ M \text{ lényeges korlátja } f\text{-nek}\right\}$$

az f függvény lényeges szuprémumát.

2.3.2. Definíció.

1. *Legyen $1 \le p < \infty$, ekkor*

$$\mathcal{L}_p(X;\mathbb{Y}) := \left\{f : X \to \mathbb{Y}:\ f \text{ mérhető}, \quad \text{és} \quad \int_X \|f\|_{\mathbb{Y}}^p\, d\mu < \infty\right\},$$

és tetszőleges $f \in \mathcal{L}_p(X;\mathbb{Y})$ függvényre legyen

$$\|f\|_{p;X} := \left(\int_X \|f\|_{\mathbb{Y}}^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

2. *Ha $p = \infty$, akkor*

$$\mathcal{L}_\infty(X;\mathbb{Y}) := \left\{f : X \to \mathbb{Y}:\ f \text{ lényegében korlátos}\right\},$$

és tetszőleges $f \in \mathcal{L}_\infty(X;\mathbb{Y})$ függvényre legyen

$$\|f\|_{\infty;X} := ess\sup \|f\|_{\mathbb{Y}}.$$

2.3.3. Megjegyzés. Az egyszerűbb jelölés érdekében az általános esetben jelölje

$$\mathcal{L}_p := \mathcal{L}_p(X;\mathbb{Y}), \quad \text{és} \quad \|\cdot\|_p := \|\cdot\|_{p;X} \qquad (1 \le p \le \infty),$$

kivéve azokat az eseteket, amikor fontos az X halmaz.

Az l_p sorozatterekben látott 1.1.5 és 1.1.6 Tételek az $\mathcal{L}_p$-terekben is érvényben vannak:

2.3.4. Tétel. (Hölder-egyenlőtlenség) *Legyen $f \in \mathcal{L}_p$, $g \in \mathcal{L}_q$, ahol $1 \leq p \leq \infty$, valamint q a p-hez tartozó konjugált kitevő. Ekkor*

$$fg \in \mathcal{L}_1, \quad \textit{és} \quad \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

2.3.5. Tétel. (Minkowski-egyenlőtlenség) *Legyen $f, g \in \mathcal{L}_p$, ahol $1 \leq p \leq \infty$, ekkor*

$$f + g \in \mathcal{L}_p, \quad \textit{és} \quad \|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p .$$

2.3.6. Megjegyzés. Az $(\mathcal{L}_p, \|\cdot\|_p)$ pár minden $1 \leq p \leq \infty$ esetén félnormált teret alkot, ez következik az integrálható függvények alapvető tulajdonságaiból, valamint a 2.3.5 Tételből.

2.3.7. Állítás. *Jelölje tetszőleges $1 \leq p \leq \infty$ esetén*

$$\mathcal{R}_p := \left\{ f \in \mathcal{L}_p : \ \|f\|_p = 0 \right\},$$

ekkor $\mathcal{R}_p$ zárt altere az $\mathcal{L}_p$ vektortérnek. Tekintsük az $L_p := \mathcal{L}_p/\mathcal{R}_p$ faktorteret, ekkor az $(L_p, \|\cdot\|_p)$ pár minden $1 \leq p \leq \infty$ esetén normált teret alkot. (Itt $\|f\|_p$ az $[f] = f + \mathcal{R}_p$ osztály tetszőleges reprezentáns elemének normáját jelöli.)

2.3.8. Megjegyzés. Ezentúl az $f \in L_p$ jelölés arra utal, hogy az $[f] = f + \mathcal{R}_p$ ekvivalencia-osztályra $[f] \in L_p$, továbbá ha T tetszőleges tulajdonság az X tér pontjaira, akkor azt mondjuk, hogy T μ-m.m. igaz, ha

$$\exists A \in \mathcal{A} : \ \mu(A) = 0, \text{ és } T(x) = \text{igaz } (x \in A^c).$$

Ezzel a jelöléssel élve tetszőleges $1 \leq p \leq \infty$ esetén

$$f, g \in [f] \iff \|f-g\|_p = 0 \iff f = g \ \mu\text{-m.m.}$$

A továbbiakban az L_p-terekben vett tulajdonságokat mindig μ-m.m. értelemben értjük.

2.3.9. Tétel. (Riesz-Fischer tétel) *Legyen $1 \leq p \leq \infty$, $(f_n)_n \subset L_p$ Cauchy-sorozat, ekkor*

$$\exists f \in L_p : \quad \lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0,$$

és egy alkalmas $(n_k)_k$ indexsorozattal teljesül, hogy $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$ $(x \in X)$.

2.3.10. Tétel. (Lebesgue-tétel) *Legyen $1 \leq p < \infty$, $(f_n)_n \subset L_p$ olyan függvénysorozat, amelynek létezik az $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ $(x \in X)$ pontonkénti határfüggvénye, valamint az $F := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{\mathbb{Y}}$ függvényre $F \in L_p$, ekkor*

$$f \in L_p, \quad \textit{és} \quad \lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0.$$

2.3.11. Állítás. *Tegyük fel, hogy a μ mérték véges, azaz $\mu(X) < \infty$, ekkor*

1. $L_q \subset L_p, \quad \|f\|_p \leq \mu(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_q \qquad (1 \leq p \leq q \leq \infty, \ f \in L_q).$
2. *Ha minden $1 \leq p < \infty$ esetén teljesül, hogy $f \in L_p$, és $\|f\|_p \leq K$ valamely $K \in \mathbb{R}$ konstanssal, akkor $f \in L_\infty$, valamint $\|f\|_\infty \leq K$.*

A továbbiakban feltesszük, hogy $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ tetszőleges tartomány, valamint $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ a Lebesgue-féle mértéktér. Ezentúl az $L_p(\Omega)$, illetve az $\int_\Omega f \mathrm{d}x$ jelölésekkel fogunk élni.

Az $L_p(\Omega)$-tér szeparábilitásának vizsgálatához szükségünk van a következő lemmára, aminek bizonyítása hosszadalmas és összetett, ezért mellőzzük.

2.3.12. Lemma. *Tetszőleges $1 \leq p < \infty$ esetén $C_c^0(\Omega)$ sűrű $L_p(\Omega)$-ban.*

2.3.13. Tétel. *Tetszőleges $1 \leq p < \infty$ esetén az $L_p(\Omega)$-tér szeparábilis, viszont $L_\infty(\Omega)$ nem szeparábilis.*

Bizonyítás.
Legyen $1 \leq p < \infty$, és legyen $f \in L_p(\Omega)$ tetszőleges, ekkor a 2.3.12 Lemma szerint

$$\exists \varphi_f \in C_c^0(\Omega): \quad \|f - \varphi_f\|_{p;\Omega} \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Definiáljuk a

$$K_m := \left\{ x \in \Omega : \ \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \geq \frac{1}{m}, \ |x| \leq m \right\} \quad (m \in \mathbb{N})$$

és a

$$\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m := \left\{ p\chi_{K_m} : \ p \in \mathcal{P}_{\mathbb{Q}} \right\} \quad (m \in \mathbb{N})$$

halmazokat, ahol χ_{K_m} jelöli a K_m halmaz karakterisztikus függvényét. Ekkor $K_m \subset \Omega$ kompakt $(m \in \mathbb{N})$, és $\Omega = \bigcup_{m=1}^\infty K_m$. A 2.2.10 Következmény valamint $\varphi_f \in C_c^0(\Omega)$ alapján teljesül, hogy

$$\exists m_f \in \mathbb{N} : \ \operatorname{supp}(\varphi_f) \subset K_{m_f}, \quad \text{és} \quad \exists p_f \in \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^{m_f} : \ \|\varphi_f - p_f\|_{\infty;K_{m_f}} \leq \frac{\epsilon}{2} \lambda(K_{m_f})^{-\frac{1}{p}}.$$

A 2.3.11 Állítás 1. pontja alapján már következik, hogy

$$\|f - p_f\|_{p;\Omega} \leq \|f - \varphi_f\|_{p;\Omega} + \|\varphi_f - p_f\|_{p;K_{m_f}} \leq \frac{\epsilon}{2} + \lambda(K_{m_f})^{\frac{1}{p}} \|\varphi_f - p_f\|_{\infty;K_{m_f}} \leq \epsilon.$$

Mivel $\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m$ minden $m \in \mathbb{N}$ esetén megszámlálható, ezért $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m$ is megszámlálható, tehát $L_p(\Omega)$ szeparábilis.
Ha $p = \infty$, akkor mivel Ω végtelen halmaz, ezért a 2.1.6 Állítás alapján $L_\infty(\Omega)$ nem szeparábilis. $\square$

2.3.14. Definíció. *Egy $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\eta \geq 0$ függvényt, melyre supp$(\eta) = \overline{B_1(0)}$, egységapproximációnak nevezünk, ha teljesül rá, hogy*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x) dx = 1. \tag{2.17}$$

2.3.15. Megjegyzés. Definiáljuk a következő függvényt:

$$\eta(x) := \begin{cases} ke^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & \text{ha } |x| < 1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Ha a k konstanst úgy választjuk meg, hogy η-ra (2.17) teljesüljön, akkor η egy egységapproximáció. Legyen $\eta_\epsilon(x) := c_\epsilon \eta(\frac{x}{\epsilon})$, ahol a c_ϵ konstanst hasonló módon választjuk. Ekkor az így kapott függvényre $\eta_\epsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, és supp$(\eta) = \overline{B_\epsilon(0)}$. A továbbiakban jelölje η_ϵ ezt a konkrét függvényt.

További approximációs eredményt nyerhetünk a 2.3.15 Megjegyzésben bevezetett η_ϵ függvény segítségével, melynek a későbbi pontokban lesz igen fontos szerepe.

2.3.16. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az f függvény lokálisan integrálható az $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ halmazon, ha $f \in L_1(K)$ teljesül minden $K \subset \Omega$ kompakt halmazra, jelölésben $f \in L_1^{loc}(\Omega)$.*

2.3.17. Definíció. *Tetszőleges $f \in L_1^{loc}(\Omega)$ esetén, ha f-et Ω-n kívül 0-ként kiterjesztjük az egész $\mathbb{R}^n$-re, definálhatjuk az alábbi függvényt:*

$$f_\epsilon(x) := f * \eta_\epsilon(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\eta_\epsilon(x-y)\,dy \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

Ekkor a definícióban szereplő integrál nyilván minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén értelmes, valamint $supp(f_\epsilon)$ egy ϵ-környezete $supp(f)$-nek.

2.3.18. Megjegyzés. A továbbiakban tetszőleges $A, B \subset \mathbb{R}^n$ halmazok esetén jelölje $A \subset\subset B$ azt, hogy A relatívan kompakt B-ben, azaz $\overline{A}$ kompakt, és $A \subset B$.

