# Lineáris algebra alkalmazásai

BSc Szakdolgozat

Kohut Lilla
Matematika BSc
Alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető:
Dr. Hermann Péter, egyetemi docens
Algebra és Számelmélet Tanszék
Eötvös Loránd Tudományegyetem,
Természettudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem,
Természettudományi Kar
2015

# Tartalomjegyzék

# 1. Bevezetés

A lineáris algebra a matematika jelentős ága, mely rengeteg területen alkalmazható. Elengedhetetlen eszköz nem csak a matematikában, de a fizikában, kémiában, közgazdaságtanban, informatikában, illetve műszaki és egyéb területeken is. A vektorok, mátrixok különösen hasznosak fizikai terek, és abban végzett mozgások leírására. Vektorgrafikai programok is a lineáris algebrán alapulnak, de akár kémiai reakcióegyenleteket is leírhatunk a segítségével.

A matematikán belül többek között a lineáris programozás, kódelmélet, kombinatorika vagy épp a geometria területén találhatunk alkalmazásokat.

Szakdolgozatomban négy fejezeten keresztül mutatom be néhány rövid kombinatorikai, geometriai és számelméleti alkalmazását.

Elsőként olyan halmazrendszerekkel foglalkozom, melyeket alkotó halmazok méretére és/vagy páronkénti metszetére valamilyen feltétel van téve (például meg van adva a paritása). Érdekes és meglepő, hogy a feltételek kis változtatása is nagyságrendbeli változást okozhat a halmaz elemeinek maximális számában.

A következő fejezetben megfigyeljük hogyan változik a pontok maximális száma, ha a köztük lévő távolság csak egy-, illetve kétféle vagy páratlan nagyságú lehet. Ezenkívül egy egyszerű módszert kapunk annak eldöntésére, hogy mikor létezik $n$ dimenzióban $n+1$, adott távolságra lévő pont.

Egy számelméleti alkalmazással, az egész számok partícióival fogalalkozik a harmadik fejezet. Ezen belül is azzal az esetel, ha a partíció tagjainak számát és nagyságát is korlátozzuk.

Az utolsó fejezet egy geometriai alkalmazást mutat be. Megismerkedünk a momentumgörbe és a ciklikus politóp fogalmával, illetve ez utóbbi egy kivételes tulajdonságával. Arra is választ kapunk, hogyan tudunk néhány pontot egyenletesen eloszlatni egy $n$ dimenziós gömb felületén.

# 2. Alkalmazott jelölések, definíciók

A dolgozatomban egy vektor normája alatt mindig az euklideszi normáját értem, azaz minden $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\| = \sqrt{< x, x >} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

**2.1. Definíció (Konvex kombináció).**

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$$

*a $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vektorok konvex kombinációja, ahol $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ nemnegatív valós számok, melyekre $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$*

**2.2. Definíció (Konvex burok).** *Egy $X$ ponthalmaz konvex burka az a legszűkebb konvex halmaz, amely tartalmazza $X$-et. Másképp megfogalmazva $X$ konvex burka az elemei összes konvex kombinációjának halmaza.*

**2.3. Definíció (Affin kombináció).**

$$\sum_{i=1}^{k} \beta_i v_i$$

*a $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vektorok affin kombinációja, ahol $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ valós számok, melyekre $\sum_{i=1}^{k} \beta_i = 1$*

**2.4. Definíció (Szimplex).** *Egy $n$-dimenziós szimplex $n+1$ általános helyzetű pont konvex burka.*

**2.5. Definíció (r-gömb, nyílt félgömb).** *$\mathbb{R}^{r+1} \supset \mathbb{S}^r$-et $r$-gömbnek nevezzük.*

$$\mathbb{S}^r = \{x \in \mathbb{R}^{r+1} : \|x\| = 1\}$$

*Nyílt félkörnek nevezünk egy:*

$$\{x \in \mathbb{S}^r : a^\top x > 0\}$$

*alakú halmazt, ahol $0 \neq a \in \mathbb{R}^{r+1}$.*

# 3. Páros– és páratlanfalva klubjai

Az alábbiakban olyan halmazrendszerekkel foglalkozunk, melyeket alkotó halmazok méretére és páronkénti metszeteteire különböző feltételeket teszünk. Azt vizsgáljuk, hogyan változik a halmazrendszert alkotó halmazok száma. Meglepő módon akár csak kis változtatás is nagyságrendbeli különbséget okozhat. Legfőbb eszközeink a vektorok véges test feletti függetlensége, a mátrixok rangjára vonatkozó szabályok és az alterek dimenziójáról tanultak lesznek.

## 3.1. Páratlanfalva

Páratlanfalva $n$ lakójának legfőbb elfoglaltsága különböző klubok alakítása. A klubok számának korlátozása érdekében a városi tanács a következő szabályokat fogadta el:

- Minden klubnak csak páratlan számú tagja lehet
- Bármely két különböző klubnak csak páros számú közös tagja lehet

Legyenek a klubok $C_1, C_2, ..., C_m$. Ekkor a városi tanács által elfogadott szabályok matematikailag megfogalmazva:

- $\forall i : \quad |C_i| \equiv 1 \pmod 2$
- $\forall i \neq j \quad |C_i \cap C_j| \equiv 0 \pmod 2$

**3.1. Tétel.** *A fenti szabályok figyelembevételével a város $n$ lakója legfeljebb $n$ számú klubot tud alapítani, azaz a klubok $m$ számára $m \leq n$.*

*Bizonyítás:* Legyen $\mathbf{A}$ a klubok incidenciavektoraiból alkotott mátrix, azaz az az $m \times n$-es mátrix, amire

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } j \in C_i \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Világos, hogy $\mathbf{A}$ mátrix rangja legfeljebb $n$. Ha megmutatnánk, hogy $\mathbf{A}$ sorai függetlenek, akkor ebből azonnal következik, hogy $m \leq n$.

Tekintsük most az $\mathbf{A}\mathbf{A}^\top \in \mathbf{R}^{n \times n}$ mátrixot. Ennek $k$-adik sorának $l$-edik eleme $\sum_{i=1}^{n} a_{ki} a_{li}$, ami éppen $C_k \cap C_l$ elemeit számolja meg. Tekintsük most az

$\mathbf{A}$ mátrixot $\mathbb{F}_2$ felett. Ekkor $\mathbf{AA}^\top$ $k$-adik sorának $l$-edik eleme 1, ha $|C_k \cap C_l|$ páratlan, és 0, ha $|C_k \cap C_l|$ páros.

Ha a város polgárai betartják a szabályokat, akkor $|C_k \cap C_l| = 0$ csak $k = l$ esetén lehetséges, tehát $\mathbf{AA}^\top$ mátrix az $m \times m$-es identitásmátrixszal egyezik meg. Ebből következően $r(\mathbf{AA}^\top) = m$. Mivel két mátrix szorzatának rangja legfeljebb a két mátrix rangjának minimuma, ezért $m \leq r(\mathbf{A})$. Azonban $r(\mathbf{A}) \leq n$ miatt $m \leq n$.

Könnyen belátható, hogy valóban lehetséges $n$ klubot létrehozni: a város minden lakója egy egytagú klubot alapít.... ■

## 3.2. Párosfalva

Párosfalván szintén szabályok korlátozzák a klubok alapítását. Ebben a városban a következőket kell betartani:

- Minden klubnak csak páros számú tagja lehet, azaz $\forall i : |C_i| \equiv 0 \pmod 2$
- Bármely két klubnak csak páros számú közös tagja lehet, azaz $\forall i \neq j$ $|C_i \cap C_j| \equiv 0 \pmod 2$
- Semelyik két klubnak nem lehetnek pontosan ugyanazok a tagjai, azaz $C_i \neq C_j$, ha $i \neq j$,

ahol $C_1, C_2, ..., C_m$ jelöli a klubokat a városban.

**3.2. Tétel.** *A fenti szabályok figyelembevételével a város $n$ lakója legfeljebb $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ számú klubot tud alapítani, azaz a klubok $m$ számára $m \leq 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$.*

*Bizonyítás:* Dolgozzunk most az $\mathbb{F}_2^n$ vektortérben! Jelölje $v_i$ a $C_i$ klub incidenciavektorát! Ekkor $\forall i \quad \forall j \quad v_i \cdot v_j = 0$, a fenti szabályok miatt. Jelölje $C \subseteq \mathbb{F}_2^n$ a klubok incidenciavektorainak halmazát. Ekkor tehát $C \perp C$. Legyen $U =< C >$ a C elemei által kifeszített vektortér. Ez altere $\mathbb{F}_2^n$-nek. Mivel $C \perp C$, ezért $C \perp U$, és így $U \perp U$, másszóval $U \subseteq U^\perp$. Tudjuk, hogy $dim(U) + dim(U^\perp) = dim(\mathbb{F}_2^n) = n$. Emiatt $dim(C) \leq dim(U) \leq \lfloor n/2 \rfloor$. Ebből következik, hogy $m = |C| \leq |U| \leq 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Nem nehéz $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ klubot létrehozni. Párosítsuk a város lakóit! A párok halmazának (mely $\lfloor n/2 \rfloor$ elemű) minden lehetséges részhalmaza alkosson egy klubot. Így összesen $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ klubot kapunk, melyek megfelelnek a városi tanács által hozott szabályoknak.... ■

Páratlanfalva szabályai sokkal szigorúbbak, mint Párosfalván. Míg az előbbiben a város polgárai legfeljebb a lakosság számával megegyező számú, addig az utóbbiban akár exponenciálisan sok klubot is létrehozhatnak. A szemléletesség kedvéért: feltéve, hogy mindkét településen $n = 30$-an laknak, Páratlanfalván mindössze 30, míg Párosfalván akár $2^{15} = 32768$ klub működhet.

