Eötvös Loránd Tudományegyetem
Matematikai Intézet

Rácz Nóra Katalin

# Szavazási mechanizmusok és Fourier analízisük

BSc szakdolgozat

Témavezető: Bérczi-Kovács Erika

ELTE Operációkutatási Tanszék

Budapest, 2015

# Tartalomjegyzék

# Köszönetnyilvánítás

Először szeretnék köszönetet mondani a témavezetőmnek, Bérczi-Kovács Erikának, aki lelkesedésével végig motivált, és tanácsaival rengeteget segített, hogy elkészüljön ez a szakdolgozat.

Nagyon köszönöm szüleimnek és testvéreimnek a végtelen türelmüket és támogatásukat, amire mindig számíthattam. Külön köszönöm a Mamának a hasznos ötleteit és a Mikinek, hogy mindig segített, ha elakadtam.

Köszönettel tartozom a barátaimnak, elsősorban Endrének, hogy mindig ott voltak, ha szükségem volt rájuk.

# 1. fejezet

# Bevezetés

Szakdolgozatom témája a szavazási mechanizmusok tulajdonságainak, paradoxonainak ismertetése Fourier analízis segítségével. A szavazások régóta érdekelték az emberiséget, hiszen az egyik leggyakrabban használt eszköz arra, hogy egy csoport az egyéni véleményekből közös döntést alkosson. Nem különösebben megdöbbentő tehát, hogy számtalan tudós, matematikusok, közgazdászok, filozófusok és politológusok egyaránt foglalkoztak a kérdéskörrel. Valószínűleg a leghíresebb matematikus, aki forradalmasította a szavazások témakörét Kenneth J. Arrow volt.

A második fejezetben felvázolunk néhány potenciális problémát a szavazásokkal kapcsolatban, amelyeket példákon szemléltetünk, mint például a Condorcet paradoxon. Ezt követően Arrow tételével belátjuk, hogy nincs olyan szavazási rendszer, amely némely, Arrow által választott, ésszerű elvárásnak eleget tenne.

Ezek után a harmadik fejezetben bevezetünk pár alapvető Fourier analízisbeli fogalmat, amelyeket tárgyalunk.

Ezután a logikai függvények körében dolgozunk tovább. Mivel a későbbiekben a szavazások témakörébe tudjuk integrálni őket, a negyedik fejezetben megvizsgáljuk a Fourier-sorukat és azok néhány központi jellegzetességét. A fogalmak bevezetése után összekapcsolhatjuk őket a szavazásokkal. A negyedik fejezetben az $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ függvényeket elemezzük a szavazások tulajdonságainak szempontjából. Szó lesz többek között a szavazások torzításáról, a szavazók befolyásáról, valamint összbefolyásáról. Az ötödik fejezetben az $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ logikai függvények segítségével ismertetjük Gulibaud formuláját és részletesen bebizonyítjuk Arrow tételét. Végül még megemlítünk néhány fontosabb állítást a szavazások témaköréből.

# 2. fejezet

# A szavazások

Ebben a fejezetben először szó lesz a szavazásokról és arról, hogy azok során milyen problémák léphetnek fel. A legnevezetesebb ilyen probléma a Condorcet paradoxon, amelyet egy példán keresztül mutatunk be. Végül pedig Arrow tételét, és annak a feltételeit fejtjük ki bővebben. A fejezet témáinak feldolgozása során David Easley és Jon Kleinberg könyvét vesszük alapul [4].

## 2.1. Általánosan a szavazásokról, mint egy csoport döntéséről

Szavazásokra mindenhol szükség van, hiszen szerte a világban az embereknek kisebb, nagyobb csoportjai szeretnének egy bizonyos kérdésben döntésre jutni. Akár arról van szó, hogy egy országban választásokat tartanak vagy egy sportversenyen kell a dobogós helyezetteket kiválasztani, esetleg egy bíróságon az esküdtszék jogos ítéletet hirdetni, minden alkalommal ugyanaz a cél: olyan döntést találni, amit mindenki közösen elfogad. Sok esetben könnyű megoldani, hiszen valamilyen numerikus eredmény alapján sorrendbe lehet állítani a jelölteket, például egy futóversenyen, de legtöbbször nem vagyunk ilyen szerencsés helyzetben. Szavazásokat használnak akkor is ha egy nyertest akarnak választani, például hogy ki nyeri a Nobel-díjat. Azonban többnyire ennél nehezebb a feladat, mint az egyetemek közti rangsor felállításánál. Nem véletlen, hogy annyi sorrend van, hiszen többféle szempont alapján lehet konstruálni rangsorokat. Számtalan ember pedig már ezekből a rangsorokból kíván egy univerzális rangsort felállítani, a temérdek rangsort összevetve.

Különbséget eredményezhet szavazások között az is, hogy mi az ok, amiért nem értenek egyet a szavazók. Tekintsük például a filmkritikusokat: csak a szubjektív vélekedésük az, ami miatt az egyik A remény rabjait, a másik a Tizenkét dühös embert tartja jobbnak, bár mind a ketten az összes információval rendelkeznek a filmekkel kapcsolatban. Nem ez a helyzet egy bűnügyi bíróságon: ha mindenki tisztában lenne azzal, vajon pontosan mi történt, akkor mindannyian ugyanarra az elhatározásra jutnának.

Ehhez kapcsolódik az a probléma, amikor a szavazóknak megéri nem arra szavazni, ami a birtokukban lévő információ alapján logikus lenne, vagyis hamisan szavaznak. Bár a továbbiakban feltesszük, hogy nem ez a helyzet, álljon itt egy példa, amellyel ezt az esetet is el tudjuk képzelni.

Tekintsük azt a kísérletet, hogy három embernek közös döntésre kell jutniuk arról, hogy egy urnában milyen színű golyók vannak. 1/2 eséllyel 10 fehér golyó van benne, 1/2 eséllyel pedig 9 zöld és 1 fehér golyót tartalmaz az urna. A továbbiakban, hogy egyszerűbb legyen a dolgunk, az elsőt nevezzük tiszta, a másikat pedig kevert urnának. Mind a három ember egymástól függetlenül megnézhet egy golyót, majd azt visszateszi, és szavaz arra, hogy melyik szerinte az urna kevert vagy tiszta. Majd attól függően, hogy melyik fajta urnára szavaztak többen, az lesz a csoportos döntés. Ha eltalálják a helyes választ, nyernek. Amennyiben valaki zöld golyót húzott, akkor tudja, hogy az urna kevert, de ha fehéret, akkor csak azt tudja, hogy jóval nagyobb valószínűséggel tiszta. Tehát ha őszintén szavazna az egyén, akkor ez alapján szavazna. Tegyük fel, hogy az egyik szavazó $A$ tudja, hogy a másik kettő őszintén, a kihúzott golyójuk alapján, szavaznak. Ekkor ha belegondolunk, $A$ szavazata csak akkor számít, ha az urna kevert, hiszen ha tiszta, akkor a másik kettő tisztára szavaz és az lesz a döntés. De ha a szavazatok megoszlanak, akkor $A$ voksa dönt. Ekkor viszont tudjuk, hogy az urna kevert, hiszen a másik kettő közül valamelyikük zöldet húzott, tehát $A$-nak érdemes a kevert urnára szavaznia, akkor is, ha fehéret húzott. Vagyis $A$-nak megéri hamisan szavaznia.

A szavazásoknak az online keresésekben is elterjedt alkalmazásai vannak, hiszen ott is rangsorolni kell a keresési eredményeket. Mivel tengernyi eredmény van, így a metakeresés különböző keresők eredményeit összevetve létrehoz egy új sorrendet, amit végül a felhasználónak megmutat.

Ezen alkalmazások során mindig ugyanazt a problémát igyekszünk megoldani. Megannyi különböző rangsorból, valamilyen algoritmus alapján, létre akarunk hozni egy kollektív rangsort. A kérdés az, hogy mi legyen ez az algoritmus, egyáltalán létezik-e legjobb algoritmus, és az tényleg működik-e. Egy szavazási rendszer tehát álljon véges számú jelöltekből, valamint a szavazókból, akik a saját rangsoraik alapján felállítanak egy kollektív rangsort.

Ehhez először az egyéni szavazó szintjén is fel kell tennünk néhány logikus feltételezést. Az első ilyen kritérium, hogy minden szavazó bármely két jelölt közül el tudja dönteni, hogy ő melyiket részesíti előnyben. Jelöljük ezt egy preferencia relációval, vagyis ha az $i$. szavazó az $X$ jelöltet az $Y$-nal szemben előnyben részesíti, akkor $X \succ_i Y$. Bár a $\succ_i$ jelölés jól tükrözi a preferenciát, sokszor a továbbiakban $XR_iY$-nal fogjuk jelölni, és $R_i$ magába foglalja az összes pár közti preferenciát. A preferencia relációnak teljesítenie kell, hogy teljes és tranzitív. A teljesség azt jelenti, hogy bármely két jelölt esetén vagy az egyiket preferálja a szavazó vagy a másikat, de az nem lehet, hogy egyiket sem, vagy mindkettőt (ezáltal mindkettőt ugyanannyira preferálja). Bár mindkét eset előfordulhat a való életben, de nagyban bonyolítja a kérdést, így a továbbiakban a teljességet adottnak vesszük. A tranzitivitás már egy jócskán természetesebb feltevés, hiszen az azt követeli meg, hogy amennyiben kettőnél több jelölt van, akkor ha $X$-et $Y$-nal szemben preferálja, $Y$-t pedig $Z$-vel szemben, akkor $X$-et is preferálja $Z$-vel szemben. Logikusnak tűnik a feltételezés, hiszen ha ez nem állna fenn, akkor nem lehetne a három jelölt közül nyertest választani. Ennek ellenére számos tudós foglalkozik azzal a témával, hogy milyen természetes esetekben valósulhat meg. Ezenfelül pszichológusok már nagyszámú kísérlettel bizonyították, hogy az emberi gondolkodás jó néhányszor nem követi az ilyen fajta racionálisnak tűnő gondolkodást.

Az egyik ilyen jól ismert kísérlet Amos Tversky nevéhez kapcsolódik [3] [11]. Az 1969-es kísérlet során az alanyoknak két szerencsejáték közül kellett eldönteniük, hogy melyiket válasszák. Például:

| Első játék: | Második játék: |
|---|---|
| 46% esély, hogy nyerj \$4.00-t | 33% esély, hogy nyerj \$4.75-t |
| 54% esély, hogy nyerj \$0-t | 67% esély, hogy nyerj \$0-t |

A táblázatban lévő játékok voltak párokban a játékosoknak megmutatva, hogy válasszanak, anélkül hogy tudták volna azok várható értéket.

| Játék | Valószínűség p | Nyeremény x | Várható érték |
|---|---|---|---|
| $A$ | 0,29 | \$5,00 | \$1,45 |
| $B$ | 0,33 | \$4,75 | \$1,57 |
| $C$ | 0,38 | \$4,50 | \$1,71 |
| $D$ | 0,42 | \$4,25 | \$1,78 |
| $E$ | 0,46 | \$4.00 | \$1,84 |

A kutatók úgy találták, hogy a résztvevők először a valószínűségeket hasonlították össze. Ha ez a különbség elég nagy volt, akkor azt választották, amelyikkel nagyobb valószínűséggel nyernének. Viszont amennyiben nem volt annyira nagy az eltérés, például kisebb mint 0,1, akkor azt a játékot választották, ahol többet nyernének. Így gondolkodva a résztvevők szisztematikusan arra juthatnak, hogy $A$-t preferálják $C$-vel szemben, $C$-t $E$-vel szemben és $E$-t $A$-val szemben, vagyis szembemennek a tranzitivitással. Érdekes ugyanakkor, hogy utólag, amikor a kísérletben résztvevőket szembesítették a nem tranzitív választásukkal, többen nem akarták elhinni.

Könnyű látni, hogy amennyiben a szavazó preferenciáját bármely két jelölt esetén tudjuk és teljesül a teljesség és a tranzitivitás, akkor abból fel lehet állítani egy rangsort. Ugyanakkor fordítva is igaz, hogy amennyiben a szavazó egy rangsort hozott létre, akkor abból már következik egy preferencia reláció. Ezek segítségével kétféleképpen is tudunk tekinteni egy egyén szavazatára, és attól függően tudjuk használni mindkettőt, ahogyan kényelmesebb.

Most, hogy már megvannak egyénenként a rangsorok, foglalkozhatunk azzal, hogy azokból hogyan állítsunk össze egy darab rangsort. Gondolhatunk erre úgy, mint egy függvényre, mely veszi az összes $R_i$-t, és abból létrehoz egy univerzális csoport döntést, ami legyen $R$. Vagyis $R = F(R_1, \ldots, R_n)$. A fő kérdés természetesen, hogy mi legyen ez az $F$ függvény. Mivel rengeteg ilyen $F$ függvény van, ezért először bizonyos feltételek alapján majd le fogjuk szűkíteni a kört, de ahogy később majd láthatjuk ezeken a kitételeken sok vita folyik. Nem véletlen, hiszen nehéz olyan feltételrendszert felállítani, amely kizárja az ésszerűtlen szavazási rendszereket, de még nem túl erős ahhoz, hogy mindig értelmes legyen, vagyis $R$ valóban egy sorrend legyen a jelöltek között.

## 2.2. Condorcet paradoxon

Az egyik leghíresebb probléma, amely sűrűn előfordul az ilyen szavazási rendszereknél az a Condorcet paradoxon. A Condorcet paradoxon lényege, hogy ha vesszük a szavazók tranzitív preferenciáit, attól még a végeredmény nem feltétlenül lesz tranzitív, vagyis nem tudunk sorrendet felállítani.

**2.2.1. Definíció.** **Condorcet szavazás**nak nevezzük, ha a szavazók a jelöltekről: $X_1, \dots, X_n$ egy adott algoritmus alapján páronként döntik el, hogy melyiket részesítik előnyben.

**2.2.2. Definíció.** Tekintsük a Condorcet szavazást három jelölt esetén: $X, Y, Z$. Ekkor **Condorcet paradoxon**nak nevezzük, ha a páronkénti preferenciákat összehasonlítva a következőt kapjuk: $X \succ Y \succ Z \succ X$.

A Condorcet szavazás preferenciáiból pontosan akkor tudunk egy rangsort felállítani, ha a páronkénti kiértékelésekben nincs Condorcet paradoxon.

Ezt a paradoxont a majoráns függvény segítségével mutatjuk be, bár ahogy Arrow tételéből látni fogjuk gyakran előforduló jelenség a szavazások körében. Feltesszük, hogy a szavazók páratlanul vannak, így nem jöhet létre egyenlőség többségi szavazás esetén. A majoráns függvény azt csinálja, hogy veszi az összes jelölt párt, például $X, Y$-t, és megnézi hogy az emberek többsége melyiket részesíti előnyben, majd létrehoz egy csoport preferenciát, amely legyen $\succ$. Ez a csoport preferencia továbbra is teljes lesz, hiszen a szavazók páratlanul vannak, mindig lehet dönteni, hogy melyiket preferálja jobban a többség. Ugyanakkor nem feltétlenül lesz továbbra is tranzitív, hiába voltak a szavazók preferenciái tranzitívak. A legegyszerűbb példa erre a következő: legyen három szavazó 1,2,3, valamint három jelölt $X, Y, Z$. Az 1-es szavazó preferenciái legyenek a következőek:

$$X \succ_1 Y \succ_1 Z,$$

a 2-esé:

$$Y \succ_2 Z \succ_2 X,$$

a 3-asé:

$$Z \succ_3 X \succ_3 Y.$$

Ha ezek után alkalmazzuk a majoráns függvényt, akkor a következőket kapjuk: $X \succ Y$, $Y \succ Z$, és $Z \succ X$, tehát nem teljesül a tranzitivitás. Bár úgy tűnik, hogy ehhez az kell, hogy a felek nagyon ne értsenek egyet, egy ember is juthat a döntéseivel Condorcet paradoxonhoz. Vegyük azt az esetet, hogy egy diák egyetemre akar menni, és az ideális egyeteme olyan, amelyik minél előrébb van az országos rangsorban, kis létszámú órákkal rendelkezik, valamint minél több ösztöndíjat ad. Végül három egyetemre vették fel, amely az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

| Egyetem | Országos rangsor | Átlagos óra mérete | Ösztöndíj |
|---|---|---|---|
| $X$ | 4 | 40 | \$ 3000 |
| $Y$ | 8 | 18 | \$ 1000 |
| $Z$ | 12 | 24 | \$ 8000 |

Ebben az esetben ugyanúgy mint legutóbb, a diák nem tud dönteni, az $X$ egyetem jobb $Y$-nál rangsor és ösztöndíj tekintetében, $Y$ jobb $Z$-nél rangsor és átlagos óraméret alapján, $Z$ viszont jobb $X$-nél az ösztöndíjban és az átlagos osztályméretben. Ekkor a 'szavazó' a kritérium lesz, a preferencia reláció pedig a diák igényei alapján írható fel, és ugyanúgy Condorcet paradoxonhoz jutunk, mint az általános esetben.

