Ramsey-elmélet és játékelméleti alkalmazása

BSc Szakdolgozat

Szerző
Gaál Gusztáv

Témavezető
Wolosz János András

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Algebra és Számelmélet Tanszék

Budapest, 2017

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm témavezetőmnek, Wolosz János Andrásnak a téma feldolgozásában való segítségét és a szakdolgozat alapos átnézését.

Nagyon köszönöm Seres Zoltánnak, Pap Domonkosnak és Pfiszter Mártonnak.

Köszönöm Fellner Máténak, Maga Balázsnak, Malinoczki Gergelynek,
Tamási Tímeának, Tossenberger Tamásnak és Virág Fausztin Asztriknak - ki a bánatnak másnak...

Végül köszönöm családom támogatását.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A szakdolgozatban ismertetjük a klasszikusnak tekinthető Ramsey-típusú tételeket, majd bebizonyítjuk a Ramsey-elméletet megalapozó Hales-Jewett tételt, melynek megvizsgáljuk következményeit, továbbá bemutatjuk egy amőbában lévő nyerő stratégiákkal kapcsolatos alkalmazását.

Az első fejezetben bizonyítjuk a Ramsey-, Van der Waerden- és Schur-tételeket. Ismertetjük a kisebb Ramsey-számokat, majd mutatunk általános alsó és felső korlátot a Ramsey- és Schur-számokra. Szó lesz ezentúl a Van der Waerden-számok algoritmikus kiszámításáról, és bemutatjuk az eddig ismert értékeket.

A második fejezetben bevezetjük a Hales-Jewett tétel kimondásához szükséges fogalmakat, majd a bizonyítást követően megmutatjuk, hogy egyéb Ramsey-típusú tételek milyen könnyeden beláthatóak az alkalmazásával.

A harmadik fejezetben az amőba játék kiterjesztéseivel fogunk foglalkozni. Megvitatjuk, hogy kinek, és mikor lehet nyerő stratégiája a játékban, továbbá a Hales-Jewett tétel segítségével megadjuk azon paramétereket, melyek alatt már garantáltan rendelkezni fog valaki nyerő stratégiával.

A szakdolgozat célja, hogy nyújtson egy alapvető, érdeklődést felkeltő bevezetést ebbe a témakörbe, mely rengeteg nyitott kérdéssel rendelkezik. Erről bővebb információt az olvasó a [8], [1], [10] szakirodalomban talál.

1. fejezet

Klasszikus tételek

Nem állítható, hogy létezett egy összefogó fundamentális kérdés, ami a most következő tételeket produkálta. Frank Ramsey a logikai rendszerekhez kapcsolódó döntésanalízissel foglalkozott, Issac Schur a Nagy Fermat-tételt akarta bizonyítani véges testek fölött, míg B.L. van der Waerden megoldott egy számára szórakoztató problémát, majd visszatért főbb kutatási területéhez, az algebrai geometriához. Ebben a fejezetben a [8]-ben összefoglalt eredmények egy részét fogjuk feldolgozni. A Ramsey-típusú tételek egy főbb karakterisztikája, hogy nem konstruktívak, azaz bizonyítják egy bizonyos struktúra létezését, de annak megkereséséről nem kapunk információt. Erre egy példa az alábbi tétel, melyet Frank Ramsey 1928-ban bizonyított.

1.1. Ramsey-tétel

1.1.1. Tétel. (Ramsey-tétel 2 színre) *Legyenek $k, l \geq 2$ pozitív egészek. Ekkor létezik olyan legkisebb $R = R(k, l) \in \mathbb{Z}$, hogy K_R minden piros-kék élszínezésében létezik piros K_k, vagy kék K_l részgráf.*

Bizonyítás. Könnyű látni, hogy $R(k, 2) = k$ minden $k \geq 2$ esetén, és $R(k, l) = R(l, k)$. Indukciót fogunk alkalmazni a $k + l$ összegre. A $k + l = 5$ esettel már készen vagyunk, legyen $k + l \geq 6$, $k, l \geq 3$. Ekkor feltehetjük, hogy $R(k, l-1)$ és $R(k-1, l)$ léteznek. Azt állítjuk, hogy $R(k, l) \leq R(k-1, l) + R(k, l-1)$, amiből következik a tétel.