A másik jelentős különbség a két település szabályai között, hogy Párosfalván a már meglévő klubok mindig kiegészíthetők $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ klubbá, anélkül, hogy a szabályokat megsértenénk, ezzel szemben minden $k$-ra ($k \in \mathbb{Z}$, $1 \leq k \leq n-1$, $k$ paritása megegyezik $n$-ével) létezik a kluboknak olyan $k$ elemű halmaza, amely a szabályok betartása mellett nem bővíthető.
*Bizonyítás:* Páratlanfalva klubjait osszuk szét $k$ darab diszjunkt, páratlan elemszámú halmazba (ezt pontosan akkor lehet megtenni, ha $k$ paritása megegyezik $n$-ével). Ez a halmazrendszer nem bővíthető, mert ha új klubot szeretnénk létrehozni, akkor annak a második szabály miatt minden már létező klubbal páros sok közös tagja kell legyen. Mivel azonban az eddigi klubok diszjunktak, ezért így az új klubnak páros sok tagja lenne, ami megsérti az első szabályt. Párosfalván más a helyzet. A a 3.2 tétel bizonyításában láttuk, hogy ha $C$ Párosfalva klubjai incidenciavektorainak halmaza, akkor $< C >=: U$-ra $U \perp U$. Tehát $U$ is jó halamza a klubok incidenciavektorainak, nem séri a szabályokat. Valamint az is igaz, hogy az incidenciavektorok egy nem bővíthető halmaza altere $\mathbb{F}_2^n$-nek. Be kéne látnunk, hogy minden ilyen altér dimenziója szükségképpen $\lfloor n/2 \rfloor$.

Indirekt tegyük fel, hogy $dim(U) < \lfloor n/2 \rfloor$. Ez azt jelenti, hogy $dim(U^{\perp}) \geq 2 + dim(U)$. Ha találnánk egy $u \in U^{\perp}$ vektort, ami nem eleme $U$-nak, és $u \perp u$, akkor $< U, u >$ egy $U$-t nemtriviálisan tartalmazó, önmagára merőleges altér lenne.

Legyen $v, w \in U^{\perp}$, $v, w \notin U$. Ha $v$ és $w$ közül bármelyik önmagára merőleges, akkor kész vagyunk, megtaláltuk a keresett vektort. Ha azonban egyik sem merőleges önmagára, akkor $v \cdot v = 1 = w \cdot w$. Ekkor azonban $< v+w, v+w >= v \cdot v + w \cdot w = 1 + 1 = 0$. Tehát ekkor $v + w$ a keresett vektorunk, amivel $U$ bővíthető lenne. A feltevésünk ezek szerint helytelen, így $dim(U) = \lfloor n/2 \rfloor \ldots$ ■

## 3.3. Liberalizált párosfalva

Párosfalva enyhített a szabályokon. Ezután az alábbiakat kell betartani:

- Minden klubnak akár páros, akár páratlan számú tagja lehet
- Bármely két klubnak csak páros számú közös tagja lehet

Bár ezek a szabályok sokkal enyhébbnek hangzanak, meglepő módon a maximálisan alapítható klubok száma csak legfeljebb 1-gyel nőtt.

**3.3. Tétel.** *A fenti szabályok mellett a klubok maximális $m$ számára*

$$m = \begin{cases} 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} & \text{ha } n \text{ páros} \\ 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 1 & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

*Bizonyítás:* Legyen $C$ a klubok incidenciavektorainak halmaza. $C = C_1 \cup C_2$, ahol $C_1 = \{$páratlan tagszámú klubok incidenciavektorai$\}$ és $C_2 = \{$páros tagszámú klubok incidenciavektorai$\}$. Használjuk a következő jelöléseket: $U_i := < C_i >, \quad n_i := dim(U_i) \quad (i = 1, 2)$. A 3.1. tétel miatt $C_1$ elemei lineárisan függetlenek, ezért $m \leq n_1 + 2^{n_2}$

Megmutatjuk, hogy $U_1 \cap U_2 = \underline{0}$. Legyen $x \in U_1 \cap U_2$. Ekkor $x$ felírható $U_1$ és $U_2$ beli elemek lineáris kombinációjaként is, azaz $x = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i c_{1_i} = \sum_{j=1}^{n_2} \beta_j c_{2_j}$, ahol $c_{1_i}$-k az $U_1$, $c_{2_j}$ pedig az $U_2$ bázisvektorai. Vegyük mindkét oldal skalárszorzatát $c_{1_k}$-val. Ekkor

$$\sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i c_{1_i} c_{1_k} = \alpha_k \cdot 1 = \alpha_k = \sum_{j=1}^{n_2} \beta_j c_{2_j} c_{1_k} = 0$$

Mivel $k$ tetszőleges volt, ezért $\forall i \quad \alpha_i = 0$, tehát $x = \underline{0}$.

Tudjuk, hogy $< U_1, U_2 > \subseteq U_2^{\perp}$, ezért $n_1 + n_2 = dim < U_1, U_2 > \leq n - n_2$, azaz $n_2 \leq \lfloor \frac{n-n_1}{2} \rfloor$. Tehát

$$m \leq n_1 + 2^{\lfloor \frac{n-n_1}{2} \rfloor} \leq 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + \begin{cases} 0 & \text{ha } n \text{ páros} \\ 1 & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

Ezzel bebizonyítottuk a tételt.... ∎

## 3.4. Fordított páratlanfalva

Fordított páratlanfalva szabályai:

- Minden klubnak csak páros számú tagja lehet

- Bármely két klubnak csak páratlan számú közös tagja lehet

**3.4. Tétel.** *A szabályok betartása mellett a klubok maximális száma*

$$m = \begin{cases} n & \text{ha } n \text{ páratlan} \\ n-1 & \text{ha } n \text{ páros} \end{cases}$$

*Bizonyítás:* Tegyük fel, hogy a városnak van egy új polgára, aki mindegyik klubhoz csatlakozik és önmaga is egy egytagú klubot alapít. Így Páratlanfalva szabályait alkalmazva legfeljebb $n+1$ klubot lehetne létrehozni. Mivel így a klubok száma 1-gyel nőtt, ezért eredetileg legfeljebb $n$ klub lehetett.

Páratlan $n$ esetén ez a felső becslés éles, tényleg lehet $n$ klubot létrehozni például az alábbi módon: Egy ember mindenkivel párt alkotva klubokat alapít. Az $n$. klubnak minden városi polgár tagja, kivéve a fenti illetőt.

Páros $n$ esetén tegyük fel, hogy $m = n$. Legyen $\mathbf{A}$ a klubok incidenciamátrixa és dolgozzunk most is $\mathbb{F}_2$ felett. Ekkor $\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{A}^\top$ $(i,j)$-edik pozíciójában $b_{ij} = |C_i \cap C_j|$ áll. A fenti szabályok miatt $\mathbf{B}$ átlójában 0 áll, mindenhol máshol 1.

**3.1. Állítás.** $\mathbf{B} \in \mathbb{F}_2^{m\times m}$ *rangja* $m$

*Bizonyítás:* Végezzük el a következő Gauss–eliminációs lépéseket: Először mindegyik sorból vonjuk ki az alatta lévőt. A kapott mátrix utolsó sorából vonjuk ki minden páratlanadik sort. Mivel a sorok száma páros, ezért egy felső háromszögmátrixot kapunk, ami teljes rangú, tehát $r(\mathbf{B}) = m \ldots$ ■

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A mátrixok szorzatának rangjára vonatkozó tétel miatt $m = r(\mathbf{B}) \leq min(r(\mathbf{A}), r(\mathbf{A}^\top)) \leq m$, tehát $r(\mathbf{A}) = m$, azaz $\mathbf{A}$ sorai függetlenek . Azonban mivel a klubok tagjainak száma páros, ezért bármely klub $c$ incidenciavektorára $\sum_{i=1}^{n} c_i = 0$. Ez egy $n-1$ dimenziós alteret határoz meg, tehát legfeljebb $n-1$ független incidenciavektor van, azaz $m \leq n-1$.

Létrehozható $n-1$ klub úgy, hogy egy ember mindegyik klubnak, a többiek pedig mind különböző (kétszemélyes) klubnak a tagjai.... ■

## 3.5. Mod-$p^k$-falva

Mod-$p^k$-falván a következő szabályok vannak érvényben:

- Semelyik klub tagjainak száma sem osztható $p^k$-val
- Bármely két különböző klub közös tagjainak száma osztható $p^k$-val

**3.5. Tétel.** *A fenti szabályok figyelembevételével a város $n$ lakója legfeljebb $n$ számú klubot tud alapítani, azaz a klubok $m$ számára $m \leq n$.*

*Bizonyítás:* Legyenek a klubok $C_1, C_2, ..., C_m$, a hozzájuk tartozó incidenciavektorok $c_1, c_2, ..., c_m$ és legyen $\mathbf{A}$ a klubok incidenciamátrixa. Világos, hogy $\mathbf{A}$ mátrix rangja legfeljebb $n$. Ha megmutatnánk, hogy $\mathbf{A}$ sorai függetlenek, akkor ebből azonnal következik, hogy $m \leq n$. Tekintsük most a $c_i \cdot c_j$ skalárszorzatot, ami éppen $C_i \cap C_j$ elemeit számolja meg. A fenti két szabály miatt

$$\begin{aligned} p^k &\mid c_i \cdot c_j \qquad \text{ha } i \neq j \\ p^k &\nmid c_i \cdot c_j \qquad \text{ha } i = j. \end{aligned} \tag{1}$$