Sajnos ez a paradoxon nem csak a majoráns függvény esetén valósulhat meg, így ezek után megpróbáljuk elkerülni az olyan szavazásokat, amelyeknél ez előfordulhat. Azonban, mint ahogy azt a következő részben láthatjuk, amennyiben jogosnak tűnő feltételekből indulunk ki, akkor ennek kikerülése szinte lehetetlen.

## 2.3. Arrow lehetetlenségi tétele

Most, hogy már láttuk, hogy ésszerűnek tűnő feltevésekből kiindulva is juthatunk ellentmondásra, próbáljunk meg olyan feltételrendszert felállítani, amely kizár minden nem racionális kimenetet, valamint az olyan ellentmondásokat, mint például a Condorcet paradoxon. Arrow, mielőtt megírta volna nevezetes tételét szintén ilyen gondolkodással jutott végül a megállapítására. Egy interjúban a következőt mondta a gondolatmenetéről: „ Pár példával kezdtem. Már felfedeztem, hogy ezek néhány problémához vezettek. A következő ésszerű dolog az volt, hogy leírjak egy feltételt, amit kizárhatok. Akkor konstruáltam egy újabb példát, újabb módszert, ami a problémához vezetett, és valami nagyon nem tűnt jónak vele kapcsolatban. Ekkor meg kellett követelnem egy újabb feltételt. Úgy találtam, hogy nehéz egyszerre az összes kritériumot teljesítenem, amelyeket kívánatosnak tartottam. Miután három-négy ilyen feltételt megfogalmaztam, elkezdtem kísérletezni. És akárhogy próbálkoztam, csak nem volt egy sem, ami teljesítette volna ezeket az axiómákat. Így pár nap után elkezdtem arra gondolni, hogy esetleg...nincs olyan szavazási rendszer, amely teljesítené az összes feltételt, amelyet én racionálisnak és ésszerűnek gondoltam. Ez volt az a pillanat, amikor úgy döntöttem bebizonyítom. És végül, mint kiderült, csak pár napi munkám volt." [5]

A feltételek, amelyeket Arrow feltett a következő kettő volt: *egyhangúság* és *az irreleváns alternatívák függetlensége(IIA)*.

### 2.3.1. Egyhangúság

Az egyhangúság feltétele azt fogalmazza meg, hogy bármely két jelölt esetén, ha minden $i$-re $X \succ_i Y$, akkor a csoport rangsorban is $X \succ Y$. Szokták még Pareto elvnek is nevezni. Ez egy elég természetes megkötés, hiszen ha mindenki $X$-et preferálja $Y$-nal szemben, akkor a közös döntésnek is ezt illene tükröznie. Ezzel biztosítani lehet, hogy legalább egy minimális szinten megegyezzen a csoport döntés az egyéni véleményekkel. Arrow ezen kitételét nem szokták vitatni.

### 2.3.2. Az irreleváns alternatívák függetlensége(IIA)

Az irreleváns alternatívák függetlensége azt mondja ki, hogy bármely kettő jelölt sorrendje csak attól függjön, hogy a szavazók egymáshoz képest hogyan viszonyítják őket, vagyis ne függjön $X$ és $Y$ sorrendje attól, hogy egy harmadik jelölt, például $Z$, hogyan helyezkedik el hozzájuk képest. Vagyis, ha már a csoport arra jutott egy szavazási rendszer keretein belül, hogy $X \succ Y$, akkor ha pár valakik megváltoztatják a $Z$ jelölt rangsorát, az nem befolyásolja $X$ és $Y$ sorrendjét. Ez a feltétel a kutatók között már jóval vitatottabb, ugyanakkor ha nem teljesül, akkor az ellentmondásos szituációkhoz vezethet.

Vegyük ehhez az alábbi példát: tekintsük a Borda szavazást különböző filmekre a kritikusok körében. A Borda szavazás úgy működik, hogy amennyiben $n$ jelöltünk van, akkor minden szavazó a rangsorában a rangsorhoz rangsorpontokat rendel. $k-1$ pontot kap az első, akit mindenkivel szemben preferál, $k-2$-t a második és így tovább, az utolsó 0 pontot kap. Minden jelölt esetén összeadjuk a szavazóktól kapott pontokat és ezek segítségével fel tudunk állítani egy sorrendet. Feltételezzük, hogy ha két jelöltnek ugyanannyi pontja van, akkor valamilyen szabály alapján el tudjuk dönteni melyikük lesz előrébb. A mi példánkban egy magazin kritikusainak a Tizenkét dühös embert és A remény rabjait kell összehasonlítaniuk. Az öt kritikus közül az 1-es, 2-es, 3-as kritikusok a Tizenkét dühös embert, míg a 4-es,5-ös kritikusok A remény rabjait részesítik előnyben. Viszont mivel ezek nem elég 'modern' filmek, úgy dönt a magazin szerkesztősége, hogy a cikkben az Életrevalók is szerepeljen azon filmek között, amiket a kritikusok elemeznek. Ekkor az 1-es, 2-es, 3-as kritikusok a következő sorrendet állítják fel a filmek között:

$$\text{Tizenkét dühös ember} \succ_i \text{A remény rabjai} \succ_i \text{Életrevalók}.$$

A 4-es és 5-ös kritikusok, viszont az első hárommal ellentétben, akik a régebbi filmek jobban kedvelik, ők a újabb filmeket preferálják, így a következő sorrendet állapították meg:

$$\text{A remény rabjai} \succ \text{Életrevalók} \succ \text{Tizenkét dühös ember}.$$

Ha most alkalmazzuk a Borda szavazást, akkor a Tizenkét dühös ember 6, A remény rabjai 7, az Életrevalók pedig 4 ponttal zár. Ezzel A remény rabjai kerül ki győztesnek, ezzel ellentmondva annak, hogy az első szavazásnál a Tizenkét dühös ember győzedelmeskedett volna. Vagyis azzal, hogy bevezettünk egy harmadik alternatívát megváltoztattuk a szavazás kimenetét. Arrow pontosan az ilyen ellentmondások miatt vezette be az IIA feltételt. Nem véletlen viszont, hogy amikor megkérdezték, hogy a szavazások témakörében melyik megoldatlan problémát szeretné látni megoldva, akkor azt válaszolta, hogy az IIA feltétel egy gyengébb változatát látná szívesen, mely kiküszöböli a fenti problémát, de több teret hagy szavazási rendszerekre, mint ahogyan azt Arrow tételéből látjuk, az IIA.

### 2.3.3. Arrow tétele

Ahogy azt Arrow is tette, ha megvannak a feltételeink, akkor próbálunk konstruálni olyan szavazási rendszereket, melyek azokat teljesítik. Két jelölt esetén nem nehéz ilyet találni, hiszen harmadik alternatíva hiányában az IIA automatikusan teljesül, például a majoráns függvény is jó szavazási rendszernek. A problémák akkor adódnak, ha már minimum három jelöltünk van. Az eddig részletezett majoráns függvény és a Borda szavazás se teljesíti ezeket a feltételeket.

A szavazási rendszereknek egy csoportja viszont teljesíti az összes feltételt. Ez nem más mint a diktatúra amikor az egyik szavazó kiemelt szerepet tölt be, hiszen a csoport rangsor meg fog egyezni ennek a szavazónak a rangsorával. Nevezzük ezt a szavazót a diktátornak. Ebben az esetben könnyű leellenőrizni, hogy a feltételek teljesülnek. Az egyhangúság teljesül, hiszen ha mindenki $X$-et preferálja $Y$-nal szemben, akkor a diktátor is, vagyis a végső rangsor is ezt tükrözni fogja. Az IIA is teljesül, mivel $X$ és $Y$ egymáshoz viszonyított sorrendje csak attól függ, hogy a diktátor, melyiket preferálja jobban, nem függ semmilyen más $Z$-től.

Arrow tétele azt mondja ki, hogy csak a diktátor függvény teljesíti a feltételeit:

**2.3.1. Tétel** (Arrow létezési tétele, [1] [2])**.** *Három vagy több jelölt esetén, minden szavazási rendszer, amely teljesití az egyhangúsági és IIA feltételeket, az egy diktatúrának felel meg.*

A legtöbben a diktátor függvényt nem kívánatosnak tartják, ezért a feltételek közé teszik, hogy a szavazási rendszer nem lehet diktatúra, így egy lehetetlenségi tételt formázva. Először Arrow is lehetetlenségi tételnek fogalmazta meg, de a főnöke Tjalling ezt túl pesszimistának tartotta, így megkérte, hogy egy 'létezési' tételnek nevezze, bár a legelterjedtebb elnevezés továbbra is Arrow lehetetlenségi tétele [7].

A dolgozatban a tétel az alábbi formában lesz bebizonyítva, ahol egy szavazás semleges, ha invariáns a jelöltek permutációjára:

**2.3.2. Tétel** (Arrow tétele, semleges esetben, Gil Kalai [6])**.** *Vegyünk egy semleges Condorcet szavazást, melynek legalább 3 jelöltje van, és teljesíti az egyhangúság feltételét. Ekkor minden nemdiktatórikus szavazásnál a valószínűsége a Condorcet paradoxonnak nem 0.*

Könnyű meggondolni, hogy ha szavazásnál paradoxon mentes Condorcet szavazást használunk az ekvivalens azzal, ha feltesszük, hogy teljesül az IIA. Az egyik irány triviális, mivel Condorcet szavazásnál automatikusan teljesül az IIA. Fordítva is igaz az állítás, hiszen az IIA pont azt mondja ki, hogy két jelölt sorrendje ne függjön semelyik harmadiktól, vagyis a szavazási szabályokat elég a jelöltpárokra meghatározni, aminek segítségével létrehozhatunk egy Condorcet szavazást. Ekkor ha előfordul a Condorcet paradoxon, akkor az már nem számíthat szavazási rendszernek, hiszen közös döntés nem egy rangsort állít fel, így kapjuk Arrow eredeti tételét.

# 3. fejezet

# Fourier-sorok

Mivel a továbbiakban a bizonyításokat, a szavazások módjait valamint azok tulajdonságait Fourier-sorok segítségével fogjuk tárgyalni, ezért ebben a fejezetben először általánosan lesz szó róluk, majd részletesebben a logikai függvények Fourier-soráról is szót ejtünk. A fejezethez a Bevezetés a funkcionálanalízisbe jegyzetet használjuk [8].

## 3.1. Fourier-sorokról általánosan

Legyen $H$ egy valós vektortér feletti Hilbert tér.

**3.1.1. Definíció.** Egy $(e_n) \subset H$ vektorsorozatot **teljes rendszer**nek hívunk, ha minden $x \in H$ esetén fennáll: ha $x \perp e_n \; \forall\, n \in \mathbb{N}^+ \Rightarrow x = 0$. Egy $(e_n) \subset H$ **teljes ortonormált rendszer** (TONR), ha teljes és ortonormált, azaz $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ minden $(i, j)$ párra.

**3.1.2. Definíció.** Legyen $(e_n) \subset H$ egy TONR és $x \in H$. Ekkor $x$ **Fourier-sor**a vagy más néven **Fourier kiterjesztés**e$(e_n)$ rendszer szerint $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \cdot e_n$. Fourier együtthatók: $\langle x, e_n \rangle$.

**3.1.3. Tétel** (Fourier-sorok főtétele, [8])**.** *Legyen $(e_n) \subset H$ egy TONR. Ekkor bármely $x \in H$ Fourier-sora konvergens és összege $x$. Azaz $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \cdot e_n$.*

□

A továbbiakban fontos szerepet játszanak az $\langle x, e_n \rangle$ Fourier-együtthatók, hiszen ha adott egy TONR, akkor a Fourier-együtthatók sorozatával jellemezhetjük a vektorokat, például a normájukat is kifejezhetjük, hiszen, legyen $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \cdot e_n$ és $y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n \cdot e_n$, ahol $c_n$ és $d_n$ Fourier-együtthatók. Ekkor $\langle x, y \rangle = \left\langle \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \cdot e_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n \cdot e_n \right\rangle = \sum\limits_{n,l=1}^{\infty} c_n \cdot d_n \cdot \langle e_n, e_l \rangle = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \cdot d_n$, amit Plancherel tételnek is szokás nevezni. Ebből következik a Parseval azonosság, vagyis ha $(e_n) \subset H$ TONR, akkor bármely $x \in H$ esetén $\|x\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$. Szintén meg lesz említve később a Cauchy-Scwartz-Bunyakovszkij-egyenlőtlenség:

**3.1.4. Tétel** (Cauchy-Scwartz-Bunyakovszkij-egyenlőtlenség, [8]). *Legyen $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert-tér. Ekkor minden $x, y \in H$ elemre igaz az alábbi egyenlőtlenség:*

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \|x\| \cdot \|y\| .$$

□

## 3.2. Logikai függvények Fourier analízisének alapja

**3.2.1. Definíció. Logikai függvény**eknek az alábbi két valós függvénycsaládot nevezzük:

$$f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$$

vagy

$$f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\} ,$$

ahol $n > 0$ egész szám.

Sokszor inkább egyik vagy másik alakban foglalkozunk majd velük, de később majd meglátjuk, hogy a megfelelő transzformációkkal egymásba vihető a két függvénycsalád és az alkalmazott tételek továbbra is igazak lesznek.

A

$$f : \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$$

vagy a

$$f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$$

függvények adják majd a Hilbert-tér $H$ alaphalmazát. Ezért sokszor a tételek ezekre lesznek kimondva, de ha leszűkítjük őket logikai függvényekre, akkor, mint ahogy az általánosabb esetben, így a szűkebb esetben is igazak lesznek. A skalárszorzatot később definiáljuk. A logikai függvények Fourier analízisét rengeteg helyen alkalmazzák, de az utóbbi két-három évtizedben az elméleti számítástudománynak is sokoldalú eszközévé vált. Az alábbiak mutatják, hogy mennyire sok helyen lehet használni őket: adattömörítés, áramkör tervezés, kódelmélet, extremális kombinatorika.

A dolgozat további részében a szavazásoknál való alkalmazását fogjuk vizsgálni, de most először csak általánosan taglaljuk a logikai függvényeket és azok Fourier analízisét.

### 3.2.1. $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ alakú logikai függvények

A következőkben bemutatjuk, hogy hogyan néznek ki az $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ logikai függvényekhez Fourier analíziséhez tartozó definíciók, azonosságok. Az $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ függvények Fourier-sora egy valós multilineáris polinomként fogunk tekinteni, amelynek változói az $f$ változói, amelyek legyenek $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \{-1,1\}$.

