Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Nagy István

Matematika BSc

Alkalmazott matematikus szakirány

Mikro-tangens halmazok

szakdolgozat

Témavezető: Buczolich Zoltán

egyetemi tanár

Analízis Tanszék

Budapest, 2016

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Buczolich Zoltánnak, a témaválasztás lehetőségéért, illetve azért, mert ötleteivel, tanácsaival és építő kritikájával segítette szakdolgozatom elkészítését.
Köszönettel tartozom még volt tanáromnak, Sajtósné Király Mariannának, mert biztosította, hogy szilárd matematikai alapokkal hagyjam magam mögött a középiskolát, ezzel megteremtve a lehetőséget arra, hogy tanulmányaimat ilyen irányban folytathassam.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Folytonos függvények lokális vizsgálatának fő eszköze, a matematikai analízis egyik klasszikus fogalma a differenciálhányados. A XIX. században Ampére még úgy vélte, hogy a folytonos függvények összessége az értelmezési tartományuk belső pontjaiban egy-egy kivételes pontot eltekintve differenciálhatóak. Bolzano és Weierstrass voltak az elsők, akik először példát adtak olyan folytonos függvényekre, melyek sehol sem differenciálhatóak, és bár kezdetben a kor matematikusai nem mutattak túl nagy érdeklődést irántuk, később kiderült, hogy nem csak léteznek ilyen függvények, de bizonyos értelemben ezek vannak többségben. Ezen okból kifolyólag kifejezetten indokolt a lokális vizsgálatok más irányú megközelítése. Egy ilyen lehetséges eszköz a mikro-tangens halmaz fogalma, melynek alapgondolata magának a függvény grafikonjának a vizsgálata. Szakdolgozatom célja a mikro-tangens halmazok fogalmának bevezetése, és az ehhez szükséges matematikai ismeretek tárgyalása, illetve a 3. fejezetben egy, a Lipschitz-folytonos függvényekkel kapcsolatos állítás bizonyítása. A metrikus terek általános elméletéhez a fő forrás [1], míg a Hausdorff-távolsághoz [2], a Baire-féle kategória-tételéhez [3] volt. A mikro-tangens halmazokhoz tartozó definíciók és állítások [4]-ből, míg a 3. fejezetben a Lipschitz-folytonos függvények szeparábilitására vonatkozó állítás bizonyításának alapjai [6]-ból, ezen bevezetőben megemlített matematikatörténeti megjegyzések pedig [7]-ből származnak.

1. fejezet

Metrikus terek

1.1. A metrikus tér fogalma

Egy valós számsorozatot konvergensnek mondunk, ha létezik egy olyan szám, hogy minden $\epsilon > 0$ esetén ettől a számtól ϵ-nál távolabb a sorozatnak csak véges sok tagja van. Ebben az esetben a távolság fogalma magától adódik, de felmerül a kérdés, ha a vizsgált terünk absztraktabb, elemei például függvények, hogyan definiálható rajta a távolság. Ezen kérdés megválaszolására szolgálnak az úgynevezett metrikus terek.

1.1.1. Definíció. *Legyen X adott, nemüres halmaz és $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ függvény. Azt mondjuk, hogy ρ metrika X-en, ha minden $x, y, z \in X$ pontra teljesülnek a következők:*

1. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Metrikus téren egy (X, ρ) párt értünk, ahol X az alaphalmaz, ρ pedig egy rajta értelmezett metrika.

1.1.2. Megjegyzés. Ha ρ metrika, akkor ahogy az egy távolságfogalomtól elvárható, természetesen nemnegatív, hiszen:

$$0 = \rho(x, x) \leq \rho(x, y) + \rho(y, x) = 2\rho(x, y).$$

1.1.3. Definíció. *Legyen $A \subset X$.*

- *Az $x_0 \in X$ középpontú $r > 0$ sugarú nyílt gömbön a*
$$B(x_0, r) := \{y \in X : \rho(x_0, y) < r\}$$
halmazt értjük.

- *A nyílt, ha minden $x \in A$ ponthoz létezik $\epsilon > 0$, hogy $B(x, \epsilon) \subset A$.*

- *A zárt, ha komplementere nyílt.*

- $\operatorname{int} A := \bigcup\{G \subset A : G$ *nyílt*$\}$ *az A belseje.*

- $\overline{A} := \bigcap\{F \supset A : F$ *zárt*$\}$ *az A lezártja.*

- *A korlátos, ha létezik egy $B(x, r)$ nyílt gömb, hogy $A \subset B(x, r)$.*

Valós számsorozatok esetében a határérték ismerete nélkül is eldönthető a konvergencia, a Cauchy-féle konvergenciakritériummal, miszerint ha a sorozat konvergens akkor a tagjainak a távolsága tetszőlegesen közel vannak egymáshoz egy alkalmasan megválasztott küszöbindextől kezdve. Azonban egy tetszőleges metrikus térben elképzelhető, hogy egy sorozatra teljesül a Cauchy-kritérium, a határérték "mégsincs benne a térben". Példa erre, ha $\mathbb{Q}$-t, mint $\mathbb{R}$ alterét tekintjük, és egy racionális sorozattal közelítünk egy irracionális számhoz.

1.1.4. Definíció. *Egy $x_n \in X$ sorozatról azt mondjuk, hogy*

- *x_n konvergens, ha létezik olyan $x \in X$ pont, hogy $\rho(x_n, x) \to 0$.*

- *x_n Cauchy-sorozat, ha minden $\epsilon > 0$ számhoz létezik olyan n_0 küszöbindex, hogy minden $n, m \geq n_0$ esetén $\rho(x_n, x_m) < \epsilon$.*

- *Egy (X, ρ) metrikus tér teljes, ha minden Cauchy-sorozat konvergens.*

1.1.5. Állítás. *Ha $x_{n,m} \in X$ olyan, hogy $x_{n,m} \to x_n$, ha $m \to \infty$ és $x_n \to x$, ha $n \to \infty$, akkor létezik a természetes számoknak olyan $\sigma(n)$ részsorozata, hogy $x_{n,\sigma(n)} \to x$.*

Bizonyítás. Legyen $\sigma(n)$ olyan, szigorúan monoton növekvő sorozat, hogy
$|x_{n,\sigma(n)} - x_n| < \frac{1}{n}$, így
$$|x_{n,\sigma(n)} - x| \leq |x_{n,\sigma(n)} - x_n| + |x_n - x| \to 0.$$
□

1.1.6. Állítás. *Egy $F \subset X$ halmaz pontosan akkor zárt, ha minden benne futó konvergens sorozat határértékét is tartalmazza.*

1.1.7. Definíció. *Egy $K \subset X$ halmaz kompakt, ha minden nyílt fedéséből kiválasztható véges fedés.*

1.1.8. Megjegyzés. Metrikus térben minden kompakt halmaz korlátos és zárt.

1.1.9. Definíció. *Ha (X, ρ) metrikus tér, és $Y \subset X$, akkor Y ellátva a ρ $Y \times Y$-ra történő megszorításával nyilván szintén metrikus tér, melyet az (X, ρ) metrikus tér alterének hívunk.*