Indirekt tegyük fel, hogy a klubok incidenciavektorai nem függetlenek $\mathbb{Q}$ felett. Ekkor

$$\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \cdots + \alpha_m c_m = 0, \tag{2}$$

ahol legalább az egyik $\alpha_i$ együttható nem 0. Szorozzuk be a (2) egyenletet az együtthatók közös nevezőjével, így az együtthatók egészek lesznek. Ezután osszuk le mindkét oldalt az együtthatók legnagyobb közös osztójával. Így a kapott $\beta_i$ együtthatók relatív prímek egymáshoz. Most szorozzuk meg skalárisan mindkét oldalt egy tetszőleges $c_k$ incidenciavektorral és rendezzük át az egyenletet:

$$\beta_1 c_1 \cdot c_k + \beta_2 c_2 \cdot c_k + \cdots + \beta_{k-1} c_{k-1} \cdot c_k + \beta_{k+1} c_{k+1} \cdot c_k + \cdots + \beta_m c_m \cdot c_k = -\beta_k c_k \cdot c_k$$

(1) miatt a bal oldalon mindegyik összeadandó osztható $p^k$-val, de $c_k \cdot c_k$ nem osztható $p^k$-val, ezért $\beta_k$-nak oszthatónak kell lennie $p$-vel. Mivel $c_k$ tetszőleges volt, ezért mindegyik $\beta_i$-nek oszthatónak kell lennie $p$-vel. Ez ellentmond annak, hogy a $\beta_i$ együtthatók relatív prímek egymáshoz. Így a feltételezésünk hamis volt, és a $c_1, c_2, ..., c_m$ incidenciavektorok függetlenek $\mathbb{Q}$ felett, így $m \leq n$, amivel a tételt be is bizonyítottuk.... $\blacksquare$

*Megjegyzés:* A fentiekben csak a vektorok $\mathbb{Q}$ feletti függetlenségét bizonyítottuk be, azonban mivel a vektorok koordinátái mind racionálisak, ezért ez ekvivalens a valós számtest feletti függetlenséggel. Ugyanis ha az $\mathbf{A}$ mátrix rangját a determinánsrang definíciója szerint határoznánk meg, akkor az eredmény független lenne attól, hogy a részmátrixokra $\mathbb{Q}$ vagy $\mathbb{R}$ felett tekintünk.

A fejezet [1] és [3] alapján készült.

# 4. Pontok és távolságok

Ebben a fejezetben pontok (illetve azok létezésének) és a köztük lévő távolságoknak a kapcsolatát vizsgáljuk. Megfigyeljük, hogyan változik a pontok maximális száma ha egy-, illetve kétféle távolságot adunk meg köztük. És vajon mi a helyzet akkor, ha csak annyit szabunk meg, hogy a pontoknak páratlan távolságra kell lenniük egymástól? Meglepő módon ez a nem túl szigorúnak tűnő feltétel eléggé korlátozza a lehetőségeinket. Arra is választ kapunk, hogy egyáltalán hogyan tudjuk eldönteni, hogy mikor létezik $n$ dimenzióban $n+1$, adott távolságra lévő pont. [2]

A fenti kérdések eldöntéséhez (az előző fejezetben is alkalmazott) függetlenséget, generált alterek dimenzióját, illetve a mátrixok szemidefinitségének fogalmát alkalmazzuk.

## 4.1. Azonos távolságra lévő pontok

**4.1. Tétel.** *$\mathbb{R}^n$-ben az olyan pontok maximális $m$ száma, melyek közül bármely kettő távolsága egyenlő $m = n+1$.*

*Bizonyítás:* Legyenek $p_0, p_1, \ldots, p_m$ a fenti tulajdonságú pontok és bármely két pont távolsága legyen $d$. Tekintsük a következő vektorokat:

$$v_i := p_i - p_0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

Be szeretnénk látni, hogy a $v_i$ vektorok lineárisan függetlenek, mert akkor a számuk legfeljebb $n$ lehet, a $p_i$ pontok száma pedig legfeljebb $n+1$.

A $v_i$ vektorokra a következők teljesülnek:

$$v_i v_i = \|v_i\|^2 = d^2 \qquad (3)$$

$$d^2 = \|v_i - v_j\|^2 = v_i v_i - 2v_i + v_j v_j = 2d^2 - 2v_i v_j \Rightarrow v_i v_j = \frac{d^2}{2} \qquad (4)$$

Indirekt tegyük fel, hogy a $v_i$ vektorok összefüggőek, azaz létezik $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$, ahol legalább az egyik $\alpha_i \neq 0$ és amire

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots \alpha_m v_m = 0$$

Ezt szorozzuk be $v_i$-vel.

$$\alpha_1 v_1 v_i + \alpha_2 v_2 v_i + \ldots \alpha_m v_m v_i = 0$$

Ekkor (3)-et és (4)-t behelyettesítve

$$\frac{d^2}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{i-1} + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_m) + d^2\alpha_i = 0$$

$d^2 \neq 0$-val leosztva és az egyenletet átrendezve:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{i-1} + \alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_m = -\alpha_i \tag{5}$$

Mivel (5) minden $i = 1, 2, \ldots, m$-re teljesül, ezért ezeket összeadva a következőt kapjuk:

$$k(\alpha_1+\cdots+\alpha_{i-1}+\alpha_i+\alpha_{i+1}+\cdots+\alpha_m) = -(\alpha_1+\cdots+\alpha_{i-1}+\alpha_i+\alpha_{i+1}+\cdots+\alpha_m)$$

Mivel $k > -1$, ezért ez csak akkor lehetséges, ha $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{i-1} + \alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_m = 0$. Ekkor viszont (5) miatt $\alpha_i = 0$. Mivel $i$ tetszőleges volt, ezért minden együttható 0, tehát az $\alpha_i$ vektorok függetlenek. . . . ■

## 4.2. Kétféle távolságú pontok

**4.2. Tétel.** *$\mathbb{R}^n$-ben az olyan pontok maximális $m$ száma, melyek közül bármely kettő távolsága $a$ vagy $b$ $(a, b \in \mathbb{R},\ a, b > 0)$*

$$\binom{n+1}{2} \leq m \leq \frac{(n+1)(n+4)}{2}$$

*Bizonyítás:* Először az alsó becslést bizonyítjuk be.

Vegyük az összes olyan $\mathbb{R}^{n+1}$-beli vektort, amelynek pontosan két koordinátája 1, a többi 0. Ezeknek a száma $\binom{n+1}{2}$ és távolságuk

$$\|p_i - p_j\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n+1} (p_{i_k} - p_{j_k})^2} = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{ha } \exists k \in \{1, 2, \ldots, m\}\ p_{i_k} = 1 = p_{j_k} \\ 2 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Vegyük észre, hogy ezek a pontok leírhatóak a $\sum_{k=1}^{n+1} p_{i_k} = 2$ egyenlettel. Ez azonban egy $n$ dimenziós alteret határoz meg $\mathbb{R}^{n+1}$-ben, tehát tekinthetünk rájuk $\mathbb{R}^n$-beli pontokként is, vagyis $\mathbb{R}^n$-ben megadható $\binom{n+1}{2}$ kétféle távolságú pont.

Most pedig bizonyítsuk be a felső becslést! Minden $p_i$ ponthoz rendeljük hozzá a következő függvényt:

$$f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto (\|x - p_i\|^2 - a^2)(\|x - p_i\|^2 - b^2)$$

Figyeljük meg, hogy

$$f_i(p_j) = \begin{cases} 0 & \text{ha } i \neq j \\ a^2b^2 \neq 0 & \text{ha } i = j \end{cases}$$

Megmutatjuk, hogy az $f_1, f_2, \ldots, f_m$ polinomok függetlenek $\mathbb{R}$ felett. Vegyük az $f_i$-k lineáris kombinációját $\alpha_i$ együtthatókkal:

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \ldots \alpha_m f_m(x) = 0$$

Helyettesítsük $x$ helyére $p_j$-t! Ekkor azt kapjuk, hogy

$$0 + 0 + \cdots + 0 + \alpha_j a^2 b^2 + 0 + \cdots + 0 = 0,$$

tehát $\alpha_j$. Ez minden $j = 1, 2 \ldots, m$-re teljesül, tehát az $f_i$-k függetlenek.

Másrészt észrevehetjük, hogy a fenti $f_i$ polinomok mind

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^2, \; \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) x_j, \; x_i x_j, \; x_i^2, \; x_i \text{ és } 1$$

lineáris kombinációi ($i, j = 1, 2, \ldots, n \; i < j$). Ezeknek a polinomoknak a száma $1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + n + n + 1 = \frac{n^2+5n+4}{2} = \frac{(n+1)(n+4)}{2}$. Tehát az $f_i$-k által generált tér legfeljebb $\frac{(n+1)(n+4)}{2}$ dimenziós, és mivel az $f_i$-k függetlenek, ezért számuk nem lehet nagyobb, mint a tér dimenziója. Ebből $m \leq \frac{(n+1)(n+4)}{2}$. . . . ∎

## 4.3. Páratlan távolságú pontok

**4.3. Tétel.** *Nincs négy olyan pont a síkon, melyek páronkénti távolsága páratlan.*

*Bizonyítás:* Tegyük fel, hogy létezik négy ilyen pont, és legyen közülük az egyik az origó, a többi pedig $a, b, c \in \mathbb{R}^2$. Ekkor a pontok közti távolságok: $\|a\|$, $\|b\|$, $\|c\|$, $\|a-b\|$, $\|b-c\|$, és $\|c-a\|$. Számelméleti tanulmányainkból tudjuk, hogy bármely $k$ páratlan számra $k^2 \equiv 1 \pmod 8$. Ebből és a koszinusz-tételből $2 < a, b >= \|a\|^2 + \|b\|^2 - \|a-b\|^2 \equiv 1 \pmod 8$. Hasonlóan $2 < a, c > \equiv 1 \pmod 8$ és $2 < b, c > \equiv 1 \pmod 8$.

