

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Havasréti Kristóf

Matematika BSc

Alkalmazott matematikus szakirány

**FOURIER-TRANSZFORMÁCIÓ ALKALMAZÁSA
DIGITÁLIS KÉPFELDOLGOZÁSBAN**

szakdolgozat

Témavezető: Tóth Árpád

Analízis Tanszék



Budapest, 2015

Köszönetnyilvánítás

Számtalan embernek tartozom hálával azért, hogy ez a dolgozat megíródott.

Köszönöm a szüleimnek, hogy elültették bennem a tanulás és a tudomány szeretetét.

Köszönöm a barátaimnak, hogy velük vehettem részt ezen az úton.

Köszönöm Keszthelyi Gabriellának, hogy megszerettette velem az analízist.

Köszönöm témavezetőmnek, Tóth Árpádnak a kedves segítségét és támogatását.

Tartalomjegyzék

Bevezetés	4
1. Képszűrés	5
1.1. Digitális képek	5
1.2. Lineáris szűrők	6
1.3. Korreláció és konvolúció	8
2. Fourier-transzformáció	12
2.1. Folytonos eset	12
2.2. Diszkrét Fourier-transzformáció	13
2.3. Kétdimenziós Fourier-transzformáció	17
3. Gyors Fourier-transzformáció	18
3.1. Naiv DFT	18
3.2. FFT algoritmus	19
3.3. Az FFT műveletigénye	20
4. Szűrés a frekvenciatérben	21
4.1. Képek Fourier-transzformáltja	21
4.2. Szűrők alkalmazása a frekvenciatérben	23
4.3. Szűrőtípusok	25
Összefoglalás	30
Függelék	31
Irodalomjegyzék	33

Bevezetés

Rengeteg hétköznapi feladat megoldása támaszkodik vizuális információ feldolgozására: közúti felügyelet, biztonsági megfigyelőrendszerek, orvosi képalkotás, önvezérlő járművek, vagy ipari minőségellenőrzés. Az ilyen jellegű problémákkal összefoglalóan a számítógépes vagy gépi látás (computer vision) területe foglalkozik. A gépi látás tényleges feladatainak megoldása előtt a rögzített képeket jellemzően valamilyen előfeldolgozásnak alá kell vetni: a bemenetként érkező képeket restaurálni, zajtalanítani, élesíteni, tömöríteni kell, mielőtt érdemileg munkához lehetne látni.

A digitális képfeldolgozás egyik nagyon elterjedt és sokoldalú eszköze a képszűrés. Ez a művelet a képnek, mint kétváltozós függvénynek a konvolúcióját veszi egy kiválasztott szűrővel, egy kernelfüggvénnyel. A szűrő megválasztásától függően nagyon változatos hatása van képszűrésnek. Lehet vele például zajtalanítani, képet élesíteni, vagy kontúrokat keresni.

Alaphelyzetben a szűrés közvetlenül az eredeti képen történik, az úgynevezett képtérben. Érdekes módon sok esetben itt is hasznos a jelfeldolgozás legnépszerűbb eszközéhez, a Fourier-transzformációhoz nyúlni. Egyfelől mivel a frekvenciatérben a konvolúció egyszerű szorzásnak felel meg, bizonyos szűrőméret felett érdemes "befektetni" a Fourier-transzformáció által jelentett többszámításba, és a szűrés hatékonyabban elvégezhető. Másfelől a képek hordozhatnak olyan információt, ami inkább a frekvenciatérben jelenik meg és válik kezelhetővé. Például periodikusan (sávokban, csíkokban) ismétlődő zaj könnyebben eltávolítható a frekvenciatérben végrehajtott műveletekkel.

A folytonos Fourier-transzformáció csak az elméleti megalapozása a módszernek, mivel a digitális képek, ahogy nevükben is benne van, diszkrét függvények. Ezért a gyakorlatban valójában használatos diszkrét Fourier-transzformáció (DFT) kerül bemutatásra, és annak a hatékonyabb változata, a gyors Fourier-transzformáció (FFT).

1. fejezet

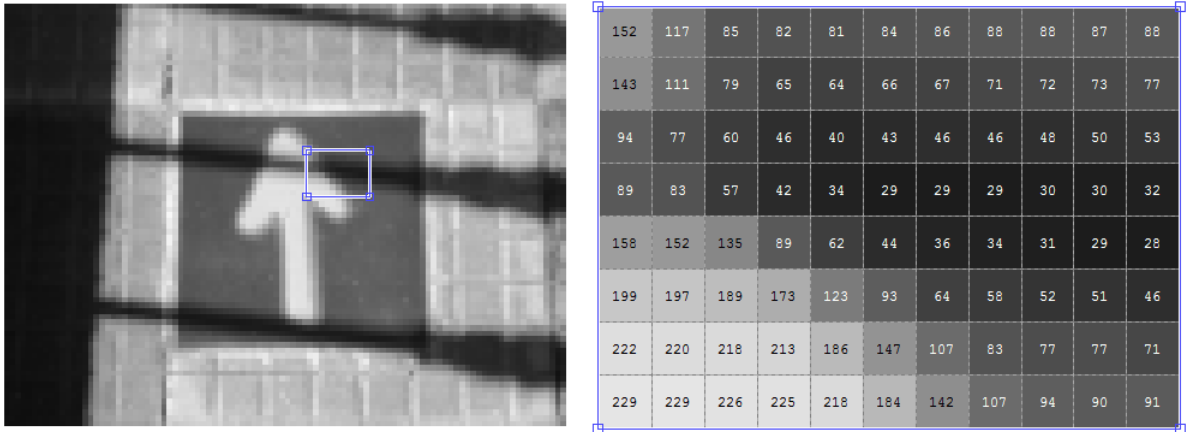
Képszűrés

1.1. Digitális képek

Egy képet fel lehet úgy fogni, mint egy $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kétváltozós függvény, ami a sík pontjaihoz különböző világossági értékeket rendel (a világosságot szokták intenzitásnak vagy amplitúdónak is hívni). Hagyományosan alacsonyabb értékek sötétebb, magasabb értékek pedig világosabb árnyalatoknak felelnek meg.

Skalárértékű függvénnyel csak szürkeárnyalatos (hétköznapi nyelven fekete-fehér) képeket lehet ábrázolni, mert egy számmal csak a fényerő mértékében lehet különbséget tenni. Mivel az emberi szem háromfajta színérzékelő receptort (csapot) tartalmaz, színek leírásához három szám kell. Tehát színes képeket vektorértékű, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ függvények tudnak leírni. A továbbiakban csak szürkeárnyalatos képekről lesz szó. Egyrészt mert a legtöbb képfeldolgozási feladatot eleve szürkeárnyalatos képeken kell elvégezni. Másrészt még ha színes képekkel is dolgozunk, általában elég a szürkeárnyalatos képekre használt technikákat egyenként a koordinátafüggvényekre alkalmazni.

Egy kép akkor lesz digitális, hogyha az (x, y) koordináták, és az $f(x, y)$ értékek, azaz f értelmezési tartománya és értékkészlete is véges, diszkrét mennyiségekből áll. A koordinátaértékek digitalizálását mintavételezésnek, a világossági értékek digitalizálását pedig kvantálásnak szokták hívni. A digitalizálási folyamat eredménye egy valós számokból álló mátrix, aminek az elemei a pixelek (picture element, képelem).