1.1.10. Definíció. *Egy (X, ρ) metrikus teret összefüggőnek nevezünk, ha benne csak a teljes tér és az üres halmaz egyszerre nyílt és zárt. Egy $A \subset X$ halmazt összefüggőnek nevezünk, ha a hozzá tartozó altér összefüggő.*

1.1.11. Példa. Példák metrikus terekre:

1. Klasszikus euklideszi tér
   Az $\mathbb{R}^n$ halmazon a szokásos távolságképlet metrikát definiál:
   $$\rho_n(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$
2. Folytonos függvények tere
   A $\mathcal{C}[a, b] := \{f : [a, b] \to \mathbb{R} : f \text{ folytonos}\}$ halmazon definiálható az úgynevezett maximum-metrika:
   $$\rho_\infty(f, g) := \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

1.2. Hausdorff távolság

Mikor mondhatjuk, hogy egy (X, ρ) metrikus tér részhalmaz-sorozata konvergens? Ehhez értelmeznünk kell két halmaz távolságát. Naiv megközelítésben mondhatnánk, legyen A és B halmazok távolsága $\inf\{\rho(a, b) : a \in A, b \in B\}$. Rögtön látszik, hogy ez a definíció nem jó, ugyanis ha $A \cap B \neq \emptyset$, akkor a távolságuk 0. Legyen $K := \{A \subset X \ : A \neq \emptyset,\ A \text{ kompakt}\}$, $x \in X$, $A, B \in K$ és jelölje

$$\hat{\rho}(x, A) := \inf_{a \in A} \rho(x, a),$$

az x pont A halmaztól vett távolságát, illetve

$$\tilde{\rho}(A, B) := \sup_{a \in A} \hat{\rho}(a, B),$$

az A halmaz B halmaztól vett "relatív" távolságát. A relatív jelzőt az indokolja, hogy nem szimmetrikus, hiszen például ha $A \subsetneq B$, akkor $\tilde{\rho}(A, B) = 0$, viszont $\tilde{\rho}(B, A) > 0$.

1.2.1. Definíció. *Az $A, B \in K$ halmazok Hausdorff távolságán azt a $d_H : K \times K \to \mathbb{R}$ függvényt értjük, melyre:*

$$d_H(A, B) = \max\{\tilde{\rho}(A, B), \tilde{\rho}(B, A)\}.$$

Az előző definíció egy lehetséges ekvivalens átfogalmazására ad létjogosultságot a következő állítás, mely szemléletesebben írja le, hogy mit is jelent a Hausdorff távolság. Nevezzük egy $A \subset X$ halmaz *ϵ-felfújtjának* az $E_\epsilon(A) := \bigcup\{B(x, \epsilon) : x \in A\}$ halmazt.

1.2.2. Állítás. $d_h(A, B) = \max\{\inf\{\epsilon > 0 : A \subset E_\epsilon(B)\}, \inf\{\epsilon > 0 : B \subset E_\epsilon(A)\}\}$

Bizonyítás. Mivel $E_\epsilon(B) = \bigcup\{B(x, \epsilon) : x \in B\}$, ezért, ha $A \subset E_\epsilon(B)$, akkor minden $a \in A$ ponthoz létezik olyan $b \in B$, hogy $\rho(a, b) < \epsilon$, azaz $\inf_{b \in B} \rho(a, b) < \epsilon$, így:

$$\inf\{\epsilon > 0 : A \subset E_\epsilon(B)\} = \inf\{\epsilon > 0 : \forall a \in A, \inf_{b \in B} \rho(a, b) < \epsilon\} =$$
$$= \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \rho(a, b) = \tilde{\rho}(A, B).$$

Hasonlóan:

$$\inf\{\epsilon > 0 : B \subset E_\epsilon(A)\} = \tilde{\rho}(B, A).$$

Ezeket behelyettesítve az állítás jobb oldalába, éppen a Hausdorff távolság definícióját kapjuk. $\square$

1.2.3. Lemma. *Legyenek $A, B \in K$. Ekkor minden $a \in A$ ponthoz létezik $b \in B$, hogy*

$$\rho(a, b) \leq d_H(A, B).$$

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy létezik olyan $a \in A$, hogy minden $b \in B$ pontra fennáll:
$\rho(a, b) > d_H(A, B)$. Ekkor $\tilde{\rho}(A, B) = \sup_{a \in A} \hat{\rho}(a, B) > d_H(A, B) = \max\{\tilde{\rho}(A, B), \tilde{\rho}(B, A)\}$, ami nyilvánvalóan ellentmondás. $\square$

1.2.4. Állítás. *A d_H függvény metrikát definiál a K halmazon.*

Bizonyítás. Ellenőrizni kell, hogy teljesülnek-e a metrikus tér axiómái:

1. Tegyük fel, hogy $A = B$. Ekkor:

$$d_H(A,B) = d_H(A,A) = \max\{\tilde{\rho}(A,A), \tilde{\rho}(A,A)\} = \tilde{\rho}(A,A) = \sup_{x\in A} \hat{\rho}(a,A) =$$

$$= \sup_{a\in A} \inf_{a\in A} \rho(x,a) = 0.$$

   Ha $d_H(A,B) = 0$, akkor: $\tilde{\rho}(A,B) = 0 = \tilde{\rho}(B,A)$. Mivel $0 = \tilde{\rho}(A,B) = \sup_{a\in A} \hat{\rho}(a,B)$, ezért tetszőleges $a \in A$ elemre $\rho(a,B) = \inf_{b\in B} \rho(a,b) = 0$, tehát minden $a \in A$ elemhez létezik olyan $b_n \in B$ sorozat, hogy $\lim \rho(a,b_n) = 0$, és mivel B zárt, így $a = \lim b_n \in B$, tehát $A \subset B$.
   Hasonlóan belátható, hogy $B \subset A$, tehát $A = B$.

2. A definícióból közvetlenül adódik.

3. Legyen $a \in A$ tetszőleges. Ekkor az előző lemma szerint létezik $b \in B$, hogy $\rho(a,b) \leq d_H(A,B)$, és b-hez létezik $c \in C$, melyre $\rho(b,c) \leq d_H(B,C)$. Mivel ρ metrika, teljesül a háromszög-egyenlőtlenség, így $\rho(a,c) \leq \rho(a,b) + \rho(b,c) \leq d_H(A,B) + d_H(B,C)$ fennáll minden a-ra, ezért minden $\epsilon > 0$ számra teljesül a

$$E_{d_H(A,B)+d_H(B,C)+\epsilon}(C) \supset A$$

   tartalmazás, illetve ugyanígy belátható, hogy

$$E_{d_H(A,B)+d_H(B,C)+\epsilon}(A) \supset C.$$

   Ezekből, illetve a Hausdorff távolság ekvivalens megfogalmazásából már következik, hogy

$$d_H(A,C) \leq d_H(A,B) + d_H(B,C).$$

□

1.2.5. Megjegyzés. Belátható, hogy ha az (X,ρ) metrikus tér teljes, akkor a (K,d_H) is teljes metrikus tér.

1.2.6. Állítás. *Egy $A_n \in K$ sorozat pontosan akkor tart az $A \in K$ halmazhoz, ha teljesülnek az alábbiak:*

1. Minden $a \in A$ ponthoz létezik $a_n \in A_n$ sorozat, hogy $a_n \to a$.

2. Minden $b_n \in A_n$ konvergens sorozat határértéke A-beli.

Bizonyítás. Definíció szerint $A_n \to A$ pontosan akkor, ha minden $\epsilon > 0$ számhoz létezik n_0 küszöbindex, hogy ha $n \geq n_0$, akkor $d_H(A_n, A) < \epsilon$, azaz

1. $A \subset E_\epsilon(A_n)$ és

2. $A_n \subset E_\epsilon(A)$.