Legyen $\mathbf{A}$ a következő mátrix:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} < a, a > & < a, b > & < a, c > \\ < b, a > & < b, b > & < b, c > \\ < c, a > & < c, b > & < c, c > \end{pmatrix}$$

Ekkor $2\mathbf{A}$ kongruens az alábbi mátrixszal modulo 8:

$$\mathbf{B} := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

**4.1. Állítás.** $det(\mathbf{B}) = 4 \Longrightarrow det(2\mathbf{A}) \equiv 4 \pmod 8$

*Bizonyítás:* Mindkét mátrix determinánsát kifejtve $det(2\mathbf{A})$ tagjai kongruensek $det(\mathbf{B})$ megfelelő tagjaval modulo 8.... ∎

Az állítás miatt $det(2\mathbf{A}) \neq 0$, így $det(\mathbf{A})$ sem 0, ezért $\mathbf{A}$ teljes rangú, azaz $r(\mathbf{A}) = 3$. Azonban $\mathbf{A} = \mathbf{M}^\top \mathbf{M}$, ahol

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{M}$ rangja legfeljebb 2, ezért a szorzatmátrix rangjára vonatkozó tétel miatt $r(\mathbf{A}) \leq 2$. Így ellentmondásra jutottunk, tehát indirekt feltevésünk hamis volt, nincs négy páronként páratlan távolságú pont a síkon.... ∎

*Megjegyzés:* A fenti tétel és annak bizonyítása átvihető magasabb $n$ dimenziókba is, kivéve akkor, ha $n \equiv 6 \pmod 8$.

**4.4. Tétel.** *Ha $n \not\equiv 6 \pmod 8$, akkor nem létezik $n+2$ pont $\mathbb{R}^n$-ben, amelyek távolsága páratlan.*

*Bizonyítás:* A tételt a 4.3 tétellel analóg módon bizonyíthatjuk. Ekkor a $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ mátrix:

$$\mathbf{B} := \begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 1 & 1 & \dots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

melynek determinánsa $n + 2$ (ami pontosan akkor nem kongruens 0-val modulo 8, ha $n \not\equiv 6 \pmod 8$). Az $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n\times(n+1)}$ mátrix rangja azonban legfeljebb $n$, ami miatt $\mathbf{A}$ rangja is legfeljebb $n$ lehet. Ez ellentmond annak, hogy $\mathbf{A}$ teljes rangú, tehát nem létezik $n + 2$ pont, amelyek távolsága páratlan. ∎

## 4.4. Mikor léteznek az adott távolságú pontok?

A következőekben a tér pontjait és a hozzájuk tartozó helyvektorokat ugyanúgy jelöljük.

Tudunk-e három olyan pontot találni az euklideszi síkon, melyek úgy alkotnak háromszöget, hogy annak oldalai 12, 3 és 5 egység hosszúak legyenek? Azaz létezik-e $p, q, r \in \mathbb{R}^2$ pontok, melyekre $\|p - q\| = 12$, $\|q - r\| = 3$ és $\|r - p\| = 5$?

A válasz természetesen az, hogy nem, ugyanis ez ellentmondana a háromszög-egyenlőtlenségnek, miszerint $\|p - q\| < \|q - r\| + \|r - p\|$.

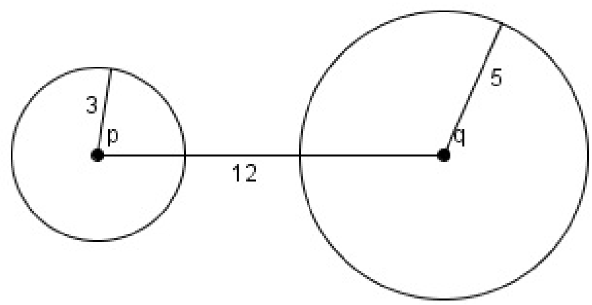
Az is köztudott, hogy a háromszög-egyenlőtlenség nem csak szükséges, de elégséges feltételt is biztosít háromszög létezésére, azaz ha $a, b$ és $c$ pozitív valós számokra $a < b + c$, $b < c + a$ és $c < a + b$, akkor léteznek $p, q, r \in \mathbb{R}^2$ pontok a síkon, melyekre $\|p - q\| = a$, $\|q - r\| = b$ és $\|r - q\| = c$.

De vajon mi a helyzet $n$ pont esetén? Tudunk olyan feltételt mondani, amivel eldönthetjük, hogy léteznek-e $p_1, p_2, \ldots, p_n$ pontok az $n-1$ dimenziós térben, amelyek adott euklideszi távolságra vannak egymástól?

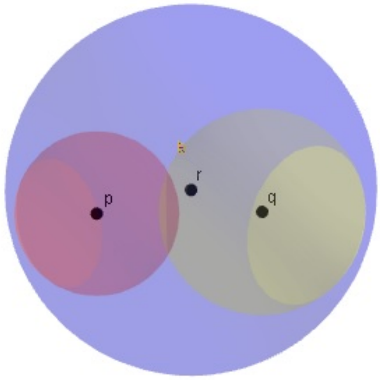
Vegyük az alábbi példát: Léteznek-e $p, q, r, s$ pontok a térben, melyekre

$$\begin{array}{ll} \|p - q\| = 8 & \|p - r\| = 6 \\ \|p - s\| = 4 & \|q - r\| = 5 \\ \|q - s\| = 5 & \|r - s\| = 9 \end{array}$$

A síkbeli példánál a háromszög-egyenlőtlenség ismerete nélkül úgy is eldönthettük volna a kérdést, hogy a $p$ és $q$ pontok meghatározása után a pontok köré rendre 5, illetve 12 egység sugarú kört rajzolunk. Mivel a két körívnek nincs közös pontja, ezért nem létezik a feltételeknek eleget tevő háromszög. (Lásd az 1. ábrát)




1. ábra.




2. ábra.

Hasonlóan a térbeli példánál a $p$, $q$ és r pontok kijelölése után megállapítható, hogy a köréjük rajzolt megfelelő sugarú gömböknek szintén nincs közös pontja, így nem létezik a feltételeknek megfelelő négy pont. (Lásd a 2. ábrát)

Lineáris algebrai eszközökkel azonban olyan elegáns módszerhez juthatunk, melynek segítségével akár magasabb $n$ dimenziókban is könnyedén eldönthetjük $n+1$ pont létezését.

**4.5. Tétel.** *$\forall i \quad \forall j \quad (i, j = 0, 1 \ldots, n)$ legyen $d_{ij} = d_{ji}$ tetszőleges nemnegatív valós szám, és $d_{ii} = 0 \quad \forall i$-re. Akkor és csak akkor léteznek $p_0, p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{R}^n$ pontok, melyekre $\|p_i - p_j\| = d_{ij} \quad \forall (i, j)$, ha $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix pozitív szemidefinit, ahol*

$$a_{ij} = \frac{1}{2}(d_{0i}^2 + d_{0j}^2 - d_{ij}^2)$$

A tétel bizonyításához szükségünk lesz egy lemmára, de előbb álljon itt egy emlékeztető a Cholesky-felbontásról:

**4.6. Tétel.** *$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus pozitív definit mátrix. Ekkor egyértelműen létezik egy $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ felső háromszög mátrix, amire $\mathbf{A} = \mathbf{X}^\top \mathbf{X}$. $\mathbf{A}$-nak ezt a felbontását Cholesky-felbontásnak nevezzük.*

Most pedig következzen a már említett lemma.

**4.1. Lemma.** *$\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$szimmetrikus mátrix pontosan akkor pozitív szemidefinit, ha létezik $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, amire $\mathbf{M} = \mathbf{X}^\top \mathbf{X}$.*

*Bizonyítás:* Ha $\mathbf{M}$ szimmetrikus pozitív szemidefinit, akkor létezik Cholesky-felbontása, azaz $\mathbf{M} = \mathbf{X}^\top \mathbf{X}$, ahol $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ felső háromszög mátrix.

Ha $\mathbf{M} = \mathbf{X}^\top\mathbf{X}$, akkor $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad x^\top\mathbf{M}x = (\mathbf{X}x)^\top(\mathbf{X}x) = \|\mathbf{X}x\|^2 \geq 0$, tehát $\mathbf{M}$ pozitív szemidefinit. ■

A következőekben a tétel bizonyítását ismertetjük:

*Bizonyítás:* Legyen $y_i := p_i - p_0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$. A koszinusztételt alkalmazva: $\|y_i - y_j\|^2 = \|y_i\|^2 + \|y_j\|^2 - 2 < y_i, y_j >$. Ezt átrendezve: $< y_i, y_j >= \frac{1}{2}(\|y_i\|^2 + \|y_j\|^2 - \|y_i - y_j\|^2) = a_{ij}$. Tehát $\mathbf{A}$ az $y_i$ vektorok (szimmetrikus) Gram-mátrixa, ezért felírható $\mathbf{A} = \mathbf{Y}^\top\mathbf{Y}$ alakban, és így a fenti lemma miatt $\mathbf{A}$ pozitív szemidefinit.