1.1. ábra. Szürkeárnyalatok

A sík hagyományos koordinátarendszerével szemben a képek koordinátázása mátrixok indexeléséhez hasonlóan történik. Tehát az origó a kép bal felső sarkában van, és az (x, y) pont az x -edik sor y -edik oszlopában van. Változó hogy az indexelést 0-tól vagy 1-től szokták kezdeni. Ha a kép $M \times N$ -es méretű, akkor a kép mátrixa így néz ki:

$$\begin{bmatrix} f(1,1) & f(1,2) & \dots & f(1,N) \\ f(2,1) & f(2,2) & \dots & f(2,N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(M,1) & f(M,2) & \dots & f(M,N) \end{bmatrix}$$

vagy

$$\begin{bmatrix} f(0,0) & f(0,1) & \dots & f(0,N-1) \\ f(1,0) & f(1,1) & \dots & f(1,N-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(M-1,0) & f(M-1,1) & \dots & f(M-1,N-1) \end{bmatrix}$$

1.2. Lineáris szűrők

A legegyszerűbb képfeldolgozási műveletek a pixel- vagy pontonkénti műveletek. Ezekre mind az jellemző, hogy ugyanaz a függvény hat külön-külön a kép összes pontjára. Például vehetjük egyenként a képpontok logaritmusát. Ezeknek a műveleteknek közös hátrányuk, hogy egymástól teljesen függetlenül kezelik a pixeleket, és a legtöbb feladatot nem lehet

így megoldani. A képeken a pixelek többségét hozzájuk hasonló (világosságukban csak egy picit eltérő) pixelek veszik körbe. Éles, hirtelen váltások leginkább valamilyen jelentéssel bíró területen lépnek fel, például objektumok határain. Emiatt érdemes olyan műveleteket használni, amik az új értékek kiszámolásakor figyelembe veszik a környező pixeleket is. Az ilyen operációkat, amik minden pixelt egy környezetükből kiszámolt értékkel cserélnek le, szűrőnek nevezzük (hogy mekkora ez a környezet, az változó). Attól függően, hogy a figyelembe vett pixeleknél milyen függvényét vesszük, a szűrő lehet lineáris vagy nemlineáris. Nemlineáris szűrő például a mediánszűrő, ami minden pixelt lecserél a környezetében lévő értékek mediánjára. A lineáris szűrők a szomszédos pixelértékek súlyozott átlagát, azaz lineáris kombinációját adják meg új értéként. A használt súlyok közös elnevezése sokféle lehet: szűrő, szűrőablak, mag, maszk, vagy kernel. Hogy pontosan mit csinál egy lineáris szűrő, az egyedül a szűrőablak megválasztásától függ. Példának itt van néhány szűrőnek a mátrixa, és mellette a kép, ami a szűrés után jön létre:

Eredeti kép:
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Átlagoló szűrő:
$$\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



Élesítő szűrő:
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$



Gauss-szűrő: $\frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$



Laplace-szűrő: $\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & -20 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$



1.3. Korreláció és konvolúció

A lineáris szűrők működését a kereszt-korreláció és a konvolúció fogalma fog segíteni leírni. Ahhoz, hogy ezeket a diszkrét esetben definiálni tudjuk, \mathbb{Z}_M -en, a modulo M maradékosztályok additív csoportján értelmezett függvényeket fogunk használni. Ennek elemeit $0, 1, 2, \dots, M - 1$ fogja jelölni, és az igaz rájuk, hogyha $n \in \mathbb{Z}$, akkor minden $m \in \mathbb{Z}_M$ -re $m + kM = m$. Ez annak felel meg, mintha egy véges, diszkrét függvényt periodikusan kiterjesztenénk az összes egész számra.

1.3.1. Definíció. Legyen f és g két $\mathbb{Z}_N \rightarrow \mathbb{R}$ függvény. Ekkor a két függvény kereszt-korrelációja

$$(f \star g)(x) = \sum_{k=0}^{N-1} g(k)f(x+k).$$

A művelet néhány algebrai tulajdonsága:

- Kommutatív: $f \star g = g \star f$.
- Disztributív: $f \star (g + h) = (f \star g) + (f \star h)$.
- Asszociativitás skalárral való szorzással: $\lambda(f \star g) = (\lambda f) \star g$.

A korrelációval rokon művelet a konvolúció.

1.3.2. Definíció. Legyen f és g két $\mathbb{Z}_N \rightarrow \mathbb{R}$ függvény. Ekkor a két függvény konvolúciója

$$(f * g)(x) = \sum_{k=0}^{N-1} g(k)f(x - k).$$

A két művelet között csupán annyi a különbség, hogy $f \star g = f(-x) * g$. A konvolúcióra mind igazak az előbb felsorolt tulajdonságok, és még azzal a hasznos tulajdonsággal is bír, hogy asszociatív.

1.3.3. Állítás. $(f * g) * h = f * (g * h)$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} ((f * g) * h)(x) &= \sum_{l=0}^{N-1} h(l) \sum_{k=0}^{N-1} g(k)f((x - k) - l) = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} h(l)g(k)f(x - (k + l)) \stackrel{m:=k+l}{=} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} h(l)g(m - l)f(x - m) = (f * (g * h))(x) \end{aligned}$$

□

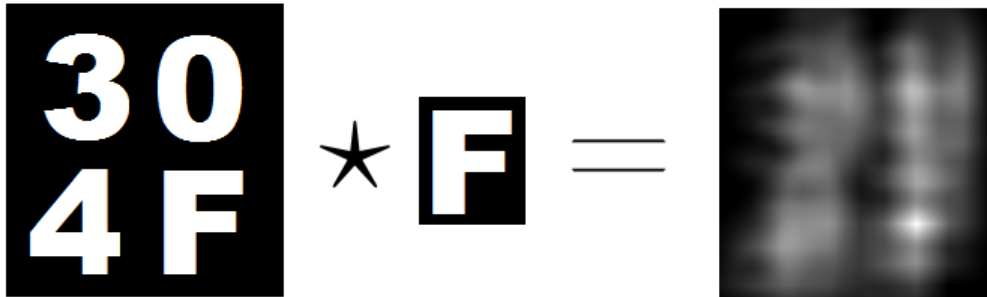
Kétváltozós függvényeknél nagyon hasonlóak a definíciók (és ugyanazok a tulajdonságok érvényesek mint egyváltozós esetben).

1.3.4. Definíció. Legyen f és g két $\mathbb{Z}_M \times \mathbb{Z}_N \rightarrow \mathbb{R}$ függvény. Ekkor a két függvény kereszt-korrelációja

$$(f \star g)(x, y) = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} g(k, l)f(x + k, y + l).$$

1.3.5. Definíció. Legyen f és g két $\mathbb{Z}_M \times \mathbb{Z}_N \rightarrow \mathbb{R}$ függvény. Ekkor a két függvény konvolúciója

$$(f * g)(x, y) = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} g(k, l)f(x - k, y - l).$$



1.2. ábra. A korrelációs kép egy pontja annál világosabb, minél valószínűbb hogy rá esik a minta középpontja.