Legyen $\chi_S$ az alábbi multilineáris $\{-1{,}1\}^n \to \mathbb{R}$ függvény:

$$\chi^S = \prod_{i \in S} x_i,$$

ahol $\emptyset \neq S \subseteq [n]$, és $\chi_\emptyset = \prod_{i \in \emptyset} x_i = 1$. Ekkor $\chi_S$-re úgy is tekinthetünk, mint egy paritás függvényre, hiszen 1 az értéke, ha páros darab -1 szerepel az $S$-hez tartozó változók között és -1, ha páratlan sok. Az $f, g : \{-1{,}1\}^n \to \mathbb{R}$ függvények egy $2^n$ dimenziójú teret alkotnak, tehát ha definiálunk rajtuk egy skalárszorzatot, és a $\chi_S$ függvényekről belátnánk, hogy ortonormáltak, akkor mivel $2^n$ darab van belőlük, ezért TONR-t alkotnának a térben. Ehhez először definiáljuk két $f, g : \{-1{,}1\}^n \to \mathbb{R}$ függvény skaláris szorzatát, amely legyen az alábbi, ahol $x \sim \{-1{,}1\}^n$ jelentse azt, hogy $x$ egyenletes valószínűséggel van kiválasztva a $\{-1{,}1\}^n$ vektorokból, ami ekvivalens azzal, ha mind az $n$ koordinátát $\frac{1}{2}$ valószínűséggel választjuk $+1$-nek, vagy $-1$-nek:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2^n} \sum_{x \in \{-1,1\}^n} f(x) \cdot g(x) = \mathop{E}_{x \sim \{-1,1\}^n} [f(x) \cdot g(x)].$$

Ebből automatikusan kapjuk az indukált normát, vagyis: $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$. Tudjuk, hogy ez a norma teljes, hiszen véges dimenzióban vagyunk, tehát Hilbert-téren vagyunk. Ezek után már be tudjuk bizonyítani a következő tételt:

**3.2.2. Tétel** (TONR a $\{-1{,}1\}^n$ $\mathbb{R}$ függvények terén, Ryan O'Donnell [10])**.** *A $\chi_S : \{-1{,}1\}^n \to \{-1{,}1\}$ paritási függvények TONR alkotnak a $\{-1{,}1\}^n \to \mathbb{R}$ függvények terében.*

*Bizonyítás.* Elég azt belátni, hogy

$$\langle \chi_S, \chi_T \rangle \begin{cases} 1 & \text{ha } S = T \\ 0 & \text{ha } S \neq T \end{cases}.$$

Ez két részállításból következik. Az egyik, hogy minden $x \in \{-1{,}1\}^n$ elemre $\chi_S(x) \cdot \chi_T(x) = \chi_{S \triangle T}(x)$, hiszen , ahol $\triangle$ a szimmetrikus differencia $\chi_S(x) \cdot \chi_T(x) = \prod_{i \in S} x_i \cdot \prod_{i \in T} x_i = \prod_{i \in S \triangle T} x_i \cdot \prod_{i \in S \cap T} x_i^2 = \prod_{i \in S \triangle T} x_i = \chi_{S \triangle T}(x)$. A másik állítás pedig, hogy

$$E[\chi_S] = E\left[\prod_{i \in S} x_i\right] = \begin{cases} 1 & \text{ha } S = \emptyset \\ 0 & \text{ha } S \neq \emptyset \end{cases},$$

hiszen ha $S = \emptyset$, akkor $E[\chi_S] = E[1] = 1$, ha pedig $S \neq \emptyset$, akkor $E\left[\prod_{i \in S} x_i\right] = \prod_{i \in S} E[x_i]$ a koordináták függetlensége miatt, de mivel minden koordináta egyenlő valószínűséggel lesz $+1$ vagy $-1$, ezért a várható értékük 0, tehát $E[x_i] = 0$ minden $i$-re, vagyis a második állítás is igaz. Mivel

$$\langle \chi_S, \chi_T \rangle = E[\chi_S, \chi_T] = E[\chi_{S \triangle T}] = E\left[\prod_{i \in S \triangle T} x_i\right] = \begin{cases} 1 & \text{ha } S = T \\ 0 & \text{ha } S \neq T \end{cases},$$

ezért az állítás igaz, és tényleg TONR-t alkotnak. $\square$

Legyen $f$ egy $\{-1{,}1\}^n$ $\mathbb{R}$függvény. Ekkor legyen a$\hat{f}$ az $\chi_S$ együtthatója a Fourier-sorban $\hat{f}(S) = \langle f, \chi_S \rangle = \underset{x\sim\{-1,1\}^n}{E}[f(x) \cdot \chi_S(x)]$. Ekkor már tudjuk, hogy valóban Hilbert-téren vagyunk, úgyhogy igaz a Fourier-sorok tétele, tehát:

**3.2.3. Tétel** (Fourier-sorok tétele az $f : \{-1{,}1\}^n \to \mathbb{R}$ függvények terén, Ryan O'Donnell [10]). *Minden $f : \{-1{,}1\}^n \to \mathbb{R}$ függvény egyértelműen felírható multilineáris alakban,*

$$f(x) = \sum_{S\subseteq[n]} \hat{f}(S) \cdot x^S.$$

*Ezt az $f$ Fourier kiterjesztésének nevezzük, ahol az $\hat{f}(S)$ a Fourier együtthatója $f$-nek az $S$-en.*

□

**3.2.1. Példa.** Hogy könnyebb legyen a továbbiakban elképzelni, vegyünk hozzá egy példát, ahol egy konkrét függvénynek a Fourier kiterjesztését kiszámoljuk, felhasználva a fenti tételt, ami alapján ez egyértelmű. Legyen ez a majoráns függvény, amelyet a későbbiekben mind példákhoz sokszor használunk, mind pedig bizonyos tulajdonságai miatt előtérbe helyezünk. A majoráns függvény azt dönti el, hogy +1-ből vagy -1-ből van-e több. Vegyük a majoráns függvényt három változón és jelöljük $Maj_3$-mal, később $n$ változó esetén $Maj_n$-nel jelöljük. $Maj_3 : \{-1{,}1\}^3 \to \{-1{,}1\}$ és a definíció alapján például $Maj_3(1{,}1{,}1) = 1, Maj_3(-1{,}1{,}1) = 1, \ldots, Maj_3(-1,-1,-1) = -1$. Egy fix $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \{-1{,}1\}^n$ esetén

$$1_{\{a\}}(x) = \left(\frac{1 + a_1 \cdot x_1}{2}\right) \cdots \left(\frac{1 + a_n \cdot x_n}{2}\right) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x = a \\ 0 & \text{ha } x \in \{-1{,}1\}^n \setminus a \end{cases}.$$

Ebből következik, hogy a logikai függvény felírható ilyen alakban:

$$f(x) = \sum_{a\in\{-1,1\}^n} f(a) \cdot 1_{\{a\}}(x).$$

Ezt alkalmazva a majoráns függvényre az $x = (x_1, x_2, x_3)$ pontban az alábbit kapjuk:

$$\begin{aligned} Maj_3(x) &= \left(\tfrac{1+x_1}{2}\right) \cdot \left(\tfrac{1+x_2}{2}\right) \cdot \left(\tfrac{1+x_3}{2}\right) \cdot (+1) \\ &+ \left(\tfrac{1-x_1}{2}\right) \cdot \left(\tfrac{1+x_2}{2}\right) \cdot \left(\tfrac{1+x_3}{2}\right) \cdot (+1) \\ &+ \ldots \\ &+ \left(\tfrac{1-x_1}{2}\right) \cdot \left(\tfrac{1-x_2}{2}\right) \cdot \left(\tfrac{1-x_3}{2}\right) \cdot (-1). \end{aligned}$$

Ezt kibontva kapjuk:

$$Maj_3(x) = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_1 \cdot x_2 \cdot x_3.$$

Tehát a $Maj_3$ Fourier együtthatói a következőek:

$$\widehat{Maj_3}(\{1\}), \widehat{Maj_3}(\{2\}), \widehat{Maj_3}(\{3\}) = \frac{1}{2},\ \widehat{Maj_3}(\{1{,}2{,}3\}) = -\frac{1}{2},$$

minden más részhalmazra pedig 0.

Mint ahogy Hilbert-terekben általában, úgy a leszűkítve $\{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ függvényekre is igaz Plancherel tétele, amely szerint $\langle f,g\rangle = \underset{x\sim\{-1,1\}^n}{E}[f(x)\cdot g(x)] = \sum_{S\subseteq[n]} \hat{f}(S)\,\hat{g}(S)$, vagyis

$$\langle f,g\rangle = \left\langle \sum_{S\subseteq[n]} \hat{f}(S)\cdot\chi_S, \sum_{T\subseteq[n]} \hat{g}(T)\,\chi_T \right\rangle = \sum_{S,T\subseteq[n]} \hat{f}(S)\,\hat{g}(T)\cdot\langle\chi_S,\chi_T\rangle = \sum_{S\subseteq[n]} \hat{f}(S)\,\hat{g}(S).$$

Amiből automatikusan következik az alábbi tétel:

**3.2.4. Tétel** (Parseval-tétele $\{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ függvényekre, Ryan O'Donnell [10])**.** *Minden $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ esetén:*

$$\langle f,f\rangle = \underset{x\sim\{-1,1\}^n}{E}\left[f(x)^2\right] = \sum_{S\subseteq[n]} \hat{f}(S)^2.$$

*Abban a speciális esetben pedig, ha $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ logikai értékű, akkor*

$$\sum_{S\subseteq[n]} \hat{f}(S)^2 = 1. \tag{3.2.1}$$

*Bizonyítás.* Az állítás első fele Plancherel-tételéből egyenesen következik. A második fele pedig abból az egyszerű megfigyelésből következik, hogy $f(x)^2$ értéke mindig 1, hiszen $f(x)\in\{-1,1\}$. $\square$

Példaként a majoráns függvényt is tekinthetjük, hiszen $Maj_3(x) = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_1\cdot x_2\cdot x_3$, tehát $\sum_{S\subseteq[n]} \hat{f}(S)^2 = 4\cdot\frac{1}{4} = 1$. Fontos megjegyezni, hogy igaz az az állítás, hogy

$$E[f] = \hat{f}(\emptyset), \tag{3.2.2}$$

hiszen legyen $S=\emptyset$, ekkor $E[f] = \langle f,1\rangle = \hat{f}(\emptyset)$.

### 3.2.2. $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ alakú logikai függvények

Legyen $\Omega_n = \{0,1\}^n$ a diszkrét kocka, melyek elemei $[n] = \{1,2,\cdots,n\}$ részhalmazai. Ha $f$ a $\Omega_n$-en definiált logikai függvény, akkor tekinthetünk rá úgy is mint $\Omega_n$ egy $A$ részhalmazának a karakterisztikus függvényére. Legyen a $H$ Hilbert-terünk a $\{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ függvények vektortere. Ha $f$ és $g$ $H$-beli logikai függvények, akkor a skalárszorzatukat definiáljuk az alábbiként:

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{2^n}\cdot\sum_{S\subset[n]} f(S)\cdot g(S).$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy ez valóban skalárszorzat. Már most látszik, hogy ezáltal egyfajta átlagot kapunk arra nézve, hogy mikor vesz fel mindkét függvény 1-et. A skalárszorzatból már közvetlenül kapjuk az indukált normát:

$$\|f\| := \sqrt{\langle f,f\rangle} = \left(\frac{1}{2^n}\cdot\sum_{S\subseteq[n]} f(S)^2\right)^{1/2}.$$

Mivel véges dimenzióban vagyunk, a tér teljes, tehát Hilbert-téren vagyunk.

Tekintsük a következő valós függvényeket $u_S(T) = (-1)^{|S\cap T|}$, ahol $S, T \subseteq [n]$. A későbbiekben legyen $u_{\{i\}} = u_i$. Ez a $2^n$ darab függvény az $\Omega_n \to \mathbb{R}$ függvények terében TONR-t alkot. Erről később megmutatjuk, hogy a megfelelő transzformációval hogyan vihető át a $\{-1{,}1\}^n \to \{-1{,}1\}$ függvények TONR-be, amikről már korábban beláttuk, hogy TONR-t alkotnak. Legyen $\hat{f}(S) = \langle f, u_S\rangle$, ezek lesznek a Fourier-együtthatók. Ekkor egy $f : \{0{,}1\}^n \to \mathbb{R}$ Fourier-sor az alábbi:

$$f = \sum_{S\subseteq[n]} \hat{f}(S) \cdot u_S = \sum_{S\subseteq[n]} \langle f, u_S\rangle \cdot u_S.$$

Legyen $f$ egy $\{0{,}1\}^n \to \{0{,}1\}$ $H$-beli logikai függvény, és legyen Pr az $\Omega_n$ elemein egy egyenletes eloszlás. Ha $f$-et $A$ karakterisztikus függvényének tekintjük, ahol $A$ részhalmaza $\Omega_n$ elemeinek, vagyis $f = \mathbf{1}_A$, akkor $\Pr(A) = \frac{|A|}{2^n}$. Felhasználva ezt, a Parseval-azonosságot, valamint, hogy $\Pr(A) = E[f] = E\left(f^2\right) = \frac{1}{2^n} \cdot \sum\limits_{S\subseteq[n]} f(S)^2 = \langle f, f\rangle = \|f\|^2$, ami a várható érték definíciójából és abból következik, hogy $f$ értékkészlete $\{0{,}1\}$, az alábbi egyenlőséget írhatjuk fel:

$$\|f\|^2 = \sum_{S\subseteq[n]} \hat{f}(S)^2 = \Pr(A). \tag{3.2.3}$$

Mivel $u_\emptyset(T) = (-1)^{\emptyset\cap T} = (-1)^0 = 1$ minden $T \subseteq \Omega_n$, ezért az $f : \{-1{,}1\}^n \to \{-1{,}1\}$ függvényekhez hasonlóan itt is igaz, hogy $\hat{f}(\emptyset) = \Pr(A)$, mivel $\hat{f}(\emptyset) = \langle f, u_\emptyset\rangle = \langle f, 1\rangle = E[f] = \Pr(A)$.

### 3.2.3. A két logikai függvény kapcsolata

Most megmutatjuk, hogyan lehet áttérni az $f : \{-1{,}1\}^n \to \{-1{,}1\}$ függvényből a $g : \{0{,}1\}^n \to \{0{,}1\}$ függvénybe. Érdekes módon az áttérés során az $1_g$-t nem az $1_f$-fel, hanem a $-1_f$-fel fogjuk megfeleltetni, a $0_g$-t pedig az $1_f$-fel. Ehhez definiálunk egy $\Psi : \{0{,}1\} \to \{-1{,}1\}$ segédfüggvényt a következőképpen: $\Psi(b) = (-1)^b$, tehát $\Psi(0_g) = +1_f$ és $\Psi(1_g) = -1_f$. Nem tűnik túl természetesnek ez a kódolás, de ha a két TONR-t tekintjük, vagyis $u_S : [n] \to \{-1{,}1\}$, ahol $u_S(T) = (-1)^{|S\cap T|}$, valamint $\chi_S : \{-1{,}1\}^n \to \{-1{,}1\}$, ahol $\chi_S(x) = \prod\limits_{i\in S} x_i$, akkor jobban megérthetjük. Hiszen ha $T$-re úgy tekintünk, mint egy $\{0{,}1\}^n$ vektorra, ahol $T_i = 0$, ha $i \notin T$ és $T_i = 1$, ha $i \in T$, akkor az $u_S(T)$ pontosan azt adja meg, hogy az $|S \cap T|$ páros vagy páratlan, vagyis páros vagy páratlan sok 1-es van-e a metszetükben. Ha a $\chi_S$-et nézzük, az pedig pont azt mondja meg, hogy az $x$ vektorban páros vagy páratlan sok -1-es van-e.

Az, hogy ez valóban egy megfelelő kódolás még be kell látnunk, hogy valóban TONR-t TONR-be visz. A $\{-1{,}1\}^n \to \{-1{,}1\}$ függvények körében már beláttuk, hogy valóban TONR-ről van szó, tehát még az $u_S$-ekről kell belátni, hogy azok. Triviális meggondolni, hogy normáltak, hiszen értékkészletük a $\{-1{,}1\}$ halmaz. Tehát még azt kell belátni, hogy ortonormáltak, ami a következők miatt igaz:

$$E\left[u_S\{X\}\, u_T(X)\right] = E\left[(-1)^{|S\cap X|}(-1)^{|T\cap X|}\right] = E\left[(-1)^{|(S\triangle T)\cap X|}\right] = \langle 1, u_{S\triangle T}\rangle = \begin{cases} 1 \text{ ha } S\triangle T = \emptyset \\ 0 \text{ ha } S\triangle T \neq \emptyset \end{cases}.$$

# 4. fejezet

# A szavazások főbb tulajdonságai

Ebben a fejezetben megfogalmazzuk, hogy mit jelentenek a szavazások a $\{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ függvények körében. Megmutatjuk, hogyan írjuk le bizonyos tulajdonságaikat a a Fourier-analízis nyelvével, és ezeket konkrét szavazási eljárásokon keresztül bemutatjuk. Tekintjük azt a problémát, ha a szavazás során valamilyen hiba lépett fel, és valamekkora valószínűséggel rosszul lettek feljegyezve a szavazatok. A fejezethez Ryan O'Donnell cikkét és könyvét használjuk fel [10] [9].