Megfordítva, ha $\mathbf{A}$ pozitív szemidefinit (és a definíciója miatt szimmetrikus is), akkor felírható $\mathbf{A} = \mathbf{Y}^\top\mathbf{Y}$ alakban. Legyen $p_i$ az $\mathbf{Y}$ mátrix $i$-edik oszlopa $(i = 1, 2, \ldots, n)$, és $p_0 := 0$. Így $\mathbf{Y}$ mátrix a $p_i$ vektorok $(i = 1, 2, \ldots, n)$ Gram mátrixa. Be kéne látnunk, hogy $\|p_i - p_j\| = d_{ij} \quad \forall(i, j)$. Valóban, egyrészt $\mathbf{A}$ definíciója miatt

$$a_{ij} = \frac{1}{2}(d_{0i}^2 + d_{0j}^2 - d_{ij}^2),$$

másrészt a koszinusztétel miatt

$$a_{ij} =< p_i, p_j >= \frac{1}{2}(\|p_i\|^2 + \|p_j\|^2 - \|p_i - p_j\|^2).$$

A fenti két egyenletből:

$$d_{0i}^2 + d_{0j}^2 - d_{ij}^2 = \|p_i\|^2 + \|p_j\|^2 - \|p_i - p_j\|^2 \tag{6}$$

$i = j$ esetén $d_{0i}^2 + d_{0i}^2 - d_{ii}^2 = 2d_{0i}^2 = \|p_i\|^2 + \|p_i\|^2 - \|p_i - p_i\|^2 = 2\|p_i\|^2$, tehát $d_{0i} = \|p_i\|$. Ezt behelyettesítve az (6) egyenletbe $d_{0i}^2 + d_{0j}^2 - d_{ij}^2 = d_{0i}^2 + d_{0j}^2 - \|p_i - p_j\|^2$, amiből $d_{ij} = \|p_i - p_j\| \ldots$ ■

*Megjegyzés:* $n = 2$ esetén a fenti mátrix pozitív szemidefinitsége ekvivalens a háromszög-egyenlőtlenséggel. Mivel $\mathbf{A}$ mátrix szimmetrikus, ezért pontosan akkor pozitív szemidefinit, ha minden sajátértéke nemnegatív.

$$det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^2 - \lambda(d_{01}^2 + d_{02}^2) + d_{01}^2 d_{02}^2 - \frac{1}{4}(d_{01}^2 + d_{02}^2 - d_{12}^2)^2$$

Ebből

$$\lambda_{1,2} = \frac{d_{01}^2 + d_{02}^2 \pm \sqrt{(d_{01}^2 + d_{02}^2)^2 - 4d_{01}^2 d_{02}^2 + (d_{01}^2 + d_{02}^2 - d_{12}^2)^2}}{2}$$

Akkor lesz mindkét gyök nemnegatív, ha

$$d_{01}^2 + d_{02}^2 \geq \sqrt{(d_{01}^2 + d_{02}^2)^2 - 4d_{01}^2 d_{02}^2 + (d_{01}^2 + d_{02}^2 - d_{12}^2)^2}$$

Az egyenlőtlenséget rendezve:

$$
\begin{aligned}
d_{01}^2 + {d_{02}^2}^2 &\geq \left(d_{01}^2 + d_{02}^2\right)^2 - 4d_{01}^2 d_{02}^2 + \left(d_{01}^2 + d_{02}^2 - d_{12}^2\right)^2 \\
0 &\geq -4d_{01}^2 d_{02}^2 + \left(d_{01}^2 + d_{02}^2 - d_{12}^2\right)^2 \qquad (7) \\
\left(2d_{01}^2 d_{02}^2\right)^2 &\geq \left(d_{01}^2 + d_{02}^2 - d_{12}^2\right)^2
\end{aligned}
$$

Mivel $2d_{01}^2 d_{02}^2$ nemnegatív, ezért mindkét oldalból gyököt vonva az egyenlőtlenség teljesülni fog:

$$
\begin{aligned}
2d_{01}^2 d_{02}^2 &\geq \left(d_{01}^2 + d_{02}^2 - d_{12}^2\right) \\
d_{12}^2 &\geq \left(d_{01} - d_{02}\right)^2 \\
d_{12} + d_{02} &\geq d_{01}
\end{aligned}
$$

A (7) egyenlőtlenséget megfelelően átalakítva pedig megkapjuk, hogy $d_{12} + d_{01} \geq d_{02}$ és $d_{01} + d_{02} \geq d_{12}$.

Feltéve, hogy a háromszög-egyenlőtlenség teljesül, visszafelé elvégezve a műveleteket, megkapjuk, hogy **A** mátrixnak pozitív szemidefinitnek kell lennie.

# 5. Egész számok partíciói

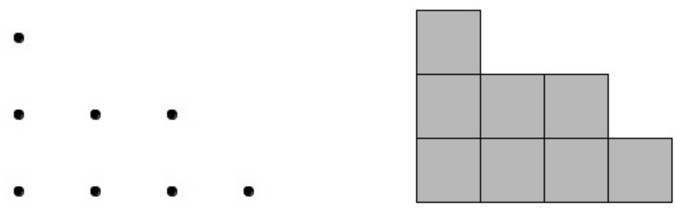
**5.1. Definíció.** *Egy $k \geq 1$ egész szám partíciójának nevezünk minden olyan $k = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r$ előállítást, ahol $r \geq 1$ egész, és $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_r \geq 0$ egész számok.*

Például az 5 partíciói:

$$\begin{aligned}
5 &= 1+1+1+1+1 \\
5 &= 2+1+1+1 \\
5 &= 2+2+1 \\
5 &= 3+1+1 \\
5 &= 3+2 \\
5 &= 4+1 \\
5 &= 5
\end{aligned}$$

A partíciókat gyakran a Ferrers- vagy Young-diagramjukkal reprezentáljuk. Egy $k = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r$ partíció Ferrers-diagrammja $r$ darab nem növekvő magasságú oszlopból áll, ahol az $i$-edik oszlopban pontosan $\alpha_i$ darab pont van. A Young-diagram pontok helyett cellákat használ.

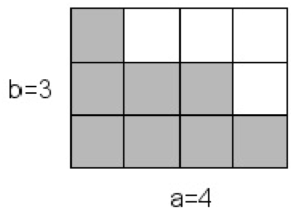
Pl.: 8=3+2+2+1 ábrázolása Ferrers- és Young-diagrammal:



3. ábra. Ferres- és Young diagram

Nyilvánvalóan felmerülhet a kérdés, hogy egy $k$ számnak hányféle partíciója létezik. Az alábbiakban egy ennél egyszerűbb problémával foglalkozunk, név szerint, hogy hányféleképpen lehet egy $k \geq 1$ egész számot legfeljebb $a \in \mathbb{N}^+$ tagú partíciókra bontani, ahol semelyik tag nem lehet nagyobb $b \in \mathbb{N}^+$-nél. Másszóval olyan partíciókat keresünk, melyek Young-diagramja legfeljebb $a$ szélességű és $b$ magasságú, azaz belefér egy ilyen méretű „dobozba”.

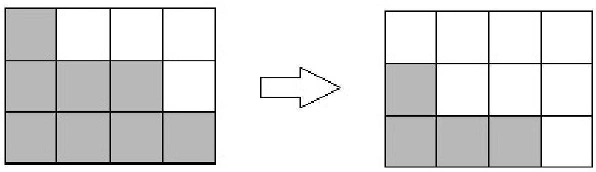
**5.2. Definíció.** *A* $k \geq 1$ *egész szám összes partícióinak számát jelölje* $p(k)$. *Jelölje* $p_{a,b}(k)$ *a* $k \geq 1$ *egész szám azon partícióinak számát, ahol a partíció tagjainak száma legfeljebb* $a$*, és minden tag legfeljebb* $b$*. Nevezzük „jónak" $k$ egy partícióját, ha az belefér egy* $b \times a$*-as „dobozba".*




4. ábra. A 8=3+2+2+1 partíció belefér egy $3 \times 4$-es „dobozba"

**5.1. Lemma.** $p_{a,b}(k) = p_{a,b}(ab - k)$

*Bizonyítás:* Vegyük $k$ egy jó partícióját. Ezt tükrözzük a doboz bal felső sarkából induló átlóra. Ekkor az üres cellák $ab - k$ egy jó partícióját alkotják. (Ld. az 5. ábra)■



5. ábra.

**5.1. Tétel.**

$$p_{a,b}(0) \leq p_{a,b}(1) \leq \cdots \leq p_{a,b}\left(\left\lfloor \frac{ab}{2} \right\rfloor\right)$$

*és*

$$p_{a,b}\left(\left\lceil \frac{ab}{2} \right\rceil\right) \geq p_{a,b}\left(\left\lceil \frac{ab}{2} \right\rceil + 1\right) \geq \cdots \geq p_{a,b}(ab)$$

*Bizonyítás:* Elegendő a tétel első felét bizonyítanunk, mert a második fele következik a 5.1. lemmából. Ehhez pedig elegendő belátnunk, hogy $p_{a,b}(k) \leq p_{a,b}(l)$ minden $0 \leq k < l \leq \frac{ab}{2}$.

Ennek igazolásához egy, a dolgozat során már többször alkalmazott lineáris algebrai módszert, a vektorok függetlenségét fogjuk használni.

Legyen $\pi$ egy permutáció az $\{1, 2, \dots, ab\}$ halmazon (illetve a doboz celláin). Ekkor azt mondjuk, hogy $\pi$ nem sérti az oszlopokat, ha az azonos oszlopban lévő cellákat azonos oszlopban hagyja (az oszlopok és az elemek egy oszlopon belül permutálódhatnak). Ekkor $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ pontosan akkor partícióekvivalensek, ha létezik $\pi$ permutáció az $\{1, 2, \dots, ab\}$ halmazon, amely nem sérti az oszlopokat, és amelyre $K_1 = \pi(K_2)$. Másszóval az oszlopokat nem sértő permutációk permutációcsoportot alkotnak $\mathcal{K}$ felett, melynek orbitjai épp a $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \dots, \mathcal{K}_r$ ekvivalenciaosztályok.