A konvolúció eddig használt definíciója az úgynevezett cirkuláris konvolúciónak felelt meg. A szűrést el lehet képzelni úgy, mintha a szűrőablakot a képen csúsztatnánk, és mindig az ablak közepe alá eső pixelt lecserélnénk az ablak alatt levő pixelek súlyozott átlagára. Ebben a megfogalmazásban az a kérdés merül fel, hogy mi történjen a kép széleinél, ahol a szűrőablak lelóg a képről. A cirkuláris konvolúció ezt úgy oldja meg, hogy úgy veszi mintha a kép átellenes szélei össze lennének ragasztva, és a hiányzó értékeket a kép túlsó széléről pótolja ki. Egy másik megoldás a lineáris konvolúció, amikor a képfüggvény mindenhol nullának van véve, ahol eredetileg nem volt értelmezve. Ez annak felel meg, mintha egy fekete keretet toldanánk a képhez. A gyakorlatban az utóbbi megközelítés az elterjedtebb. Ha adott egy $f(x, y)$ kép, és arra kellene alkalmazni a $g(x, y)$ szűrőt, $(2a + 1) \times (2b + 1)$ -es méretű ablakkal, akkor a h szűrt kép egy pixele úgy adódik, hogy

$$h(x, y) = \sum_{k=-a}^a \sum_{l=-b}^b g(j, k) f(x - j, y - k).$$

A konvolúció majdnem teljesen ugyanazt csinálja mint a korreláció, csak olyan, mintha 180 fokkal elforgatott ablakkal végeznénk a szűrést. A leggyakrabban használt kernelfüggvények radiálisan szimmetrikusak, azaz olyanok, hogy $g(x, y) = g(-x, -y)$. Ezeknél teljesen mindegy, hogy korrelációt vagy konvolúciót használunk, pontosan ugyanaz történik. A korrelációval szemben a konvolúció viszont asszociatív is. Ez akkor hasznos, ha több szűrést szeretnénk végrehajtani egymás után, mert gyorsabb a (viszonylag kicsi) szűrőket egymással konvolválni, és azzal elvégezni a szűrést, mint a teljes képszűrést megcsinálni többször

egymás után. Viszont mintaillesztésnél számít a szűrőablak (azaz a minta) orientációja, úgyhogy olyankor kereszt-korrelációt kell használni. A konvolúciók/korrelációk kiszámolása időigényes feladat, egy $M \times N$ -es kép és $m \times n$ -es szűrő mellett $MNmn$ szorzást el kell végezni. Amikor több ezer pixel oldalhosszúságú képek egyáltalán nem ritkák, ez több millió műveletet jelent. Ennek a felgyorsításában fog segíteni a Fourier-transzformáció.

2. fejezet

Fourier-transzformáció

2.1. Folytonos eset

A Fourier-analízis területe Joseph Fourier francia matematikusról kapta a nevét. Fourier előtt mások is kísérleteztek analitikai problémák trigonometrikus függvénysorokkal való megoldásával, de az ő 1807-es, *Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides* című tanulmánya indította el igazán ennek az elméletnek fejlődését. Fourier felfedezése az volt, hogy akár látszólag bonyolult periodikus függvényeket is fel lehet írni egyszerű szinusz- és koszinusz hullámok összegeként. Addig megoldatlan problémák hirtelen kezelhetővé váltak, amikor az eredeti függvények helyett a hozzájuk tartozó Fourier-sorokat kezdték el vizsgálni. Formálisan, hogyha f egy L hosszú $[a, b]$ intervallumon értelmezett függvény, akkor a hozzá tartozó n . Fourier-együttható

$$a_n = \frac{1}{L} \int_a^b f(x) e^{-2\pi i n x / L} dx,$$

és f Fourier sora:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n x / L}.$$

Eleinte sok zavart okozott, hogy automatikusan azt feltételezték, hogy bármilyen periodikus függvényhez létezik egy hozzá konvergáló Fourier-sor. De aztán kiderült hogy ez akár folytonos függvényekre se mindig feltétlenül igaz, és számos különböző tétel született a Fourier-sorok konvergenciájának jellemzésére.

A problémakör egy természetes kiterjesztése, hogy milyen analóg fogalmat lehet alkotni az egész valós egyenesen értelmezett függvényekhez. Ez a fogalom lesz a Fourier-transzformált,

amit következésképpen úgy definálunk egy függvényhez, hogy

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x \xi} dx.$$

A transzformált létezésének egy elegendő feltétele például az, hogy f abszolút integrálható legyen. Az egy nehéz, és könyvtárnyi szakirodalmat motiváló kérdés, hogy általában milyen függvényekre értelmes ez a transzformáció. Szerencsére számítógépes alkalmazásokhoz véges diszkrét függvényekre van szükség, amiknek szintén lehet a Fourier-transzformáltját venni (diszkrét Fourier-transzformáció, Discrete Fourier Transform, DFT), viszont sokkal könnyebben kezelhetőek. Mivel a végtelen sorokat és az integrálokat mindenhol véges összegek váltják fel, nem kell többet a konvergencia kérdéseivel törődni. Általában elmondhatható, hogy egy véges, diszkrét függvénynek mindig van Fourier-transzformáltja.

2.2. Diszkrét Fourier-transzformáció

2.2.1. Definíció. Legyen f egy $\mathbb{Z}_M \rightarrow \mathbb{C}$ függvény. Ekkor f Fourier-transzformációja egy másik $F : \mathbb{Z}_M \rightarrow \mathbb{C}$ függvény (amit még \hat{f} -al vagy $\mathcal{F}\{f\}$ -al szoktak jelölni), aminek az értékei úgy állnak elő, hogy

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{x=0}^{M-1} f(x)e^{-2\pi i u x/M}.$$

2.2.2. Állítás. A diszkrét Fourier-transzformációra igazak az alábbi tulajdonságok:

1. $\mathcal{F} : \mathbb{C}^M \rightarrow \mathbb{C}^M$ lineáris transzformáció: $\mathcal{F}\{\lambda f + \mu g\} = \lambda \mathcal{F}\{f\} + \mu \mathcal{F}\{g\}$.
2. Periodikus: $F(u + n \cdot M) = F(u)$, $n \in \mathbb{Z}$.
3. $\mathcal{F}\{f(x - x_0)\} = F(u)e^{-2\pi i u x_0/M}$.
4. $\mathcal{F}\{f(x)e^{2\pi i u_0 x/M}\} = F(u - u_0)$.
5. Konjugált szimmetria: ha $f : \mathbb{Z}_M \rightarrow \mathbb{R}$, akkor $\overline{F(u)} = F(-u)$.

Bizonyítás.

1.

$$\frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{x=0}^{M-1} (\lambda f(x) + \mu g(x)) e^{-2\pi i u x / M} = \frac{\lambda}{\sqrt{M}} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-2\pi i u x / M} + \frac{\mu}{\sqrt{M}} \sum_{x=0}^{M-1} g(x) e^{-2\pi i u x / M}$$

2.

$$\frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-2\pi i (u+mM)x / M} = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-2\pi i u x / M} \underbrace{e^{-2\pi i m M x / M}}_{e^{-2\pi i m x} = 1}$$

3.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{x=0}^{M-1} f(x - x_0) e^{-2\pi i u x / M} &= \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{y=-x_0}^{M-1-x_0} f(y) e^{-2\pi i u (y+x_0) / M} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{y=0}^{M-1} f(y) e^{-2\pi i u y / M} e^{-2\pi i u x_0 / M} = F(u) e^{-2\pi i u x_0 / M} \end{aligned}$$

4.

$$\frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{2\pi i u x / M} e^{2\pi i u_0 x / M} = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-2\pi i (u-u_0)x / M} = F(u - u_0)$$

5.

$$\overline{\frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-2\pi i u x / M}} = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{x=0}^{M-1} \overline{f(x) e^{-2\pi i u x / M}} = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-2\pi i (-u)x / M}$$

□

2.2.3. Definíció. Legyen $F(u)$ egy $\mathbb{Z}_M \rightarrow \mathbb{C}$ függvény. Ekkor F -hez tartozó inverz Fourier-transzformáció

$$(\mathcal{F}^{-1}\{F\})(x) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{u=0}^{M-1} F(u) e^{2\pi i u x / M}.$$

2.2.4. Állítás.