Legyen $n = R(k-1, l) + R(k, l-1)$ és válasszunk egy tetszőleges csúcsot K_n-ből, legyen ez v. Ekkor $n-1$ él vezet v-ből más csúcsokba. Legyen A a v-ből kimenő piros élek száma, és B a kék élek száma. Tudjuk, hogy $A \geq R(k-1, l)$, vagy $B \geq R(k, l-1)$, hiszen ha $A < R(k-1,l)$ és $B < R(k,l-1)$, akkor $A+B < n-2$, ellentmondva annak, hogy $A+B = n-1$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $A \geq R(k-1,l)$. Legyen V azon csúcsok halmaza, amelyeket v-vel piros él köt össze, így $|V| \geq R(k-1,l)$ miatt, V tartalmaz egy piros K_{k-1}, vagy egy kék K_l részgráfot. Ha az utóbbi eset áll fenn, kész vagyunk. Ha piros K_{k-1}-et tartalmaz, akkor v-t hozzávéve a gráfhoz egy piros K_k részgráfot kapunk a V halmaz definíciójából kifolyólag.

□

1.1.1. Ramsey-számok meghatározása

Már alacsony k, l értétekre sem triviális $R(k,l)$ meghatározása, még számítógép segítségével sem. Az algoritmikus nehézségeket egy későbbi fejezetben fogjuk vizsgálni, most pedig a színezés formális definíciója után bemutatunk pár ismertebb Ramsey-számot.

1.1.2. Definíció. *Egy S halmaz r-színezése alatt egy $\chi : S \to \{1, \ldots, r\}$ függvényt értünk. A χ színezés monokromatikus a H halmazon, ha χ konstans H-n. Ha $G = (V, E)$ egy gráf, és $S = E(G)$, akkor χ a gráf egy r-élszínezése.*

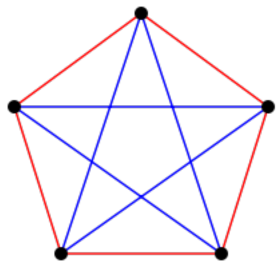
1.1.3. Tétel. $R(3,3) = 6$.

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy $R(3,3) \leq 6$, majd mutatunk egy K_5 élszínezést, amiben nincs monokromatikus háromszög. Tekintsük K_6 egy tetszőleges 2-élszínezését, és egy $v \in V(K_6)$ csúcsát. Ekkor a skatulyaelv miatt feltehetjük, hogy v illeszkedik 3 kék élre, legyenek ezek $(v,r),(v,s),(v,t)$. Ha az $(r,s),(r,t),(s,t)$ élek valamelyike is kék, akkor kaptunk egy kék háromszöget a v csúcson keresztül, ellenkező esetben pedig az előbbiekből egy pirosat.

K_5 következő élszínezése nem tartalmaz monokromatikus háromszöget:

$$\chi(i,j) = \begin{cases} 0, & \text{ha } |i-j| = 1 \\ 1, & \text{ha } |i-j| \neq 1 \end{cases}$$

Könnyen látszik, hogy a fenti χ valóban jó választás:



1.1. ábra. A $\chi(i, j)$ színezés a K_5 gráfon

$\square$

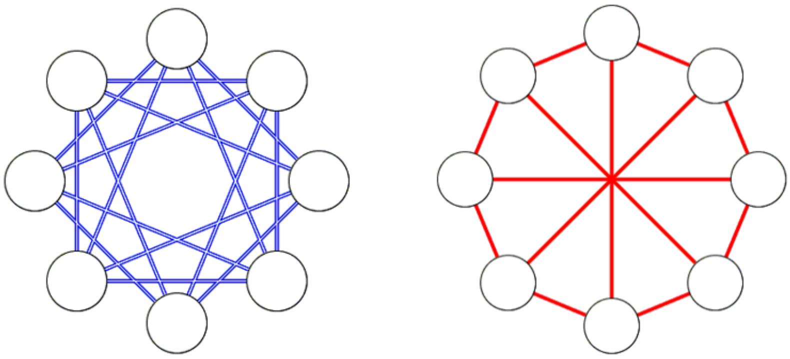
1.1.4. Lemma. *Ha $R(k-1,l)$ és $R(k,l-1)$ is páros, akkor $R(k,l) \leq R(k-1,l) + R(k,l-1) - 1$.*