**5.1. Állítás.** *Legyen* $L_{j_n} \in \mathcal{L}_j \quad (n \in \{1, 2, \dots, |\mathcal{L}_j|\})$. *Jelöljük* $d_{ij_n}$ *-nel azon* $K_m \in \mathcal{K}_i$*-k számát, amire* $K_m \subset L_{j_n}$. *Ekkor* $d_{ij_1} = d_{ij_2} = \dots = d_{ij_{|\mathcal{L}_j|}}$

*Bizonyítás:* Legyen $L_{j_p}, L_{j_q} \in \mathcal{L}_j$, $\pi$ olyan permutáció, ami nem sérti az oszlopokat és $L_{j_p} = \pi(L_{j_q})$. Ekkor $K \in \mathcal{K}_i$ esetén $\pi(K) \in \mathcal{K}_i$, ezért $\pi$ bijekciót létesít $K_i$ azon elemei között, amik $L_{j_p}$-nek részhalmazai, és azok között, melyek $L_{j_q}$ -nak részhalmazai, így $d_{ij_p} = d_{ij_q}$. ∎

Visszatérve a tétel bizonyítására legyen $\mathbf{A}$ egy olyan $|\mathcal{K}| \times |\mathcal{L}|$ méretű mátrix, amire

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } K_i \subset L_j \text{, ahol } K_i \in \mathcal{K},\ L_j \in \mathcal{L} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

**5.2. Állítás.** *Ha* $\mathbf{A}$ *sorai függetlenek, akkor* $r \leq s$.

*Bizonyítás:* Legyen $\mathbf{A}[\mathcal{K}_i, \mathcal{L}_j]$ az $\mathbf{A}$ mátrixnak a $\mathcal{K}_i$-hez tartozó sorai és az $\mathcal{L}_j$-hez tartozó oszlopai által meghatározott almátrixa. Az előző állítás miatt összeadva $\mathbf{A}[\mathcal{K}_i, \mathcal{L}_j]$ sorait egy olyan vektort kapunk, melynek mindegyik koordinátája $d_{ij}$.

Legyen $\mathbf{D}$ az a mátrix, aminek $(i, j)$ pozíciójában $d_{ij}$ áll.

Vegyünk egy tetszőleges $x \in \mathbb{R}^r$ vektort. $x' \in \mathbb{R}^{|\mathcal{K}|}$ vektor koordinátáit indexeljük $\mathcal{K}$ elemeivel és $x'_K := x_i \quad \forall K \in \mathcal{K}_i$, ahol $i = 1, 2, \dots, r$ (azaz $x_1$ az a vektor, amit úgy kapunk, hogy az $x$ $i$-edik koordinátáját $|\mathcal{K}_i|$-szer leírjuk). Ekkor $x'^\top$ $L$-hez tartozó komponense

$$\sum_{K \in \mathcal{K}} x'_K a_{KL} = \sum_{i=1}^{r} x_i \sum_{K \in \mathcal{K}_i} a_{KL} = \sum_{i=1}^{r} x_i d_{ij} = \left(x^\top \mathbf{D}\right)_j$$

Tehát ha $x^\top \mathbf{D} = 0$, akkor $x'^\top \mathbf{A} = 0$. Be akarjuk bizonyítani, hogy $\mathbf{D}$ sorai függetlenek, ugyanis így legalább annyi oszlopa van, mint sora, azaz

$r \leq s$. Indirekt tegyük fel, hogy $\mathbf{D}$ sorai összefüggőek. Ekkor létezik $0 \neq x \in \mathbb{R}^r$ $x^\top \mathbf{D} = 0$. Ekkor azonban $x'^\top \mathbf{A} = 0$, de $x' \neq 0$, tehát $\mathbf{A}$ sorai összefüggőek. Ellentmondásra jutottunk, ezért feltevésünk hamis, és így $\mathbf{D}$ sorai függetlenek. ∎

Ahhoz, hogy az előző állítást alkalmazhassuk, még bizonyítanunk kell, hogy $\mathbf{A}$ sorai függetlenek.

**5.2. Tétel (Gottlieb tétele).** *Legyen $0 \leq s < t \leq n$, $s + t \leq n$, és jelölje $\mathbf{A}$ azt a mátrixot, melynek sorai, illetve oszlopai $\{1, 2, \dots, n\}$ s-elemű, illetve t-elemű halmazaival vannak indexelve, és amelynek $(S, T)$ pozíciójában ($S \in \mathcal{S} = \{\{1, 2, \dots, n\}$ s elemű részhalmazai$\}, T \in \mathcal{T} = \{\{1, 2, \dots, n\}$ t elemű részhalmazai$\}$) 1-es áll, ha $S \subset T$. Ekkor $\mathbf{A}$ sorai függetlenek.* [4]

*Bizonyítás:* Indirekt tegyük fel, hogy létezik $x$ nemnulla vektor, amire $x^\top \mathbf{A} = 0$. Rögzítsünk egy $S_0 \in \mathcal{S}$ koordinátát, amire $x_{S_0} \neq 0$ ($x$ koordinátáit is $\mathcal{S}$ elemeivel indexeljük). Bontsuk partíciókra $\mathcal{S}$-et és $\mathcal{T}$-t is a következő módon:

$$\mathcal{S}_i := \{S \in \mathcal{S} : |S \cap S_0| = i, \quad i = 0, 1, \dots, s\}$$
$$\mathcal{T}_j := \{T \in \mathcal{T} : |T \cap S_0| = j, \quad j = 0, 1, \dots, s\}$$

Tehát $\mathcal{S}$-et és $\mathcal{T}$-t is aszerint bontottuk $s + 1$ darab partícióra. hogy hány közös elemük van $S_0$-lal.

Mivel $0 \leq s < t \leq n$ és $s + t \leq n$, ezért biztosak lehetünk benne, hogy mindegyik $\mathcal{S}_i$ és $\mathcal{T}_j$ nemüres. Azt is észrevehetjük, hogy minden $S \in \mathcal{S}_i$ ugyanannyi $\mathcal{T}_j$-beli halmaz részhalmaza (jelölje ezek számát $d_{ij}$). $\mathcal{S}_i$ és $\mathcal{T}_j$ definíciója miatt $d_{ij} = 0$ ha $i > j$, és $d_{ij} \neq 0$ ha $i = j$. Emiatt a $d_{ij}$-k által alkotott mátrix nemszinguláris felső háromszögmátrix.

Legyen $y$ az az $s$ hosszú vektor, aminek koordinátái:

$$y_i = \sum_{S \in \mathcal{S}_i} x_S$$

$y \neq 0$, hiszen $\mathcal{S}_s$ egyetlen eleme $S_0$, ezért $y_s = x_{S_0} \neq 0$. Azonban

$$0 = \sum_{T \in \mathcal{T}_j} (x^\top \mathbf{A})_T = \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \sum_{S \in \mathcal{S}} x_S a_{ST} \quad = \quad \sum_{S \in \mathcal{S}} x_S \sum_{T \in \mathcal{T}_j} a_{ST} = \sum_{i=0}^{s} \sum_{S \in \mathcal{S}_i} x_S d_{ij} =$$
$$= \sum_{i=0}^{s} y_i d_{ij} \quad = \quad \left(y^\top \mathbf{D}\right)_j$$

Tehát $y$ egy olyan nemnulla vektor, amire $y^\top \mathbf{D} = 0$, ami ellentmond $\mathbf{D}$ invertálhatóságának. Ellentmondásra jutottunk, tehát $\mathbf{A}$ sorai függetlenek. ∎

Visszatérve a fő tételünk bizonyítására, Gottlieb tétele miatt **A** mátrix sorai függetlenek, ezért alkalmazhatjuk a 5.2 állítást. Azt kapjuk, hogy $r \leq s$, tehát $p_{a,b}(k) \leq p_{a,b}(l)$ minden $0 \leq k < l \leq \frac{ab}{2} \ldots \blacksquare$

A fejezetben szereplő bizonyítás [2] alapján készült.

*Néhány további, partíciókkal kapcsolatos eredmény, melyek bizonyítását most nem ismertetjük:*

1. Hardy és Ramanujan aszimptotikus becslést adott egy k szám partícióinak számára [5]:
$$p(k) \sim \frac{1}{4k\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{2k}{3}}}$$

2. $p(k)$ (Euler által felfedezett) generátorfüggvénye [6]:
$$\sum_{k=0}^{\infty} p(k)x^k = \prod_{i=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1-x^i} \right)$$

3. Szintén Euler munkásságának eredmény a következő tétel: [6]

   A $k$ számnak pontosan annyi olyan partíciója létezik, ahol minden tag különböző, ahány olyan partíciója van, ahol minden tag páratlan.