$$\mathcal{F}^{-1}\{F\} = f$$

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy

$$\sum_{u=0}^{M-1} e^{2\pi i u(k-l)/M} = M \cdot \delta_{kl}.$$

Ha $k \neq l$, akkor a mértani sor képlete szerint

$$\sum_{u=0}^{M-1} e^{2\pi i u(k-l)/M} = \sum_{u=0}^{M-1} \left(e^{2\pi i(k-l)/M} \right)^u = \frac{1 - e^{2\pi i(k-l)}}{1 - e^{2\pi i(k-l)/M}} = 0.$$

Ha $k = l$, akkor

$$\sum_{u=0}^{M-1} e^{2\pi i u(k-l)/M} = \sum_{u=0}^{M-1} e^0 = M.$$

Ezt felhasználva:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{u=0}^{M-1} F(u) e^{2\pi i u x/M} &= \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{u=0}^{M-1} \left(\frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{m=0}^{M-1} f(m) e^{-2\pi i m u/M} \right) e^{2\pi i u x/M} = \\ \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{u=0}^{M-1} f(m) e^{2\pi i u(x-m)/M} &= \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} f(m) \cdot M \cdot \delta_{xm} = \frac{1}{M} \cdot f(x) \cdot M = f(x). \end{aligned}$$

Tehát az inverz DFT-vel pontosan vissza lehet kapni az eredeti függvényt. \square

A sima és az inverz Fourier-transzformáció képletében szereplő konstans szorzót többféleképpen is meg lehet határozni, csak annyi kell, hogy a szorzatuk $\frac{1}{M}$ legyen. Az $\frac{1}{\sqrt{M}}$ -es választásnak annyi előnye van, hogy így a Fourier-transzformáció unitér lesz (mint M -dimenziós komplex vektortérben működő lineáris transzformáció).

2.2.5. Tétel. (Parseval-tétel) \mathcal{F} unitér (skalárszorzzattartó) leképezés.

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} \langle F, G \rangle &= \sum_{u=0}^{M-1} F(u) \overline{G(u)} = \\ \sum_{u=0}^{M-1} \left(\frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-2\pi i u x/M} \right) &\overline{\left(\frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{y=0}^{M-1} g(y) e^{-2\pi i u y/M} \right)} = \\ \frac{1}{M} \sum_{u=0}^{M-1} \left(\sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-2\pi i u x/M} \right) &\left(\sum_{y=0}^{M-1} g(y) e^{2\pi i u y/M} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{M-1} f(x)g(y) \sum_{u=0}^{M-1} e^{2\pi i u(y-x)/M} = \\ & \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{M-1} f(x)g(y) \cdot M \cdot \delta_{xy} = \sum_{x=0}^{M-1} f(x)g(x) = \langle f, g \rangle \end{aligned}$$

□

2.2.6. Következmény.

$$\sum_{x=0}^{N-1} |f(x)|^2 = \sum_{u=0}^{N-1} |F(u)|^2$$

Az alkalmazások szempontjából a legfontosabb a következő tétel lesz. Ez azt fogja kimondani, hogy két függvény konvolúciójának a transzformáltja ugyanaz, mint a transzformáltjaiknak a pontonkénti szorzata. Ez azért nagyon hasznos, mert így a konvolúciót le lehet cserélni egy sokkal egyszerűbb művelettel.

2.2.7. Tétel. (Konvolúciós tétel)

$$\mathcal{F}\{f * g\} = \sqrt{M} \cdot \mathcal{F}\{f\} \cdot \mathcal{F}\{g\}$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} & (\mathcal{F}\{f * g\})(u) = \\ & \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{x=0}^{M-1} \left(\sum_{k=0}^{M-1} g(k)f(x-k) \right) e^{-2\pi i u x/M} = \\ & \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{k=0}^{M-1} g(k) \sum_{x=0}^{M-1} f(x-k) e^{-2\pi i u(x-k)/M} e^{-2\pi i u k/M} \end{aligned}$$

Mivel a Fourier-transzformáció periodikus,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{k=0}^{M-1} g(k) e^{-2\pi i u k/M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x-k) e^{-2\pi i u(x-k)/M} = \\ & \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{k=0}^{M-1} g(k) e^{-2\pi i u k/M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-2\pi i u x/M} = \\ & \sqrt{M} \cdot (\mathcal{F}\{g\})(u) \cdot (\mathcal{F}\{f\})(u). \end{aligned}$$

□

Hasonlóan bizonyíthatóak a következő tételek:

2.2.8. Tétel. (Inverz konvolúciós tétel)

$$\mathcal{F}\{f \cdot g\} = \frac{1}{\sqrt{M}} \cdot \mathcal{F}\{f\} * \mathcal{F}\{g\}$$

2.2.9. Tétel. (Korrelációs tétel)

$$\mathcal{F}\{f \star g\} = \sqrt{M} \cdot \overline{\mathcal{F}\{f\}} \cdot \mathcal{F}\{g\}$$

2.3. Kétdimenziós Fourier-transzformáció

Kétféle változós függvények transzformáltját az egyváltozóséhoz hasonlóan kell kiszámolni:

2.3.1. Definíció. Az $f : \mathbb{Z}_M \times \mathbb{Z}_N \rightarrow \mathbb{C}$ függvény Fourier-transzformációja

$$F(u, v) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2\pi i \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)}.$$

2.3.2. Definíció. Az $F : \mathbb{Z}_M \times \mathbb{Z}_N \rightarrow \mathbb{C}$ függvény inverz Fourier-transzformációja

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{2\pi i \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)}.$$

A kétdimenziós Fourier-transzformációt el lehet végezni két egydimenziós egymásutánja-ként. Rögzített x mellett $f(x, y)$ mint egyváltozós függvény DFT-je

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-\frac{2\pi i v y}{N}}.$$

Ha most pedig rögzített y mellett ennek vesszük a Fourier-transzformációját, az

$$\frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{x=0}^{M-1} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-\frac{2\pi i v y}{N}} \right) e^{-\frac{2\pi i u x}{M}}.$$

Ez pedig ugyanaz mint az eredeti képlet.

A kétféle változós DFT-re is igazak az egyváltozós eset tulajdonságai. Ezek közül a legfontosabb az, hogy itt is igaz a konvolúciós tétel.

3. fejezet

Gyors Fourier-transzformáció

3.1. Naiv DFT

A diszkrét Fourier-transzformáció egy lineáris transzformáció, úgyhogy a leképezést fel lehet írni egy négyzetes mátrix segítségével. Hogy kicsit kompaktabb legyen a mátrix felírása, vezessük be a

$$\omega_M = e^{-\frac{2\pi i}{M}}$$

jelölést. Ekkor a DFT szokásos képlete

$$F(u) = \sum_{x=0}^{M-1} f(x)\omega_M^{ux}.$$

A $W_M \in \mathbb{C}^{M \times M}$ mátrix legyen a következő:

$$W_M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega_M & \omega_M^2 & \dots & \omega_M^{M-1} \\ 1 & \omega_M^2 & \omega_M^4 & \dots & \omega_M^{2(M-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_M^{M-1} & \omega_M^{2(M-1)} & \dots & \omega_M^{(M-1)(M-1)} \end{bmatrix}$$

Erre az igaz, hogyha $f = [f(0), \dots, f(M-1)]$, és $F = [F(0), \dots, F(M-1)]$, akkor $F = W_M f$. Tehát egy közönséges mátrixszorzással ki lehet számolni f DFT-jét. Egy M hosszú vektor négyzetes mátrixszal való szorzása M^2 (ez esetben komplex) szorzást igényel. Ez azt jelenti hogy a DFT-t $O(M^2)$ műveletigénnyel már biztosan ki lehet számolni.