Legyen $a \in A$, és n_m az $\epsilon := 1/m$ választás melletti küszöbindexek szigorúan növő sorozata, és $a_{0,n} \in A_n$ tetszőleges pontsorozat. Legyen $a_{m+1,n} := a_{m,n}$, ha $n \geq n_m$, ellenkező esetben pedig legyen $a_{m+1,n} := x \in A_n$ melyre $\rho(x, a) < 1/m$, ami lehetséges az 1. tartalmazás miatt. Ekkor $a_{n,n} \in A_n$, és $\rho(a_{n,n}, a) < 1/n$, tehát $a_{n,n} \to a$. Ezután tekintsünk egy $b_n \in A_n$ konvergens sorozatot, melynek határértékét jelölje b. Indirekt tegyük fel, hogy $b \notin A$. Mivel A zárt, ezért létezik $r > 0$, hogy minden $a \in A$ esetén $r < \rho(a, b) \leq \rho(a, b_n) + \rho(b_n, b)$, viszont a 2. tartalmazás és b_n konvergenciája miatt létezik $a \in A$ és $n \in \mathbb{N}$, hogy $\rho(a, b_n) + \rho(b_n, b) < r$, ami ellentmondás. $\square$

1.2.7. Állítás. *Legyenek $A_n, A, B \in K$ halmazok, melyekre $A_n \cap B \neq \emptyset$ és $A \cap B \neq \emptyset$. Tegyük fel, hogy $A_n \to A$ és $A \cap B = \overline{A \cap \operatorname{int} B}$. Ekkor létezik a természetes számoknak olyan $\sigma(n)$ részsorozata, hogy $A_{\sigma(n)} \cap B \to A \cap B$.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy a természetes számok minden $\sigma(n)$ részsorozatára $A_{\sigma(n)} \cap B \nrightarrow A \cap B$. Az előző állítás szerint, és mivel $A_n \to A$, létezik $b_{\sigma(n)} \in A_{\sigma(n)} \cap B$ konvergens sorozat, hogy a határértéke nem eleme az $A \cap B$ halmaznak, így $\lim b_{\sigma(n)} \in A \setminus B$, de B zártsága miatt ez nem lehetséges, tehát létezik $a \in A \cap B$, hogy minden $a_{\sigma(n)} \in A_{\sigma(n)} \cap B$ sorozat esetén $a_{\sigma(n)} \nrightarrow a$, és létezik $c_{\sigma(n)} \in A_{\sigma(n)} \setminus B$, melyre $c_{\sigma(n)} \to a$. Tegyük fel, hogy $a \in \operatorname{int} B$. Ekkor létezik $r > 0$, hogy $B(a, r) \subset B$, és $c_{\sigma(n)}$ konvergenciája miatt létezik n_0, hogy ha $n \geq n_0$, akkor $c_{\sigma(n)} \in B(a, r) \subset B$, ami ellentmondás, azaz $a \in B \setminus \operatorname{int} B$. Mivel $A \cap B = \overline{A \cap \operatorname{int} B}$, ezért létezik $x_m \in A \cap \operatorname{int} B$, hogy $x_m \to a$, és az előbbiek szerint létezik $x_{m,\sigma(n)} \in A_{\sigma(n)} \cap B$, hogy $x_{m,\sigma(n)} \to x_m$. Ekkor $x_{n,\sigma(n)} \in A_{\sigma(n)} \cap B$, és ekkor 1.1.5. állítás szerint létezik olyan $\tau(n)$, hogy $x_{n,\tau(n)} \to a$, tehát $A_{\tau(n)} \cap B \to A \cap B$. $\square$

1.3. Baire-féle kategória tétel

1.3.1. Definíció. *Egy $A \subset X$ halmazról azt mondjuk, hogy*

- *A sűrű, ha minden $x \in X$ pontra és minden $\epsilon > 0$ számra $B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$.*
- *A sehol sem sűrű, ha $\operatorname{int} \overline{A} = \emptyset$.*
- *A első kategóriájú, ha előáll megszámlálható sok sehol sem sűrű halmaz uniójaként.*
- *A reziduális, ha egy első kategóriájú halmaz komplementere.*

1.3.2. Megjegyzés. Legyen $A \subset X$ sehol sem sűrű halmaz. Ekkor:

- Minden $B \subset A$ halmaz sehol sem sűrű.
- $X \setminus A$ sűrű.

Bizonyítás.

- $B \subset A \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A} \Rightarrow \operatorname{int} \overline{B} \subset \operatorname{int} \overline{A} = \emptyset \Rightarrow \operatorname{int} \overline{B} = \emptyset$.
- Indirekt tegyük fel, hogy tetszőleges $B \subset X$ nyílt gömbre:

  $$\emptyset = B \cap (X \setminus A) = B \setminus A.$$

  Ez pontosan akkor teljesül, ha $B \subset A$, tehát B sehol sem sűrű halmaz, ami ellentmondás.

□

1.3.3. Állítás. *Sűrű nyílt halmazok megszámlálható metszete reziduális halmaz.*

Bizonyítás. Legyen $G := \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, ahol minden n-re $G_n \subset X$ sűrű, nyílt halmaz. Mivel $X \setminus G = \bigcup_{n=1}^{\infty}(X \setminus G_n)$, elég megmutatni, hogy $X \setminus G_n$ sehol sem sűrű. Mivel G_n nyílt, ezért $X \setminus G_n$ zárt, tehát $\overline{X \setminus G_n} = X \setminus G_n$, így

$$\operatorname{int}(X \setminus G_n) = \bigcup \{A \text{ nyílt} : A \subset X \setminus G_n\} = \{A \text{ nyílt} : A \subset X \text{ és } A \cap G_n = \emptyset\}.$$

Mivel G_n sűrű, így minden $A \subset X$ nyílt halmazra $A \cap G_n \neq \emptyset$, tehát $\operatorname{int}(X \setminus G_n) = \emptyset$.
□

1.3.4. Tétel. (Bair-féle kategória tétel) *Legyen (X, ρ) teljes metrikus tér, és $S \subset X$ első kategóriájú halmaz. Ekkor $X \setminus S$ sűrű.*