2.3.19. Lemma. *Legyen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ függvény, és terjesszük ki f-et Ω-n kívül 0-ként $\mathbb{R}^n$-re, ekkor*

1. $f \in L_1(\Omega),\ supp(f) \subset\subset \Omega \ \Rightarrow\ \exists \delta > 0 :\ f_\epsilon \in C_c^\infty(\Omega)\ (0 < \epsilon \le \delta)$
2. $f \in C(\Omega),\ K \subset\subset \Omega \ \Rightarrow\ \|f_\epsilon - f\|_\infty \overset{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$ *K-n*
3. $f \in L_p(\Omega)\ (1 \le p < \infty) \ \Rightarrow\ f_\epsilon \in L_p(\Omega),\ \|f_\epsilon\|_{p;\Omega} \le \|f\|_{p;\Omega}$, *és* $\lim_{\epsilon \to 0} \|f_\epsilon - f\|_{p;\Omega} = 0$

2.3.20. Következmény. Tetszőleges $1 \le p < \infty$ esetén $C_c^\infty(\Omega)$ sűrű $L_p(\Omega)$-ban.

Az $L_p(\Omega)$-terek duális terének meghatározásánál az $1 \le p < \infty$ esetre szorítkozunk, de az ide vonatkozó tétel kimondása előtt szükségünk lesz több segédtételre.

2.3.21. Lemma. (Clarkson-egyenlőtlenségek) *Legyen $1 < p < \infty$, q a p-hez tartozó konjugált kitevő, valamint $f, g \in L_p(\Omega)$, ekkor*

1. *$1 < p \le 2$ esetén*

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^q + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^q \le \left(\frac{\|f\|_p^p + \|g\|_p^p}{2}\right)^{q-1}, \tag{2.18}$$

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p \ge \frac{\|f\|_p^p + \|g\|_p^p}{2}. \tag{2.19}$$

2. *$2 \le p < \infty$ esetén*

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p \le \frac{\|f\|_p^p + \|g\|_p^p}{2}, \tag{2.20}$$

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^q + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^q \ge \left(\frac{\|f\|_p^p + \|g\|_p^p}{2}\right)^{q-1}. \tag{2.21}$$

A 2.3.21 lemma belátása hosszadalmas, a valós számokra vonatkozó hasonló egyenlőtlenségeken alapul, ezért bizonyítását mellőzzük.

2.3.22. Lemma. *Legyen $1 < p < \infty$, ekkor az $L_p(\Omega)$-tér egyenletesen konvex, azaz tetszőleges $\epsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, amellyel*

$$\forall f, g \in L_p(\Omega),\ \|f\|_p = \|g\|_p = 1,\ \|f-g\|_p \ge \epsilon \quad \Rightarrow \quad \left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p \le 1 - \delta.$$

Bizonyítás. Az állítás rögtön következik a 2.3.21 Lemma (2.18) és (2.20) egyenlőtlenségeiből. □

2.3.23. Lemma. *Legyen $1 < p < \infty$ tetszőleges, $\psi, \xi \in (L_p(\Omega))^*$, melyekre $\|\psi\| = \|\xi\| = 1$, valamint legyen $f \in L_p(\Omega)$ olyan függvény, melyre $\|f\|_p = 1$, és $\psi(f) = \xi(f) = 1$ teljesül, ekkor $\psi = \xi$.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy a lemma feltételei teljesülnek, de van egy olyan $g \in L_p(\Omega)$ függvény, melyre $\psi(g) \neq \xi(g)$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\psi(g) = 1$, $\xi(g) = -1$. Legyen $t \geq 0$ tetszőleges paraméter, ekkor

$$\|\psi\| = \|\xi\| = 1,\ \psi(f+tg) = 1+t,\ \xi(f-tg) = 1+t \quad \Rightarrow \quad \|f+tg\|_p \geq 1+t,\ \|f-tg\|_p \geq 1+t,$$

ezért ha $1 < p \leq 2$, akkor

$$1 + t^p \|g\|_p^p = \left\| \frac{(f+tg)+(f-tg)}{2} \right\|_p^p + \left\| \frac{(f+tg)-(f-tg)}{2} \right\|_p^p \overset{(2.19)}{\geq} \frac{\|f+tg\|_p^p + \|f-tg\|_p^p}{2} \geq (1+t)^p,$$

illetve $2 \leq p < \infty$ esetén

$$1+t^q \|g\|_p^q = \left\| \frac{(f+tg)+(f-tg)}{2} \right\|_p^q + \left\| \frac{(f+tg)-(f-tg)}{2} \right\|_p^q \overset{(2.21)}{\geq} \left(\frac{\|f+tg\|_p^p + \|f-tg\|_p^p}{2} \right)^{q-1} \geq (1+t)^q$$

fennáll minden $t \geq 0$ paraméter esetén, ami tekintve az egyenlőtlenségben szereplő függvényeket ellentmondás, tehát az állítást beláttuk. □

2.3.24. Tétel. *Legyen $1 \leq p < \infty$, valamint q a p-hez tartozó konjugált kitevő, ekkor a*

$$T : L_q(\Omega) \to (L_p(\Omega))^* : \ f \mapsto \psi_f, \quad \textit{ahol} \quad \psi_f(g) := \int_\Omega fg\,dx \quad (g \in L_p(\Omega))$$

leképezés izometrikus izmorfizmus.

Bizonyítás. Tetszőleges $1 \leq p < \infty$ esetén nyilvánvaló, hogy minden $f \in L_q(\Omega)$ függvényre a ψ_f leképezés lineáris, valamint a 2.3.4 Tétel alapján teljesül, hogy $\|\psi_f\| \leq \|f\|_q$, azaz $\psi_f \in (L_p(\Omega))^*$. (Ez az eredmény természetesen $p = \infty$ esetén is érvényes.)
A tétel nehezebb fele az izometria és a szuperjektivitás belátása. Először tegyük fel, hogy $1 < p < \infty$, valamint legyen $\psi \in (L_p(\Omega))^*$ tetszőleges funkcionál, melyre $\|\psi\| = 1$. Ekkor az operátornorma definíciója szerint (esetleges skalárral való szorzás után)

$$\exists (f_k)_k \subset L_p(\Omega) : \quad \|f_k\|_p = 1\ (k \in \mathbb{N}), \quad \text{és} \quad \lim_{k\to\infty} \psi(f_k) = 1.$$

Ekkor $(f_k)_k$ Cauchy-sorozat $L_p(\Omega)$-ban, ugyanis ha indirekt feltesszük, hogy

$$\exists \epsilon > 0 : \ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists m_N \geq n_N \geq N : \quad \|f_{m_N} - f_{n_N}\|_p \geq \epsilon, \tag{2.22}$$

akkor tetszőleges $(m_i)_i, (n_i)_i$ (2.22) tulajdonságú indexsorozatokkal a 2.3.22 Lemmából következik, hogy

$$\exists \delta > 0 : \quad \left\| \frac{f_{m_i} + f_{n_i}}{2} \right\|_p \leq 1 - \delta \quad (i \in \mathbb{N}),$$

de ekkor ezzel a $\delta > 0$ számmal teljesül, hogy

$$1 \geq \psi\left(\frac{f_{m_i} + f_{n_i}}{\|f_{m_i} + f_{n_i}\|_p} \right) \geq \frac{1}{1-\delta} \cdot \frac{\psi(f_{m_i}) + \psi(f_{n_i})}{2} \quad (i \in \mathbb{N}). \tag{2.23}$$

Ha (2.23)-ban elvégezzük az $i \to \infty$ határátmenetet, akkor azt kapjuk, hogy $1 \geq \frac{1}{1-\delta}$, ami természetesen ellentmondás, ezért $(f_k)_k$ Cauchy-sorozat. Ekkor a 2.3.9 Tétel szerint $(f_k)_k$ konvergál egy $f_0 \in L_p(\Omega)$ függvényhez, melyre az eddigiek miatt $\psi(f_0) = 1$, illetve $\|f_0\|_p = 1$.
Definiáljuk az $f = |f_0|^{p-1}$ függvényt, valamint f segítségével a

$$\xi(g) = \int_\Omega fg\mathrm{d}x \quad (g \in L_p(\Omega)) \tag{2.24}$$

leképezést. Ekkor f értelmezéséből rögtön következik, hogy $\|f\|_q = 1$, így a korábban mondottak értelmében $\xi \in (L_p(\Omega))^*$, valamint nyilvánvaló, hogy $\xi(f_0) = 1$, ezért a 2.3.23 Lemma feltételei teljesülnek, tehát igaz a $\psi = \xi$ egyenlőség.
Ezek alapján tehát az $(L_p(\Omega))^*$ térben az egységgömb minden eleme előáll a (2.24) alakban, és ez a hozzárendelés egy izometria is egyben. Az általános eset visszavezethető az egységgömbre megfelelő skalárral való szorzás után, így a kapott leképezés izometrikus izomorfizmus az $L_q(\Omega)$ és $(L_p(\Omega))^*$ terek között.
A $p = 1$ esetet külön kell vizsgálni, mert ekkor nem alkalmazhatóak a segédtételek. Legyen $\xi \in (L_1(\Omega))^*$ tetszőleges funkcionál, melyre $\|\xi\| = 1$. Először tekintsük azt az esetet, amikor $\lambda(\Omega) < \infty$, ekkor a 2.3.11 Állítás 1. pontja szerint tetszőleges $p > 1$ esetén $L_p(\Omega) \subset L_1(\Omega)$, valamint

$$|\xi(g)| \leq \|g\|_1 \leq \lambda(\Omega)^{1-\frac{1}{p}} \|g\|_p \quad (g \in L_p(\Omega)).$$

Ezek szerint ha ξ_p jelöli az $L_p(\Omega)$ térre megszorított ξ funkcionált, akkor $\xi_p \in L_p(\Omega)^*$, így a tétel első fele szerint

$$\forall p > 1\ \exists f_p \in L_q(\Omega) : \ \|f_p\|_q \leq \lambda(\Omega)^{1-\frac{1}{p}}, \quad \text{és} \quad \xi_p(g) = \xi(g) = \int_\Omega f_p g\mathrm{d}x \quad (g \in L_p(\Omega)). \tag{2.25}$$

Mivel tetszőleges $p > 1$ esetén $L_\infty(\Omega) \subset L_p(\Omega)$, így a ξ funkcionál ξ_p megszorításai az $L_\infty(\Omega)$ téren megegyeznek, azaz

$$\forall p, \hat{p} > 1 : \quad \int_\Omega f_p g\mathrm{d}x = \int_\Omega f_{\hat{p}} g\mathrm{d}x \quad (g \in L_\infty(\Omega)). \tag{2.26}$$

Ha (2.26)-ban a speciális $\mathrm{sgn}(f_p - f_{\hat{p}}) \in L_\infty(\Omega)$ függvényt tekintjük, akkor az $f_p = f_{\hat{p}}$ eredményt kapjuk, tehát az f_p függvény független a $p > 1$ kitevő választásától, ezért ezt a közös függvényt jelölheti f. A 2.3.11 Lemma 2. pontja alapján

$$f \in L_\infty(\Omega), \qquad \text{illetve} \quad \|f\|_\infty \leq \lim_{p \to 1} \lambda(\Omega)^{1-\frac{1}{p}} = 1.$$

Tetszőleges $1 < p < \infty$ esetén $L_p(\Omega)$ sűrű $L_1(\Omega)$-ban - ez látható például a 2.3.20 Következményből -, ezért a $p \to 1$ határátmenet elvégezhetjük (2.25)-ben, amivel az állítást ebben az esetben beláttuk. Ha $\lambda(\Omega) = \infty$, akkor λ σ-végessége miatt Ω felbontható megszámlálható véges mértékű résztartományra, melyek mindegyikén elvégezhetjük az eddigi konstrukciót. Az, hogy ez a leképezés kiterjed izometrikus izomorfizmussá az egész $(L_1(\Omega))^*$ téren, a bizonyítás első felében levő gondolatmenettel analóg módon belátható, így a bizonyítás már teljes. □

2.3.25. Következmény. A 2.3.24 Tétel szerint tetszőleges $1 \leq p < \infty$ esetén $L_q(\Omega) \cong (L_p(\Omega))^*$, amennyiben q a p-hez tartozó konjugált kitevő, ezért $1 < p < \infty$ esetben $L_p(\Omega)$ reflexív Banach-tér.