3.2. FFT algoritmus

Az M^2 -es lépésszámon javít a gyors Fourier-transzformáció (Fast Fourier Transform, FFT). Gauss már 1805-ben felfedezett egy ehhez nagyon hasonló módszert csillagászati problémék megoldására, de sajnos rossz szokásához híven ezt az eredményét sem publikálta. A köztudatba másfél évszázaddal később, James Cooley és John Tukey 1965-ös tanulmányával került be. Általában Cooley-nak és Tukey-nak tulajdonítják a modern algoritmus feltalálását, de előttük mások is dolgoztak a problémán, köztük Lánczos Kornél magyar matematikus is. A FFT-nek ma már rengeteg változata létezik, itt a leggyakrabban használt Cooley-Tukey algoritmus kerül bemutatásra.

Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy a bemenet kettőhatvány hosszúságú, azaz $M = 2^n$ (ezt hívják a radix-2 változatnak). Az alapötlet az, hogy külön ki kell számolni csak a páros indexű tagokból, és csak a páratlan indexű tagokból álló két vektor transzformáltját külön-külön, és a teljes megoldás ezek kombinációjából áll elő.

$$\begin{aligned}
 F(u) &= \sum_{x=0}^{M-1} f(x)\omega_M^{ux} = \sum_{x=0}^{M/2-1} f(2x)\omega_M^{u(2x)} + \sum_{x=0}^{M/2-1} f(2x+1)\omega_M^{u(2x+1)} = \\
 &= \sum_{x=0}^{M/2-1} f(2x)\omega_{M/2}^{ux} + \omega_M^u \sum_{x=0}^{M/2-1} f(2x+1)\omega_{M/2}^{ux} = \\
 &= \mathcal{F}\{[f(0), f(2), \dots, f(M-2)]\} + \omega_M^u \cdot \mathcal{F}\{[f(1), f(3), \dots, f(M-1)]\} := \\
 &= A(u) + \omega_M^u \cdot B(u)
 \end{aligned}$$

Tehát $F(u) = A(u) + \omega_M^u \cdot B(u)$, de ez eddig csak akkor igaz, ha $u = 0, \dots, M/2 - 1$. Ahhoz, hogy megkapjuk $F(u)$ második felét is, a DFT periodikusságát kell kihasználni. A periodikusság miatt $A(u + \frac{M}{2}) = A(u)$, és $B(u + \frac{M}{2}) = B(u)$. Ezért

$$F(u) = \begin{cases} A(u) + \omega_M^u \cdot B(u) & \text{ha } u = 0, \dots, N/2 - 1 \\ A(u - \frac{M}{2}) + \omega_M^u \cdot B(u - \frac{M}{2}) & \text{ha } u = N/2, \dots, N - 1. \end{cases}$$

Ezen még lehet tovább egyszerűsíteni, azt kihasználva, hogy

$$\omega_M^{u+N/2} = e^{-2\pi i(u+N/2)/M} = e^{-\pi i} e^{-2\pi i u/M} = -e^{-2\pi i u/M} = -\omega_M^u.$$

Emiatt $u = 0, \dots, N/2 - 1$ -re

$$F(u) = A(u) + \omega_M^u \cdot B(u),$$
$$F(u + M/2) = A(u) - \omega_M^u \cdot B(u).$$

Tehát sikerült $F(u)$ -t két fele olyan hosszú DFT segítségével felírni. $A(u)$ -val és $B(u)$ -val pedig rekurzívan megint meg lehet csinálni ugyanezt. És a rekurziót folytatva minden lépésben fele akkora vektoroknak kell a DFT-je, amíg már csak egyetlen számnak kell, ami pedig önmaga.

3.3. Az FFT műveletigénye

3.3.1. Állítás. *A gyors Fourier-transzformáció $O(M \cdot \log_2(M))$ szorzást végez.*

Bizonyítás. n szerinti indukcióval, ahol $M = 2^n$:

1. Ha $n = 1$, akkor egy 2^1 hosszú $(f(0), f(1))$ vektor transzformáltja $(f(0)+f(1), f(0)-f(1))$. Ehhez nulla szorzást kellett elvégezni, ami kevesebb, mint $2 \cdot \log_2 2 = 2$.
2. Tegyük fel, hogy minden $k < n$ -re igaz, hogy $O(k2^k)$ szorzást kell végezni. Egy 2^n hosszú vektor FFT-jének a kiszámolásához el kell végezni két 2^{n-1} hosszú vektor FFT-ját, és az egyiket még meg kell szorozni egy komplex számmal. A feltevés miatt ez legfeljebb $2(n-1)2^{n-1} + 2^{n-1} = n2^n - 2^{n-1}$ szorzás. Tehát n -re is igaz az állítás.

□

Annak illusztrálására, hogy az FFT segítségével milyen gyorsan lehet számolni, vegyünk egy 512×512 -es képet, és 32×32 -es szűrőt. A kettő konvolúciójának a kiszámításához $512^2 \cdot 32^2 = 268435456 \approx 2,7 \cdot 10^8$ szorzás kell. Hány szorzást kell elvégezni, hogyha a frekvenciatérbe visszük át a műveletet? A kép egy sorának vagy oszlopának az FFT-je $512 \cdot \log_2(512)$ szorzást igényel, és ezt a kép mind a $2 \cdot 512$ során és oszlopán meg kell csinálni. Három kép transzformációját el kell így végezni (kép, szűrő, szűrt kép inverze), valamint van még a transzformáltak pontonkénti szorzásának költsége. Tehát összesen $3 \cdot 2 \cdot 512^2 \cdot 9 + 512^2 = 14417920 \approx 1,4 \cdot 10^7$ szorzás kell, ami jóval kevesebb mint amennyi az előbb kellett.

4. fejezet

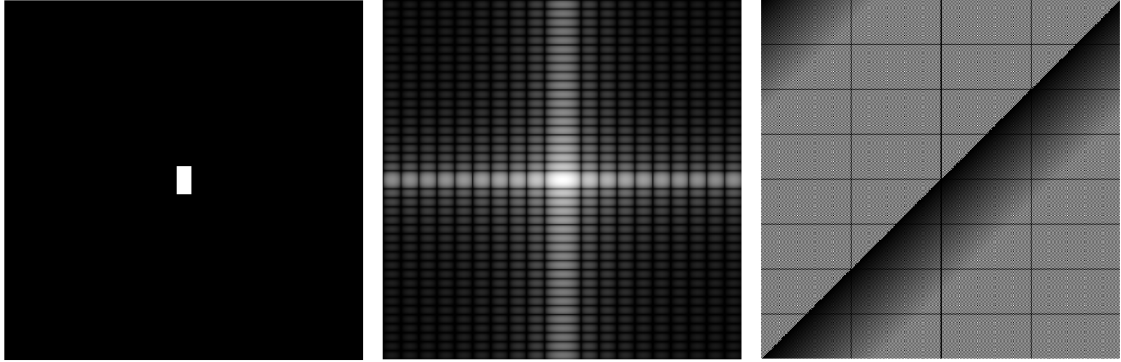
Szűrés a frekvenciatérben

4.1. Képek Fourier-transzformáltja

Hogyha egy digitális képet az $f(x, y)$ függvény ábrázolja, akkor a kép Fourier - transzformáltja egyszerűen az f transzformáltja. Mivel F egy komplex értékű függvény, ezért nehéz vizálisan ábrázolni. Külön-külön a valós és képzetes részét meg lehet jeleníteni, mint egy szokásos képet, de ezek az emberi szám számára keveset mondanak. Ehelyett érdme-
sebb F -et abszolútértékére és szögére (argumentumára) bonatni, úgy hogy $F(u, v) = |F(u, v)|e^{\phi(u, v)}$. Hogyha $F(u, v) = R(u, v) + i \cdot I(u, v)$, akkor

$$|F(u, v)| = \sqrt{R^2(u, v) + I^2(u, v)},$$
$$\phi(u, v) = \arctan \left(\frac{R(u, v)}{I(u, v)} \right).$$