Bizonyítás. Legyen $S := \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ sehol sem sűrű halmazok megszámlálható egyesítése, és legyen B_0 tetszőleges nyílt gömb. Meg kell mutatni, hogy $B_0 \cap (X \setminus S) \neq \emptyset$. Definiáljuk $B_n := B(x_n, r_n)$ nyílt gömbök sorozatát úgy, hogy minden n-re $r_n < 1/n$ és

$$\overline{B_{n+1}} \subset B_n \setminus \overline{S_{n+1}}.$$

Ezt megtehetjük, hiszen $B_n \setminus \overline{S_{n+1}} \neq \emptyset$, így létezik $x_{n+1} \in B_n \setminus \overline{S_{n+1}}$, és mivel $\overline{S_{n+1}}$ zárt, ezért

$$\hat{\rho}(x_{n+1}, \overline{S_{n+1}}) > 0.$$

Az x_n sorozat Cauchy, ugyanis tetszőleges N esetén, ha $n, m > N$, akkor:

$$\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x_N) + \rho(x_N, x_m) < 2/N.$$

Mivel X teljes, ezért létezik $x \in X$, hogy $x_n \to x$, és $x_{n+1} \in \overline{B_n}$ minden n-re, tehát:

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B_n} \subset B_0 \cap (X \setminus S).$$

□

1.3.5. Megjegyzés. A mértékelméletben használatos majdnem-mindenütt terminológiához hasonlóan, teljes metrikus térben azt mondjuk, hogy egy tulajdonság *tipikusan teljesül*, ha a tér pontjain egy első kategóriájú halmazon kívül mindenütt fennáll.

1.3.6. Példa. A tipikus valós számok irracionálisak, ugyanis a racionális számok halmaza első kategóriájú, hiszen $\mathbb{Q} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}$.

A bevezetőben említésre került, hogy a folytonos függvények körében azok függvények vannak bizonyos értelemben többségben, melyek az értelmezési tartományuk egyetlen pontjában sem differenciálhatóak. Ennek a kijelentés magyarázatára szolgál a következő, [3]-ból származó állítás:

1.3.7. Állítás. *A tipikus folytonos függvények sehol sem differenciálhatóak, azaz a sehol sem differenciálható függvények halmaza reziduális a $\mathcal{C}[a, b]$ téren.*

2. fejezet

Mikro-tangens halmazok

Legyen $\delta > 0$, $(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^2$. Jelölje a tengelyekkel párhuzamos, 2δ oldalhosszúságú, $(x_0; y_0)$ középpontú zárt négyzetet $Q((x_0; y_0), \delta)$, azaz:

$$Q((x_0; y_0), \delta) := \{(x; y) : |x - x_0| \leq \delta, \text{ és } |y - y_0| \leq \delta\},$$

illetve az egyszerűség kedvéért, ha az origó a középpont és az oldalhossz 2, akkor:

$$Q^2 := Q((0; 0), 1).$$

Ha $A \subset \mathbb{R}^2$, akkor jelölje $CENT(A)$ az $A \cap Q^2$ origót tartalmazó összefüggő részét. Tekintsünk egy $f \in \mathcal{C}[0, 1]$ függvényt, és egy $x_0 \in (0, 1)$ pontot. Legyen $\delta > 0$, és vegyük az

$$F(f, x_0, \delta) := \frac{1}{\delta}\Big((\operatorname{graph}(f) \cap Q((x_0; f(x_0)), \delta)) - (x_0; f(x_0))\Big)$$

transzformációt, ahol $\operatorname{graph}(f) := \{(x; f(x)) : x \in [0, 1]\}$ az f grafikonja.

2.0.8. Definíció. *A F halmaz az f függvény x_0-beli mikro-tangens halmaza ($F \in f_{MT}(x_0)$), illetve centrális mikro-tangens halmaza ($F \in f_{CMT}(x_0)$), ha létezik $\delta_n \searrow 0$ sorozat, hogy $F(f, x_0, \delta_n)$, illetve $CENT(F(f, x_0, \delta_n))$ konvergál F-hez a Hausdorff metrikában.*

2.0.9. Állítás. *Legyen $f \in \mathcal{C}[0, 1]$ és $x_0 \in (0, 1)$. Ekkor $f_{MT}(x_0)$ zárt halmaz.*

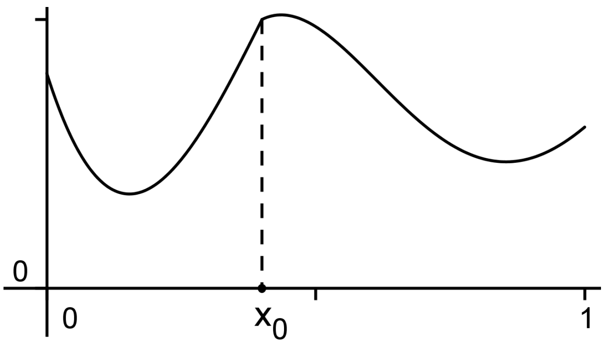
Bizonyítás. Legyen $F_n \in f_{MT}(x_0)$ olyan, hogy $F_n \to F$. Definíció szerint így minden n-re létezik olyan $\delta_{n,m}$ sorozat, hogy $F(f, x_0, \delta_{n,m}) \to F_n$, ekkor az 1.1.5. állítás szerint létezik olyan $\sigma(n)$, hogy $F(f, x_0, \delta_{n,\sigma(n)}) \to F$, azaz $F \in f_{MT}(x_0)$, tehát $f_{MT}(x_0)$ zárt halmaz. $\square$

2.0.10. Állítás. *Ha f-nek x_0-ban léteznek a jobb és baloldali deriváltjai, akkor*

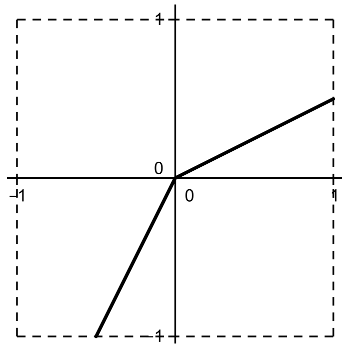
$$f_{MT}(x_0) = \{\mathrm{graph}(g) \cap Q^2\},$$

ahol

$$g(x) = \begin{cases} \Big(\lim\limits_{h \to 0-0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\Big)x, & ha\ x \leq 0, \\[2ex] \Big(\lim\limits_{h \to 0+0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\Big)x, & ha\ x > 0. \end{cases}$$



2.1. ábra. $f \in \mathcal{C}[0,1]$



2.2. ábra. $\mathrm{graph}(g) \cap Q^2$

Bizonyítás. Tetszőleges $0 \neq x \in (-1,1)$ pont, és minden $\delta_n \searrow 0$ sorozat esetén:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0+\delta_n x) - f(x_0)}{\delta_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(f(x_0+\delta_n x) - f(x_0))x}{\delta_n x} =$$

$$= \Big(\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0+\delta_n x) - f(x_0)}{\delta_n x}\Big)x,$$

ahol a limesz δ_n tulajdonságai miatt, x előjelétől függően megegyezik a jobb illetve baloldali deriválttal. □

Jelölje $\mathcal{C}[-1,1]_0 := \{g : g \in \mathcal{C}[-1,1],\ \text{és } g(0) = 0\}$ halmazt.