2.3.26. Megjegyzés. Az is belátható, hogy egy Banach-tér pontosan akkor reflexív, ha egyenletesen konvex, de ennek bizonyításával nem foglalkozunk.

3. fejezet

Hölder- és Szoboljev-terek

Ebben a fejezetben olyan speciális függvénytereket fogunk vizsgálni, melyek különböző parciális differenciálegyenletek megoldhatóságában és megoldásában játszanak fontos szerepet.

3.1. Hölder-terek

3.1.1. Definíció. *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ nyílt, $k \in \mathbb{N}_0$, ekkor egy $0 < \alpha \leq 1$ számra és $f \in C(\Omega)$ függvényre a Hölder-konstanst a következőképpen definiáljuk:*

$$\text{höl}_{\Omega,\alpha} f := \sup_{x \neq y \in \Omega} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^{\alpha}},$$

míg legyen $\text{lip}_{\Omega} f := \text{höl}_{\Omega,1} f$ az f-hez tartozó Lipschitz-konstans. Egy f függvényt véges Hölder-, illetve Lipschitz-konstanssal Hölder-, illetve Lipschitz-folytonosnak nevezünk, továbbá a

$$C^{k,\alpha}(\Omega) := \left\{ f \in C^k(\Omega) : \ \|D^{\gamma} f\|_{\infty} + \text{höl}_{\Omega,\alpha} D^{\gamma} f < \infty \quad (\gamma \in \mathbb{N}_0^n, \ |\gamma| \leq k) \right\}$$

módon definiált teret az

$$\|f\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} := \sum_{|\gamma| \leq k} \left(\|D^{\gamma} f\|_{\infty} + \text{höl}_{\Omega,\alpha} D^{\gamma} f \right)$$

normával Hölder-térnek nevezzük.

3.1.2. Megjegyzés. Egyszerű számítással adódik, hogy ha a 3.1.1 Definícióban tetszőleges $\alpha > 1$ számot tekintünk, akkor a $\text{höl}_{\Omega,\alpha} f < \infty$ feltételből az következik, hogy f minden összefüggő komponensen konstans függvény.

3.1.3. Állítás. *A $\left(C^{k,\alpha}(\Omega), \|\cdot\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} \right)$ pár Banach-teret alkot.*

Bizonyítás. Könnyen belátható, hogy $\left(C^{k,\alpha}(\Omega), \|\cdot\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} \right)$ normált tér, ezért rátérünk a teljesség bizonyítására. Legyen $(f_j)_j$ Cauchy-sorozat $C^{k,\alpha}(\Omega)$-ban, ekkor a 2.1.2 Állítás következtében minden $\gamma \in \mathbb{N}_0^n, \ |\gamma| \leq k$ multiindex esetén $(D^{\gamma} f_j)_j$ egy korlátos és folytonos függvényhez konvergál Ω-n $\|\cdot\|_{\infty}$ normában, jelölje ezt a függvényt f^{γ}. A 2.2.4 Állítás bizonyításában látott módon igazolható, hogy $D^{\gamma} f = f^{\gamma}$ $(\gamma \in \mathbb{N}_0^n, \ |\gamma| \leq k)$, ahol $f := \lim_{j \to \infty} f_j$.

Annak belátására, hogy a Hölder-konstansok végessége is teljesül, tetszőleges $|\gamma| \leq k$ multiindex esetén tekintsük a

$$\left(\frac{D^\gamma f_j(x) - D^\gamma f_j(y)}{|x-y|^\alpha}\right)_j \qquad \big((x,y) \in \Omega \times \Omega : \; x \neq y\big)$$

folytonos függvénysorozatot, amely korlátos is, mivel $\text{höl}_{\Omega,\alpha} D^\gamma f_j$ Cauchy-sorozat, ezért szintén a 2.1.2 Állítás miatt egyenletesen konvergál egy ugyanilyen tulajdonságú függvényhez, ami nyilván egybeesik a

$$\frac{D^\gamma f(x) - D^\gamma f(y)}{|x-y|^\alpha} \qquad \big((x,y) \in \Omega \times \Omega : \; x \neq y\big)$$

pontonkénti határértékkel, tehát $(f_j)_j$ egy $f \in C^{k,\alpha}(\Omega)$ függvényhez konvergál $\|\cdot\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)}$ normában, amivel az állítást beláttuk. □

Két Hölder-folytonos függvény szorzata szintén Hölder-folytonos lesz, pontosabban:

3.1.4. Állítás. *Legyen $k \in \mathbb{N}_0, \; 0 < \alpha \leq 1$, ekkor*

1. $\text{höl}_{\Omega,\alpha}(fg) \leq \text{höl}_{\Omega,\alpha} f \, \|g\|_\infty + \|f\|_\infty \, \text{höl}_{\Omega,\alpha} g \quad (f, g \in C^{0,\alpha}(\Omega))$
2. $\|fg\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} \leq c(k) \, \|f\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} \, \|g\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} \quad (f, g \in C^{k,\alpha}(\Omega))$

Bizonyítás.

1. Tetszőleges $x, y \in \Omega$ esetén teljesül, hogy

$$|fg(x) - fg(y)| \leq |f(x) - f(y)| \, g(x) + f(y) \, |g(x) - g(y)| \leq$$

$$\leq (\text{höl}_{\Omega,\alpha} f \, \|g\|_\infty + \|f\|_\infty \, \text{höl}_{\Omega,\alpha} g) \, |x-y|^\alpha \, ,$$

ahonnan $|x-y|^\alpha$-nal való osztás után adódik az állítás.

2. Az általánosított Leibniz-tétel szerint

$$D^\gamma(fg) = \sum_{0 \leq \beta \leq \gamma} \binom{\gamma}{\beta} (D^\beta f)(D^{\gamma-\beta} g) \quad \big(\gamma \in \mathbb{N}_0^n, \; |\gamma| \leq k, \; f, g \in C^k(\Omega)\big),$$

aminek segítségével az 1. pontot felhasználva adódik, hogy

$$\|fg\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} = \sum_{|\gamma| \leq k} (\|D^\gamma(fg)\|_\infty + \text{höl}_{\Omega,\alpha} D^\gamma(fg)) \leq$$

$$\leq \sum_{|\gamma| \leq k} \sum_{0 \leq \beta \leq \gamma} \binom{\gamma}{\beta} \left(\left\|(D^\beta f)(D^{\gamma-\beta} g)\right\|_\infty + \text{höl}_{\Omega,\alpha}(D^\beta f D^{\gamma-\beta} g) \right) \leq$$

$$\overset{1.}{\leq} \sum_{|\gamma| \leq k} \sum_{0 \leq \beta \leq \gamma} \underbrace{\binom{\gamma}{\beta}}_{:= c_{\gamma,\beta}} \left(\left\|D^\beta f\right\|_\infty \left\|D^{\gamma-\beta} g\right\|_\infty + \text{höl}_{\Omega,\alpha} D^\beta f \left\|D^{\gamma-\beta} g\right\|_\infty + \left\|D^\beta f\right\|_\infty \text{höl}_{\Omega,\alpha} D^{\gamma-\beta} g \right),$$

ahol a $c(k) := \max\{c_{\gamma,\beta} : \; 0 \leq \beta \leq \gamma, \; |\gamma| \leq k\}$ tag kiemelése után már következik az állítás. □

Ezek után a 2.1.23 Tétel alkalmazásaként belátjuk az alábbi beágyazási tételt:

3.1.5. Tétel. *Legyen $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ nyílt, valamint legyen $0 < \beta < \alpha$, ekkor a következő beágyazások kompaktak:*

$$C^{0,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\beta}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$$

Bizonyítás. Egy $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ függvény a Hölder-folytonosság miatt egyenletesen is folytonos Ω-n, ezért egyértelműen kiterjeszthető folytonosan $\overline{\Omega}$-ra. A $C^{0,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$ beágyazás a normák definíciója miatt nyilván folytonos. Tekintsünk egy korlátos sorozatot $C^{0,\alpha}(\Omega)$-ban, ekkor szintén a Hölder-folytonosság következtében ez a sorozat egyenlő mértékben egyenletesen folytonos, ezért $\overline{\Omega}$ kompaktsága miatt a 2.1.23 Tétel szerint létezik konvergens részsorozata $C^0(\overline{\Omega})$-ban, tehát a beágyazás kompakt.
Legyen $0 < \beta < \alpha,\ x \neq y \in \Omega$, valamint $\delta > 0$, ekkor teljesül, hogy

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\beta} \leq \delta^{\alpha-\beta} \text{höl}_{\Omega,\alpha} f \quad (|x-y| \leq \delta),$$

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\beta} \leq 2\delta^{-\beta} \|f\|_\infty \quad (|x-y| \geq \delta).$$

Innen $\delta \geq \text{diam}(\Omega)$ választással rögtön következik a $C^{0,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\beta}(\Omega)$ beágyazás folytonossága.
Tekintsünk ismét egy $(f_k)_k$ korlátos sorozatot $C^{0,\alpha}(\Omega)$-ban, ekkor az előző meggondolás szerint $(f_k)_k$ egy $(f_k^1)_k$ részsorozata egyenletesen konvergál egy f függvényhez $C^0(\overline{\Omega})$-ban. Tetszőleges $\delta > 0$ számra

$$\limsup_{i,j\to\infty} \text{höl}_{\Omega,\beta}(f_i^1 - f_j^1) \leq \limsup_{i,j\to\infty} \delta^{\alpha-\beta}(\text{höl}_{\Omega,\alpha} f_i^1 + \text{höl}_{\Omega,\alpha} f_j^1) + \limsup_{i,j\to\infty} 2\delta^{-\beta} \left\|f_i^1 - f_j^1\right\|_\infty \leq$$

$$\leq \delta^{\alpha-\beta} \limsup_{i,j\to\infty}(\text{höl}_{\Omega,\alpha} f_i^1 + \text{höl}_{\Omega,\alpha} f_j^1) \leq \delta^{\alpha-\beta} 2 \sup_{m\in\mathbb{N}} \|f_m\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} \leq M\delta^{\alpha-\beta}.$$