Az abszolútérték-képet a legkönnyebb értelmezni, úgyhogy legtöbbször az szokták ábrázolni. Ez nem jelenti azt, hogy a argumentum-függvény (más szóval fáziskomponens) elhanyagolható lenne, nélküle nem lehetne rekonstruálni az eredeti képet. Az abszolútérték-képen gyakran nehezen kivehetőek a különbségek, ezért inkább $\log(1 + |F(u, v)|)$ -t szokták ábrázolni. Egy további konvenció a transzformált ábrázolásokor, hogy $F(0, 0)$ a kép közepén legyen. Ezt úgy lehet elérni, hogy $(-1)^{x+y} \cdot f(x, y)$ -t transzformáljuk. Ez semmit nem változtat a transzformáción, csak annyit, hogy megcseréli az átellenes képnegyedeket. Ennek nincs gyakorlati jelentősége, csak megkönnyíti a vizuális analízist. Ezentúl az illusztrációkon egy kép frekvenciatartományban való ábrázolása a középre igazított origójú Fourier-transzformált abszolútértékének logaritmusá lesz.



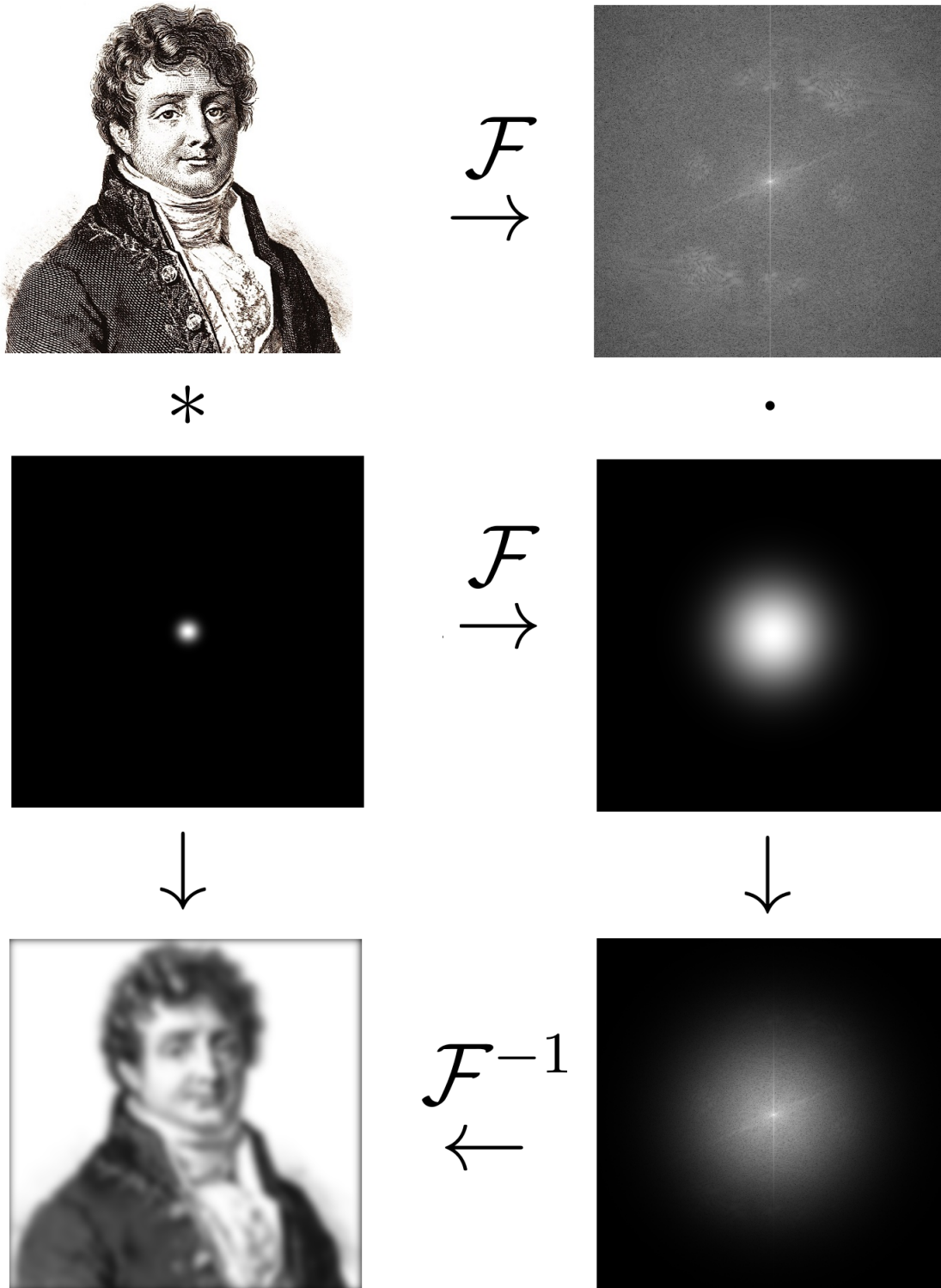
4.1. ábra. $f(x, y)$, $\log(1 + |F(u, v)|)$, és $\phi(u, v)$

Mivel $F(u, v)$ minden egyes pontjának kiszámításában benne van $f(x, y)$ összes értéke, ezért nehéz közvetlen kapcsolatot találni az eredeti kép és a transzformáltjának különböző részei között. Ugyanakkor a frekvenciakép (abszolútérték-kép) jellegzetességeiből általános következtetéseket lehet levonni a kép egészére nézve. A Fourier-transzformáció gyakorlatilag azt csinálja, hogy a képet felbontja különböző irányú és frekvenciájú síkhullámok összegére. A frekvenciakép egy pontjához egy bizonyos irányú és hullámhosszú síkhullám tartozik, és a pont világossága mutatja, hogy ez a hullám mekkora súllyal vesz részt a teljes kép előállításában. Az origóban lévő érték az eredeti kép összes pontjának összege. Az origóhoz közelebbi pontok az alacsony frekvenciájú, nagy hullámhosszú hullámoknak felelnek meg. Ezek adják a kép nagyobb, sima felületeit, általános mintáit. A kép széléhez közelebbi pontok pedig a nagy frekvenciájú hullámoknak felelnek meg. Ezek állítják elő a kép apróbb mintáit, éleit, finomabb részleteit. A frekvenciaképen az olyan dolgok hagynak markáns nyomot, mint párhuzamos vonalak, ismétlődések, periodikus minták.

4.2. Szűrők alkalmazása a frekvenciatérben

Hogyha adott egy $f(x, y)$ kép, és egy $g(x, y)$ szűrő, akkor DFT segítségével a következőképp kell elvégezni a szűrést:

1. Mivel a DFT a képet úgy kezeli, mintha periodikus lenne, ezért el kell dönteni, hogy lineáris vagy cirkuláris konvolúciót szeretnénk használni. Minden módosítás nélkül a DFT segítségével végzett szűrés cirkuláris konvolúciónak felel meg. Ha lineáris konvolúciót szeretnénk inkább, akkor a képet a széleinél ki kell „párnázni” nullákkal. Hogyha a kép $M \times N$ -es, a szűrőablak pedig $m \times n$ -es, akkor a szegéllyel ellátott képnek legalább $(M + m - 1) \times (N + n - 1)$ -szeresnek kell lennie. Mivel a FFT optimálisan kettőhatvány méretű bementen fut, érdemes lehet az új oldalhosszakat olyanra megválasztani.
2. Ahhoz, hogy f és g transzformáltjait pontonként össze lehessen majd szorozni, az kell, hogy egyforma méretűek legyenek. Általában a szűrőablak jóval kisebb mint a kép, tehát neki is kell csinálni egy olyan vastag nullákból álló szegélyt, hogy ugyanakkora legyen mint (az esetleg már kibővített) f . Ezt meg szabad csinálni, mert a nullákkal való bővítés nem változtat g hatásán.
3. Számoljuk ki FFT-vel F -et és G -t.
4. Szorozzuk össze pontonként F -et és G -t (vagy \overline{F} -et és G -t ha kereszt-korreláció kell).
5. Számoljuk ki $F \cdot G$ inverz Fourier-transzformációját. Kerekítési hibák miatt keletkezhetnek nem tisztán valós számok, ilyenkor csak el kell hagyni a számok képzetes részét.
6. Hogyha f -et ki kellett párnázni az elején, akkor vágjuk le a képet az eredeti méretére.