4. Egy $k$ szám $n$ tagú partícióinak száma megegyezik $k$ olyan partícióinak számával, ahol a legnagyobb tag $n$.

5. Rekurzív képlet $k$ partícióinak számára [7]:
$$p(k) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} p\left(k - \frac{j(3j-1)}{2}\right)$$

# 6. Konvexitás

## 6.1. Konvex halmazok metszete

Ebben a fezetben konvex halmazokkal, illetve azok metszetével foglalkozunk

**6.1. Tétel (Helly-tétel).** *Ha $K_1, K_2, \ldots, K_m \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex halmazok, ahol $m \in \mathbb{N}$, és közülük bármely $n+1$ metszete nemüres. Ekkor*

$$\bigcap_{i=1}^{m} K_i \neq \varnothing$$

A bizonyításhoz szükségünk lesz Radon tételére:

**6.2. Tétel (Radon-tétel).** *Legyen $S \subset \mathbb{R}^n$ $m \geq n+1$ darab $\mathbb{R}^n$-beli vektor halmaza. Ekkor $S$ felbontható két diszjunkt $S_1$ és $S_2$ halmazra, amelyek konvex burkának van közös pontja.*

*Bizonyítás:* Legyenek $S$ elemei $s_1, s_2, \ldots, s_m$. Mivel $|S| > n+1$, ezért $S$ affin összefüggő. Tegyük fel, hogy $s_m = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i s_i$, ahol $\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i = 1$, $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_k \geq 0 \geq \alpha_{k+1} \geq \cdots \geq \alpha_{m-1}$ és legyen $\alpha_m = -1$. Vagyis

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i s_i = 0,$$

azaz $S$ elemeinek létezik olyan nemtriviális lineáris kombinációja, mely 0-val egyenlő, és az együtthatók összege is 0. Legyen $S_1 = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$, azaz azon $S$-beli pontok halmaza, melyek ebben a lineáris kombinációban pozitív együtthatóval szerepelnek, $S_2 = \{s_{k+1}, s_{k+2}, \ldots, s_m\}$ pedig tartalmazza azokat a pontokat, melyek negatív együtthatóval szerepelnek. Ekkor

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i s_i = -\sum_{j=k+1}^{m} \alpha_j s_j.$$

Legyen $\alpha := \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = -\sum_{j=k+1}^{m} \alpha_j$, és

$$p := \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{\alpha} s_i = -\sum_{j=k+1}^{m} \frac{\alpha_j}{\alpha} s_j$$

Tehát $p$ előáll $S_1$-beli és $S_2$-beli vektorok konvex kombinációjaként is, azaz $p \in conv(S_1) \cap conv(S_2)$. . . ■

Most pedig térjünk rá Helly-tételének bizonyítására:
*Bizonyítás:* $m \leq n+1$ esetén nincs mit bizonyítanunk. Vegyük az $m = n+2$ esetet. Legyen $a_i \in \bigcap_{j \neq i} K_j$ és $S := \{a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}\}$. Radon tétele miatt $S$ felbontható $S_1$ és $S_2$ diszjunkt halmazokra, és létezik $p \in conv(S_1) \cap conv(S_2)$. Vegyünk egy tetszőleges $a_i$-t. $a_i$ eleme $S_1$-nek vagy $S_2$-nek, most tegyük fel, hogy $S_1$-nek. Ekkor $S_2 \subseteq K_i$. Emiatt $conv(S_2) \subseteq K_i$, tehát $p \in K_i$. Mivel $a_i$ tetszőleges volt, ezért $p$ mindegyik $K_i$-nek eleme.

Innen indukciót alkalmazunk $m$-re. Tegyük fel, hogy $m-1$-re igazoltuk a tételt. A fenti érvelésből kiderült, hogy a $K_i$-k közül bármely $n+2$-nek van közös pontja. Következésképp $K_1, K_2, \ldots, K_{m-1} \cap K_m$ közül bármely $n+1$-nek van közös pontja. Az indukciós feltevés miatt az összesnek van közös pontja, így $K_1, K_2, \ldots, K_{m-1}, K_m$ halmazok metszete nemüres. Ezzel bebizonyítottuk Helly tételét. . . . ■

*Megjegyzés:* A nemüres metszettel rendelkező halmazok számára tett feltétel éles, azaz ha csak azt tesszük fel, hogy $K_1, K_2, \ldots, K_{m-1}, K_m$ halmazok közül bármely $n$ metszete nemüres, akkor előfordulhat, hogy az összes halmaz metszete üres.

Egy ellenpélda az $n$ dimenziós szimplex. Ugyanis legyen $b_0, b_1, \ldots, b_n$ az $\mathbb{R}^n$ affin bázisa. A $b_i$-k konvex burka egy $n$ dimenziós szimplexet alkot. Legyen $B_i = \{b_j : 0 \leq j \leq n, i \neq j\}$ és $K_i := conv(B_i)$ ($K_i$ a szimplex egy $n-1$ dimenziós lapja). Ekkor $K_0, K_1, \ldots, K_n$ közül bármely $n$ metszete nemüres, de nem létezik olyan pontja a szimplexnek, amely mindegyiknek eleme.

Tegyük fel, hogy létezik ilyen pont, jelöljük ezt $x$-szel. Ekkor $x$ a $b_i$-k affin kombinációja, másszóval

$$x = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i b_i; \text{ ahol } \sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1.$$

Ebben az affin kombinációban legalább az egyik együttható nemnulla, legyen ez $\alpha_0$. Mivel $x \in aff(B_0)$, ezért

$$x = \sum_{j=1}^{n} \beta_i b_i; \text{ ahol } \sum_{j=1}^{n} \beta_i = 1.$$

Ekkor azonban

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i b_i - \sum_{j=1}^{n} \beta_i b_i = 0.$$

Így a $b_i$-k olyan lineáris kombinációját kaptuk, ami egyenlő 0-val, és az együtthatók összege is 0. Ez azonban ellentmond a $b_i$ vektorok függetlenségének, vagyis $\cap_{i=0}^{n} K_i = \emptyset$.

## 6.2. A momentumgörbe és a ciklikus politóp

A következőekben megismerkedünk a momentumgörbe fogalmával, majd ennek segítségével definiáljuk a ciklikus politópot. Ez utóbbinak kitüntetett szerepe van a politópok között: nincs olyan politóp, amelynek több $k$-dimenziós lapja lenne. Előbb azonban megnézzük, legfeljebb hány lapja lehet egy politópnak.

**6.1. Állítás.** *Bármely $d$ csúccsal rendelkező politópnak legfeljebb $\binom{d}{k+1}$ darab $k$ dimenziós lapja van.*

*Bizonyítás:* Legyen $P = conv(S) \subseteq \mathbb{R}^n$, ahol $S$ jelöli a politóp $d$ csúcsának halmazát. Legyen $S' \subseteq S$ olyan, hogy $aff(S')$ dimenziója $k$, és legyen $F = conv(S')$, azaz $F$ egy lapja $P$-nek. Továbbá legyen $B \subseteq S'$ affin bázisa $aff(F) = aff(S')$-nek. Ekkor $|B| = k + 1$ és $B$ egyértelműen meghatározza $F$-et, ugyanis $F = aff(B) \cap P$. Így $P$-nek legfeljebb annyi $k$ dimenziós lapja lehet, ahányféleképpen megválaszthatjuk $B$-t, tehát legfeljebb $\binom{n}{k+1}$. ∎

**6.1. Definíció (Momentumgörbe).** *Az*

$$m_{n+1}(t) = (1, t, t^2, \ldots, t^n) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

*alakú pontok halmazát momentumgörbének nevezzük.*

**6.2. Állítás.** *A momentumgörbe pontjai általános helyzetűek.*

*Bizonyítás:* Legyen $t_1, t_2, \ldots, t_{n+1} \in \mathbb{R}$ különbözőek. Tekintsük a következő mátrixot:

$$\begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \ldots & t_1^n \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \ldots & t_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \ldots & t_n^n \\ 1 & t_{n+1} & t_{n+1}^2 & \ldots & t_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

Ennek a mátrixnak a sorai megfelelnek a momentumgörbe $n+1$ pontjának, és mivel ez egy Vandermonde-mátrix, ezért determinánsa $\prod_{1\leq i<j\leq n+1}(t_j - t_i)$. Mivel mindegyik $t_i$ különböző, ezért a determináns nemnulla, tehát a sorai függetlenek, így a momentumgörbe $m_{n+1}(t_i)$ pontjai is függetlenek. ∎

**6.2. Definíció (Ciklikus politóp).** *Legyen* $m'_n(t) = (t, t^2, \ldots, t^n)$, $t \in \mathbb{R}$ *(az* $\mathbb{R}^{n+1}$*-beli momentumgörbének elhagyjuk az első koordinátáját). A* $d \geq n+1$ *pont által generált ciklikus politóp adott* $t_1 < t_2 < \cdots < t_d$ *esetén:*

$$C(d,n) := conv\{m'_n(t_k) : k = 1,...,d\}$$

**6.3. Definíció ((k+1)-szomszédsági politóp).** *Egy* $d$ *csúcsú politóp* $(k+1)$*-szomszédsági, ha pontosan* $\binom{d}{k+1}$ *darab* $k$ *dimenziós lapja van. Ez azt jelenti, hogy bármely* $k+1$ *csúcsa meghatároz egy lapot.*

Be fogjuk látni, hogy a ciklikus politóp $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$-szomszédsági, ehhez azonban szükségünk lesz az alábbi lemmára:

**6.1. Lemma.** *Legyen* $n \geq 1$, $0 \leq k \leq \frac{n}{2}$ *és* $t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$. *Ekkor létezik egy origón átmenő hipersík, amelynek egyik oldalán helyezkedik el az* $m_{n+1}$ *momentumgörbe, és amely a görbének pontosan az* $m_{n+1}(t_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ *pontjait tartalmazza.*

*Bizonyítás:* A hipersíkot egy $cx = 0$ alakú egyenlettel fogjuk megadni. Ehhez úgy kéne megválasztanunk $c$-t, hogy a következőek teljesüljenek:

(i) $\quad c \cdot m_{n+1}(t) > 0 \qquad t \in \mathbb{R},\ t \notin \{t_1, \ldots, t_k\}$