## 4.1. Szavazások logikai függvényként

Tekintsünk úgy az $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ függvényre, mint egy olyan szavazásra, ahol $n$ darab szavazó és két jelölt $a$ és $b$ van, amelyeket -1-gyel és 1-gyel reprezentálunk. Az $f$ logikai függvénytől függően, legyen $f$ értéke $-1$, ha $aRb$, vagyis az $a$ jelölt győz, és $+1$, ha $bRa$, vagyis $b$ jelölt győz. Későbbiekben feltesszük mindig, hogy a szavazók egymástól függetlenül ugyanakkor valószínűséggel szavaznak a két jelöltre. Ezt **pártatlan kultúra feltételezés**nek nevezzük, amely bizonyos értelemben nem tűnik realisztikusnak, de egy elég általános feltételezés. Lehet úgy is tekinteni, hogy azokkal a szavazókkal foglakozunk, akik még nem döntöttek, vagy 'párt-függetlenek'. Az $f$ függvényt sokféleképpen lehet megválasztani, de a gyakorlatban nem olyan sokat alkalmaznak, és még kevesebb, amely teljesíti Arrow egyhangúsági feltételét. Mi a következő szavazási formákkal fogunk bővebben foglalkozni:

- Az egyik legáltalánosabb szavazási forma a **majoráns függvény**, amely páratlan $n$-re az alábbi: $Maj_n(x) = sgn(x_1 + \ldots + x_n)$. A majoráns függvény egy általánosítása a súlyozott majoráns függvény: $SMaj_n(x) = sgn(a_0 + a_1x_1 + \ldots + a_nx_n)$, ahol $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Ilyen súlyozott majoráns függvényt használnak az Európai Unió Tanácsában.
- Egy másik, amivel eddig már foglalkoztunk a **paritás függvény** speciálisan $S = [n]$ esetben: $\chi_{[n]}(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i$, ami $-1$, ha páratlan sok -1-es van, és 1 különben.
- Az **elektori szavazás** $EC^{51}(x)$ az a függvény, amivel az USA-ban az elnököt választják, vagyis a szavazókat felosztják 51 részre (államra), majd minden részben a majoráns függvény segítségével veszik a győztest, és végül veszik a majoránsát az 51 győztesnek. Az egyszerűség kedvéért

feltesszük, hogy a részek ugyanannyira lakottak, és minden résznek egy elektori szavazata van. Ez egy konkrét esete a $d$-mélységű rekurzív majoráns függvénynek, amelyeknél $d$-szer választjuk ki a győztesek majoránsát, így az $EC^{51}(x)$ egy kettő-mélységű rekurzív majoráns függvény.

– A **törzs ('Tribes') függvény** a gyakorlatban szavazásoknál ritkán jön elő, de bizonyos különleges tulajdonsága miatt mégis többször szó lesz róla. Ennél a függvénynél a szavazók egyenlő nagyságú törzsekre vannak osztva, és a függvény akkor és csak akkor IGAZ, ha legalább egy törzsben mindenki az az IGAZat favorizálja. Reprezentálja az IGAZat -1, a HAMISat +1. Vagyis a $Tribes_{w,s} : \{-1,1\}^{s \cdot w} \to \{-1,1\}$ függvény $w$ szélességgel(törzsek nagysága) és $s$ nagysággal($s$ darab törzs van) a következő: $Tribes_{w,s}\left(x^{(1)}, \ldots, x^{(s)}\right) = \mathrm{OR}_s\left(\mathrm{AND}_w\left(x^{(1)}\right), \ldots, \mathrm{AND}_w\left(x^{(s)}\right)\right)$, ahol $x^{(i)} \in \{-1,1\}^w, 1 \leq i \leq s$.

– A **konstans függvény** szintén nem egy különösebben hasznos szavazási rendszer, viszont néha érdekes megnézni a tulajdonságait a többi függvényhez viszonyítva. A konstans függvény értelemszerűen: $Const_{+1}(x) = 1$ vagy $Const_{-1}(x) = -1$.

– A **diktátor függvény** bár a való életben jó ha elkerüljük, Arrow tételéből tudjuk, hogy sajnos a logikai függvények körében kiemelkedő jelentőségű. Az $i$-edik diktátor a következő: $Dict_i(x) = x_i$. Szokás $\chi_i$-vel is jelölni, hiszen a diktátor függvény is egy paritás függvény, amikor $S = \{i\}$.

**4.1.1. Definíció.** Azt mondjuk, hogy egy $\{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ logikai függvény:

– **monoton**, ha $f(x) \leq f(y)$, akkor ha $x \leq y$ koordinátánként;

– **páratlan**, ha $f(-x) = -f(x)$;

– **egyhangú**, ha $f(1,\ldots,1) = 1$ és $f(-1,\ldots,-1) = -1$;

– **szimmetrikus**, ha $f(x^\pi) = f(x)$, minden $\pi \in S_\pi$ permutációra;

– **tranzitívan szimmetrikus**, ha minden $i, i^{'} \in [n]$ párban létezik egy $\pi \in S$ permutáció, amely $i$ -t $i^{'}$-be viszi, úgy hogy $f(x^\pi) = f(x)$ minden $x \in \{-1,1\}$.

Az hogy egy logikai függvény szimmetrikus, igazából egyenlő azzal a tulajdonsággal, hogy $f(x)$ értéke csak az egyesek számától függ. A tranzitívan szimmetrikus pedig ugyanazt jelenti, hogy a különböző koordináták egyenlőek, vagyis ugyanakkora súllyal számítanak bele a szavazás kimenetelébe. A törzs függvény monoton és egyhangú, de nem szimmetrikus. A diktátor függvény monoton, páratlan és egyhangú.

**4.1.2. Tétel** (May tétele, Ryan O'Donnell [10]). *Páratlan $n$-re a majoráns függvény az egyetlen $\{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$, amely egyszerre monoton, páratlan és szimmetrikus.*

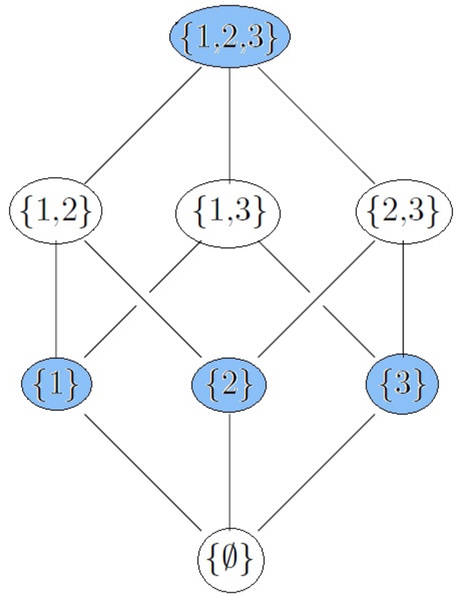
□

## 4.2. Fourier súlyok

Mivel ismerjük a (3.2.1) összefüggést, ezért gondolhatunk úgy a Fourier sorra, mint $S \subseteq [n]$ részhalmazokon vett súlyozott összegre. Valamint a Fourier együtthatók négyzetösszegei egy valószínűségi eloszlást is adnak a Fourier spektrumon. Ezért érdemes bevezetni a következő definíciót:

**4.2.1. Definíció.** Az $f : \{-1{,}1\}^n \to \{-1{,}1\}$ függvény **Fourier súly**a az $S \subseteq [n]$ részhalmazon legyen a Fourier együttható négyzete, vagyis $\hat{f}(S)^2$.

Számos esetben érdemes elképzelni a súlyokat, a $S \subseteq [n]$ részben rendezett részhalmazok Hasse diagramján. A $Maj_3$ függvényé például az alábbi, ahol fehér háttérrel a 0, kékkel pedig az $\frac{1}{4}$ súlyok vannak jelezve:




4.1. ábra. Majoráns függvény Fourier súlyának eloszlása 3 változón

Ahogy a kép is mutatja egy másik gyakran használt értelmes definíció, ha a különböző szinteken lévő súlyok összegét nézzük:

**4.2.2. Definíció.** Az $f : \{-1{,}1\}^n \to \{-1{,}1\}$ függvény Fourier súlya a $0 \leq k < n$ szinten

$$W_k(f) = \sum_{\substack{S \subseteq n \\ |S| = k}} \hat{f}(S)^2 .$$

Ha az előző eloszlást használjuk, akkor észrevehetjük, hogy $W_k(f) = \Pr[|S| = k]$. A konstans, diktátor és paritás függvények Fourier sora mind a definícióból következik, és mind a három olyan függvény, hogy a Fourier soruk egy darab $S \subseteq n$ részhalmazra korlátozódik: $Dict_i$ esetében $S = \{i\}$; konstans függvény esetében az üres halmaz; a paritás függvény esetében pedig az $\{1, \ldots, n\}$. Könnyű meggondolni, hogy ha $f$ logikai függvény és $W_1(f) = 1$, akkor az $f$ diktátor vagy negált-diktátor függvény, ami $NegDict_i = -x_i$, ahol $i$ eleme $[n]$-nek. Az egyik irány triviális, hiszen ha diktátor vagy negált-diktátor, akkor az első szinten a súlyok összege 1. A másik irányt majd a $\{0{,}1\}^n \to \{0{,}1\}$ függvényeknél fogjuk belátni precízen. Egy másik fontos állítás a következő:

**4.2.1. Állítás.** Ha az $f : \{-1{,}1\}^n \to \{-1{,}1\}$ páratlan függvény, akkor $\hat{f}(S) \neq 0$ csak akkor, ha $|S|$ páratlan.

Ez igaz, hiszen ha felírjuk $f(x)$ Fourier sorát úgy, hogy külön vesszük az alapján, ha $|S|$ páros vagy páratlan, akkor észrevehetjük, hogy míg a páratlan $|S|$-ek esetén $\sum_{\substack{S\subseteq n \\ |S| \text{ páratlan}}} \hat{f}(S) \cdot \chi_S(-x) = -\sum_{\substack{S\subseteq n \\ |S|=k}} \hat{f}(S) \cdot \chi_S(x)$, addig páros $|S|$-ek esetén $\sum_{\substack{S\subseteq n \\ |S| \text{ páros}}} \hat{f}(S) \cdot \chi_S(-x) = \sum_{\substack{S\subseteq n \\ |S|=k}} \hat{f}(S) \cdot \chi_S(x)$ minden $x$ esetén. Tehát mivel $\chi_S$-ek TONR-t alkotnak, így az állítás igaz. □

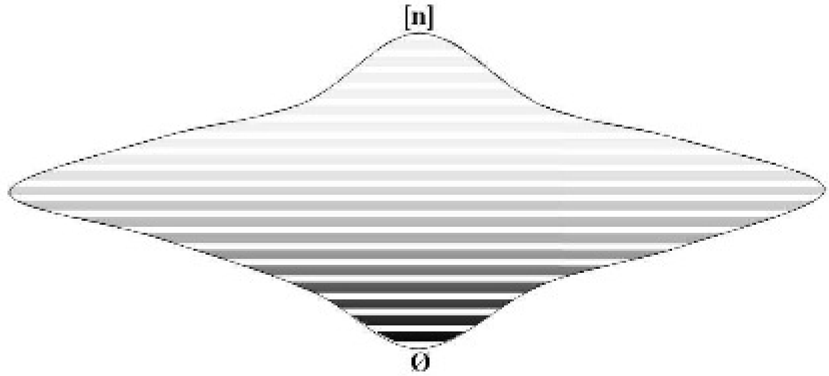
A majoráns függvény Fourier együtthatóira van konkrét képlet is, valamint közelítések abban az esetben, ha $n \to \infty$, amelyek konvergálnak, így van értelme beszélni általánosan beszélni a "$Maj$" függvényről nagy $n$-ekre. Azt már tudjuk, hogy $W_k(Maj_n) = 0$ minden páratlan $k$-ra, hiszen a majoráns függvény páratlan függvény. Érdekes belegondolni, hogy $\widehat{Maj_n}(S)$ egyedül az $|S|$-től függ az $n$ koordináta teljes szimmetriája miatt. Sőt, igaz az alábbi állítás, amit majd nem sokára belátunk:

$$\lim_{n\to\infty} W_1(Maj_n) = \frac{2}{\pi}. \tag{4.2.1}$$

Általánosságban is igaz, hogy $W_k(\text{"}Maj\text{"}) = \left(\frac{2}{\pi k}\right)^{\frac{3}{2}} + o\left(k^{-\frac{3}{2}}\right)$, tehát egy rögzített $d$-re:

$$\sum_{k\geq d} W_k(\text{"}Maj\text{"}) = \Theta\left(\frac{1}{\sqrt{d}}\right).$$

Vagyis a majoráns függvény a Fourier súlyának csak $\epsilon$ részét hordozza $O\left(\frac{1}{\epsilon^2}\right)$ szint felett. Sőt ez általánosságban a súlyozott majoráns függvényre is igaz. Ezt próbálja szemléltetni a következő ábra, ahol minél súlyosabb egy szint annál sötétebben van jelölve.



Az elektori és a törzsi szavazások már bonyolultabbak, de azt megjegyezzük, hogy a törzsi szavazásoknál sokkal egyenletesebben vannak elosztva a súlyok, vagyis $W_k(Tribes_n) = o_n(1)$ minden $0 \leq k \leq n$-re.

## 4.3. Torzítás

A torzítás azt mutatja, hogy vajon az $f$ szavazási szabály előnyben részesíti-e valamelyik jelöltet.

**4.3.1. Definíció.** Az $f : \{-1{,}1\}^n \to \{-1{,}1\}$ függvény torzítása

$$E[f] = \Pr_x[f(x) = 1] - \Pr_x[f(x) = -1].$$

Amennyiben ez 0, a függvényt **torzítatlan**nak nevezzük, különben **torzított**nak.

Az 3.2.2 összefüggés miatt sok esetben könnyű kiszámolni a torzítást. Konstans függvények esetében a torzítás értelemszerűen $+1$ vagy $-1$. Ugyanakkor a diktátor, paritás, majoráns és elektori szavazások torzítatlanok. A törzsi szavazás esetén $o_n(1)$. Ahhoz, hogy egy szavazás igazságos legyen, fontos tulajdonság a torzítatlanság, ugyanakkor nem elégséges, hiszen például a diktátor függvény is torzítatlan. Sokszor érdemes nem is a torzítást, hanem annak négyzetét $\hat{f}(\emptyset)^2 = W_0(f)$-t venni, hiszen bár ezzel bizonyos információt elvesztünk, mivel nem tudjuk, hogy a szavazás melyik fél felé húz, de így általánosságban tudjuk vizgálni a kiegyensúlyozottságát, amely ha 0, akkor torzítatlan, ha pedig 1-hez közeli, akkor erősen torzított.

## 4.4. Befolyás

A befolyás fogalma azt próbálja mutatni, hogy egy adott szavazónak mennyi befolyása van a szavazás végkimenetelében. Vagyis az keressük, hogy például az $i$-edik szavazó szavazata mekkora valószínűséggel változtatja meg a végeredményt.

**4.4.1. Definíció.** Az $f : \{-1{,}1\}^n \to \{-1{,}1\}$ függvény $i$-edik koordinátájának befolyása legyen

$$Inf_i(f) = \Pr_x\left[f(x) \neq f\left(x^{\oplus i}\right)\right],$$

ahol $x^{\oplus i}$ az $x$ az $i$-edik helyen negálva.

**4.4.2. Definíció.** Azt mondjuk, hogy $i \in [n]$ pivotál az $x$-en az $f : \{-1{,}1\}^n \to \{-1{,}1\}$ függvényen, ha $f(x) \neq f\left(x^{\oplus i}\right)$

**4.4.1. Példa.** A $Dict_i$ és a $NegDict_i$ függvényeken az $i$ koordináta pivotál minden $x$-re, de semelyik más $i$ nem pivotál semmilyen $x$-re, tehát $Inf_i(Dict_i) = 1$ és $Inf_j(Dict_i) = 0$ minden $j \neq i$-re. A konstans függvények esetén minden $i \in [n]$-re a befolyás 0. Paritás függvények esetében minden koordináta esetén a befolyás 1, hiszen ha egy $x_i$-t negálunk, akkor a függvényérték is negálva lesz. Majoráns függvény esetén csak akkor változtatja meg az eredményt egy szavazó, ha a többi szavazat egyenlően oszlik meg a két jelölt között. Ennek a valószínűsége $\binom{n-1}{\frac{n-1}{2}}2^{n-1}$. Nagy $n$ esetén a Stirling-formulából következően körülbelül egyenlő $\frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\sqrt{n}}$-vel. Az elektori szavazás esetén $Inf_i\left(EC^{(51)}\right) \approx \frac{\frac{2}{\pi}}{\sqrt{n}}$ minden $i$-re, a törzs függvény esetén pedig $Inf_i\left(Tribes\right) = \Theta\left(\frac{\log n}{n}\right)$ minden $i$-re. Az egyik különleges tulajdonsága a törzs függvénynek, hogy a befolyása jóval kisebb, mint a majoráns függvényé.

Ahhoz, hogy pár olyan állítást belássunk, amelyekkel már a Fourier együtthatók segítségével is tudunk befolyást számolni, be kell vezetnünk a következő operátort:

**4.4.3. Definíció.** Legyen az $i$-edik deriváló operátor $D_i$, mely az $f : \{-1{,}1\}^n \to \mathbb{R}$ térről képez a $D_if : \{-1{,}1\}^n \to \mathbb{R}$ térre méghozzá az alábbi módon:

$$D_if\left(x\right) = \frac{f\left(x^{(i\to 1)}\right) - f\left(x^{(i\to -1)}\right)}{2}$$

, ahol $f\left(x^{(i\to b)}\right) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, b, x_{i+1}, \ldots, x_n)$.