4.2. ábra. Szűrés elvégzése a frekvenciatérben

4.3. Szűrőtípusok

A frekvenciatérben való szűrés nem csak arra hasznos, hogy a képtérben megadott szűrőkkel hajtsuk végre a műveletet, hanem vannak olyan fajta szűrők is, amiket eleve a frekvenciatérben érdemes megadni. Ezek a szűrők azon az elven működnek, hogy a kép bizonyos frekvenciájú komponenseit megtartják, bizonyosakat pedig elhagynak. Ez alapján lehet osztályozni a szűrőket aluláteresztő, felüláteresztő, sáváteresztő, és sávlezáró szűrőkre (lowpass, highpass, bandpass, és band-reject filter). A konkrét szűrők megadásához kelleni fog a képpontoknak a kép közepétől való távolsága, mert egy középre igazított origójú képen ez azt mutatja, hogy egy képpont milyen frekvenciának felel meg.

4.3.1. Definíció. *Hogyha $f(x, y)$ egy $M \times N$ -es kép, akkor egy pontjának az origótól való távolsága legyen*

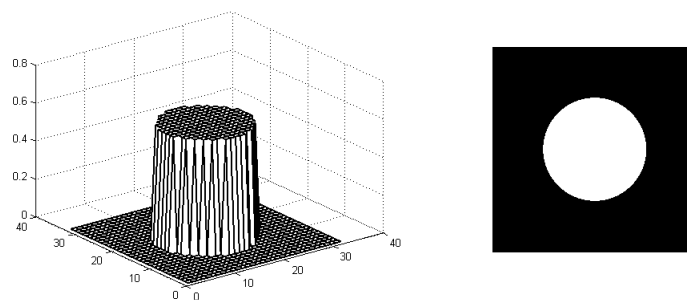
$$\|(x, y)\| = \sqrt{\left(x - \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor\right)^2 + \left(y - \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor\right)^2}.$$

Aluláteresztő szűrők

Az aluláteresztő szűrők a kép alacsony frekvenciájú komponenseit tartják meg vagy hangsúlyozzák ki. Mivel a magas frekvenciájú komponensek felelnek meg az finomabb részleteknek, az eltávolításuk elmosódást eredményez. Ezt az effektust szemcsés zaj eltávolítására lehet használni. A legegyszerűbb ilyen szűrő az ideális aluláteresztő szűrő.

4.3.2. Definíció. *Az adott D_0 levágási frekvenciához tartozó ideális aluláteresztő szűrő*

$$ILPF(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{ha } \|(u, v)\| \leq D_0 \\ 0 & \text{ha } \|(u, v)\| > D_0. \end{cases}$$

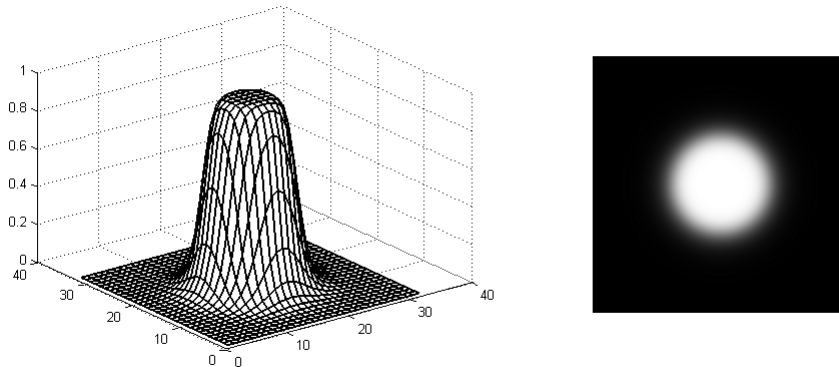


4.3. ábra. Ideális aluláteresztő szűrő

Ha ezzel a függvénnyel pontonként összeszorozzuk a frekvenciaképet, az tényleg nem csinál mást, mint hogy a levágási frekvencia alatt megtartja az összes komponenst, az összes többit pedig kinullázza. Az ideális szűrő csak nevében ideális, mert az éles levágás miatt a szűrt képben az élek körül gyűrűs mintázatok alakulhatnak ki. Ezt a hibát próbálja meg kiküszöbölni a Butterworth-szűrő.

4.3.3. Definíció. A D_0 levágási frekvenciához tartozó n -rendű aluláteresztő Butterworth-szűrő a következő:

$$BLPF_n(u, v) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\|(u,v)\|}{D_0}\right)^{2n}}$$



4.4. ábra. Negyedrendű Butterworth-szűrő

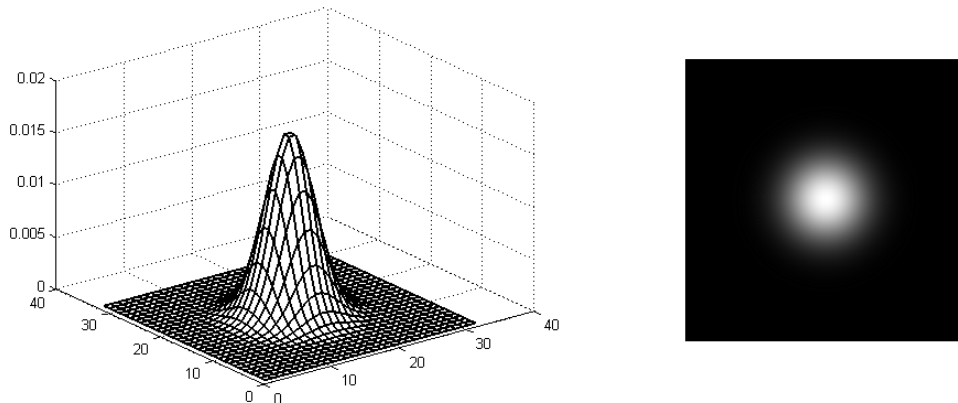
A Butterworth-szűrő rendje a levágási határ élességét szabályozza. Minél nagyobb a rend, annál élesebb a levágás, mert annál jobban közelíti az ideális szűrőt. Ugyanis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} BLPF_n(u, v) = ILPF(u, v)$$

A képtérben a legsimább eredményt adó szűrő a Gauss-szűrő.