2.0.11. Definíció. *Az x_0 az f függvény grafikon-szerű mikro-tangens pontja, illetve centrális grafikon-szerű mikro-tangens pontja, ha létezik olyan $g \in \mathcal{C}[-1,1]_0$, hogy* $\mathrm{graph}(g) \cap Q^2 \in f_{MT}(x_0)$, *illetve* $\mathrm{graph}(g) \cap Q^2 \in f_{CMT}(x_0)$. *Vezessük be a következő halmazokat:*

$$GLMT(f) := \{(x; f(x)) : x \text{ grafikon-szerű mikro-tangens pontja } f\text{-nek}\},$$

$$CGLMT(f) := \{(x; f(x)) : x \text{ centrális grafikon-szerű mikro-tangens pontja } f\text{-nek}\}.$$

2.0.12. Definíció. *Az x_0 az f függvény univerzális mikro-tangens pontja, ha minden $g \in \mathcal{C}[-1,1]_0$ függvényre* $\mathrm{graph}(g) \cap Q^2 \in f_{MT}(x_0)$*, és legyen*

$$UMT(f) := \{(x; f(x)) : x \text{ univerzális mikro-tangens pontja } f\text{-nek}\}.$$

Adott f folytonos függvényre, értelmezési tartományának minden x_0 belső pontjára és tetszőleges $\delta_n \searrow 0$ sorozatra, nyilván minden n-re létezik olyan $g \in \mathcal{C}[-1,1]_0$, hogy $F(f, x_0, \delta_n) = \mathrm{graph}(g) \cap Q^2$. Ezzel szemben ha $F \in f_{MT}(x_0)$, akkor erre a halmazra már nem feltétlenül igaz, hogy létezik olyan $g \in \mathcal{C}[-1,1]_0$, hogy $F = \mathrm{graph}(g) \cap Q^2$.

2.0.13. Példa. Legyen $f(x) := \sqrt[3]{x}$. Ekkor $f_{MT}(0)$ egyetlen eleme a $H := \{(0; y) : |y| \leq 1\}$ halmaz, azaz a $(0; 1)$ és $(0; -1)$ pontok által feszített függőleges szakasz, ugyanis, legyen $\delta_n \searrow 0$ tetszőleges, és $p_n \in F(f, 0, \delta_n)$ konvergens pontsorozat. Nyilván

$$F(f, 0, \delta_n) = \left\{ \left(\frac{x}{\delta_n}; \frac{\sqrt[3]{x}}{\delta_n} \right) : |x| \leq \delta_n^3 \right\}.$$

Mivel egy $\mathbb{R}^2$ pontsorozat pontosan akkor konvergens, ha koordinátánként konvergens, így

$$\left| \frac{x}{\delta_n} \right| \leq \left| \frac{\delta_n^3}{\delta_n} \right| = \delta_n^2 \to 0$$

és

$$\left| \frac{\sqrt[3]{x}}{\delta_n} \right| \leq \left| \frac{\delta_n}{\delta_n} \right| = 1,$$

tehát p_n csak H-beli ponthoz konvergálhat. Legyen $(0; y) \in H$. Ekkor $(y^3\delta_n^2; y) \in F(f, 0, \delta_n)$, mivel egyrészt $\sqrt[3]{y^3\delta_n^3} = y\delta_n$, másrészt $|y^3\delta_n^3| \leq 1$, sőt $(y^3\delta_n^2; y) \to (0; y)$, így az 1.2.6. állítás szerin $F(f, 0, \delta_n) \to H$.

2.0.14. Állítás. *A $[0,1]$ intervallumon értelmezett folytonos függvények tipikus elemeinek majdnem minden $x \in [0,1]$ univerzális mikro-tangens pontja.*

Felmerül a kérdés, hogy a fenti, [4]-ben bizonyított állítás érvényben marad-e, ha megszorítjuk $\mathcal{C}[0,1]$ valamely alterére. A következő fejezetben megmutatom, hogy bár a Lipschitz-folytonos függvények esetében ez nincs így, de egy hasonló jellegű állítás már igaz.

3. fejezet

Tipikus Lipschitz-folytonos függvények

3.1. Lipschitz-tulajdonság

3.1.1. Definíció. *Azt mondjuk, egy* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *függvényről, hogy Lipschitz-tulajdonságú, ha létezik olyan* $L > 0$ *szám (úgynevezett Lipschitz konstans), hogy minden* $x, y \in [0,1]$ *pontra teljesül, hogy:*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

Nyilván ha egy f függvény Lipschitz-tulajdonságú, akkor folytonos is, tehát a

$$Lip_L[a,b] := \{f \in \mathcal{C}[a,b] : \forall x, y \in [a,b] : |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|\}$$

halmazon értelmezhető a maximum-metrika.
A következő tétel eredetileg általánosabb terekben értelmezett Lipschitz-folytonos függvények deriválhatóságára vonatkozik, de csak a fent tárgyalt speciális esetre kerül kimondásra, melynek bizonyítása [5]-ben megtalálható.

3.1.2. Tétel. (Rademacher) *Ha* $f \in Lip_L[a,b]$*, akkor* f *a Lebesgue-mérték szerint majdnem-mindenütt differenciálható.*

3.1.3. Állítás. *A* $Lip_L[0,1]$ *metrikus tér szeparábilis, azaz létezik megszámlálható, sűrű részhalmaza.*

Bizonyítás. Legyen $f \in Lip_L[0,1]$, és $\epsilon > 0$. A Lipschitz-tulajdonság miatt f egyenletesen folytonos, azaz ha $\delta = \frac{\epsilon}{L}$, akkor $|f(s) - f(t)| \leq \epsilon$, amennyiben $|s-t| < \delta$. Legyen n olyan, hogy $1/n < \delta$, és $t_j := j/n$. Ekkor, ha $s \in [t_{j-1}, t_j]$, akkor $|f(s) - f(t_j)| \leq \epsilon$. Legyen g olyan szakaszonként lineáris függvény, hogy $g(t_j) = f(t_j)$, azaz

$$g(s) = f(t_j) + (s - t_j)\frac{f(t_j) - f(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}}, \text{ ha } s \in [t_{j-1}, t_j].$$

Mivel

$$\left|\frac{f(t_j) - f(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}}\right| \leq L,$$

ezért $g \in Lip_L[0,1]$. Ha $s \in [t_{j-1}, t_j]$, akkor

$$|g(s) - f(t_j)| = |s - t_j|\frac{|f(t_j) - f(t_{j-1})|}{t_j - t_{j-1}} \leq |f(t_j) - f(t_{j-1})| \leq \epsilon.$$

Legyen $s \in [0,1]$, ekkor alkalmas j-re $s \in [t_{j-1}, t_j]$ és így

$$|f(s) - g(s)| \leq |f(s) - f(t_j)| + |f(t_j) - g(s)| \leq 2\epsilon,$$

tehát $\rho_\infty(f,g) \leq 2\epsilon$.