Bizonyítás. A Ramsey-tétel bizonyításához hasonlóan, legyen $m = R(k-1,l)$, $n = R(k,l-1)$ és $r = m+n$. Tekintsük K_{r-1} egy tetszőleges 2-élszínezését. Megmutatjuk, hogy létezik piros K_k, vagy kék K_l. Legyen d_i a v_i csúcsból induló piros élek száma. Tudjuk, hogy $\sum_{i=1}^{r-1} d_i$ páros, hiszen egy gráfban a fokszámok összege mindig páros. A feltételeink szerint $r-1$ páratlan, azaz létezik olyan j, amire d_j páros. Legyen b_j a v_j csúcs kék szomszédjainak száma, ekkor $d_j + b_j = r-2$, tehát b_j is páros. A skatulyaelv szerint $d_j \geq m-1$ vagy $b_j \geq n$, viszont $m-1$ páratlan, így $d_j \geq m$ is állítható d_j párossága miatt. A $d_j \geq m$ esetben v_j-t hozzávéve a piros szomszédaihoz a kapott részgráf tartalmaz piros K_k-t, vagy kék K_l-t. A $b_j \geq n$ esetben teljesen hasonlóan járhatunk el.

$\square$

1.1.5. Tétel. $R(4,3) = 9$.

Bizonyítás. Tudjuk, hogy $R(3,3) = 6$ és $R(4,2) = 4$, így alkalmazva a fentebb bizonyított lemmát, azt kapjuk, hogy $R(4,3) \leq 6+4-1 = 9$. Mostmár csak mutatnunk kell K_8-nak egy olyan 2-élszínezését, mely nem tartalmaz monokromatikus K_4-et vagy K_3-at. Az alábbi egy ilyen:

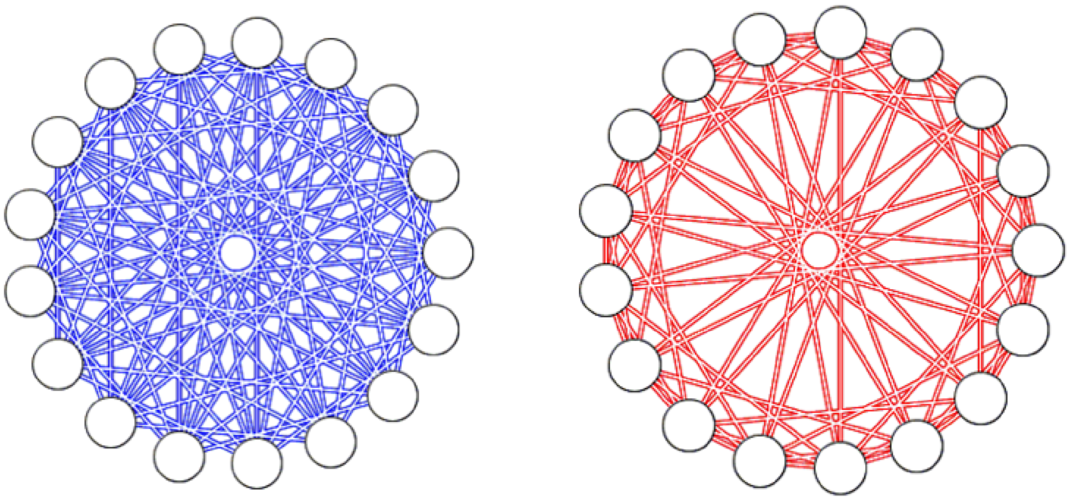


1.2. ábra. Legyen az (i, j) él kék, ha $|i - j| \in \{2, 3\}$.