Ezek szerint $(f_k^1)_k$ Cauchy-sorozat $C^{0,\beta}(\Omega)$-ban, így a 3.1.3 Állítás következtében konvergens is, ezért a $C^{0,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\beta}(\Omega)$ beágyazás is kompakt. $\square$

A későbbiekben szükségünk lesz az Ω tartomány határának egy speciális simasági fogalmára:

3.1.6. Definíció. *Jelöljünk tetszőleges $x \in \mathbb{R}^n$ pontot az $x = (x', x_n)$ $(x' \in \mathbb{R}^{n-1},\ x_n \in \mathbb{R})$ alakban. Legyen $m \in \mathbb{N}_0$, $\alpha \in [0,1]$, ekkor egy $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány esetén azt mondjuk, hogy $\partial\Omega \in C^{m,\alpha}$, ha minden $x_0 \in \partial\Omega$ határpontnak van olyan $\widetilde{U}_{x_0}$ környezete, és egy $r > 0$ szám, hogy a koordináta-rendszer alkalmas elforgatása, illetve eltolása után kapott U_{x_0} tartomány U'_{x_0} vetületéhez létezik egy olyan*

$$h_{x_0} : U'_{x_0} \to \mathbb{R} \quad \left(U'_{x_0} \subset \mathbb{R}^{n-1},\ h \in C^{m,\alpha}(U'_{x_0})\right)$$

függvény, mellyel teljesül, hogy

$$U_{x_0} = \left\{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n :\ x' = y',\ x_n = y_n + h_{x_0}(y')\ (y' \in U'_{x_0},\ |y_n| < r)\right\},$$

ahol $U_{x_0} \cap \Omega$ pontjaira az $y_n > 0$, $U_{x_0} \cap \partial\Omega$ pontjaira az $y_n = 0$, illetve $U_{x_0} \cap \Omega^c$ pontaira az $y_n < 0$ feltétel teljseül. Egy $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartományt, melyre $\partial\Omega \in C^{0,1}$, Lipschitz-tartománynak nevezünk.

3.1.7. Lemma. (Egységosztás tétel) *Legyen $A \subset \mathbb{R}^n$ tetszőleges halmaz, Γ tetszőleges indexhalmaz, valamint $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ olyan nyílt halmazok, melyekkel $A \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma$. Ekkor létezik egy olyan Ψ függvényhalmaz, hogy minden $\psi \in \Psi$ függvényre $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, továbbá*

- $\forall \psi \in \Psi,\ \forall x \in \mathbb{R}^n:\ 0 \leq \psi(x) \leq 1$
- *$K \subset\subset A$ esetén legfeljebb véges sok $\psi \in \Psi$ nem nulla K-n*
- $\forall \psi \in \Psi\ \exists \gamma \in \Gamma:$ *supp*$(\psi) \subset U_\gamma$
- $\forall x \in A:\ \sum_{\psi\in\Psi} \psi(x) = 1$

3.1.8. Megjegyzés. Mivel a 3.1.6 Definícióban Ω korlátos tartomány, így $\partial\Omega$ kompakt halmaz, ezért a $\{h_{x_0}\}_{x_0\in\partial\Omega}$ függvényhalmazból kiválasztható olyan $\{h_1, \ldots, h_l\}$ véges részhalmaz, hogy a megfelelő $\{U_1, \ldots, U_l\}$ környezetekre $U := \bigcup_{i=1}^l U_i$ környezete $\partial\Omega$-nak, így a 3.1.7 Lemma szerint

$$\exists \{\varphi_i \in C_c^\infty(U_i)\}_{i=1}^l : \quad \sum_{i=1}^l \varphi_i(x) = 1 \quad (x \in U).$$

Ekkor az $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^l$ halmazt Ω $C^{m,\alpha}$-lokalizációjának nevezzük.

A 3.1.6 Definíció segítségével már ki tudjuk mondani az áltlános eredményt a Hölder-terek beágyazásaival kapcsolatban, de ennek bizonyításától eltekintünk.

3.1.9. Tétel. *Legyen $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ Lipschitz-tartomány, $k \geq l$ $(k, l \in \mathbb{N}_0)$, valamint $0 < \alpha, \beta \leq 1$, melyekre teljesül, hogy $k + \alpha > l + \beta$. Ekkor a $C^{k,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow C^{l,\beta}(\Omega)$ beágyazás kompakt.*

3.2. Szoboljev-terek

Ebben a pontban a gyenge értelemben vett derivált segítségével definiáljuk a $W^{m,p}(\Omega)$ Szoboljev-tereket, majd belátjuk a témában alapvető fontosságúnak számító Meyers-Serrin tételt. A továbbiakban feltesszük, hogy $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ tetszőleges nyílt halmaz.

3.2.1. Definíció. *Legyen $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ tetszőleges multiindex, $f \in L_1^{loc}(\Omega)$, ekkor egy $g \in L_1^{loc}(\Omega)$ függvényről azt mondjuk, hogy f α rendű gyenge (vagy disztribúció) értelemben vett deriváltja, ha teljesül rá, hogy*

$$\int_\Omega f D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g\varphi dx \quad (\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)).$$

3.2.2. Megjegyzés. Ha egy f függvénynek valamely $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ multiindexre létezik $D^\alpha f$ gyenge deriváltja, akkor ez egyértelmű, továbbá tetszőleges $f \in C^m(\Omega)$ függvény esetén minden $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| \leq m$ multiindex esetén létezik a $D^\alpha f$ gyenge derivált, és ez megegyezik f α rendű klasszikus deriváltjával.

3.2.3. Megjegyzés. A továbbiakban tetszőleges $f \in L_1^{loc}(\Omega)$ függvény és $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ multiindex esetén jelölje $D^\alpha f$ az f függvény α rendű gyenge deriváltját, de ez a jelölés a 3.2.2 Megjegyzés következtében nem fog zavart okozni.

3.2.4. Definíció. *Legyen $m \in \mathbb{N}_0$, $1 \le p \le \infty$, ekkor a*

$$W^{m,p}(\Omega) := \left\{ f \in L_p(\Omega) : \ \exists D^\alpha f \in L_p(\Omega) \quad (\alpha \in \mathbb{N}_0^n, \ |\alpha| \le m) \right\}$$

teret Szoboljev-térnek nevezzük. Tetszőleges $f \in W^{m,p}(\Omega)$ esetén legyen

$$\|f\|_{m,p;\Omega} := \left(\sum_{|\alpha| \le m} \|D^\alpha f\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (1 \le p < \infty),$$

$$\|f\|_{m,\infty;\Omega} := \max_{|\alpha| \le m} \|D^\alpha f\|_\infty .$$

3.2.5. Megjegyzés. A definícióból nyilvánvaló, hogy $L_p(\Omega) = W^{0,p}(\Omega)$. Az egyszerűbb jelölés érdekében a normánál az Ω indexet elhagyjuk, kivéve akkor, amikor fontos, hogy melyik Ω tartományról van szó.

3.2.6. Állítás. *Tetszőleges $m \in \mathbb{N}_0$, $1 \le p \le \infty$ esetén $\left(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{m,p} \right)$ Banach-tér.*

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy $\left(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{m,p} \right)$ normált tér, ezért rátérünk a teljesség bizonyítására. Legyen $(f_k)_k$ Cauchy-sorozat $W^{m,p}(\Omega)$-ban, ekkor nyilván minden $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| \le m$ multiindexre $(D^\alpha f_k)_k$ Cauchy-sorozat $L_p(\Omega)$-ban, így a 2.3.9 Tétel alapján

$$\exists f^\alpha \in L_p(\Omega) : \quad \lim_{k \to \infty} \|D^\alpha f_k - f^\alpha\|_p = 0.$$

Jelölje $f := f^{(0,\dots,0)}$ és legyen $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ tetszőleges, ekkor a 2.3.11 Állítás miatt

$$\lim_{k \to \infty} \|D^\alpha f_k - f^\alpha\|_{1;\mathrm{supp}(\varphi)} = 0 \quad (\alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \le m), \tag{3.1}$$

így

$$\int_\Omega f_k D^\alpha \varphi \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha f_k \varphi \mathrm{d}x \overset{(3.1)}{\Rightarrow} \int_\Omega f D^\alpha \varphi \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f^\alpha \varphi \mathrm{d}x,$$

azaz $f^\alpha = D^\alpha f$, tehát $f \in W^{m,p}(\Omega)$, valamint $\lim_{k \to \infty} \|f_k - f\|_{m,p} = 0$. $\square$

A Meyers-Serrin-tétel kimondásához további segédtételek szükségesek.

3.2.7. Lemma. *Legyen $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, $f \in W^{m,p}(\Omega)$, ekkor $\varphi f \in W^{m,p}(\Omega)$, valamint érvényes az általánosított Leibniz-tétel, azaz*

$$D^\beta(\varphi f) = \sum_{\alpha \le \beta} \binom{\beta}{\alpha} (D^\alpha \varphi)(D^{\beta - \alpha} f) \quad (\beta \in \mathbb{N}_0^n, \ |\beta| \le m).$$

Bizonyítás. Nyilván elegendő az állítást $|\alpha| = 1$ esetén belátni, utána indukcióval már következik az általános eset. Legyen tehát $i \in \overline{1,n}$ rögzített, $\alpha_i := (\delta_{i,1}, \dots, \delta_{i,n})$, és jelölje $D_i := D^{\alpha_i}$. Ekkor tetszőleges $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ esetén

$$\int_\Omega (\varphi f)(D_i \phi) \mathrm{d}x = \int_\Omega f \big(D_i(\varphi \phi) - \phi D_i \varphi \big) \mathrm{d}x =$$

$$= - \int_\Omega (D_i f) \varphi \phi \mathrm{d}x - \int_\Omega f \phi D_i \varphi \mathrm{d}x = - \int_\Omega \big(\varphi D_i f + f D_i \varphi \big) \phi \mathrm{d}x,$$

tehát $D_i(\varphi f) = f D_i \varphi + \varphi D_i f$, és mivel $\varphi, D_i \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, ezért korlátosak, így $\varphi f \in H^{1,p}(\Omega)$. $\square$

3.2.8. Lemma. *Legyen $f \in W^{m,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, valamint $K \subset\subset \Omega$, ekkor*

$$D^\alpha f_\epsilon := D^\alpha(\eta_\epsilon * f) = \eta_\epsilon * D^\alpha f \quad (\alpha \in \mathbb{N}_0^n,\ |\alpha| \leq m), \quad \text{és} \quad \lim_{\epsilon \to 0} \|f_\epsilon - f\|_{m,p;K} = 0.$$