Mivel a szakaszonként lineáris függvényeket töréspontjaik egyértelműen meghatározzák, és a síkban a racionális koordinátájú pontok sűrűn helyezkednek el, megszámlálható sokan vannak, ezek véges részhalmazainak halmaza is megszámlálható, tehát ezen függvények halmaza is megszámlálható. □

3.2. Univerzális mikro-tangens pontok

Legyen $f \in Lip_L[0,1]$. Ekkor a Rademacher tétel értelmében az értelmezési tartomány azon pontjai, ahol f nem differenciálható, tetszőlegesen kicsi összhosszúságú, megszámlálható sok intervallum egyesítésével lefedhető. Jelölje $UMT_L(f)$ azon $(x; f(x))$ pontok halmazát, melyre minden $g \in Lip_L[-1,1]_0$ függvényre $\text{graph}(g) \cap Q^2 \in f_{MT}(x)$, és legyen $U_f := \pi_x(UMT_L(f))$, azaz $UMT_L(f)$ halmaz x tengelyre vett vetülete. Ekkor a 3.2.1. állítás következményeként U_f elemeiben f nyilván nem differenciálható, és mivel a Lebesgue-mérték szerint f majdnem minden pontban differenciálható, így U_f nullmértékű halmaz.

3.2.1. Állítás. *Ha f a $Lip_L[0,1]$ halmaz tipikus eleme, akkor minden $[a,b] \subset [0,1]$ intervallumban U_f-nek kontinuum sok eleme van.*

A bizonyításhoz vezessük be a

$$R_\lambda((x_0; y_0), \delta) := \{(x; y) : \ |x - x_0| \le \delta, \text{ és } |y - y_0| \le \lambda\delta\},$$

illetve az

$$R_\lambda^2 := R_\lambda((0; 0), 1)$$

jelöléseket, és legyen

$$F_\lambda(f, x_0, \delta) := \frac{1}{\delta}\Big((\mathrm{graph}(f) \cap R_\lambda((x_0; f(x_0), \delta)) - (x_0; f(x_0))\Big).$$

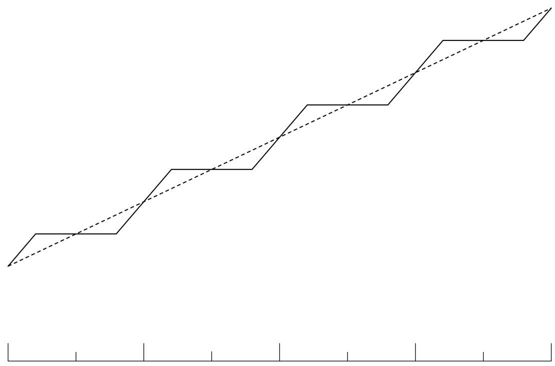
Ekkor, ha $\lambda \ge L$, akkor minden $g \in Lip_L[-1, 1]_0$ függvényre $\mathrm{graph}(g) \cap R_\lambda^2 = \mathrm{graph}(g)$, a Lipschitz-tulajdonság miatt, és tetszőleges $f \in Lip_L[0, 1]$ függvénynek, és az értelmezési tartományának minden x belső pontjára $F_\lambda(f, x, \delta)$ megegyezik egy $Lip_L[-1, 1]_0$-beli függvény grafikonjával ha δ elég kicsi.
A továbbiakban, ha $L > 1$, akkor legyen $\lambda := L$, különben $\lambda := 1$.
Tekintsük az $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset Lip_L[0, 1]$ és $\{g_n\}_{n=1}^\infty \subset Lip_L[-1, 1]_0$ megszámlálható sűrű halmazokat, melyeknek elemei szakaszonként lineáris függvények, továbbá $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ elemeinek abszolút értékben vett meredekségeinek maximuma szigorúan kisebb mint L, és a g_n sorozat minden eleme végtelen sokszor ismétlődik. Mive f_n szakaszonként lineáris, tehát létezik a $[0, 1]$ intervallumnak olyan $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_r = 1$ felosztása, hogy $f_n|_{[a_{i-1}, a_i]}$ lineáris függvény.
Legyen $l_{n,i} := a_i - a_{i-1}$, $l_n := \min\limits_i l_{n,i}$, és jelölje s_n az $f_n|_{[a_{i-1},a_i]}$ függvények meredekségeinek abszolút értékeinek maximumát. Az $I_{n,i} := [a_{i-1}, a_i]$ szakaszokat osszuk fel m egyenlő részre, az így kapott $\frac{l_{n,i}}{m}$ hosszú szakaszokat jelölje $I_{n,i,m,k}$, és ezen intervallumok felezőpontjait jelölje $P_{n,i,m,k}$, és $Q_{n,i,m,k}$ rendre az $I_{n,i,m,k}$ szakaszok végpontjait, azaz

$$Q_{n,i,m,k} = \begin{cases} a_{i-1}, & \text{ha } k = 0, \\ I_{n,i,m,k} \cap I_{n,i,m,k+1}, & \text{ha } 0 < k < m, \\ a_i, & \text{ha } k = m. \end{cases}$$

Legyen $0 < d_{n,m} < l_n/(2m)$ adott, és

$$\overline{f}_{n,m}|_{[a_{i-1},a_i]}(x) := f_n(P_{n,i,m,k}), \text{ ha } x \in [P_{n,i,m,k} - d_{n,m}, P_{n,i,m,k} + d_{n,m}],$$

és a $Q_{n,i,m,0}$ illetve $Q_{n,i,m,m}$ pontokban legyen egyenlő f_n-el, az összes fennmaradó intervallumon pedig legyen lineáris.



3.1. ábra. Az f_n és az $\overline{f}_{n,m}$ viszonya egy $[a_{i-1}, a_i]$ intervallumon.