(ii) $\quad c \cdot m_{n+1}(t) = 0 \qquad t \in \mathbb{R},\ t \in \{t_1, \ldots, t_k\}$

Legyen $f$ a következő polinom:

$$f(t) = \prod_{i=1}^{k}(t - t_i).$$

Ekkor $f^2$ a következő alakú:

$$(f(t))^2 = c_0 + c_1 t + \cdots + c_n t^n$$

Legyen $c := (c_1, c_2, \ldots, c_n)$. Ekkor

$$c \cdot m_{n+1}(t) = (f(t))^2 \qquad \forall t \in \mathbb{R},$$

amiből a fenti két tulajdonság azonnal következik. ∎

**6.1. Következmény.** *Legyen* $1 \leq n+1 \leq d$ *és* $0 \leq k \leq \frac{n}{2}$*. Ekkor létezik* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{d \times (n+1)}$*, melynek sorai általános helyzetűek (közülük bármely* $n+1$ *független). Emellett* $[d] = \{1, 2, \ldots, d\}$ *bármely* $k$ *elemű* $I$ *részhalmazához létezik* $c \in \mathbb{R}^{n+1}$*, amire ha* $c\mathbf{A}^{\top} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_d)$*, akkor* $\beta_i = 0$ *ha* $i \in I$ *és* $\beta_i > 0$ *ha* $i \notin I$*.*

*Bizonyítás:* Legyen $t_1, t_2, \ldots, t_{n+1} \in \mathbb{R}$ különbözőek, és legyen $\mathbf{A}$ az a mátrix, melynek sorai $m_{n+1}(t_1), m_{n+1}(t_2), \ldots, m_{n+1}(t_d)$. Az előző lemma bizonyításában látott módon előállíthatjuk $c$-t, amire $\beta_i = 0$ ha $i \in I$ és $\beta_i > 0$ ha $i \notin I$. ■

**6.3. Tétel.** $C(d, n) \subset \mathbb{R}^n$ *ciklikus politóp* $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$*-szomszédsági és* $d$ *csúcsa van.*

*Bizonyítás:* Legyen $k \leq \frac{n}{2}$, $t_1 < t_2 < \cdots < t_{k-1} < t_k$ pedig olyan, hogy $m'_n(t_1), m'_n(t_2), \ldots, m'_n(t_k)$ azok közül a pontok közül való, melyek konvex burka $C(d, n) \in \mathbb{R}^n$ (lásd 6.2 Definíció). Be kéne látnunk, hogy létezik egy olyan $H$ hipersík, melynek $C(d, n)$ az egyik oldalán helyezkedik el, és $C(d, n) \cap H = conv(m'_n(t_1), m'_n(t_1), \ldots, m'_n(t_k))$. Ehhez alkalmazzuk a 6.1 lemmát $m_{n+1}(t_1), m_{n+1}(t_1), \ldots, m_{n+1}(t_k)$-re, majd vegyük a kapott hipersík metszetét az $x_0 = 0$ hipersíkkal, és hagyjuk el a vektorok első koordinátáját. Ezzel bebizonyítottuk, hogy $C(d, n)$ $k$-szomszédsági minden $k \leq \frac{n}{2}$-re, és $k = 1$-re azt is megkaptuk, hogy $m'_n(t_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, d)$ a ciklikus politóp csúcsai. ■

A fenti tételből következik, hogy a ciklikus politópnak maximálisan sok $\frac{n}{2} > k$-dimenziós lapja van, tehát nincs olyan $n$-dimenziós, $d$-csúcsú politóp, aminek több $k$ dimenziós lapja lenne. De vajon mi a helyzet $k \geq \frac{n}{2}$ esetén? A következő tételt először Theodore Motzkin állította, melyet később P. McMullen igazolt. [8]

**6.4. Tétel.** *Nem létezik olyan* $n$*-dimenziós* $d$ *csúcsú politóp, amelynek több* $k$*-dimenziós* $(0 \leq k \leq n \leq d-1)$ *lapja lenne, mint* $C(d, n)$*-nek.*

## 6.3. Egyenletesen elhelyezkedő pontok az $r$-gömbön

Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogyan lehet az r-gömbön néhány pontot találni úgy, hogy bármely nyílt félgömb közülük legalább $m$-et tartalmazzon. Ehhez nyilván legalább $2m + r$ pont szükséges, hiszen bármely $r$ pont rajta lesz egy körön ((r-1)-gömbön). Ehhez igénybe vesszük az előző fejezetben tárgyaltakat, valamint itt is szükségünk lesz a vektorok függetlenségére, illetve mátrixok oszlopterének és azok ortogonális kiegészítő alterének fogalmára.

A következő tétel D. Gale [9] nevéhez fűződik:

**6.5. Tétel.** *Minden $0 \leq m, r$-re létezik $2m + r$ pont az $r$-gömbön, hogy bármely félgömb tartalmaz közülük legalább $m$-et. (Azaz a pontok „egyenletesen” vannak eloszlatva az $r$-gömbön).*

*Bizonyítás:* Megjegyezzük, hogy az 1-gömbön (a körön) könnyű ilyen pontokat találni: egy szabályos $(2m + 1)$-szög csúcsai jók lesznek.

Általánosan: Legyen $d = 2m + r$. Célunk az, hogy találjunk olyan $v_1, \ldots, v_d \in \mathbb{R}^{r+1}$ nemnulla vektorokat, hogy bármely $x \in \mathbb{R}^{r+1}$ vektorra a $v_i x > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, d)$ egyenlőtlenségek közül legalább $m$ teljesüljön. Ha találnánk ilyen vektorokat, akkor azokat lenormálva a tétel feltételeinek megfelelő pontokat kapnánk.

Legyen $n = 2m - 2$ és vegyük az 6.1 következményben szereplő $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{d \times (n+1)}$ mátrixot. Ekkor $\mathbf{A}$ oszlopai függetlenek, jelölje $U$ az oszlopterét. Vegyünk $(d - n - 1) = r + 1$ darab oszlopvektort, melyek bázist alkotnak $U^{\perp}$-ben, és legyen $\mathbf{B}$ a belőlük képzett $d \times (r + 1)$-es mátrix. $\mathbf{B}$ sorai legyenek $v_1, v_2, \ldots, v_d$. Be kéne látnunk, hogy bármely $x \in \mathbb{R}^{r+1}$ vektorra $\mathbf{B}x = y$ vektornak legalább $m$ koordinátája pozitív.

Tegyük fel, hogy $y = (y_1, y_2, \ldots, y_d)$ vektornak legfeljebb $m - 1$ pozitív koordinátája van, és legyen $I \subset [d]$ a hozzá tartozó indexhalmaz. Legyen $k = |I| = m - 1 = \frac{n}{2}$ és legyen $c \in \mathbb{R}^{n+1}$ a 6.1 következményben kapott vektor. Tehát $b := (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_d) = c\mathbf{A}^{\top}$ koordinátáira igaz, hogy $\beta_i = 0$ ha $i \in I$, és $\beta_i > 0$ ha $i \notin I$. Ekkor $by = c\mathbf{A}^{\top}\mathbf{B}x = 0$, mivel $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ oszlopai merőlegesek, másrészről azonban

$$by = \sum_{i \in I} \beta_i y_i + \sum_{i \notin I} \beta_i y_i.$$

Az első összeg minden tagja 0, a második összeg minden tagja egy pozitív és egy nemnegatív szám szorzata. Ez csak akkor lehetséges, ha minden $i \notin I$ esetén $y_i = 0$. Ez azonban $\mathbf{A}^{\top}y = \mathbf{A}^{\top}\mathbf{B}x$ miatt azt jelentené, hogy $\mathbf{A}$ sorainak létezik olyan lineáris kombinációja, mely 0-val egyenlő és melyben legfeljebb $k \leq m - 1 = \frac{n}{2} < n + 1$ együttható nemnulla. Mivel $A$ sorai általános helyzetűek, ezért ez csak akkor fordulhat elő, ha minden együttható 0, azaz $y = 0$. Ellentmondásra jutottunk, hiszen $y = \mathbf{B}x \neq 0$, mert $\mathbf{B}$ oszlopai függetlenek. ■

# Hivatkozások


[1] László Babai and Péter Frankl: *Linear Algebra Methods in Combinatorics with Applications to Geometry and Compute Science* (Preliminary Version 2), Department of Cumputer Science, The University of Chicago, (1992)

[2] Jiri Matousek: *Thirty-three Miniatures: Mathematical and Algorithmic Applications of Linear Algebra*, American Mathematical Society, (2010)

[3] Freud Róbert: *Lineáris algebra*, ELTE Eötvös Kiadó Kft., (2007)

[4] D.H. Gottlieb: *A Certain Class of Incidence Matrices* Proceedings of the American Mathematical Society 17, (1966), 1233-1237

[5] G. H. Hardy and S. Ramanujan: *Asymptotic formulae in combinatory analysis*, Proc. London Math. Soc. 17, (1918), pp 75-115.

[6] L. Euler: *Introductio analysin infinitorium*, Lausanne 1 (1748)

[7] S. Skiena: *Implementing Discrete Mathematics: Combinatorics and Graph Theory with Mathematica* Reading, MA: Addison-Wesley, (1990)

[8] P. McMullen: *The maximum numbers of faces of a convex polytope*, Mathematika 17 (1970)

[9] D. Gale: *Neighboring vertices on a convex polyhedron*, H. W. Kuhn and A. W. Tucker (Editors), Linear inequalities and related systems, Annals of Math. Studies, 38, Princeton Univ. Press, Princeton, (1956), 255-263.