Bizonyítás. Legyen $\epsilon < \operatorname{dist}(\partial K, \partial\Omega)$, $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ tetszőleges, valamint terjesszük ki az f függvényt az Ω halmazon kívül 0-ként $\mathbb{R}^n$-re, ekkor tetszőleges $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| \leq m$ multiindexre a Fubini-tétel felhasználásával

$$\int_\Omega f_\epsilon(x) D^\alpha \varphi(x) \mathrm{d}x := \int_\Omega \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\epsilon(x-y) f(y) D^\alpha \varphi(x) \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \int_\Omega \eta_\epsilon(z) f(x-z) D^\alpha \varphi(x) \mathrm{d}x \mathrm{d}z =$$

$$= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \int_\Omega \eta_\epsilon(z) D^\alpha f(x-z) \varphi(x) \mathrm{d}x \mathrm{d}z = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \big(\eta_\epsilon * D^\alpha f\big)(x) \varphi(x) \mathrm{d}x,$$

tehát $D^\alpha f_\epsilon = \eta_\epsilon * D^\alpha f$, és mivel minden $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| \leq m$ multiindex esetén $D^\alpha f \in L_p(\Omega)$, ezért a 2.3.19 Lemma szerint

$$\lim_{\epsilon \to 0} \|D^\alpha f_\epsilon - D^\alpha f\|_{p;K} \ (\alpha \in \mathbb{N}_0^n,\ |\alpha| \leq m) \quad \Rightarrow \quad \lim_{\epsilon \to 0} \|f_\epsilon - f\|_{m,p;K},$$

amivel az állítást beláttuk. □

3.2.9. Tétel. (Meyers-Serrin tétel) *Minden $1 \leq p < \infty$ esetén $C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$ sűrű $W^{m,p}(\Omega)$-ban.*

Bizonyítás. Definiáljuk az

$$\Omega_k := \big\{x \in \Omega : \ \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{k},\ |x| < k\big\} \quad (k \in \mathbb{N})$$

halmazokat. Ekkor nyilván minden $k \in \mathbb{N}$ esetén Ω_k korlátos és nyílt, valamint $\Omega = \bigcup_{k=1}^\infty \Omega_k$. Legyen

$$U_k := \Omega_{k+1} \cap (\overline{\Omega_{k-1}})^c \ (k \in \mathbb{N}), \text{ ahol } \Omega_0 := \emptyset,$$

Ω sávokra való felosztása. A 3.1.7 Lemma szerint

$$\exists \varphi_k \in C_c^\infty(U_k) : \quad 0 \leq \varphi_k \leq 1 \quad (k \in \mathbb{N}),$$

és ezekre a φ_k $(k \in \mathbb{N})$ függvényekre

$$\sum_{k=1}^\infty \varphi_k(x) = 1 \quad (x \in \Omega).$$

Tetszőleges $f \in W^{m,p}(\Omega)$ esetén a $\varphi_k f$ függvényre $\operatorname{supp}(\varphi_k f) \subset U_k \subset \Omega$ kompakt, illetve a 3.2.7 Lemma alapján $\varphi_k f \in W^{m,p}(\Omega)$. Legyen $\epsilon > 0$ és $k \in \mathbb{N}$ adott, ekkor mivel $\operatorname{supp}\big((\varphi_k f)_\epsilon\big)$ ϵ-környezete $\operatorname{supp}(\varphi_k f)$-nek, ezért létezik olyan $\epsilon_{k_1} > 0$ szám, amelyre $\operatorname{supp}\big((\varphi_k f)_{\epsilon_{k_1}}\big) \subset\subset U_k$, így a 3.2.8 Lemma szerint

$$\exists \epsilon_{k_2} > 0 : \ \big\|(\varphi_k f)_{\epsilon_{k_2}} - \varphi_k f\big\|_{m,p;U_k} = \big\|(\varphi_k f)_{\epsilon_{k_2}} - \varphi_k f\big\|_{m,p;\Omega} < 2^{-k}\epsilon.$$

Legyen $\epsilon_k := \min\{\epsilon_{k_1}, \epsilon_{k_2}\}$ $(k \in \mathbb{N})$, és definiáljuk a

$$\phi(x) := \sum_{k=1}^\infty (\varphi_k f)_{\epsilon_k}(x) \quad (x \in \Omega)$$

függvényt, ekkor ebben a végtelen sorban minden $x \in \Omega$ esetén csak véges sok tag nem 0, mivel Ω nyílt. Tehát ϕ lokálisan $C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$ függgények véges összege, ezért ϕ globálisan is ilyen tulajdonságú. Figyelembe véve Ω_k, φ_k, valamint ϵ_k $(k \in \mathbb{N})$ értelmezéseit,

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k+2} \varphi_j(x) f(x), \quad \phi(x) = \sum_{j=1}^{k+2} (\varphi_j f)_{\epsilon_j}(x) \qquad (x \in \Omega_k).$$

Ezek alapján

$$\|f - \phi\|_{m,p;\Omega_k} \leq \sum_{j=1}^{k+2} \left\|(\varphi_j f)_{\epsilon_j} - \varphi_j f\right\|_{m,p;\Omega} < \epsilon,$$

ahol a Beppo-Levi konvergenciatétel alapján elvégezhetjük a $k \to \infty$ határátmenetet, amivel az állítást bebizonyítottuk. □

3.2.10. Megjegyzés. A 3.2.9 Tétel alapján a $W^{m,p}(\Omega)$ Szoboljev-tereket bevezethettük volna olyan módon is, hogy $m \in \mathbb{N}_0$, $1 \leq p < \infty$ értékekre tekintjük

$$\widetilde{H}^{m,p}(\Omega) := \Big\{ f \in C^m(\Omega) : \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha f|^p < \infty \Big\},$$

illetve

$$\|f\|_{\widetilde{H}^{m,p}} := \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (f \in \widetilde{H}^{m,p}(\Omega))$$

esetén a $\left(\widetilde{H}^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{\widetilde{H}^{m,p}}\right)$ normált teret, és ezt tesszük teljessé. Jelölje az így kapott Banach-teret $\left(H^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{m,p}\right)$. Ekkor könnyen belátható, hogy $H^{m,p}(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega)$, valamint 3.2.9 Tétel miatt a fordított irányú reláció is fennáll, ezért $H^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$. A matematikusok jelentős része sokáig úgy gondolta, hogy a 3.2.9 Tétel csak akkor teljesül, ha Ω határa elegendően sima, innen erednek a különböző jelölések.

A 3.2.9 Tétel alkalmazásaként belátjuk az alábbi két állítást:

3.2.11. Állítás. *Legyen $f, g \in W^{1,2}(\Omega)$, ekkor $fg \in W^{1,1}(\Omega)$, továbbá*

$$D_i(fg) = g D_i f + f D_i g \quad (i \in \overline{1,n}).$$

Bizonyítás. A 3.2.9 Tétel szerint

$$\exists (f_k)_k, (g_k)_k \subset C^\infty(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega) : \quad \lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_{1,2} = \lim_{k\to\infty} \|g_k - g\|_{1,2} = 0.$$

Ekkor tetszőleges $i \in \overline{1,n}$ esetén a 2.3.4 Tétel felhasználásával

$$\|(D_i f)g - (D_i f_k) g_k\|_1 \leq \|D_i(f - f_k)g\|_1 + \|D_i f_k (g - g_k)\|_1 \leq \|D_i(f - f_k)\|_2 \|g\|_2 + \|D_i f_k\|_2 \|g - g_k\|_2 \leq$$

$$\leq \max\Big\{ \|g\|_2, \sup_{j\in\mathbb{N}} \|D_i f_j\|_2 \Big\} \big(\|D_i(f - f_k)\|_2 + \|g - g_k\|_2 \big) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Hasonlóan belátható, hogy minden $i \in \overline{1,n}$ esetén

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k(D_i g_k) - f(D_i g)\|_1 = \lim_{k\to\infty} \|f_k g_k - fg\|_1 = 0,$$

így az

$$\int_\Omega (f_k g_k) D_i \varphi \mathrm{d}x = -\int_\Omega (D_i f_k) g_k \varphi \mathrm{d}x - \int_\Omega f_k (D_i g_k) \varphi \mathrm{d}x \quad (\varphi \in C_c^\infty(\Omega))$$

egyenlőségben a $k \to \infty$ határátmenet elvégezhető, amiből pont a bizonyítandó állítást kapjuk. □

3.2.12. Tétel. (Láncszabály) *Legyen $f \in C^1(\mathbb{R})$ olyan függvény, melyre $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| \le M$ $(M \in \mathbb{R})$, valamint tegyük fel, hogy vagy az $f(0) = 0$, vagy a $\mu(\Omega) < \infty$ feltétel teljesül. Ekkor ha $1 \le p < \infty$, és $g \in W^{1,p}(\Omega)$ tetszőleges, akkor $f(g) \in W^{1,p}(\Omega)$, továbbá*

$$D_i(f(g)) = f'(g) D_i g \quad (i \in \overline{1,n}).$$

Bizonyítás. Legyen $i \in \overline{1,n}$ és $1 \le p < \infty$ rögzített, illetve legyen $g \in W^{1,p}(\Omega)$ tetszőleges. Ekkor mivel $f \in C^1(\mathbb{R})$, ezért $f'(g)$ mérhető, valamint f' korlátosságából $f'(g)$ korlátossága is következik, továbbá könnyen belátható, hogy $f'(g) D_i g \in L_p(\Omega)$. A Lagrange-középértéktétel alapján

$$|f(g)| \le |f(0)| + M\,|g|\,, \tag{3.2}$$

így ha (3.2)-ben $f(0) = 0$, akkor $f(g) \in L_p(\Omega)$, különben pedig a $\mu(\Omega) < \infty$ feltétel is kell ahhoz, hogy $f(g) \in L_p(\Omega)$ teljesüljön.
A 3.2.9 Tétel szerint van olyan $(g_k)_k \subset C^\infty(\Omega) \cap H^{1,p}(\Omega)$ sorozat, melyre $\lim_{k\to\infty} \|g_k - g\|_{1,p} = 0$, ekkor nyilván minden $k \in \mathbb{N}$ esetén igaz az

$$\int_\Omega f'(g_k) D_i g_k \varphi \mathrm{d}x = -\int_\Omega f(g_k) D_i \varphi \mathrm{d}x \quad (\varphi \in C_c^\infty(\Omega)) \tag{3.3}$$

összefüggés. Rögzített $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ függvény esetén $K_\varphi := \mathrm{supp}(\varphi) \subset\subset \Omega$, így a 2.3.11 Állítás alapján

$$\|f(g_k) - f(g)\|_{1;K_\varphi} \le M\,\|g_k - g\|_{1;K_\varphi} \le c_p M\,\|g_k - g\|_{p;K_\varphi} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ezért (3.3) jobb oldalán elvégezhető a $k \to \infty$ határátmenet, valamint a $c_\varphi := \max_{K_\varphi} |\varphi|$ jelöléssel

$$\left|\int_\Omega \big(f'(g_k) D_i g_k - f'(g) D_i g\big)\varphi \mathrm{d}x\right| \le c_\varphi \int_{K_\varphi} |f'(g_k) D_i g_k - f'(g_k) D_i g|\,\mathrm{d}x +$$

$$+ c_\varphi \int_{K_\varphi} |f'(g_k) D_i g - f'(g) D_i g|\,\mathrm{d}x \le \underbrace{c_\varphi M \int_{K_\varphi} |D_i g_k - D_i g|\,\mathrm{d}x}_{=:A} + \underbrace{c_\varphi \int_{K_\varphi} |f'(g_k) - f'(g)|\,|D_i g|\,\mathrm{d}x}_{=:B}.$$