Legyen $0 < c_{n,m} < d_{n,m}$ adott, és ha $x \in [P_{n,i,m,k} - c_{n,m}, P_{n,i,m,k} + c_{n,m}]$, akkor legyen

$$\widetilde{f}_{n,m}|_{[a_{i-1},a_i]} := \overline{f}_{n,m}(x) + c_{n,m} g_m\Big(\frac{x - P_{n,i,m,k}}{c_{n,m}}\Big),$$

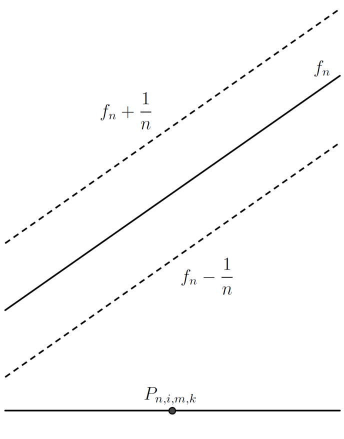
illetve ha $x \in [Q_{n,i,m,k} - (\frac{l_{n,k}}{2m} - d_{n,m}), Q_{n,i,m,k} + (\frac{l_{n,k}}{2m} - d_{n,m})] \cap I_{n,i}$, akkor

$$\widetilde{f}_{n,m}|_{[a_{i-1},a_i]} := \overline{f}_{n,m}(x),$$

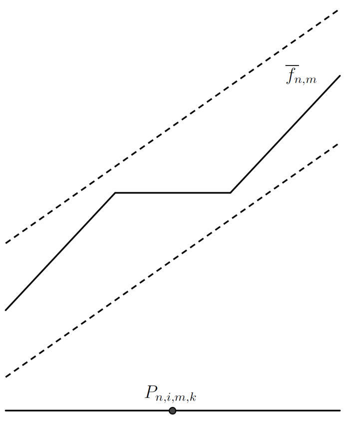
ezen kívül a

$$[Q_{n,i,m,k} + (\frac{l_{n,k}}{2m} - d_{n,m}), P_{n,i,m,k} - c_{n,m}] \text{ és } [P_{n,i,m,k} + c_{n,m}, Q_{n,i,m,k} - (\frac{l_{n,k}}{2m} - d_{n,m})]$$

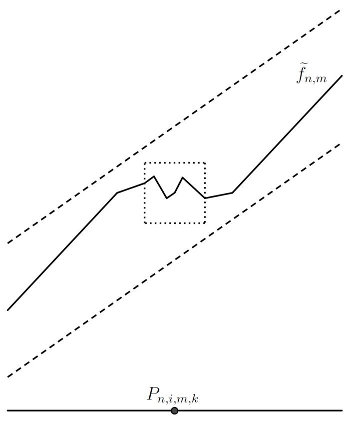
szakaszokon legyen lineáris.



3.2. ábra.



3.3. ábra.



3.4. ábra.

A 3.2, 3.3 és 3.4 ábrák rendre az f_n, $\overline{f}_{n,m}$ $\widetilde{f}_{n,m}$ függvények grafikonja egy $I_{n,i,m,k}$ intervallumon. Nyilvánvaló, ha $d_{n,m}$ és $c_{n,m}$ elég kicsi, akkor $\rho_\infty(f_n, \widetilde{f}_{n,m}) < 1/n$, és az $\widetilde{f}_{n,m}$ (amely szintén szakaszonként lineáris) meredekségeinek abszolút értéke minden szakaszon kisebb mint L, így $\widetilde{f}_{n,m} \in Lip_L[0,1]$. A továbbiakban $d_{n,m}$ és $c_{n,m}$ legyen olyan, hogy a fentiek teljesülnek, és m szerint monoton csökkenőek. A bizonyítás folytatásához szükség van az alábbi állításokra:

3.2.2. Lemma. *Legyen $x_0 \in (0,1)$, $f, g \in Lip_L[0,1]$ olyanok, hogy $f(x_0) = g(x_0)$, és $c > 0$ olyan, hogy $[x_0 - c, x_0 + c] \subset [0,1]$. Ekkor:*

$$d_H(F_\lambda(f, x_0, c), F_\lambda(g, x_0, c)) \leq \frac{\rho_\infty(f,g)}{c}.$$

Bizonyítás. Legyen $\epsilon := \rho_\infty(f,g)$. Ekkor minden x $\in [0,1]$ esetén

$$|f(x) - g(x)| \leq \epsilon,$$

azaz minden $x \in [0,1]$ esetén, tetszőleges $r > 0$ mellett

$$(x; g(x)) \subset B((x; f(x)), \epsilon + r),$$

így

$$\mathrm{graph}(g) \subset E_{\epsilon+r}(\mathrm{graph}(f)),$$

tehát

$$\mathrm{graph}(g) \cap R_\lambda((x_0; f(x_0)), c) \subset E_{\epsilon+r}(\mathrm{graph}(f)) \cap R_\lambda((x_0; f(x_0)), c),$$

és ezért

$$F_\lambda(g, x_0, c) \subset E_{(\epsilon+r)/c}(F_\lambda(f, x_0, c)).$$

Hasonlóan megmutatható, hogy $F_\lambda(f, x_0, c) \subset E_{(\epsilon+r)/c}(F_\lambda(g, x_0, c))$. $\square$

3.2.3. Állítás. *Legyen $f \in Lip_L[0,1]$, $x_0 \in (0,1)$, $\epsilon, c > 0$ adott konstansok, melyekre $[x_0 - c, x_0 + c] \subset [0,1]$ teljesül. Ha $\delta < \frac{c\epsilon}{2}$, és $g \in B(f, \delta)$ akkor létezik olyan $q_0 > 0$, hogy ha $c < q_0$, akkor minden $x \in [x_0 - q_0, x_0 + q_0]$ pontra teljesül, hogy:*

$$d_H(F_\lambda(f, x_0, c), F_\lambda(g, x, c) < \epsilon.$$

Bizonyítás. Legyen $g^*(x) := g(x-q) + (f(x_0) - g(x_0 - q))$, ahol q tetszőleges. Ekkor $g^*(x_0) = f(x_0)$ és $F(g^*, x_0, c) = F(g, x-q, c)$.

$$|g^*(x) - f(x)| = |g(x-q) + (f(x_0) - g(x_0-q)) - f(x)| \leq$$
$$\leq |g(x-q) - f(x)| + |f(x_0) - g(x_0-q)| \leq$$
$$|g(x-q) - g(x)| + |g(x) - f(x)| + |f(x_0) - f(x_0-q)| + |f(x_0-q) - g(x_0-q)| \leq$$
$$\leq 2(\delta + L|q|)$$

teljesül minden $x \in [|q|, 1-|q|]$ pontra, tehát $\rho_\infty(f|_{[|q|,1-|q|]}, g|_{[|q|,1-|q|]}) \leq 2(\delta + L|q|)$. Az előző lemma szerint:

$$d_H(F_\lambda(f, x_0, c), F_\lambda(g, x-q, c)) \leq \frac{2(\delta + L|q|)}{c} < \epsilon,$$

tehát, $q_0 := |q| < \frac{c\epsilon - 2\delta}{2L}$ választás megfelelő. $\square$

Visszatérve a 3.2.1 állítás bizonyításához, legyen $0 < \delta_{n,m} < \frac{c_{n,m}}{2m}$. Ekkor $G_m := \bigcup_{n=1}^{\infty} B(\widetilde{f}_{n,m}, \delta_{n,m})$ sűrű, nyílt halmaz, és így $G := \bigcap_{m=1}^{\infty} G_m$ reziduális. Ha $f \in G$, akkor minden m-re létezik n_m, hogy $f \in B(\widetilde{f}_{n_m,m}, \delta_{n_m,m})$. Az előző állítás miatt ekkor létezik $q_{n_m,m} > 0$, hogy minden $x \in [P_{n_m,i,m,k} - q_{n_m,m}, P_{n_m,i,m,k} + q_{n_m,m}]$ esetén

$$d_H(F_\lambda(f, x, \delta_{n_m,m}), \mathrm{graph}(g_m)) < \frac{1}{m}.$$

Az egyszerűség kedvéért legyen

$$J_{n,i,m,k} := [P_{n,i,m,k} - q_{n,m}, P_{n,i,m,k} + q_{n,m}].$$

Legyen $\sigma(m)$ a természetes számoknak olyan szigorúan monoton növő sorozata, hogy $\sigma(1) = 1$, és ha $m > 1$, akkor $g_{\sigma(m)} = g_m$ és létezik olyan k', hogy

$$(J_{n_{\sigma(m)},i,\sigma(m),k'} \cup J_{n_{\sigma(m)},i,\sigma(m),k'+1}) \subset J_{n_{\sigma(m-1)},i,\sigma(m-1),k}.$$