4.3.4. Definíció. A D_0 paraméterű aluláteresztő Gauss-szűrő:

$$GLPF(u, v) = e^{-\frac{\|(u,v)\|^2}{2D_0^2}}.$$



4.5. ábra. Aluláteresztő Gauss-szűrő



4.6. ábra. Ideális és Gauss aluláteresztő szűrő hatása ugyanazon a képen

Feluláteresztő szűrők

A feluláteresztő szűrők pont a fordítottját csinálják mint az aluláteresztő szűrők. A kép magas frekvenciájú komponenseit őrzik meg (vagy hangsúlyozzák ki legalábbis) egy bizonyos körön kívül. Mivel a magas frekvenciájú hullámok adják a képen a részleteket és éleket, a feluláteresztő szűrők a kontúrokat emelik ki, élesítik a képet. Az aluláteresztő szűrők feluláteresztő párját úgy lehet megkapni, hogy egyből kivonjuk a kernelfüggvényeiket:

- Ideális: $IHPF(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{ha } \|(u, v)\| \leq D_0 \\ 1 & \text{ha } \|(u, v)\| > D_0 \end{cases}$
- Buttersworth: $BHPF_n(u, v) = \frac{1}{1 + (\frac{D_0}{\|(u, v)\|})^{2n}}$
- Gauss: $GHPF(u, v) = 1 - e^{-\frac{\|(u, v)\|^2}{2D_0^2}}$

Sávzáró és sáváteresztő szűrők

A sávzáró és a sáváteresztő szűrők az aluláteresztő és a felüláteresztő szűrők hatását kombinálják. A sávzáró szűrők egy D_0 sugarú, W széles gyűrűn belül, a sáváteresztő szűrők pedig azon kívül szűrik ki a frekvenciákat. Ez például akkor lehet hasznos, hogyha a képen a zaj egy frekvenciatartományra koncentrálódik. A sávzáró szűrő függvénye ugyanaz mint az azonos típusú sáváteresztő függvény egyből kivonva. Tehát sáváteresztő és sávzáró szűrők szokásos főbb típusai:

- Ideális:

$$IBPF(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{ha } D_0 - \frac{W}{2} \leq \|(u, v)\| \leq D_0 + \frac{W}{2} \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

$$IBRF(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{ha } D_0 - \frac{W}{2} \leq \|(u, v)\| \leq D_0 + \frac{W}{2} \\ 1 & \text{különben} \end{cases}$$

- Butterworth:

$$BBPF_n(u, v) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\|(u, v)\|^2 - D_0^2}{W\|(u, v)\|}\right)^{2n}} \quad BBRF_n(u, v) = \frac{1}{1 + \left(\frac{W\|(u, v)\|}{\|(u, v)\|^2 - D_0^2}\right)^{2n}}$$

- Gauss:

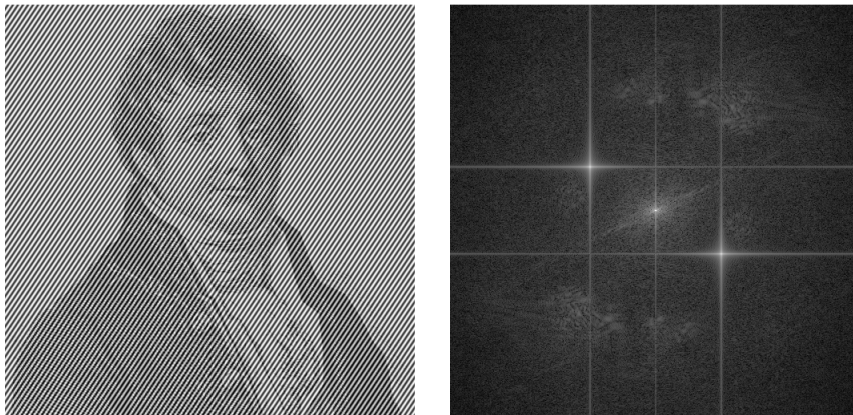
$$GBPF(u, v) = e^{-\left(\frac{\|(u, v)\|^2 - D_0^2}{W\|(u, v)\|}\right)^2} \quad GBRF(u, v) = 1 - e^{-\left(\frac{\|(u, v)\|^2 - D_0^2}{W\|(u, v)\|}\right)^2}$$

Notch szűrők

A notch szűrők abban különböznek az eddig bemutatott szűrőktől, hogy nem távolítanak el teljes frekvenciasávokat, hanem csak a frekvenciakép egy-egy kicsi területét. Ez akkor jöhet jól például, hogyha sávós, periodikus zajt kell eltüntetni a képről. Ilyen tipikusan az elektronikus eszközök működési zavarai, interferencia miatt keletkezik. A hagyományos Gauss-szűrő elmosza a szemcsés zajt, de az ilyenfajta mintázatokat nem tudja eltávolítani. Viszont a periodikus zaj jelentette hullámok kiugróan fényes pontokként jelennek meg a frekvenciaképen. Hogyha csak ezeket a pontokat kiszűrjük a frekvenciaképből, az eltávolítja a periodikus zajt is.



4.7. ábra. Eredeti kép: Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)



4.8. ábra. A periodikus zaj jól kivehető tüskéket eredményez a frekvenciaképen



4.9. ábra. A kiugró értékek levágása eltünteti a csíkokat

Összefoglalás

Reményeim szerint sikerült bemutatnom a képfeldolgozás egy fontos részterületét, a frekvenciaszűrést. A szándékom az volt, hogy megmutassam miért hasznos egy olyan, az intuíciónak kissé ellentmondó megközelítés, hogy a képeket a frekvenciatérben vizsgáljuk. Nem feltétlenül adja magát az ötlet, hogy inkább vegyük a képek Fourier-transzformáltját. Viszont a konvolúció felgyorsításából és a periodikus zaj szűréséből is látszik, hogy egy probléma mennyivel jobban kezelhetővé válik megfelelő környezetbe áthelyezve. A koncepcionális ugrás megtétele után sokkal hatékonyabban lehet hozzányúlni ezekhez a feladatokhoz. A két világ (a képtér és a frekvenciatér) közötti átjárást pedig egy viszonylag egyszerű eszközzel, a gyors Fourier-transzformációval meg lehet tenni. Mindezen túl úgy vélem, hogy a képek frekvenciatérben való vizsgálata jó eszköz arra, hogy vizuális intuíciót kapcsoljon a Fourier-transzformáció alapvető jelentéséhez.

Függelék - Matlab implementációk

Gyors Fourier-transzformáció

```
function F = myfft(f)
    M = length(f);
    if M == 1
        F = f;
    else
        A = myfft( f(1:2:M) );
        B = myfft( f(2:2:M) );
        F = zeros(1,M);
        for u = 1:M/2
            omega = exp(-2*pi*1i*u/M);
            F(u)      = A(u) + omega * B(u);
            F(u + M/2) = A(u) - omega * B(u);
        end
    end
end
```

Frekvenciaszűrő

```
function finalImage = frequencyFilter(image, filter)

    [M,N] = size(image);
    [m, n] = size(filter);
    image = [image zeros(M, n); zeros(m, N+n)];
    filter = [filter zeros(m, N); zeros(M, n+N)];

    imageFT = fft2(image);
    filterFT = fft2(filter);
    filteredImageFT = imageFT .* filterFT;

    finalImage = ifft2(filteredImageFT);
    finalImage = real(finalImage);
    finalImage = imcrop(finalImage, [floor([m/2 n/2]), M-1, N-1]);

end
```


Irodalomjegyzék

- [1] Arthur R. Weeks Jr., *Fundamentals of Electronic Image Processing*, IEEE Press, 1998
- [2] Rafael C. Gonzalez – Richard E. Woods, *Digital Image Processing*, Prentice Hall, 2002
- [3] Rafael C. Gonzalez – Richard E. Woods – Steven L. Eddins, *Digital Image Processing Using Matlab*, Gatesmark Publishing, 2009
- [4] Elias M. Stein – Rami Shakarchi, *Fourier Analysis – An Introduction*, Princeton University Press, 2002
- [5] Dimitris G. Manolakis – Vinay K. Ingle, *Applied Digital Signal Processing*, Cambridge University Press, 2011