$\square$

1.1.6. Tétel. $R(4, 4) = 18$.

Bizonyítás. Ismét alkalmazva a Ramsey-tétel bizonyításában használt felső korlátot azt kapjuk, hogy $R(4, 4) \leq R(3, 4) + R(4, 3) = 9 + 9 = 18$. Mutatunk egy 2-színezett K_{17}-et, ami nem tartalmaz monokromatikus négyszöget:

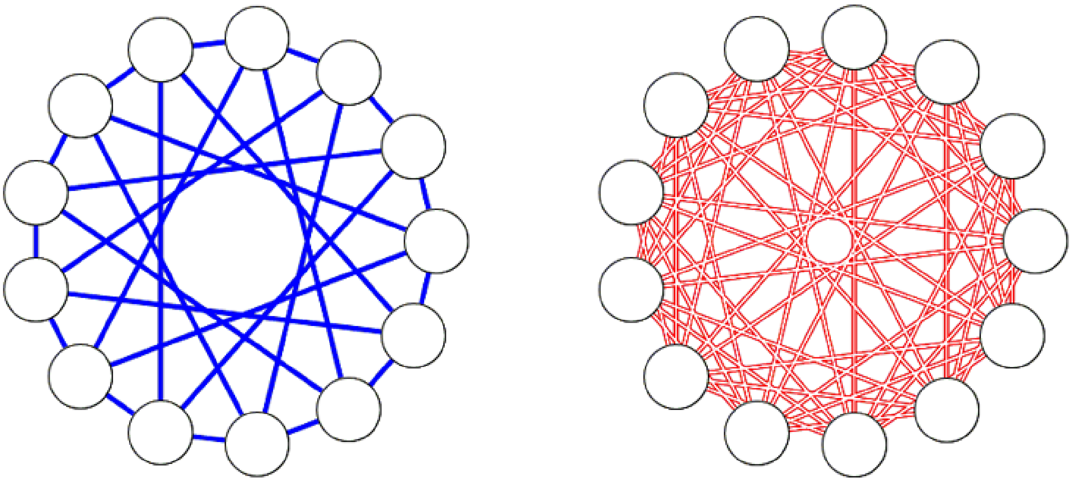


1.3. ábra. Legyen az (i, j) él kék, ha $|i - j| \in \{3, 5, 7, 11\}$.

$\square$

1.1.7. Tétel. $R(5,3) = 14$.

Bizonyítás. Tudjuk, hogy $R(5,3) \leq R(4,3) + R(5,2) = 9 + 5 = 14$. Mutatunk egy megfelelően 2-színezett K_{13}-at:



1.4. ábra. Legyen az (i, j) él kék, ha $|i - j| \in \{1, 5\}$

$\square$

Az ismert Ramsey-számokat [10] az alábbi táblázatban foglaljuk össze:

Ramsey-számok	
$R(3,3)$	6
$R(3,4)$	9
$R(3,5)$	14
$R(3,6)$	18
$R(3,7)$	23
$R(3,8)$	28
$R(3,9)$	36
$R(4,4)$	18
$R(4,5)$	25

1.1.2. Korlátok Ramsey-számokra

Az egzisztenciát bebizonyítottuk, viszont nem tudunk semmit arról, hogy mégis mekkora lehet ez a bizonyos küszöb, ami fölött teljesül az általunk keresett tulajdonság. A bizonyításban felhasznált $R(k,l)$-re adott rekurzív becslésen továbbhaladva adhatunk egy explicit felső korlátot.

1.1.8. Tétel. $R(k,l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$

Bizonyítás. Tudjuk, hogy $R(k,l) \leq R(k-1,l)+R(k,l-1)$. Indukciót fogunk alkalmazni a $k+l$ összegre. A $k = l = 2$ esetben $R(2,2) = 2 \leq \binom{2+2-2}{2-1} = 2$. Tegyük fel, hogy $R(k-1,l)$ és $R(k,l-1)$-ra is igaz az állítás. Kihasználva a

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Pascal-azonosságot, azt kapjuk, hogy:

$$R(k,l) \leq R(k-1,l) + R(k,l-1) \leq \binom{k+l-3}{k-2} + \binom{k+l-3}{k-1} = \binom{k+l-2}{k-1}$$

ezzel megkapva az állítást.