Vegyük észre, hogy a $D_i$ olyan lineáris operátor, mely független $x_i$-től. Amennyiben az $f$ függvény logikai értékű, akkor

$$D_if\left(x\right) = \begin{cases} 0 & \text{ha az } i \text{ koordináta nem pivotál } x\text{-en} \\ \pm 1 & \text{ha az } i \text{ koordináta pivotál } x\text{-en} \end{cases}$$

Tehát a $D_if\left(x\right)^2$ a 0-1 indikátora annak, hogy $i$ pivotál $x$-en, tehát a befolyás ennek a várható értékével egyenlő. Tehát

$$Inf_i\left[f\right] = E\left[D_if\left(x\right)^2\right] = \left\|D_if\right\|^2. \tag{4.4.1}$$

**4.4.4. Definíció.** Azt mondjuk, hogy $i \in [n]$ **releváns** $f : \{-1{,}1\}^n \to \mathbb{R}$ függvény esetén, ha $Inf_i\left[f\right] > 0$.

**4.4.1. Állítás.** Legyen $f : \{-1{,}1\}^n \to \mathbb{R}$ és vegyük a szokásos Fourier soros felírását, ami $f\left(x\right) = \sum_{S\subseteq[n]} \hat{f} \cdot \chi_S\left(x\right)$. Ekkor

$$D_if\left(x\right) = \sum_{\substack{S\subseteq n \\ i\in S}} \hat{f}\left(S\right) \cdot \chi_{S\setminus\{i\}}.$$

*Bizonyítás.* Mivel a $D_i$ egy lineáris operátor ezért elég azt megnéznünk mit csinál a TONR-rel.

$$D_if\left(x\right) = \frac{\chi_S\left(x^{(i\to 1)}\right) - \chi_S\left(x^{(i\to -1)}\right)}{2} = \begin{cases} \chi_{S\setminus\{i\}} & \text{ha } i \in S \\ 0 & \text{ha } i \notin S \end{cases},$$

amiből már következik az állítás, ami a $D_if$ Fourier sora. □

Ha az előző állításra alkalmazzuk a Parseval-tételt, akkor kapjuk azt az állítást, ami szerint a befolyás egyenlő azon Fourier együtthatók négyzetének összegével, melyek olyan $S$-ekhez tartoznak, amiknek része $i$, felhasználva 4.4.1-es egyenlőséget. Ez egy nagyon hasznos állítás, hiszen a Fourier sor ismeretében máris leolvashatjuk a koordináták befolyását.

**4.4.5. Tétel** (Ryan O'Donnell [10]). *Ha* $f : \{-1{,}1\}^n \to \mathbb{R}$ *függvény és* $i \in [n]$, *akkor*

$$Inf_i\,[f] = \sum_{\substack{S \subseteq n \\ i \in S}} \hat{f}\,(S)^2\,. \tag{4.4.2}$$

□

Abban az esetben, ha a függvény logikai értékű és monoton, akkor használhatunk egy még egyszerűbb formulát.

**4.4.2. Állítás.** Ha az $f : \{-1{,}1\}^n \to \{-1{,}1\}$ függvény monoton és $i \in [n]$, akkor $Inf_i\,[f] = \hat{f}\,(i)$.

*Bizonyítás.* Mivel az $f$ monoton, ezért $f\left(x^{(i\to 1)}\right) - f\left(x^{(i\to -1)}\right)$ mindig 1-gyel egyenlő, tehát $D_i f\,(x)$-et nem kell négyzetre emelni, hogy a 0-1 indikátora legyen annak, hogy $i$ mikor pivotál $x$-en. Vagyis felhasználva az 3.2.2 egyenlőséget és a $D_i f$ Fourier sorát kapjuk, hogy $Inf_i\,[f] = E\,[D_i f] = \widehat{D_i f}\,(\emptyset) = \hat{f}\,(i)\,.$ □

A deriválási operátor sokban hasonlít a szokásos deriváláshoz, hiszen egy $f : \{-1{,}1\}^n \to \mathbb{R}$ függvény monoton akkor és csak akkor, ha $D_i f\,(x) \geq 0$ minden $i$-re és $x$-re. A monotonitás egy olyan tulajdonság, aminek egy igazságosnak nevezhető szavazásnál teljesülni kell, hiszen ha valaki -1-ről 1-re változtatja a szavazatát, akkor nem akarjuk, hogy a végkimenet 1-ről -1-re változhasson. A majoráns függvényről tudjuk, hogy monoton, tehát teljesül rá, hogy $Inf_i\left[\widehat{Maj_n}\,(i)\right] = \hat{f}\,(i) \approx \frac{\frac{2}{\pi}}{n}$, amiből következik a 4.2.1 egyenlőség.

Ezen egyenlőségek segítségével belátható, hogy ha egy szavazáshoz tartozó függvény monoton és tranzitíven szimmetrikus, akkor minden szavazónak 'kicsi' befolyása van a végkimenetre.

**4.4.3. Állítás.** Legyen $f : \{-1{,}1\}^n \to \{-1{,}1\}$ olyan függvény mely tranzitívan szimmetrikus és monoton. Ekkor $Inf_i\,[f] \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ minden $i \in [n]$-re.

*Bizonyítás.* Mivel az $f$ tranzitív, ezért $\hat{f}\,(i) = \hat{f}\,(i')$ minden $i, i' \in [n]$-re, és a monotonitás miatt $Inf_i\,[f] = \hat{f}\,(i) = \hat{f}\,(1)$. Parseval tétele miatt $1 = \sum_{S \subseteq [n]} \hat{f}\,(S)^2 \geq \sum_{i=1}^{n} \hat{f}\,(i)^2 = n\hat{f}\,(1)^2$, így az egyenlőtlenséget átrendezve kapjuk az állítást, hogy $Inf_i\,[f] = \hat{f}\,(1) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$. □

Ezt az egyenlőtlenséget lehet még javítani.

## 4.5. Teljes befolyás

Egy másik fontos tulajdonság, melyet megannyi névvel szoktak illetni a teljes befolyás, vagyis a befolyások összege. Szokás még energiának, átlagos érzékenységnek és fogékonyságnak is nevezni.

**4.5.1. Definíció.** Legyen az $f : \{-1{,}1\}^n \to \{-1{,}1\}$ függvény **teljes befolyás**a:

$$I\,(f) = \sum_{i=1}^{n} Inf_i\,(f)\,.$$

Azért szokás átlagos érzékenységnek nevezni, mert egyenlő a pivotál koordináták számának várható értékével, vagyis

$$I_i[f] = \underset{x}{E}\left[\#i \text{ koordináták, hogy} f(x) \neq f\left(x^{\oplus i}\right)\right]. \tag{4.5.1}$$

Ez igaz, mivel $I_i[f] = \sum\limits_{i=1}^{n} Inf_i(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} \underset{x}{\Pr}\left[f(x) \neq f\left(x^{\oplus i}\right)\right] = \sum\limits_{i=1}^{n} \underset{x}{E}\left[\mathbf{1}_{f(x)\neq f(x^{\oplus i})}\right] = \underset{x}{E}\left[\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{f(x)\neq f(x^{\oplus i})}\right]$ $= \underset{x}{E}\left[\#i \text{ koordináták, hogy} f(x) \neq f\left(x^{\oplus i}\right)\right]$.

A 4.4.2 állításból rögtön következik az alábbi egyenlőség:

$$I(f) = \sum_{S\subseteq[n]} |S|\,\hat{f}(S)^2. \tag{4.5.2}$$

Vagyis úgy is gondolhatunk a teljes befolyásra, mint az átlagos szintjére az $f$ Fourier súlyának.

**4.5.1. Példa.** Mivel már egy koordinátára a befolyást jó néhány konkrét példára kiszámoltuk, így tudjuk a teljes befolyást is. A konstans függvényekre 0, a diktátor függvényre 1, a paritás függvényre pedig $n$. A törzs függvényekre $I(Tribes_n) = \Theta(\log n)$

Monoton függvények esetén, mint ahogy a befolyásnál, úgy a teljes befolyásnál is fel tudunk írni egyszerűbb alakot.

**4.5.1. Állítás.** Ha $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ függvény monoton, akkor

$$I[f] = \sum_{i=1}^{n} \hat{f}(i). \tag{4.5.3}$$

A majoráns függvény monoton, tehát a teljes befolyása $I[Maj_n] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{n} + O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$. A teljes befolyásra úgy is gondolhatunk, mint azoknak a szavazóknak az átlagos számára, akik szavazata kiszámíthatatlan, akik nincsenek elköteleződve egy jelölt mellett. Ezek a szavazók kiemelkedően fontosak, hiszen gyakran az ő szavazataik döntenek a kimenetelről. Ha $f$ monoton, akkor $I[f]$ a nyertes jelöltre szavazók száma mínusz a vesztes jelöltre szavazók számának várható értéke. Ezt próbálja megfogni a következő állítás:

**4.5.2. Állítás.** Legyen $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ monoton függvény egy szavazási szabály 2 jelölt esetén, a szavazatok vektora $x = (x_1, \ldots, x_n)$, és $w$ azok száma akik egyetértenek a szavazás kimenetelével, vagyis $f(x)$-szel. Ekkor

$$E[w] = \frac{n}{2} + \sum_{i=1}^{n} \hat{f}(i). \tag{4.5.4}$$

*Bizonyítás.* Az $f$ monotonitásából, valamint Fourier együtthatók definíciójából és a várható érték linearitásából következik, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{f}(i) = \sum_{i=1}^{n} \underset{x}{E}[f(x)\cdot x_i] = \underset{x}{E}[f(x)\cdot(x_1+\cdots+x_n)]. \tag{4.5.5}$$

Mivel $x_1 + \cdots + x_n$ pontosan az 1-es jelöltre tett voksok és a -1-es jelöltre letett voksok különbségének számát jelenti, tehát $f(x) \cdot (x_1 + \cdots + x_n)$ meg, hogy a nyertesre mennyivel több szavazat érkezett, vagyis $w - (n - w) = 2w - n$. Ha átrendezzük pontosan az állítást kapjuk, ha pedig az $f$ monoton, ami egy jogos feltétel szavazások esetén, akkor $E[w] = \frac{n}{2} + I[f]$. □

1762-ben Rousseau azt vetette fel, hogy az ideális szavazási rendszer az, amellyel a legtöbben egyetértenek. A következő állítás megmutatja, hogy ebben az esetben a majoráns függvényt kell használni, ami azt jenti, hogy rögzített $n$ esetén a $\sum_{i=1}^{n} \hat{f}(i)$ értéket maximalizálja.

**4.5.2. Tétel** ( Ryan O'Donnell [10]). *A $f : \{-1{,}1\}^n \to \{-1{,}1\}$ függvények közöl a majoráns függvény az, amely egyedüliként maximalizálja a $\sum_{i=1}^{n} \hat{f}(i)$ értéket. Ebből egyenesen következik, hogy minden monoton $f$-re $I[f] \leq I[Maj_n] = \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\sqrt{n}} + O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$*

*Bizonyítás.* A 4.5.5 egyenletből:

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{f}(i) = \mathop{E}_{x}[f(x) \cdot (x_1 + \cdots + x_n)] \leq \mathop{E}_{x}[|x_1 + \cdots + x_n|],$$

mivel $f(x) \in [-1{,}1]$. Egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $f(x) = sgn(x_i + \cdots + x_n)$, ha $x_i + \cdots + x_n \neq 0$. A tétel második fele következik a monoton függvények teljes befolyásáról szóló 4.5.3-es állításból. □

## 4.6. Zaj stabilitás

Az utolsó jelentőségteljesebb tulajdonság, amit vizsgálni fogunk az a zaj stabilitás. Gondoljunk az $f : \{-1{,}1\}^n \to \{-1{,}1\}$ függvényre úgy, mint egy szavazásra két jelölt között. Erre a tulajdonságra egy tökéletes világban nem lenne szükség, de a valóságban úgy képzelhetjük el, hogy amikor a szavazatokat számolják, akkor megvan a valószínűsége, hogy rosszul lesz feljegyezve valakinek a szavazata. Ez persze csak akkor okoz problémát, ha ezáltal a szavazás kimenetele megváltozik. A zaj stabilitás annak a valószínűsége, hogy a szavazás kimenetele nem változik meg. Legyenek a szavazók véleményei $x_1, \ldots, x_n$, tehát ha minden jól menne, akkor a szavazás kimenetele, az 'igazi' győztes $f(x)$. Legyenek a feljegyzett szavazatok $y_1, \ldots, y_n$, tehát a kihirdetett győztes $f(y)$ lesz. Ahhoz, hogy meg tudjuk állapítani, hogy milyen valószínűséggel lesz kihirdetve az 'igazi' győztes, ahhoz meg kell mondani milyen valószínűséggel lesznek a szavazatok rosszul feljegyezve. Legyen ez a valószínűség $\epsilon$.

**4.6.1. Definíció.** Legyen $\epsilon \in [0{,}1]$ és $x \in \{-1{,}1\}^n$ rögzített. Ekkor $y \sim N_{1-2\epsilon}(x)$ jelentse az olyan $y \in \{-1{,}1\}^n$ vektort, mely minden $i \in [n]$-re egymástól függetlenül

$$y_i = \begin{cases} x_i & 1 - \epsilon \text{ valószínűséggel} \\ -x_i & \epsilon \text{ valószínűséggel} \end{cases},$$

akkor $y$ $1-2\epsilon$-korrelál az $x$-szel. Ez a definíció szimmetrikus, tehát mondhatjuk, hogy az $(x,y)$ egy $1-2\epsilon$-**korrelált pár**, ami ekvivalens azzal, hogy ha minden $i \in [n]$-re az $(x_i, y_i)$ pár teljesíti, hogy $E[x_i] = E[y_i] = 0$ és

$$E[x_i \cdot y_i] = \Pr[x_i = y_i] - \Pr[x_i \neq y_i] = 1 - 2\epsilon. \tag{4.6.1}$$

Miután már tudjuk az igazi szavazatok és a feljegyzett szavazatok közötti kapcsolatot, ekkor már definiálhatjuk, hogy mi is a zaj stabilitás.

**4.6.2. Definíció.** Ha $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ és $\epsilon \in [0,1]$, akkor az $f$ **zaj stabilitás**a $1-2\epsilon$-nál

$$Stab_{1-2\epsilon}(f) = E[f(x) \cdot f(y)] = \Pr[f(x) = f(y)] - \Pr[f(x) \neq f(y)] = 2\Pr[f(x) = f(y)] - 1$$

Ebből a definícióból következik, hogy annak a valószínűsége, hogy a végkimenetet nem befolyásolja a szavazatok rossz feljegyzése, az

$$\Pr_{(x,y)\ 1-2\epsilon\text{-korreláltak}}[f(x) = f(y)] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} Stab_{1-2\epsilon}(f).$$

Nyilván a szavazásoknak egy előnyös tulajdonsága, hogy ha rögzített $\epsilon$-ra a $Stab_{1-2\epsilon}(f)$ minél közelebb van az 1-hez. Sokszor ha nagyon közel van az 1-hez, akkor inkább az $1 - Stab_{1-2\epsilon}(f)$-fel szoktak számolni, amit zaj érzékenységnek neveznek. A továbbiakban, hogy konkrét esetekben, ha már az $f$ függvénynek megvan a Fourier-sora, akkor könnyű legyen számolni a zaj stabilitást, még bevezetünk pár definíciót, és megnézzük a $\chi_S$ függvények stabilitását.