Itt nyilván A-ban $\lim_{k\to\infty} \|D_i g_k - D_i g\|_{1;K_\varphi} = 0$, B-re pedig alkalmazható a 2.3.10 Tétel, ugyanis

$$|f'(g_k) - f'(g)|\,|D_i g|\,\mathrm{d}x \le 2M\,|D_i g| \in L_1(K_\varphi),$$

tehát egy megfelelő $L_1(K_\varphi)$-beli függvénnyel majorálható, illetve a 2.3.9 Tétel alalpján van olyan $(k_l)_l$ indexsorozat, amellyel $g_{k_l} \overset{l\to\infty}{\longrightarrow} g$ pontonként, ezért f folytonossága miatt $f'(g_{k_l}) \overset{l\to\infty}{\longrightarrow} f'(g)$ pontonként, tehát a 2.3.10 Tétel alkalmazható, így az összes szükséges határátmenet elvégezhető. □

A 3.1.6 Definícióban bevezetett simasági fogalom segítségével tetszőleges Ω korlátos tartomány esetén ki tudjuk mondani a 3.2.9 Tétel egy erősebb alakját.

3.2.13. Tétel. *Legyen Ω olyan korlátos tartomány, melyre $\partial\Omega \in C^0$ teljesül, ekkor tetszőleges $m \in \mathbb{N}_0$ és $1 \leq p < \infty$ esetén a $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tér Ω-ra vett megszorítása sűrű $W^{m,p}(\Omega)$-ban.*

Bizonyítás. Tekintsük Ω-nak egy $M := \{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^l$ C^0-lokalizációját. A 3.1.8 Megjegyzés alapján könnyen meggondolható, hogy létezik olyan $U_0 \subset\subset \Omega$ halmaz, melyre a

$$\varphi_0(x) := 1 - \sum_{i=1}^{l} \varphi_i(x) \quad (x \in \Omega)$$

módon definiált függvénnyel $\varphi_0 \in C_c^\infty(U_0)$ teljesül. Ekkor ezzel a φ_0 függvénnyel M-et kiegészítve

$$\sum_{i=0}^{l} \varphi_i(x) = 1 \qquad (x \in \Omega_1),$$

ahol $\Omega \subset\subset \Omega_1 := \bigcup_{i=0}^{l} U_i$. Ekkor elegendő belátni, hogy adott $f \in W^{m,p}(\Omega)$ függvény esetén tetszőleges $\epsilon > 0$ számra

$$\forall j \in \{0, \ldots, l\}\ \exists \phi_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n): \quad \|\varphi_j f - \phi_j\|_{m,p;\Omega} < \frac{\epsilon}{l+1}, \tag{3.4}$$

ugyanis ekkor a

$$\phi := \sum_{j=0}^{l} \phi_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \text{és} \quad f_j := \varphi_j f \quad (j \in \{0, \ldots, l\})$$

jelölésekkel az

$$\|f - \phi\|_{m,p;\Omega} = \left\| \sum_{j=0}^{l} f_j - \sum_{j=0}^{l} \phi_j \right\|_{m,p;\Omega} \leq \sum_{j=0}^{l} \|f_j - \phi_j\|_{m,p;\Omega} < \epsilon$$

becslés alapján az állítást bebizonyítottuk.

Legyen tehát $\epsilon > 0$ rögzített. A 3.2.7 Lemma következtében $f_0 \in W^{m,p}(\Omega)$, és U_0 konstrukciója alapján $\operatorname{supp}(f_0) \subset\subset \Omega$, ezért a 3.2.8 Lemmát felhasználva létezik olyan $\delta > 0$ szám, amelyre $\phi_0 := (f_0)_\delta := f_0 * \eta_\delta$ választása esetén (3.4) teljesül.

Ha $j \in \overline{1, l}$, akkor terjesszük ki az f_j függvényt $\operatorname{supp}(f_j)$ halmazon kívül 0-ként, továbbá tegyük fel, hogy a koordináta-rendszer a 3.1.6 Definícióban látott módon módosítva lett. Tekintsük az

$$f_{j,t}(x) := f_j(x + te_n) \quad (t > 0)$$

módon az n-edik koordináta-tengely mentén eltolt f_j függvényt, ekkor $\operatorname{supp}(f_{j,t}) \cap \Omega \subset\subset \operatorname{supp}(f_{j,t})$ teljesül, ezért alkalmazható a 3.2.8 Lemma, ami alapján

$$\exists \delta > 0: \ (f_{j,t})_\delta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \text{és} \quad \lim_{\delta \to 0} \|f_{j,t} - (f_{j,t})_\delta\|_{m,p;\Omega} = 0. \tag{3.5}$$

Mivel $L_p(\Omega)$-ban az eltolás folytonos operátor, ezért

$$\lim_{t \to 0} \|D^\alpha f_{j,t} - D^\alpha f_j\|_{p;\Omega} = 0 \quad (\alpha \in \mathbb{N}_0^n,\ |\alpha| \leq m) \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \to 0} \|f_{j,t} - f_j\|_{m,p;\Omega} = 0. \tag{3.6}$$

Ekkor (3.5) és (3.6) alapján léteznek olyan $\delta, t > 0$ számok, melyekkel a $\phi_j := (f_{j,t})_\delta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ választással (3.4) teljesül, így az állítást beláttuk. $\square$

A későbbiekben szükségünk a $W^{m,p}(\Omega)$ tér egy speciális alterére:

3.2.14. Definíció. *Legyen $m \in \mathbb{N}$, valamint $1 \leq p < \infty$, ekkor jelölje $W_0^{m,p}(\Omega)$ a $C_c^\infty(\Omega)$ tér lezárását $W^{m,p}(\Omega)$-ban.*

3.2.15. Megjegyzés. A 3.2.9 Tétel és a 3.2.10 Megjegyzés alapján teljesül, hogy $1 \leq p < \infty$ esetén $W^{m,p}(\Omega)$ megegyezik $W^{m,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ lezárásával, így $W_0^{m,p}(\Omega)$ lineáris altere $W^{m,p}(\Omega)$ vektortérnek.

3.2.16. Megjegyzés. Amennyiben tetszőleges $\Omega \subset \Omega_1$ tartományok esetén a $C_c^\infty(\Omega)$-beli függvényeket 0-ként kiterjesztjük Ω_1-re, nyilván $C_c^\infty(\Omega) \subset C_c^\infty(\Omega_1)$, ez alapján pedig a $W_0^{m,p}(\Omega) \subset W_0^{m,p}(\Omega_1)$ tartalmazás is teljesül.

3.2.17. Állítás. *Legyen $1 \leq p < \infty$, $m \in \mathbb{N}$ tetszőleges, valamint legyen $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Ekkor bármely $f \in W^{m,p}(\Omega)$ függvény esetén $\varphi f \in W_0^{m,p}(\Omega)$.*

Bizonyítás. Az állítás a 3.2.7 és 3.2.8 Lemmákból következik. □

4. fejezet

Alkalmazások

Ebben a fejezetben az eddig tárgyalt függvényterek segítségével fogalmazunk meg egzisztencia tételeket különböző típusú differenciálegyenletekkel kapcsolatban, de tekintve ezen témakörök önmagukban is terjedelmes voltát, törekedni fogunk a vázlatos, ám teljes kidolgozásra.

4.1. Kezdetiérték-probléma megoldhatósága

Legyen $d \in \mathbb{N}$, $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|)$ normált tér adott, valamint tetszőleges $f : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ függvény esetén jelölje

$$\int_a^b f(t)dt := \left(\int_a^b f_1(t)\mathrm{d}t, \ldots, \int_a^b f_d(t)\mathrm{d}t \right).$$

Differenciálegyenletek megoldhatóságával kapcsolatban ismert a következő eredmény:

4.1.1. Tétel. (Picard-Lindelöf tétel) *Legyen $f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, illetve legyen*

$$H := [\tau - a, \tau + a] \times \overline{B_b(\xi)} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \quad (\tau \in \mathbb{R},\ a, b \in \mathbb{R}^+,\ \xi \in \mathbb{R}^d).$$

Tegyük fel, hogy létezik egy olyan $L \in \mathbb{R}^+$ állandó, amellyel

$$\|f(x, y) - f(x, y)\| \le L \|y - z\| \quad (x \in [\tau - a, \tau + a],\ y, z \in \overline{B_b(\xi)}).$$

Jelölje $M := \max_H \|f\|$, ekkor ha $r < \min\left\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\right\}$, akkor egyetlen olyan $\varphi : (\tau - r, \tau + r) \to \mathbb{R}^d$ függvény létezik, amelyre

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)), \quad \varphi(\tau) = \xi.$$

4.1.2. Megjegyzés. A 4.1.1 Tétel feltételei között jól látható probléma, hogy a megoldás értelmezési tartományának r sugara függ az f függvény L Lipschitz-konstansától, amit általában igen nehézkes meghatározni. Ezt a problémát segít kiküszöbölni a jelen pontban tárgyalt módszer, ugyanis belátjuk, hogy az f függvény második változóbeli lokális Lipschitz-tulajdonsága már elegendő a globális megoldás egyértelmű létezéséhez.

4.1.3. Állítás. *Legyen $p \in C([a,b],\mathbb{R})$, $p(x) > 0$ $(x \in [a,b])$, valamint $\mathbb{X} := C([a,b],\mathbb{R}^d)$. Ekkor az*

$$\|f\|_\infty^p := \max_{x\in[a,b]} \left\{ \|f(x)\|\, p(x) \right\} \quad (f \in \mathbb{X})$$

módon definiált (súlyozott norma) függvénnyel $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_\infty^p)$ normált teret alkot.