Legyen $S_m := \cup_{i=1}^{r} \cup_{k=1}^{m} J_{n_m,i,m,k}$, ekkor a Cantor-féle metszet-tétel szerint az $S := \cap_{m=1}^{\infty} S_{\sigma(m)}$ nem üres, sőt mivel egyszerűen megadható S-ből injektív leképezés a Cantor-féle triadikus halmazra, így kontinuum számosságú.

3.2.4. Megjegyzés. A bizonyítás teljességéhez az S halmaz kontinuum számosságát tetszőleges $[a, b] \subset [0, 1]$ intervallumon kell megmutatni, de ehhez elég, ha a fenti eljárásban az f függvény átdefiniálásában csak az $[a, b]$ intervallumra szorítkozunk.

Tekintsünk egy $g \in Lip_L[-1,1]_0$ függvényt, mivel $\{g_{\sigma(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ sűrű részhalmaza a $Lip_L[-1,1]_0$ térnek, és minden elemét végtelen sokszor tartalmazza, ezért létezik $\sigma(m)$-nek olyan $\tau(m)$ részsorozata, hogy $g_{\tau(m)} \to g$. Legyen $x_0 \in S$. Ekkor minden m-re

$$d_H(F_\lambda(f, x_0, \delta_{n_{\tau(m)},\tau(m)}), \operatorname{graph}(g)) \leq$$
$$\leq d_H(F_\lambda(f, x_0, \delta_{n_{\tau(m)},\tau(m)}), \operatorname{graph}(g_{\tau(m)})) + d_H(\operatorname{graph}(g_{\tau(m)}), \operatorname{graph}(g)) \leq$$
$$\leq \frac{1}{\tau(m)} + \rho_\infty(g_{\tau(m)}, g) \to 0.$$

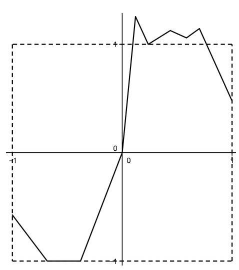
Amennyiben $L \leq 1$, az állítás bizonyítást nyert. Tekintsük az $L > 1$ esetet. Ekkor ha $\operatorname{graph}(g) \cap Q^2 = \overline{\operatorname{graph}(g) \cap \operatorname{int} Q^2}$, akkor az 1.2.7. állítás értelmében $g \in MT_f(x_0)$. Mivel g folytonos, ezért $\operatorname{graph}(g) \cap Q^2 = \overline{\operatorname{graph}(g) \cap \operatorname{int} Q^2}$ akkor nem teljesül, ha létezik olyan $x \in (-1,1)$, hogy a $|g(x)| = 1$ és x-ben lokális minimuma van, vagy x egy környezetében konstans.
Tekintsük azt a $\tilde{g}$ függvényt, ami

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(-x-2), & \text{ha } x \in [-2,-1), \\ g(x), & \text{ha } x \in [-1,1], \\ g(-x+2), & \text{ha } x \in (1,2], \end{cases}$$

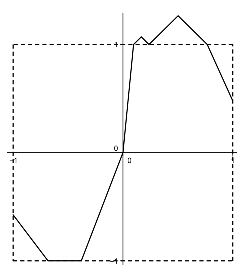
és legyen $T_{+1} := \{x : \tilde{g}(x) > 1\}$ és $T_{-1} := \{x : \tilde{g}(x) < -1\}$. Mivel $\tilde{g}$ folytonos, így T_{+1} és T_{-1} előáll diszjunkt nyílt intervallumok uniójaként, ezeknek halmazát jelölje I_{+1} és I_{-1}. Legyen

$$\hat{g}(x) = \begin{cases} -|x - \frac{a+b}{2}| + \frac{b-a}{2} + 1, & \text{ha } x \in (a,b) \in I_{+1}, \\ |x - \frac{a+b}{2}| - \frac{b-a}{2} - 1, & \text{ha } x \in (a,b) \in I_{-1}, \\ \tilde{g}(x), & \text{különben.} \end{cases}$$

Ekkor a $g^* := \hat{g}|_{[-1,1]}$ függvényre teljesül, hogy $\operatorname{graph}(g^*) \cap Q^2 = \operatorname{graph}(g) \cap Q^2$.



3.5. ábra. $g \in Lip_L[-1,1]_0$



3.6. ábra. $g^* \in Lip_L[-1,1]_0$

Legyen $g^*_\epsilon(x) := (1-\epsilon)g^*(x)$. A konstrukció miatt minden $0 < \epsilon < 1$ esetén $\mathrm{graph}(g^*_\epsilon) \cap Q^2 = \overline{\mathrm{graph}(g^*_\epsilon) \cap \operatorname{int} Q^2}$, azaz $\mathrm{graph}(g^*_\epsilon) \in f_{MT}(x_0)$, és mivel nyilván $\mathrm{graph}(g^*_\epsilon) \to \mathrm{graph}(g^*)$, ha $\epsilon \to 0$, így $f_{MT}(x_0)$ zártsága miatt

$$\mathrm{graph}(g^*) \cap Q^2 = \mathrm{graph}(g) \cap Q^2 \in f_{MT}(x_0).$$

$\square$

Irodalomjegyzék

[1] KOMORNIK, Vilmos. *Valós analízis előadások I.*, Typotex, 2003.

[2] HENRIKSON, Jeff. *Completeness and Total Boundedness of the Hausdorff Metric*, MIT Undergraduate Journal of Mathematics, 1999, 1: 69-80.

[3] BRUCKNER, Andrew M.; BRUCKNER, Judith B.; THOMSON, Brian S. *Real analysis*, Prentice-Hall, 1997.

[4] BUCZOLICH, Zoltán. *Micro tangent sets of continuous functions*, Mathematica Bohemica, 2003, 128.2: 147-167.

[5] ZAJÍČEK, Luděk. *An elementary proof of the one-dimensional Rademacher theorem*, Mathematica Bohemica, 1992, 117.2: 133-136.

[6] HAASE, Markus. *Functional Analysis: An Elementary Introduction*, American Mathematical Society, 2014.

[7] SZŐKEFALVI-NAGY, Béla. *Valós függvények és függvénysorok*, SZTE Bolyai Intézet, 2002.