Azt tudjuk, hogy a konstans függvények zaj stabilitása 1, hiszen mindegy mit csinálnak a szavazók a szavazás végkimenete rögzített. A diktátor függvények esetén, mivel csak egy szavazó véleménye számít, ezért csak azt kell megnézni, hogy az ő szavazatát milyen valószínűséggel jegyzik fel rosszul, ami $\epsilon$, tehát $Stab_{1-2\epsilon}(Dict_i) = 1 - 2\epsilon$. Ezt felhasználva, valamint a várható érték azon tulajdonságát, hogy a független változók várható értékei összeszorzódnak, ki tudjuk számolni általánosan a $\chi_S$ zaj stabilitását.

$$\begin{aligned} Stab_{1-2\epsilon}(\chi_S) &= \mathop{E}_{(x,y)\ 1-2\epsilon\text{-korreláltak}}[\chi_S(x)\chi_S(y)] = \\ &= E\left[\prod_{i\in S} x_i \cdot y_i\right] = \prod_{i\in S} E[x_i \cdot y_i] = \prod_{i\in S}(1-2\epsilon) = (1-2\epsilon)^{|S|}. \end{aligned} \tag{4.6.2}$$

Ebből az egyenletből például a paritás függvény stabilitását, ami a $\chi_{[n]}$ meg tudjuk állapítani, ami $(1-2\epsilon)^n$. Amennyiben a szavazók száma sokkal nagyobb, mint $\frac{1}{\epsilon}$, akkor a stabilitás nagyon közel lesz 0-hoz, tehát az igazi vélemények és a szavazás kimenetele között szinte nem lesz korreláció. Hogy még általánosabban ki tudjuk számolni a zaj stabilitást vezessük be a következő operátort:

**4.6.3. Definíció.** Ha $\epsilon \in [0,1]$, akkor a zaj operátor $1-2\epsilon$ paraméterrel az a lineáris operátor, amely az $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ függvényen a következő:

$$T_{1-2\epsilon} f(x) = \mathop{E}_{y \sim N_{1-2\epsilon}(x)}[f(y)].$$

Ez a zaj operátor egy rögzített $f$ függvényre és egy $x$-re megmondja, hogy várhatóan mi lesz a szavazás kimenetele, ha minden szavazatot $\epsilon$ valószínűséggel jegyeznek fel rosszul. Mivel a $T_{1-2\epsilon}$ egy lineáris operátor, ezért ahhoz, hogy $T_{1-2\epsilon}f$-et kiszámoljuk, elég a TONR-ét kiszámolni, vagyis elég kiszámolni mennyi $T_{1-2\epsilon}\chi_S$. Ehhez is felhasználjuk, hogy a koordináták függetlenek, valamint, hogy ha $y \sim N_{1-2\epsilon}(x)$, akkor $E[y_i] = (1-2\epsilon)\cdot x_i$

$$T_{1-2\epsilon}\chi_S(x) = \underset{y\sim N_{1-2\epsilon}(x)}{E}[\chi_S(y)] = \prod_{i\in S}\underset{y\sim N_{1-2\epsilon}(x)}{E}[y_i] = \prod_{i\in S}(1-2\epsilon)\cdot x_i = (1-2\epsilon)^{|S|}\chi_S(x).$$

Ezek után már a linearitás miatt kapjuk a következő állítást, ami a $T_pf$-nek a Fourier-soros felírása:

**4.6.1. Állítás.** Ha $f:\{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ függvény, akkor a zaj operátor Fourier-sora az alábbi:

$$T_{1-2\epsilon}f = \sum_{S\subseteq[n]}(1-2\epsilon)^{|S|}\hat{f}(S)\chi_S = \sum_{i=1}^{n}(1-2\epsilon)^{|S|}f^{=k},$$

ahol $f^{=k} = \sum\limits_{|S|=k}\hat{f}(S)\chi_S$.

□

Ezt a következő összefüggés miatt vezettük be:

**4.6.2. Állítás.** $Stab_{1-2\epsilon}(f) = \langle f, T_{1-2\epsilon}f\rangle$.

*Bizonyítás.*

$$Stab_{1-2\epsilon}(f) = E_{\substack{x\sim\{-1,1\}^n\\ y\sim N_{1-2\epsilon}(x)}}[f(x)\cdot f(y)] = \underset{x\sim\{-1,1\}^n}{E}\left[f(x)\cdot\underset{y\sim N_{1-2\epsilon}(x)}{E}[f(y)]\right] = \langle f, T_{1-2\epsilon}f\rangle$$

□

Ezeket a következő tételért vezettük be, amely segítségével a Fourier-sor megléte esetén tudunk zaj stabilitást számolni.

**4.6.4. Tétel** (Ryan O'Donnell [10])**.** *Ha* $f:\{-1,1\}^n\to\{-1,1\}$, *akkor*

$$Stab_{1-2\epsilon}(f) = \sum_{S\subseteq[n]}(1-2\epsilon)^{|S|}\hat{f}(S)^2 = \sum_{i=0}^{n}(1-2\epsilon)^k\cdot W_k(f).$$

*Bizonyítás.* Felhasználva a $T_{1-2\epsilon}f$ Fourier sorát, és Plancherel tételét:

$$Stab_{1-2\epsilon}(f) = \langle f, T_{1-2\epsilon}f\rangle = \left\langle\sum_{S\subseteq[n]}\hat{f}(S)\chi_S, \sum_{S\subseteq[n]}(1-2\epsilon)^{|S|}\hat{f}(S)\chi_S\right\rangle = \sum_{S\subseteq[n]}(1-2\epsilon)^{|S|}\hat{f}(S)^2.$$

□

Vagyis a zaj stabilitás nem más, mint a Fourier súlyok összege, egy a szintekkel exponenciálisan csökkenő számokkal szorozva, ha $\epsilon$-t lerögzítjük. Ebből következik, hogy amennyiben a stabilitást maximalizálni akarjuk, akkor az alacsonyabb szintekre kell nagyobb Fourier súlyokat tenni, úgy hogy közben valamennyire igazságos maradjon a szavazás. Tehát tegyük fel, hogy a szavazás torzítatlan. Ezt a problémát ragadja meg a következő állítás, mely kimondja, hogy ez esetben a diktátor függvény maximalizálja a zaj stabilitást, amennyiben nagyobb a valószínűsége, hogy jól vannak feljegyezve a szavazatok, mint hogy nem.

**4.6.3. Állítás.** Legyen $\epsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Ha $f : \{-1{,}1\}^n \to \{-1{,}1\}$ torzítatlan, akkor $Stab_{1-2\epsilon}(f) \leq 1 - 2\epsilon$, és egyenlőség akkor és csak akkor, ha $f = \pm\chi_i$, valamilyen $i \in [n]$-re.

*Bizonyítás.* A nulladik szinten a Fourier súly 0, hiszen torzítatlan függvényről van, szó, vagyis $W_0(f) = 0$. Tehát $Stab_{1-2\epsilon}(f) = \sum_{i=1}^{n} (1-2\epsilon)^k \cdot W_k(f)$. De mivel $(1-2\epsilon)^k < (1-2\epsilon)$, ha $k > 1$, ezért akkor van maximalizálva $Stab_{1-2\epsilon}(f)$, ha minden Fourier súly az első szinten van, de a Fourier súlyoknál már láttuk, hogy az ilyen függvények csak diktátorok vagy negált diktátorok lehetnek, vagyis $f = \pm\chi_i$. □

**4.6.1. Példa.** A konstans, diktátor és paritás függvényekre már megnéztük a zaj stabilitást. Az egyik legérdekesebb az az eset, amikor a majoráns függvényt tekintjük. A következő formula bizonyítása a 2-dimenziós Centrális Határeloszlás tételen múlik, és azon, hogy ha van egy $X$ és $Y$ Standard normális eloszlású valószínűségi változónk, melyek kovarianciája $1-2\epsilon$, akkor $Pr[sgn(X) \neq sgn(Y)] = \frac{1}{\pi} \arccos 1 - 2\epsilon$. Maga a formula a következő: ha $\epsilon \in [0{,}1]$, $n$ páratlan akkor

$$\lim_{n\to\infty} Stab_{1-2\epsilon}(Maj_n) = \frac{2}{\pi} \arcsin 1 - 2\epsilon. \tag{4.6.3}$$

Kicsi $\epsilon$ esetén közelíthetjük az értéket $1 - \frac{4}{\pi}\sqrt{\epsilon}$-nal. Az elektori szavazás esetén, feltéve hogy $51 << \frac{1}{\epsilon} << n$, a majoráns függvénynél kisebb stabilitás jön ki, számszerűen:

$$Stab_{1-2\epsilon}\left(EC^{(51)}\right) \sim 1 - 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2} \sqrt{51}\sqrt{\epsilon}.$$

# 5. fejezet

# Arrow tétele

Az utolsó fejezetben a szavazások témakörét nagyrészt $\{0{,}1\}^n \to \{0{,}1\}$ függvények körében vizsgáljuk. Ehhez Gil Kalai cikkét dolgozzuk fel, de az első és utolsó részhez O'Donnel könyvét és cikkét is felhasználjuk [6] [9] [10]. Először bebizonyítjuk Arrow tételét a pártatlan kultúra feltételezése mellett. Ezekután itt is bevezetünk pár alapfogalmat, jelöléseket, majd megmutatunk egy érdekes képletet a nemracionális profil kimenetelére. Szó lesz még Gulibaud formulájáról, majd bebizonyítjuk Arrow tételét. Végül megemlítünk néhány tételt, mely Arrow tételének továbbgondolásáról szól, és annak stabilitásáról.

## 5.1. Arrow tétele a pártatlan kultúra feltételezése mellett

Eddig végig azt az esetet tekintettük, amikor csak 2 jelölt van, de természetesen nagyon sokszor nem ez a helyzet, és legalább 3 jelöltet kell sorbaállítaniuk a szavazóknak. Nekünk csak olyan függvényünk van, ami két jelöltről dönti el, hogy melyik nyerjen, és továbbra is ezt szeretnénk használni. Condorcet vetette fel 1785-ben azt a módszert, hogy amennyiben a három jelölt az $A, B$ és $C$, akkor legyen egy külön függvényünk mindegyik párra: $A$ vs $B$, $B$ vs $C$, $C$ vs $A$. Condorcet mindegyik összehasonlításnál a majoráns függvényt vette, majd az így kapott eredményekből felállított egy végleges rangsort. Természetesen a majoráns függvény helyett választhatunk másik $f : \{-1{,}1\}^n \to \{-1{,}1\}$ függvényt, ezt szokás Condorcet szavazásnak nevezni. Tekintsük most azt, ha 3 jelöltünk van. Az alábbi táblázatban minden szavazóhoz egy oszlop tartozik, legyen az $i$-edik szavazóé $(x_i, y_i, z_i)$.

| | 1 | 2 | $\cdots$ | $n$ | | | Társadalom: |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ vs. $B$ | $+1$ | $+1$ | $\cdots$ | $-1$ | $=:$ | $x$ | $f(x)$ |
| $B$ vs. $C$ | $-1$ | $+1$ | $\cdots$ | $+1$ | $=:$ | $y$ | $f(y)$ |
| $C$ vs. $A$ | $+1$ | $-1$ | $\cdots$ | $+1$ | $=:$ | $z$ | $f(z)$ |

Ahogy azt a bevezetőben már megmutattuk, ez a rendezés van hogy nem vezet eredményre és létrejön a Condorcet paradoxon. Ez 3 jelölt esetén akkor valósul meg, ha az $(f(x), f(y), f(z))$ hármas vagy $(+1, +1, +1)$-gyel vagy $(-1, -1, -1)$-gyel egyenlő. Ezért kiemelten kezeljük, azt a hat

$(f(x), f(y), f(z))$ hármast, ahol nem mind egyenlő, vagyis az NAE hármasokat('Not All Equal'):

$$\{(+1,+1,-1),(+1,-1,+1),(+1,-1,-1),(-1,+1,+1),(-1,+1,-1),(-1,-1,+1)\}.$$

Ahogy Arrow 1950-ben bebizonyította a paradoxon csak a diktátor függvénnyel kerülhető el.

**5.1.1. Tétel** (Arrow tétele, Ryan O'Donnell [10])**.** *Tegyük fel, hogy $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ egy egyhangú szavazási szabálya egy 3 jelöltes Condorcet szavazásnak. Ha a Condorcet szavazásnak mindig van nyertese, akkor $f$ egy diktátor függvény.*

□

Sajnos ez nem mond sokat arról az esetről, ha nem a diktátor függvényt használjuk. Ezért is fontos Kalai 2002-es bizonyítása, mert abból az is kijön, hogy mekkora valószínűséggel következik be a paradoxon, ha teljesül a pártatlan kultúra feltételezés.

**5.1.2. Tétel** (Ryan O'Donnell [10])**.** *Tegyük fel, hogy $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ egy egyhangú szavazási szabálya egy 3 jelöltes Condorcet szavazásnak. A pártatlan kultúra feltételezés mellett annak a valószínűsége, hogy a Condorcet szavazásnak lesz nyertese pontosan $\frac{3}{4} - \frac{3}{4}Stab_{-1/3}[f]$, és ez akkor és csak akkor egy, ha $f$ diktátort.*

*Bizonyítás.* Azt a valószínűséget szeretnénk kiszámítani, hogy milyen valószínűséggel lesz az $(f(x), f(y), f(z))$ eleme az NAE hármasoknak. Legyen $NAE_3 : \{-1,1\}^3 \to \{0,1\}$ az NAE hármasok indikátora:

$$NAE_3(a,b,c) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}ab - \frac{1}{4}ac - \frac{1}{4}bc.$$

Tehát annak a valószínűsége, hogy racionális kimenetele lesz a szavazásnak, az előbbi várható értéke, és felhasználva a várható érték linearitását a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}(5.1.1)\quad \Pr_{x,y,z}[\exists \text{ Condorcet nyertes}] &= \mathop{E}_{x,y,z}[NAE_3((f(x), f(y), f(z))] = \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{4}E[f(x)f(y)] - \frac{1}{4}E[f(x)f(z)] - \frac{1}{4}E[f(y)f(z)].\end{aligned}$$

Mivel a közös eloszlásai az $(x,z)$-nek és $(y,z)$-nek ugyanazok mint $(x,y)$-nak, tehát a várható értékek megegyeznek. A pártatlan kultúra feltevés miatt feltettük, hogy minden $x_i$ és $y_i$ egyenlő valószínűséggel $-1$ vagy 1, tehát külön külön a várható értékük 0, viszont $x_i \cdot y_i$ várható értéke $E[x_i \cdot y_i] = \frac{2}{6}(+1) + \frac{4}{6}(-1) = -\frac{1}{3}$. Hiszen ha vesszük az NAE hármasokat, akkor $x_i \cdot y_i$ négyszer $-1$ és kétszer $+1$, tehát $x_i = y_i$ $1/3$ valószínűséggel. Mivel $x$ és $y$ koordinátái függetlenek, ezért igaz rájuk, hogy $-\frac{1}{3}$ korrelálnak egymással, tehát $E[f(x)f(y)]$ definíció szerint $Stab_{-1/3}(f)$. Tehát az előbbiek alapján, és a zaj stabilitásra vonatkozó 4.6.4 tétel szerint:

$$\begin{aligned}(5.1.2)\quad \Pr_{x,y,z}[\exists\text{Condorcet nyertes}] &= \frac{3}{4} - \frac{3}{4}E[f(x)f(y)] = \\ &= \frac{3}{4} - \frac{3}{4}Stab_{-1/3}(f) = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\sum_{k=0}^{n}(-1/3)^k W_k(f).\end{aligned}$$

Ezzel beláttuk a tétel első felét.

A tétel második részének bizonyításához rögtön az is látszik, hogy ahhoz, hogy a valószínűség 1, legyen az $f$ függvénynek diktátor függvénynek kell lennie. Mivel a $W_k(f)$ Fourier súly 0 és 1 között van, és $(-1/3)^k > -1/3$ minden $k \neq 1$-re, ezért minden súlynak az első szinten kell. Amiből már következik, hogy az $f$ függvény diktátor vagy negált diktátor függvény. Mivel feltettük az egyhangúsági feltételt, ezért $f$ csak diktátor függvény lehet. □

Reménykedhetnénk, hogy van olyan függvény, amely esetén a Condorcet paradoxon valószínűsége kicsi, és nem a diktátor függvény, de sajnos ilyen nincs. Az erről szóló tételekről az utolsó fejezetben lesz szó.

## 5.2. A nemracionális profil valószínűsége három jelölt esetén

Hasonlóan, ahogy az előző fejezethez, most is tekintsük a három $f, g, h : \{0{,}1\}^n \to \{0{,}1\}$ függvényt, valamint a három jelöltet: $a, b, c$-t. Legyen $f(x_1, \ldots, x_n) = 1$, ha $aRb$ 0 különben, ugyanígy $g(y_1, \ldots, y_n) = 1$, ha $bRc$ és $h(z_1, \ldots, z_n) = 1$, ha $cRa$. Egy igazságos szavazáshoz kell, hogy $f, g, h$ torzítatlan legyen, de ez nem mindig áll fenn, így vezessük be azokat a $p_1, p_2, p_3$ változókat, melyek azt a valószínűséget adják meg, hogy a függvények 1-ek. Vagyis $p_1 = \Pr\{x : f(x) = 1\} = \hat{f}(\emptyset)$, $p_2 = \Pr\{x : g(x) = 1\} = \hat{g}(\emptyset)$, $p_3 = \Pr\{x : h(x) = 1\} = \hat{h}(\emptyset)$. Amennyiben a szavazás torzítatlan $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{2}$.