Bizonyítás. A bizonyítás rögtön következik abból, hogy $p(x) > 0$ $(x \in [a,b])$, valamint $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|)$ normált tér . □

4.1.4. Állítás. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $\xi \in \mathbb{R}^d$, továbbá $f \in C(I \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ olyan függvény, amelyre alkalmas $L \in C(I,\mathbb{R})$ függvénnyel teljesül, hogy*

$$\|f(x,y) - f(x,z)\| \le L(x)\, \|y - z\| \quad (x \in I,\ y,z \in \mathbb{R}^d).$$

Tetszőleges $J \subset I$ kompakt intervallum és $\tau \in J$ esetén a $C(J,\mathbb{R}^d)$ vektorteret lássuk el a $\|\cdot\|_\infty^p$ súlyozott normával, ahol p a

$$p(x) := \exp\left(- \left| \int_\tau^x L(s)\, ds \right| \right) \quad (x \in I) \tag{4.1}$$

módon van értelmezve. Ekkor az alábbi $A : C(J,\mathbb{R}^d) \to C(J,\mathbb{R}^d)$ leképezés kontrakció:

$$A(g)(x) := \xi + \int_\tau^x f(s,g(s))\, ds \quad (x \in J)$$

Bizonyítás. Legyen $g,h \in C(J,\mathbb{R}^d)$, $x \in J$, ekkor

$$\|A(g)(x) - A(h)(x)\| = \left\| \int_\tau^x f(s,g(s))\mathrm{d}s - \int_\tau^x f(s,h(s))\mathrm{d}s \right\| \le \left| \int_\tau^x \|f(s,g(s)) - f(s,h(s))\|\, ds \right| \le$$

$$\le \left| \int_\tau^x L(s)\, \|g(s) - h(s)\|\, \mathrm{d}s \right| \le \left| \int_\tau^x \frac{L(s)}{p(s)} \|g - h\|_\infty^p\, \mathrm{d}s \right| = \|g - h\|_\infty^p \left| \int_\tau^x \frac{L(s)}{p(s)} \mathrm{d}s \right|$$

Jelölje $\alpha := \min_{x\in J} p(x)$, ekkor $x \ge \tau$ esetén

$$\left| \int_\tau^x \frac{L(s)}{p(s)} \mathrm{d}s \right| = \int_\tau^x \left(\frac{1}{p(s)} \right)' \mathrm{d}s = \frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p(\tau)} = \frac{1 - p(x)}{p(x)} \le \frac{1-\alpha}{p(x)},$$

valamint $x \le \tau$ esetén

$$\left| \int_\tau^x \frac{L(s)}{p(s)} \mathrm{d}s \right| = \int_x^\tau \left(-\frac{1}{p(s)} \right)' \mathrm{d}s = -\frac{1}{p(\tau)} + \frac{1}{p(x)} = \frac{1 - p(x)}{p(x)} \le \frac{1-\alpha}{p(x)},$$

ezért tetszőleges $x \in J$-re

$$p(x)\, \|A(g)(x) - A(h)(x)\| \le (1-\alpha)\, \|g - h\|_\infty^p \ \Rightarrow\ \|Ag - Ah\|_\infty^p \le (1-\alpha)\, \|g - h\|_\infty^p\,,$$

amivel az állítást beláttuk. □

4.1.5. Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $\tau \in I$, $\xi \in \mathbb{R}^d$, továbbá $f \in C(I \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, amelyre alkalmas $L \in C(I,\mathbb{R})$ függvény esetén*

$$\|f(x,y) - f(x,z)\| \le L(x)\, \|y - z\| \quad (x \in I,\ y,z \in \mathbb{R}^d).$$

Ekkor pontosan egy olyan $\varphi \in C^1(I,\mathbb{R}^d)$ függvény létezik, amelyre

$$\varphi'(x) = f(x,\varphi(x)) \quad (x \in I), \qquad \varphi(\tau) = \xi. \tag{4.2}$$

Bizonyítás. Legyen $\tau \in J \subset I$ kompakt, ekkor $\varphi : J \to \mathbb{R}^d$ függvényre (4.2) pontosan akkor teljesül, ha folytonos, és

$$\varphi(x) = \xi + \int_\tau^x f(s, \varphi(s))\mathrm{d}s \quad (x \in J) \tag{4.3}$$

Legyen ugyanis $\varphi : J \to \mathbb{R}^d$, melyre (4.2) teljesül, ekkor φ nyilván folytonos és minden $x \in J$-re

$$\varphi(x) - \xi = \varphi(x) - \varphi(\tau) = \int_\tau^x \varphi'(s)\mathrm{d}s = \int_\tau^x f(s, \varphi(s))\mathrm{d}s,$$

illetve ha $\varphi \in C(J, \mathbb{R}^d)$, és φ-re (4.3) teljesül, akkor $x = \tau$ helyettesítéssel, valamint (4.3) deriválásával adódik (4.2).
Láttuk, hogy az

$$A : C(J, \mathbb{R}^d) \to C(J, \mathbb{R}^d), \qquad A(g)(x) := \xi + \int_\tau^x f(s, g(s))\mathrm{d}s \quad (x \in J)$$

leképezés kontrakció a (4.1) módon definiált $\|\cdot\|_\infty^p$ normára nézve. Legyen $\varphi_0 \in C(I, \mathbb{R}^d)$ tetszőleges, valamint $\tau \in J \subset I$ kompakt, ekkor a Banach-féle fixponttétel miatt a $\varphi_{n+1} := A(\varphi_n)$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ sorozat J-re való leszűkítései konvergálnak A egyetlen $C(J, \mathbb{R}^d)$-beli fixpontjához. Evidens, hogy a $C(J, \mathbb{R}^d)$ téren a $\|\cdot\|_\infty^p$ és $\|\cdot\|_\infty$ normák ekvivalensek, ezért $(\varphi_n)_n$ egyenletesen is konvergál a fixponthoz, amire A értelmezése miatt (4.3), így (4.2) is teljesül. Továbbá $\tau \in J \subset I$ tetszőleges, ezért $(\varphi_n)_n$ I minden pontjában konvergens. Az így kapott határfüggvényre minden $J \subset I$ kompakt részintervallumon (4.2) igaz, ezért magán I-n is teljesül. $\square$

4.2. Általánosított peremérték-feladatok

Ebben a pontban Szoboljev-terek segítségével definiáljuk az ellipitikus peremérték-feladatokra vonatkozó általánosított első peremérték-feladatot, majd a megoldhatósággal kapcsolatban kimondunk egy fontos eredményt.
A továbbiakban feltesszük, hogy $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos Lipschitz-tartomány (a $\partial\Omega \in C^{0,1}$ feltételt nem mindig fogjuk kihasználni, ahol szükségünk lesz rá, ott megemlítjük, hogy Ω határa elég sima), valamint jelölje tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ esetén $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$ Szoboljev-teret, ahol azért szokás a H jelölést használni, mert $H^k(\Omega)$ az

$$\langle f, g\rangle_{k,2} := \int_\Omega \sum_{|\alpha|\le k} (D^\alpha f)(D^\alpha g)\mathrm{d}x = \sum_{|\alpha|\le k} \langle D^\alpha f, D^\alpha g\rangle_2 \tag{4.4}$$

skaláris szorzattal Hilbert-teret alkot, ami a 3.2.10 Megjegyzésben látott konstrukcióból rögtön következik. Hasonlóan legyen $H_0^k(\Omega) := W_0^{k,2}(\Omega)$, amely a (4.4) skaláris szorzattal szintén Hilbert-tér.

A 3.2.16 Megjegyzés nyilván továbbra is érvényben lesz az alábbi formában:

4.2.1. Megjegyzés. Legyen $\Omega' \subset \Omega$, $f \in H_0^k(\Omega')$, és jelölje f_1 azt a függvényt, amelyet úgy kapunk, hogy f-et Ω'-n kívül azonosan 0-ként kiterjesztjük. Ekkor nyilván

$$f_1 \in H_0^k(\Omega), \quad \text{és} \quad \|f\|_{k,2;\Omega'} = \|f_1\|_{k,2;\Omega}\,.$$

A továbbiakban a $H^1(\Omega)$ és $H_0^1(\Omega)$ terekkel foglalkozunk.

4.2.2. Megjegyzés. Tetszőleges $f \in H^1(\Omega)$ függvény esetén a (4.4) skaláris szorzat által indukált norma

$$\|f\|_{1,2} = \left(\int_\Omega |f|^2 + \sum_{j=1}^n |D_j f|^2 \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}$$

alakú. Ez természetesen minden $f \in H_0^1(\Omega)$ függvényre is igaz.

4.2.3. Definíció. *Tetszőleges $f \in H_0^1(\Omega)$ függvény esetén jelölje*

$$\|f\|'_{1,2} := \left(\int_\Omega \sum_{j=1}^n |D_j f|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

4.2.4. Tétel. *Ha $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, akkor $\|\cdot\|_{1,2}$ és $\|\cdot\|'_{1,2}$ normák ekvivalensek a $H_0^1(\Omega)$ téren, azaz*

$$\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+ : \; c_1 \|f\|'_{1,2} \le \|f\|_{1,2} \le c_2 \|f\|'_{1,2} \quad (f \in H_0^1(\Omega)). \tag{4.5}$$

Bizonyítás. A normák definíciói miatt nyilvánvaló, hogy (4.5)-ben a $c_1 := 1$ választás megfelelő, továbbá ha belátjuk, hogy

$$\exists K > 0 : \quad \int_\Omega |f|^2 \,\mathrm{d}x \le K^2 \int_\Omega \sum_{j=1}^n |D_j f|^2 \,\mathrm{d}x \quad (f \in H_0^1(\Omega)), \tag{4.6}$$

akkor (4.5)-ben könnyen láthatóan a $c_2 := \sqrt{1+K^2}$ választás is megfelelő lesz.
Mivel Ω korlátos tartomány, ezért van olyan $T := (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n)$ nyílt tégla, amellyel $\Omega \subset T$ teljesül. Legyen $f \in H_0^1(\Omega)$ tetszőleges, és terjesszük ki f-et Ω-n kívül azonosan 0-ként. Jelölje a továbbiakban f ezt a kiterjesztett függvényt, ekkor a 4.2.1 Megjegyzés szerint

$$f \in H_0^1(T), \quad \|f\|_{1,2;T} = \|f\|_{1,2;\Omega}, \quad \text{és} \quad \int_T \sum_{j=1}^n |D_j f|^2 \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \sum_{j=1}^n |D_j f|^2 \,\mathrm{d}x. \tag{4.7}$$

(4.7) eredményeit figyelembe véve az állítást elegendő $\Omega = T$ esetben igazolni. Jelölje tetszőleges $x \in \mathbb{R}^n$ esetén $x = (x_1, x')$, ahol $x' := (x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$, ekkor a Newton-Leibniz tétel szerint

$$g(x_1, x') = \int_{a_1}^{x_1} D_1 g(y_1, x') \mathrm{d}y_1 \quad (g \in C_c^1(T)).$$

Ekkor a 2.3.4 Tétel alapján

$$|g(x_1, x')|^2 \le \int_{a_1}^{x_1} |D_1 g(y_1, x')|^2 \,\mathrm{d}y_1 \int_{a_1}^{x_1} 1 \mathrm{d}y_1 \le (x_1 - a_1) \int_{a_1}^{b_1} |D_1 g(y_1, x')|^2 \,\mathrm{d}y_1 \quad (g \in C_c^1(T)), \tag{4.8}$$

így

$$\int_T |g(x_1, x')|^2 \,\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x' \overset{(4.8)}{\le} \int_{a_1}^{b_1} (x_1 - a_1) \mathrm{d}x_1 \cdot \int_{a_2}^{b_2} \ldots \int_{a_n}^{b_n} \left(\int_{a_1}^{b_1} |D_1 g(y_1, x')|^2 \,\mathrm{d}y_1 \right) \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n =$$

$$= \left[\frac{x_1^2}{2} - a_1 x_1 \right]_{x_1 = a_1}^{b_1} \cdot \int_T |D_1 g|^2 \,\mathrm{d}x = \frac{(b_1 - a_1)^2}{2} \int_T |D_1 g|^2 \,\mathrm{d}x \quad (g \in C_c^1(T)),$$

ahonnan rögtön látszik, hogy például a $K := b_1 - a_1$ választás megfelelő, így az állítást a $g \in C_c^1(T)$ esetben beláttuk.