Ahhoz, hogy a szavazás értelmes legyen minden $x_i, y_i, z_i$ hármasra teljesülnie kell, hogy elemei az NAE hármasoknak, vagyis nem egyenlők (0,0,0)-val, se pedig (1,1,1)-gyel. Legyen $\Psi_3(n)$ azoknak a $3n$ hosszú $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n)$ röviden $(x, y, z)$ vektoroknak a halmaza, melyek minden $(x_i, y_i, z_i)$ hármasukra igaz, hogy NAE hármasok minden $i = 1, \ldots, n$-re, vagyis minden szavazó ténylegesen egy sorrendet állít fel a három jelölt között. Annak a valószínűsége, hogy egy ilyen hármas eleme az NAE-nek $\frac{6}{8}$, hiszen 8 darab hármas van és kettő rossz nekünk. Mivel feltettük, hogy a szavazók döntései egymástól függetlenek, ezért $\Pr(\Psi_3(n)) = \left(\frac{6}{8}\right)^n$.

Tekintsük azt a szavazást, ahol az $n$ szavazó véleménye független, és egyenlő valószínűséggel állítják sorba a 3 jelöltet. Ekkor legyen $W = W(f, g, h)$ az a valószínűség, hogy a fenti feltételekkel a szavazás kimenetele nemracionális. Ekkor igaz a következő állítás:

**5.2.1. Állítás.**

$$W(f, g, h) = \sum_{(x,y,z) \in \Psi} \frac{f(x)\, g(y)\, h(z) + (1 - f(x))\,(1 - g(y))\,(1 - h(z))}{2^{3n} \cdot \Pr(\Psi_3(n))} \tag{5.2.1}$$

*Bizonyítás.* A klasszikus valószínűségi mezőt alkalmazva könnyű látni, hogy a nevező az összes eset, hiszen $2^{3n}$ darab $(x, y, z)$ van összesen, de teljesítenie kell, hogy minden szavazó valódi sorrendet állít fel, ezért a $\Pr(\Psi_3(n))$. A számláló pedig pontosan akkor 1, ha vagy $(f(x), g(y), h(z)) = (0{,}0{,}0)$ vagy ha (1,1,1), vagyis amikor nemracionális az eredmény, nem tudunk felállítani sorrendet a jelöltek között. □

**5.2.1. Definíció.** Ha $f, g : \{0{,}1\}^n \to \{0{,}1\}$ függvények, akkor vezessük be a következő **kettős skalárszorzat** műveletet, amely a következő tétel kimondásához fog kelleni:

$$\langle\langle f, g\rangle\rangle = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq [n]} \hat{f}(S)\,\hat{g}(S)\,(-1/3)^{|S|-1}. \tag{5.2.2}$$

**5.2.2. Tétel** (Gil Kalai [6]).

$$W(f,g,h) = (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3) + p_1 p_2 p_3 - \frac{\langle\langle f,g\rangle\rangle + \langle\langle g,h\rangle\rangle + \langle\langle h,f\rangle\rangle}{3}$$

*Bizonyítás.* Definiáljunk két függvényt, $A$-t és $B$-t, amelyek Fourier együtthatói segítségével fogjuk bebizonyítani, hogy a tételben szereplő jobboldal egyenlő a 5.2.2 egyenlet jobb oldalával. Legyen $A : \{0{,}1\}^{3n} \to \{0{,}1\}$ a $\Psi = \Psi_3(n)$ halmaz karakterisztikus függvénye, vagyis $A = \chi_\Psi$. A $B : \{0{,}1\}^{3n} \to \{0{,}1\}$ függvény pedig legyen az $f, g, h$ szorzata, vagyis $B(x,y,z) = f(x)\,g(y)\,h(z)$. A skalárszorzat definíciója és Plancherel tétele miatt:

$$\frac{1}{2^{3n}} \sum_{(x,y,z)\in\Psi} f(x)\,g(y)\,h(z) = \langle A, B\rangle = \sum_{u\in[3n]} \hat{A}(u)\,\hat{B}(u). \tag{5.2.3}$$

Ez már sokban hasonlít a 5.2.2 egyenletre, tehát számoljuk ki a két függvény Fourier együtthatóját. A Fourier együtthatókat az együtthatóival indexeljük, amely egy 0-1 vektor. Mivel a vektor három részből áll: az $x$, $y$ és $z$-ből, ezért a hozzájuk tartozó $S_1, S_2, S_3 \subseteq [n]$ részhalmazokkal reprezentáljuk őket.

Először számoljuk ki a $B$ függvény Fourier együtthatóit, $\hat{B}(S_1, S_2, S_3)$-akat. A Fourier-sor definíciójából következően, mivel $B(x,y,z) = f(x)\,g(y)\,h(z)$, ezért

$$\hat{B}(x,y,z) = \hat{f}(x)\,\hat{g}(y)\,\hat{h}(z). \tag{5.2.4}$$

Ez azért igaz, mert

(5.2.5)

$$\begin{aligned}
B(x,y,z) = f(x)\,g(y)\,h(z) &= \sum_{T\subseteq[3n]} \hat{B}(T)\cdot u_T(S_1,S_2,S_3) = \sum_{T\subseteq[3n]} \widehat{f\cdot g\cdot h}(T)\cdot(-1)^{T\cap(S_1\cup S_2\cup S_3)} = \\
&= \sum_{\substack{T_1\subseteq\{1,\dots,n\}\\ T_2\subseteq\{n+1,\dots,2n\}\\ T_3\subseteq\{2n+1,\dots,3n\}}} \hat{f}(T_1)\,\hat{g}(T_2)\,\hat{h}(T_3)\cdot(-1)^{T\cap S_1}\cdot(-1)^{T\cap S_2}\cdot(-1)^{T\cap S_3} = \\
&= \left(\sum_{T_1\subseteq\{1,\dots,n\}} \hat{f}(T_1)\,(-1)^{T_1\cap S_1}\right)\left(\sum_{T_2\subseteq\{n+1,\dots,2n\}} \hat{g}(T_2)\,(-1)^{T_2\cap S_2}\right)\left(\sum_{T_3\subseteq\{2n+1,\dots,3n\}} \hat{h}(T_3)\,(-1)^{T_3\cap S_3}\right).
\end{aligned}$$

Ezzel a $B$ Fourier együtthatóival készen vagyunk, nézzük meg most az $A$ Fourier együtthatóit. Az $A$-t is fel tudjuk írni függvények szorzataként, pontosan $n$ darab függvény szorzataként, hiszen az $A$ annak a karakterisztikus függvénye, hogy minden szavazó egy valódi sorrendet állít fel a jelöltek között, de ezek függetlenek. Vagyis vehetjük az $A_1, \dots, A_n : \{0{,}1\}^3 \to \{0{,}1\}$ függvényeket, ahol az $A_i$ pontosan akkor veszi fel az 1 értéket, ha az $i$. szavazó valódi sorrendet állít fel, tehát $(x_i, y_i, z_i) \in NAE$. Az $A$

függvény ezen függvények szorzata, hiszen pontosan akkor 1, ha minden $A_i$ egyszerre 1. Mivel bármely két ilyen hármas független egymástól ezért most is felírhatjuk a multiplikatív alakot, vagyis:

$$\hat{A}\left(x,y,z\right)=\hat{A_1}\left(x_1,y_1,z_1\right)\cdots\hat{A_n}\left(x_n,y_n,z_n\right). \tag{5.2.6}$$

Ezek után elég azt kiszámítanunk, hogy mik $A_1$ Fourier együtthatói. $A_1$ az NAE hármasok karakterisztikus függvénye. A 5.1 fejezetben a 5.1.2 tétel bizonyításában már láttuk, hogy ez a függvény a következő $A_1\left(x_1,y_1,z_1\right)=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}x_1y_1-\frac{1}{4}x_1z_1-\frac{1}{4}y_1z_1$, vagyis $\hat{A_1}\left(\emptyset\right)=\frac{3}{4}$, $\hat{A_1}\left(S\right)=\frac{1}{4}$, ha $|S|=2$, és 0 egyébként. Ezek után már egy tetszőleges $\hat{A}\left(S_1,S_2,S_3\right)$-at ki tudunk számolni. Ha létezik, $i$, hogy $i\in S_1, i\in S_2$ és $i\in S_3$, akkor $\hat{A}\left(S_1,S_2,S_3\right)=0$, mivel $\hat{A_i}\left(\{x_i,y_i,z_i\}\right)=0$. Ezzel az esettel tehát nem kell foglalkoznunk, maradnak azok az esetek, amikor minden $i$ vagy egyetlen vagy pontosan kettő darab $S_j$-ben van benne ($j=1{,}2{,}3$). Nevezzük ezeket a hármasokat speciálisnak, és rájuk a következő képlet igaz:

$$\hat{A}\left(S_1,S_2,S_3\right)=\left(1/4\right)^{\frac{|S_1\cup S_2\cup S_3|}{2}}\cdot\left(3/4\right)^{n-\frac{|S_1\cup S_2\cup S_3|}{2}} \tag{5.2.7}$$

Ez abból következik, hogy ha $i$ pontosan kettő $S_j$-ben van benne, akkor egy 1/4-es szorzóval járul hozzá, és ilyenekből $i$-kből $\frac{|S_1\cup S_2\cup S_3|}{2}$ darab van. Az összes többi, $n-\frac{|S_1\cup S_2\cup S_3|}{2}$ darab $i$ pedig egyikbe sincs benne, tehát mind 3/4-es szorzót adnak.

Ha a 5.2.3 egyenletbe behelyettesítjük az $A$ és $B$ Fourier együtthatóit, akkor abból a következőt kapjuk:

$$\frac{1}{2^{3n}}\sum_{(x,y,z)\in\Psi}f\left(x\right)g\left(y\right)h\left(z\right)=\sum_{\text{speciális}(S_1,S_2,S_3)}\hat{f}\left(x\right)\hat{g}\left(y\right)\hat{h}\left(z\right)\left(1/4\right)^{\frac{|S_1\cup S_2\cup S_3|}{2}}\cdot\left(3/4\right)^{n-\frac{|S_1\cup S_2\cup S_3|}{2}} \tag{5.2.8}$$

Ezek után számoljuk ki a 5.2.1 számlálóját. Az első felét már kiszámoltuk a 5.2.8-es egyenletben, most számoljuk ki a második felét. Ehhez használjuk fel, hogy $\widehat{(1-f)}\left(S\right)=-\hat{f}\left(S\right)$, ha $S\neq\emptyset$ és $\widehat{(1-f)}\left(\emptyset\right)=1-\hat{f}\left(\emptyset\right)$. Ez a Fourier együttható definíciójából következik, mivel

$$(1-\widehat{f\left(S\right)})=\langle 1-f,u_S\rangle=\langle 1,u_S\rangle-\langle f,u_S\rangle,$$

és $\langle 1,u_S\rangle=1$, ha $S=\emptyset$, és 0 különben. Három esetet fogunk külön kezelni. Az első ha $S_1,S_2,S_3=\emptyset$, ekkor

$$(1-\widehat{f\left(\emptyset\right)})(1-\widehat{g\left(\emptyset\right)})(1-\widehat{h\left(\emptyset\right)})=\left(1-\hat{f}\left(\emptyset\right)\right)\left(1-\hat{g}\left(\emptyset\right)\right)\left(1-\hat{h}\left(\emptyset\right)\right)=\left(1-p_1\right)\left(1-p_2\right)\left(1-p_3\right).$$

A második eset, amikor $S_1,S_2,S_3\neq\emptyset$, ez esetben:

$$(1-\widehat{f\left(S_1\right)})(1-\widehat{g\left(S_2\right)})(1-\widehat{h\left(S_3\right)})=-\hat{f}\left(S_1\right)\hat{g}\left(S_2\right)\hat{h}\left(S_3\right).$$

A harmadik eset, amikor valamilyen $j$-re $S_j=\emptyset$, de nem az összesre. Ekkor mivel minden $i$-ről feltettük, hogy vagy egyikben sincs benne, vagy kettőben van benne, ezért tudjuk, hogy a másik kettő $S_k$ nem az üres halmaz, de ugyanaz a két halmaz hiszen minden $i$-re vagy mindkettőbe benne van, vagy egyikbe sem. Legyen $S_k = T$, és válasszuk most $j$-t 1-nek, ekkor:

$$(1-\widehat{f(\emptyset)})(1-\widehat{g(T)})(1-\widehat{h(T)}) = \left(1-\hat{f}(\emptyset)\right)\hat{g}(T)\,\hat{h}(T) = \hat{g}(T)\,\hat{h}(T) - \hat{f}(\emptyset)\,\hat{g}(T)\,\hat{h}(T).$$

Most már ki tudjuk számolni 5.2.1 egyenlet számlálóját, felbontva 6 részre

$$\sum_{(x,y,z)\in\Psi} f(x)\,g(y)\,h(z) + (1-f(x))\,(1-g(y))\,(1-h(z)) = \tag{5.2.9}$$

$$= 2^{3n}\cdot \sum_{\text{speciális}(S_1,S_2,S_3)} \hat{f}(x)\,\hat{g}(y)\,\hat{h}(z)\,(1/4)^{\frac{|S_1\cup S_2\cup S_3|}{2}}\cdot(3/4)^{n-\frac{|S_1\cup S_2\cup S_3|}{2}} +$$

$$+(1-\widehat{f(S_1)})(1-\widehat{g(S_2)})(1-\widehat{h(S_3)})\,(1/4)^{\frac{|S_1\cup S_2\cup S_3|}{2}}\cdot(3/4)^{n-\frac{|S_1\cup S_2\cup S_3|}{2}} =$$

$$= 2^n\cdot\left(\hat{f}(\emptyset)\,\hat{g}(\emptyset)\,\hat{h}(\emptyset)\,3^n - \left(1-\hat{f}(\emptyset)\right)(1-\hat{g}(\emptyset))\left(1-\hat{h}(\emptyset)\right)\right)+$$

$$+2^{3n}\cdot\sum_{\substack{(S_1,S_2,S_3)\text{spec}\\ S_1S_2,S_3\neq\emptyset}} \hat{f}(S_1)\,\hat{g}(S_2)\,\hat{h}(S_3)\,(1/4)^{\frac{|S_1\cup S_2\cup S_3|}{2}}\cdot(3/4)^{n-\frac{|S_1\cup S_2\cup S_3|}{2}} -$$

$$-\hat{f}(S_1)\,\hat{g}(S_2)\,\hat{h}(S_3)\,(1/4)^{\frac{|S_1\cup S_2\cup S_3|}{2}}\cdot(3/4)^{n-\frac{|S_1\cup S_2\cup S_3|}{2}} +$$

$$+2^{3n}\cdot\sum_{\substack{(S_1,S_2,S_3)\text{spec}\\ S_1=\emptyset,S_2=S_3=T}} \hat{f}(\emptyset)\,\hat{g}(T)\,\hat{h}(T)\,(1/4)^{\frac{|S_1\cup S_2\cup S_3|}{2}}\cdot(3/4)^{n-\frac{|S_1\cup S_2\cup S_3|}{2}} -$$

$$-\left(1-\hat{f}(\emptyset)\right)\hat{g}(T)\,\hat{h}(T)\,(1/4)^{\frac{|S_1\cup S_2\cup S_3|}{2}}\cdot(3/4)^{n-\frac{|S_1\cup S_2\cup S_3|}{2}} +$$

$$+2^{3n}\cdot\sum_{\substack{(S_1,S_2,S_3)\text{spec}\\ S_2=\emptyset,S_1=S_3=T}} \hat{f}(T)\,\hat{g}(\emptyset)\,\hat{h}(T)\,(1/4)^{\frac{|\emptyset\cup T\cup T|}{2}}\cdot(3/4)^{n-\frac{|\emptyset\cup T\cup T|}{2}} -$$

$$-\hat{f}(T)\,(1-\hat{g}(\emptyset))\,\hat{h}(T)\,(1/4)^{\frac{|\emptyset\cup T\cup T|}{2}}\cdot(3/4)^{n-\frac{|\emptyset\cup T\cup T|}{2}} +$$

$$+2^{3n}\cdot\sum_{\substack{(S_1,S_2,S_3)\text{spec}\\ S_3=\emptyset,S_1=S_2=T}} \hat{f}(T)\,\hat{g}(T)\,\hat{h}(\emptyset)\,(1/4)^{\frac{|\emptyset\cup T\cup T|}{2}}\cdot(3/4)^{n-\frac{|\emptyset\cup T\cup T|}{2}} -$$

$$-\hat{f}(T)\,\hat{g}(T)\left(1-\hat{h}(\emptyset)\right)(1/4)^{\frac{|\emptyset\cup T\cup T|}{2}}\cdot(3/4)^{n-\frac{|\emptyset\cup T\cup T|}{2}} =$$

$$=\left((1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)+p_1p_2p_3-\frac{(\langle\langle f,g\rangle\rangle+\langle\langle g,h\rangle\rangle+\langle\langle h,f\rangle\rangle)}{3}\right)(2/3)^n.$$

Átosztva $(2/3)^n$-nel kapjuk az állítást. □

Amennyiben $f,g,h$ ugyanazok a függvények, amiből már következik, hogy $p = p_1 = p_2 = p_3$, akkor 5.2.2 egyenlet tovább egyszerűsödik:

$$W = p^3 + (1-p)^3 - \sum_{S\neq\emptyset}\hat{f}(S)^2\,(1/3)^{|S|-1} \tag{5.2.10}$$

## 5.3. Gulibaud formula

Gulibaud formulája azt adja meg, hogy amennyiben lerögzítjük az $f,g,h$ függvényeket a majoráns függvényre $n$-et páratlannak választjuk, és tartunk vele a végtelenbe, akkor mi a valószínűsége, hogy racionális profilt kapunk, vagyis egy valódi sorrend lesz a végeredmény. Legyen ez a valószínűség $G(3) = \lim_{n\to\infty} G(n,3)$. Gulibaud formulája a következőt adja:

$$G(3) = \frac{3}{4} + \frac{3}{2\pi}\arcsin\frac{1}{3} \approx 0{,}91226. \tag{5.3.1}$$

Gulibaud a formulájához, ami 1952-ből származik a bizonyításhoz, csak annyit írt, hogy 'a kombinatorikai analízisbeli szokásos módon'. Az első publikált bizonyítás Gramantól és Kamientől származik 1968-ból, de végül sokan belátták. A formulát nem látjuk be, de bebizonyítjuk egy közeli becslését:

**5.3.1. Állítás.**

$$0{,}9092 \leq G(3) \leq 0{,}9192 \tag{5.3.2}$$

*Bizonyítás.* Felhasználva a Condorcet paradoxon valószínűségének egyszerűbb 5.2.10-as egyenletét, kapjuk hogy

$$1 - G(3,n) = \frac{1}{4} - \sum_{S\neq\emptyset} \hat{f}(S)^2 (1/3)^{|S|-1}.$$

Vezessük be a következő jelölést: ha $n = 2m+1$, akkor $d_m = \sum_{k=1}^{2m+1} \hat{f}(k)^2$. $d_m \leq \sum_{S\neq\emptyset} \hat{f}(S)^2 (1/3)^{|S|-1}$, mivel minden páros $|S| > 0$-ra a majoráns függvény páratlansága miatt felhasználva a 4.2.1 állítást $\hat{f}(S) = 0$. Ebből már következik, hogy

$$1 - G(3,n) = \frac{1}{4} - d_m.$$

Mivel a $d_m$ függvény felülről tart $\frac{1}{2\pi}$-hez, ezért

$$1 - G(3,n) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \approx 1 - 0{,}9092.$$

A majoráns függvény esetén ugyanakkora valószínűséggel lesz a függvény értéke 1 mint 0, tehát $\|f\|^2 = E[f] = \hat{f}(\emptyset)^2 = 1/2$. A Parseval-tétel alapján $1/2 = \sum_{S\neq\emptyset} \hat{f}(S)^2$, ha ezt átrendezzük a következő egyenlőséget kapjuk:

$$\sum \left\{ \hat{f}(S)^2 : |S| \geq 3 \right\} = \frac{1}{2} - \hat{f}(\emptyset)^2 - \sum_{k=1}^{n} \hat{f}(k)^2 = \frac{1}{4} - d_m.$$

Felhasználva ezt az egyenletet, és azt hogy $9 \geq \left(-\frac{1}{3}\right)^{|S-1|}$ minden páratlan $|S| \geq 3$-ra:

$$1 - G(3,n) = 1/4 - d_m - \sum_{|S|\geq 3} \hat{f}(S)^2 (1/3)^{|S|-1} \geq$$

$$\geq \frac{1}{4} - d_m - (1/4 - d_m)\frac{1}{9} = \frac{2}{9} - \frac{8}{9}d_m \geq \frac{2}{9} - \frac{8}{9}\cdot\frac{1}{2\pi} \approx 1 - 0{,}9192. \tag{5.3.3}$$

□

## 5.4. Arrow tétele

Ebben a részben Arrow tételét fogjuk bebizonyítani három jelöltre a $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ függvények segítségével, abban az esetben, ha a szavazás semleges, vagyis invariáns a jelöltek permutációjára. A semlegességből következik, hogy $f, g, h$ torzítatlanok, vagyis $p = p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{2}$. Ehhez először a következő lemmát bizonyítjuk:

**5.4.1. Lemma.** Ha $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ olyan logikai függvény, hogy $\hat{f}(S) = 0$, ha $|S| > 1$, akkor $f$ vagy konstans függvény, $f \equiv 0$ vagy 1, vagy diktátor, vagy negált diktátor függvény, vagyis $f(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ vagy $1 - x_i$ valamilyen $i$-re.

*Bizonyítás.* Mivel $\hat{f}(S) = 0$, ha $|S| > 1$, valamint felhasználva a 3.2.3 egyenletet, ezért $\|f\|^2 = \hat{f}(\emptyset) + \sum_{k=1}^{n} \hat{f}(k)^2 = \Pr\{x : f(x) = 1\} = p$ . Ugyanakkor $\hat{f}(\emptyset) = p = \|f\|^2$, így átrendezve kapjuk, hogy $\sum_{k=1}^{n} \hat{f}(k)^2 = p - p^2$. Feltehetjük, hogy $p \geq 1/2$, mert ha nem, akkor $f$ helyett számolhatunk, $1 - f$-fel. Az $x^2$ függvény szigorú konvexitása miatt használhatjuk a Jensen-egyenlőséget, amivel kapjuk, hogy $\sum_{k=1}^{n} \left|\hat{f}(k)\right| \geq \sqrt{p - p^2}$, és egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, ha létezik pontosan egy $i$, amire $\hat{f} \neq 0$. Feltehetjük, hogy $p \neq 0{,}1$, hiszen ha valamelyikkel egyenlő, akkor a konstans függvényt kapjuk. Legyen $x = (x_1, \ldots, x_n)$ úgy megválasztva, hogy $x_i = \begin{cases} 1 & \text{ha} \hat{f}(i) \leq 0 \\ 0 & \text{ha} \hat{f}(i) > 0 \end{cases}$. Ekkor felírva $f(x)$ Fourier sorát a következőt kapjuk: $f(x) = \hat{f}(\emptyset) + \sum_{i:\hat{f}(i) \leq 0} \hat{f}(i)(-1) + \sum_{i:\hat{f}(i) > 0} \hat{f}(i)(-1)^0 = p + \sum_{i=1}^{n} \left|\hat{f}(i)\right| \geq p + \sqrt{p - p^2}$. Mivel $p \neq 0$, ezért $f(x) \neq 0$. Az egyenlőtlenség jobb oldala viszont az $[1/2,1)$ intervallumban csak akkor 1,ha $p = 1/2$, különben nagyobb mint 1. Vagyis az egyenlőtlenségnek igazából egyenlőségnek kell lennie, tehát $p = 1/2$, és létezik pontosan 1 darab $i$, hogy $\left|\hat{f}(i)\right| = 1/2$. Ebben az esetben pedig $f$ a diktátor vagy a negált diktátor függvény. □

Most, hogy a lemmát bebizonyítottuk már bebizonyíthatjuk Arrow tételét is.

**5.4.1. Tétel** (Arrow tétele, semleges esetben, Gil Kalai [6]). *Vegyünk egy semleges Condorcet szavazást, melynek legalább 3 jelöltje van, és teljesíti az egyhangúság feltételét. Ekkor minden nemdiktatórikus szavazásnál a valószínűsége a Condorcet paradoxonnak nem 0.*

*Bizonyítás.* Definiáljuk a következő két függvényt:

$$\overline{f} = \sum_{S \neq \emptyset} \hat{f}(S)\, u_S \text{ és } f' = \sum_{S \neq \emptyset} \hat{f}\left(-\frac{1}{3}\right)^{|S|-1}(S)\, u_S,$$

valamint ugyanígy értelmezzük $\overline{g}, g', \overline{h}, h'$ függvényeket is. A továbbiakban fontosak lesznek ezek norma négyzetei. $\left\|\overline{f}\right\|^2 = \|f\|^2 - \hat{f}(\emptyset)^2 = p - p^2 = 1/2 - 1/4 = 1/4$, mivel feltettük a semlegességet, amiből következik, hogy $p = 1/2$. Mármint $\|f'\|^2 = \sum_{S \neq \emptyset} \hat{f}^2\left(-\frac{1}{3}\right)^{2(|S|-1)} = \sum_{S \neq \emptyset} \hat{f}^2\left(\frac{1}{9}\right)^{|S|-1} \leq \left\|\overline{f}\right\|^2 = 1/4$, és egyenlőség akkor és csak akkor van, ha minden $|S| > 1$-re $\hat{f}(S) = 0$.

Vegyük a 5.2.2-ben leírt kettős skalárszorzatát $f$ és $g$-nek, ami egyenlő $f'$ és $\overline{g}$ skalárszorzatával. Majd erre alkalmazzuk rá a Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij egyenlőtlenséget:

$$\langle\langle f,g\rangle\rangle = \sum_{\emptyset\neq S\subseteq[n]} \hat{f}(S)\,\hat{g}(S)\,(-1/3)^{|S|-1} = \langle f',\overline{g}\rangle \leq \sqrt{\|f'\|^2\,\|\overline{g}\|^2} \leq 1/4.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $f' = f = g$, valamint akkor éri el az $1/4$-et, ha minden $|S| > 1$-re $\hat{f}(S) = 0$. Felhasználva a 5.4.1 lemmát kapjuk, hogy $f$ és $g$ diktátor ugyanarra az $i$-re nézve, mert a semlegesség miatt nem lehetnek konstans függvények. Az $f,h$ és $g,h$ párokra ugyanezek teljesülnek.

Viszont ha azt szeretnénk, hogy a Condorcet paradoxon bekövetkezzen és ennek a valószínűsége 0 legyen, akkor a 5.2.2 tételben szereplő $W$-nek 0-nak kell lennie, és mivel $p = 1/2$, ezért annak kell teljesülnie, hogy

$$\langle\langle f,g\rangle\rangle + \langle\langle f,h\rangle\rangle + \langle\langle g,h\rangle\rangle = 3/4.$$

Ez pedig csak akkor teljesülhet, ha $f = g = h = x_i$, valamilyen $i \in [n]$-re, vagyis mind a három ugyanaz a diktátor függvény. □

## 5.5. Arrow tételéhez kapcsolódó állítások

Tudjuk, hogy ahhoz, hogy egy szavazás igazságos legyen, mindenképp fel kell tenni, hogy torzítatlan és monoton. Viszont van még egy módja annak, hogy hogyan zárjuk ki a diktatúra valószínűségét, méghozzá az ha feltesszük, hogy minden szavazónak kellően kicsi a befolyása a végkimenetre.

**5.5.1. Definíció.** Azt mondjuk, hogy egy $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ függvény befolyásai **$\tau$-kicsi**k, ha $Inf_i(f) \leq \tau$ minden $i \in [n]$ esetén.

A $\tau$-t általában úgy választják, hogy kellően kicsi, hogy $o(1)$ rendű legyen $n$-ben, ezzel egyértelműen kizárva a diktátor függvényt, viszont megengedve a majoráns, elektori és törzsi szavazást. Először Kahn, Kalai és Linial foglalkoztak bővebben ezzel a témával és fogalmazták meg a következő tételt:

**5.5.2. Tétel** (KKL tétel, Kahn, Kalai, Linial [10])**.** *Nem létezik olyan torzítatlan $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ függvény, melynek a befolyásai $o\left(\frac{\log n}{n}\right)$-kicsik. Általánosabban, ha $f$ torzítatlan $\tau$-kicsi befolyásokkal, akkor $I(f) \geq \Omega(\log 1/\tau)$*

□

Felmerül a kérdés, hogy a majoráns, elektori és törzsi szavazás közül, melyiknél van a legkisebb valószínűsége a Condorcet paradoxon bekövetkeztének, ami egyet jelent azzal, hogy a $Stab_{-1/3}(f)$-et akarjuk, hogy minél negatívabb legyen. Ugyanakkor az is egy jogos feltevés, hogy az $f$ függvény páratlan legyen. Ekkor mivel igaz a 4.2.1 állítás valamint a 4.6.4 felírása a zaj stabilitásának, ezért $Stab_{-p}(f) = -Stab_p(f)$. Emiatt érdekes lehet azoknál a függvényeknél vizsgálni, melyek páratlanok, torzítatlanok, $o(1)$ befolyásuk. A következő tétel $p \neq 1/3$-ra is tekinti ezeket a függvényeket, vagyis a páratlan kicsi befolyású függvények között a legstabilabb a majoráns függvény.

**5.5.3. Tétel** (Majoráns függvény a legstabilabb, Ryan O'Donnell [10]). *Ha* $f : \{-1{,}1\}^n \to \{-1{,}1\}$ *torzítatlan függvény,* $o(1)$ *befolyásokkal és* $0 \leq p \leq 1$*, akkor* $Stab_p(f) \leq 1 - \frac{2}{\pi}\arccos p + o(1)$*. Ha* $-1 \leq p \leq 0$*, akkor* $Stab_p(f) \geq 1 - \frac{2}{\pi}\arccos p - o(1)$*. Az* $E[f] = 0$ *feltétel szükséges.*

□

A 5.5.3 egyenlőség miatt a $o(1)$ befolyású függvények között a majoráns függvény a legracionálisabb, ha egy konstanstól eltekintünk.

Sok esetben már láttuk, hogy bizonyos feltételek mellett a majoráns függvény a legjobb szavazási forma, amit használhatunk. De sajnos a majoráns függvény esetén továbbra is elég magas a Condorcet paradoxon bekövetkeztének valószínűsége. A kérdés, hogy van-e olyan függvény, amelynél a Condorcet paradoxon bekövetkezte nagyon kicsi, de a függvény nem a diktatúra. Sajnos azt kell látnunk, hogy ez a két tulajdonság kéz a kézben jár, ugyanis ha nagyon kicsi a paradoxon bekövetkeztének valószínűsége, akkor az a szavazás függvénye nagyon közel van a diktátor függvényhez vagy a konstans függvényhez. Ezt fogalmazza meg Friedgut Kalai és Naor tétele, amelyet 2002-ben bizonyítottak be:

**5.5.4. Tétel** (Friedgut-Kalai-Naor, [6]). *Ha* $f : \{0{,}1\}^n \to \{0{,}1\}$ *olyan logikai függvény, hogy* $\|f\|^2 = p$*, akkor ha* $\sum\limits_{|S|>1} \hat{f}(S)^2 \leq \delta$*, akkor vagy* $p < K'\delta$ *vagy* $p > 1 - K'\delta$ *vagy* $\|f(x_1, \ldots, x_n) - x_i\|^2 \leq K\delta$ *vagy* $\|f(x_1, \ldots, x_n) - (1 - x_i)\|^2 \leq K\delta$ *valamilyen i-re, ahol* $K'$ *és* $K$ *konstansok.*

□

## Irodalomjegyzék


[1] K. J. Arrow. A Difficulty in the Concept of Social Welfare. *Journal of Political Economy*, 58(4):328–346, 1950. 8

[2] K. J. Arrow. *Social Choice and Individual Values*. Yale University Press, 2nd edition, 1963. 8

[3] M. H. Birnbaum and R. J. Gutierrez. Testing for intransitivity of preferences predicted by a lexicographic semi-order. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, 104(1):96–112, 2007. 3

[4] D. Easley and J. Kleinberg. *Networks, crowds, and markets: Reasoning about a highly connected world*. Cambridge University Press, 2010. 2

[5] C. for Mathematics and I. A. (US). *For all practical purposes: mathematical literacy in today's world*. Macmillan, 2003. 6

[6] G. Kalai. A Fourier-theoretic perspective on the Condorcet paradox and Arrow's theorem. *Advances in Applied Mathematics*, 29(3):412–426, 2002. 8, 27, 30, 34, 36

[7] J. S. Kelly. An interview with Kenneth J. Arrow. *Social Choice and Welfare*, 4(1):43–62, 1987. 8

[8] T. Kurics. Bevezetés a funkcionálanalízisbe, 2002. 9, 10

[9] R. O'Donnell. Some topics in analysis of boolean functions, 2011. 15, 27

[10] R. O'Donnell. *Analysis of boolean functions*. Cambridge University Press, 2014. 11, 12, 13, 15, 16, 21, 23, 25, 27, 28, 35, 36

[11] A. Tversky. *Preference, belief, and similarity: selected writings*. MIT Press, 2004. 3