Mivel $f \in H_0^1(T)$, ezért

$$\exists (g_k)_k \subset C_c^1(T): \quad \lim_{k\to\infty} \|f - g_k\|_{1,2;T} = 0.$$

Ekkor (4.6)-ban a becslés minden $k \in \mathbb{N}$ esetén teljesül a $g_k \in C_c^1(T)$ függvényre, így a norma folytonossága miatt a határátmenetet elvégezhetjük, amivel az állítást beláttuk. □

4.2.5. Megjegyzés. Jelölje a továbbiakban L az

$$Lu := -\mathrm{div}(p\mathrm{grad}u) + qu$$

operátort.

4.2.6. Megjegyzés. Tekintsük a klasszikus első peremérték-feladatot, azaz

$$\begin{cases} Lu = f \quad \Omega\text{-n} \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases} \tag{4.9}$$

ahol $p \in C^1(\overline{\Omega})$, $p(x) \geq m > 0$ $(x \in \overline{\Omega})$ teljesül valamely $m \in \mathbb{R}^+$ x-től független állandóval, valamint $q \in C(\overline{\Omega})$, $q(x) \geq 0$ $(x \in \overline{\Omega})$, és keressünk olyan $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ függvényt, amely megoldása a fenti differenciálegyenletnek. Ezt a feladatot szeretnénk általánosabb függvényterekből vett függvényekkel kitűzni, de ehhez szükségünk lesz az úgynevezett nyom operátorra.

4.2.7. Megjegyzés. A 3.2.13 Tétel alapján tetszőleges $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^0$ korlátos tartomány esetén $C^1(\overline{\Omega})$ sűrű $H^1(\Omega)$-ban, azaz

$$\forall f \in H^1(\Omega)\ \exists (f_j)_j \subset C^1(\overline{\Omega}): \quad \lim_{j\to\infty} \|f - f_j\|_{1,2} = 0.$$

A problémát az jelenti, hogy adott $f \in H^1(\Omega)$ függvény esetén f-nek nem értelmezhető a peremen felvett értéke, mivel $\partial\Omega$ 0-mértékű halmaz, viszont tetszőleges $g \in C^1(\overline{\Omega})$ esetén $g|_{\partial\Omega}$ értelmes, valamint $g|_{\partial\Omega} \in L_2(\partial\Omega)$. Tekintsük a

$$T : C^1(\overline{\Omega}) \to L_2(\partial\Omega): \ g \mapsto g|_{\partial\Omega}$$

peremre való megszorítás operátort. Ennek a T leképezésnek a tulajdonságait foglalja össze a következő tétel, melynek bizonyításától eltekintünk.

4.2.8. Állítás. *A $T : C^1(\overline{\Omega}) \to L_2(\partial\Omega)$ operátor korlátos és lineáris, ezért egyértelműen kiterjeszthető korlátos lineáris operátorként az egész $H^1(\Omega)$ térre. Az így kapott $\widetilde{T} : H^1(\Omega) \to L_2(\partial\Omega)$ leképezést nyom operátornak nevezzük, valamint tetszőleges $f \in H^1(\Omega)$ függvény esetén $\widetilde{T}(f)$ az f nyoma $\partial\Omega$-n. Egy $f \in H^1(\Omega)$ függvényre pontosan akkor teljesül, hogy $f \in H_0^1(\Omega)$, ha $\widetilde{T}(f) = 0$.*

4.2.9. Megjegyzés. Legyen Ω sima peremű korlátos tartomány, és szorozzuk meg a (4.9) egyenletet egy tetszőleges $v \in C_c^1(\Omega)$ próbafüggvénnyel, majd integráljuk Ω-n, azaz

$$\int_\Omega (Lu)v\mathrm{d}x = \int_\Omega fv\mathrm{d}x.$$

Ebből L értelmezése és az antiszimmetrikus Green-formula alapján azt kapjuk, hogy

$$\underbrace{\int_\Omega \left(p\langle \mathrm{grad}u, \mathrm{grad}v\rangle + quv\right) \mathrm{d}x}_{:=\{u,v\}} - \underbrace{\int_{\partial\Omega} pv\partial_\nu u \mathrm{d}\sigma}_{=0,\text{ mivel } v|_{\partial\Omega}=0} = \int_\Omega fv\mathrm{d}x. \tag{4.10}$$

Mivel (4.10) minden $v \in C_c^1(\Omega)$ esetén fennáll, ezért tetszőleges $v \in H_0^1(\Omega)$ függvényre is teljesülni fog, ugyanis $H_0^1(\Omega)$ a $C_c^1(\Omega)$ altér lezártja. Ezek alapján ha $u \in C^2(\overline{\Omega})$ klasszikus megoldása (4.9)-nek, akkor

$$\{u, v\} = \int_\Omega fv \mathrm{d}x \quad (v \in H_0^1(\Omega)) \tag{4.11}$$

teljesül.

4.2.10. Definíció. *Általánosított első peremérték-feladatnak nevezzük azt a feladatot, ahol keresendő egy olyan $u \in H^1(\Omega)$ függvény, amelyre*

$$\begin{cases} \{u, v\} = \int_\Omega fv\,dx \quad (v \in H_0^1(\Omega)) \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \quad \textit{nyom értelemben} \end{cases} \tag{4.12}$$

ahol $p \in L_\infty(\Omega)$, $p \geq m > 0$ valamely $m \in \mathbb{R}^+$ x-től független állandóval, $q \in L_\infty(\Omega)$, $q \geq 0$, $f \in L_2(\Omega)$, valamint $\varphi \in L_2(\partial\Omega)$. Ilyenkor u-t a feladat gyenge megoldásának szokás nevezni.

4.2.11. Állítás. *Ha $u \in C^2(\overline{\Omega})$ klasszikus megoldása (4.9)-nek, akkor gyenge megoldása (4.12)-nek, valamint ha $u \in H^1(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$ gyenge megoldása (4.12)-nek, akkor klasszikus megoldása (4.9)-nek.*

4.2.12. Megjegyzés. A (4.12) feladatban a homogén peremfeltétel esete a 4.2.8 Állítás szerint úgy is fogalmazható, hogy keresendő egy $u \in H_0^1(\Omega)$ gyenge megoldás. A továbbiakban a homogén peremfeltétel esetét vizsgáljuk.

4.2.13. Állítás. *Tetszőleges $p \in L_\infty(\Omega)$, $p \geq m > 0$ ($m \in \mathbb{R}^+$), illetve $q \in L_\infty(\Omega)$, $q \geq 0$ függvények esetén a (4.10)-ben definiált $\{\cdot, \cdot\}$ leképezés skaláris szorzat a $H_0^1(\Omega)$ téren, mely skaláris szorzat által indukált norma ekvivalens a $H_0^1(\Omega)$ tér $\|\cdot\|_{1,2}'$ normájával.*

Bizonyítás. Könnyen belátható, hogy $\{\cdot, \cdot\}$ valóban skaláris szorzat, ezért rátérünk az ekvivalencia bizonyítására.
Mivel $p \geq m > 0$, $q \geq 0$ az Ω halmazon, ezért

$$\{u, u\} \geq m(\|u\|_{1,2}')^2 \quad (u \in H_0^1(\Omega)),$$

valamint $p, q \in L_\infty(\Omega)$, így

$$\{u, u\} \leq \underbrace{\max\{\|p\|_\infty, \|q\|_\infty\}}_{:=K} \cdot \|u\|_{1,2}^2 \overset{4.2.4}{\leq} cK(\|u\|_{1,2}')^2 \quad (u \in H_0^1(\Omega))$$

is teljesül, amivel az állítást beláttuk. □

4.2.14. Tétel. *A (4.12) homogén peremfeltételű általánosított első peremérték-feladatnak egyértelműen létezik $u \in H_0^1(\Omega)$ gyenge megoldása, amely folytonosan függ f-től abban az értelemben, hogy létezik (csak az Ω tartománytól függő) $c > 0$ konstans, amellyel $\|u\|_{1,2}' \leq c\,\|f\|_2$.*

Bizonyítás. Tekintsük a

$$B : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R} : \; B(v) := \int_\Omega fv\mathrm{d}x$$

funkcionált, ez nyilván lineáris, valamint korlátos a $\{\cdot,\cdot\}$ skaláris szorzat által indukált normára nézve, ugyanis

$$|B(v)| \overset{2.3.4}{\leq} \|f\|_2 \|v\|_2 \overset{4.2.4}{\leq} K \|f\|_2 \|v\|'_{1,2} \overset{4.2.13}{\leq} \underbrace{KM \|f\|_2}_{const} \{v,v\}^{\frac{1}{2}} \quad (v \in H_0^1(\Omega)),$$

így B valóban korlátos, ezért a Riesz reprezentációs tétel alapján egyértelműen létezik egy $F \in H_0^1(\Omega)$ függvény, mellyel

$$B(v) = \{F, v\}, \quad \text{valamint} \quad \|B\| = \{F, F\}^{\frac{1}{2}}.$$

Ezek alapján a feladat a következő alakba írható:

$$\{u, v\} = \{F, v\} \quad (v \in H_0^1(\Omega)),$$

tehát az $u = F$ függvény egyértelmű gyenge megoldása a feladatnak, továbbá a megoldás f-től való folytonos függése is teljesül, ugyanis

$$\|B\| = \{u, u\}^{\frac{1}{2}}, \ \|B\| \leq KM \|f\|_2 \quad \Rightarrow \quad \{u, u\}^{\frac{1}{2}} \leq KM \|f\|_2,$$

amivel a tételt beláttuk. □

Irodalomjegyzék

[1] R. LAUTERBACH, *Funktionalanalysis*, 2010

[2] LOSONCZI L., *Funkcionálanalízis*, 2009

[3] A. N. KOLMOGOROV - SZ. V. FOMIN, *A függvényelmélet és a funkcionálanalízis elemei*, Typotex, 2010

[4] D. HAROSKE, *Distributions, Sobolev spaces, Elliptic equations*, EMS Publishing House, 2007

[5] KOVÁCS S., *Funkcionálanalízis feladatokban*, egyetemi jegyzet, 2013, ISBN: 978-963-284-445-9

[6] M. DOBROWOLSKI, *Angewandte Funktionalanalysis*

[7] M. SCHMIDT, *Partielle Differentialgleichungen*

[8] SIMON - BADERKO, *Másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek*, Tankönyvkiadó, 1983