□

1.1.9. Tétel. (Erdős) $R(r,r) > \left(\frac{r}{e}\right)2^{\frac{(r-1)}{2}-\frac{1}{r}}$

Bizonyítás. Adott $r \leq n$ darab csúcs K_n-ből. Mi a valószínűsége annak, hogy K_n egy véletlen 2-színezésében $K_r \subseteq K_n$ monokromatikus? K_r-nek az $\binom{r}{2}$ darab élét kétféleképpen színezhetjük, így $2^{\binom{r}{2}}$ eset létezik. Nekünk ebből csak a 2 monokromatikus eset kedvező, így a keresett valószínűség $2^{1-\binom{r}{2}}$. A Boole-egyenlőtlenség szerint A_i $(i \in \mathbb{N})$ eseményekre:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_i A_i\right) \leq \sum_i \mathbb{P}(A_i)$$

tehát annak a valószínűsége, hogy K_n-ben van monokromatikus K_r legfeljebb $\binom{n}{r}2^{1-\binom{r}{2}}$.

Ha $\binom{n}{r}2^{1-\binom{r}{2}} < 1$, az azt jelenti, hogy nem garantált monokromatikus K_r létezése, azaz $R(r,r) > n$. Legyen r rögzített, N pedig az a legkisebb olyan n, amire $\binom{n}{r}2^{1-\binom{r}{2}} \geq 1$. A feltételt kiegészítő egészek halmaza nem üres, hisz $R(r,r)$ létezik és véges, emellett alulról korlátos (pl. r), így ez a minimum létezik.

Vegyük észre, hogy $R(r,r) \geq N$, hisz $R(r,r) < N \Rightarrow R(r,r) \leq N-1$, ez pedig ellentmond annak, hogy $R(r,r) > N-1$, ami igaz, hisz $\binom{N-1}{r}2^{1-\binom{r}{2}} < 1$. Ismert, hogy minden $n,k \in \mathbb{N}$ esetén:

$$\left(\frac{ne}{k}\right)^k > \binom{n}{k}.$$

Kihasználva, hogy $\binom{N}{r}2^{1-\binom{r}{2}} \geq 1$, azt kapjuk, hogy

$$\left(\frac{Ne}{r}\right)^r 2^{1-\binom{r}{2}} > 1 \quad \Rightarrow \quad N > \left(\frac{r}{e}\right)2^{\frac{(r-1)}{2}-\frac{1}{r}}.$$

Mivel láttuk, hogy $R(r,r) \geq N$, és N-et szigorúan becsültük, így a tételt bebizonyítottuk.

□

1.1.10. Megjegyzés. Rengeteg általánosítása és speciális esete létezik a Ramsey-tételnek és az eredeti Ramsey-számoknak, pl. monokromatikus klikk helyett monokromatikus kört, páros gráfot, vagy egyéb struktúrát szeretnénk találni egy színezés mellett. Ezekhez is tartoznak érdekes heurisztikus korlátok, erről [10]-ben talál bővebb információt az olvasó.

1.2. Van der Waerden-tétel

Eddig a gráfszínezések halmazcsaládján dolgoztunk, az alábbiakban áttérünk a természetes számok színezéseire, ehhez bevezetünk egy kényelmes jelölést.

1.2.1. Definíció. *Legyenek $c,d \in \mathbb{Z}$, $c < d$ egész számok. Ekkor a $[c,d]$ intervallumon a $\{c, c+1, \ldots, d-1, d\}$ halmazt értjük.*

1.2.2. Tétel. (Van der Waerden) *Legyenek $k,r \geq 2$ egész számok. Ekkor létezik olyan legkisebb $w = w(k;r) \in \mathbb{Z}$, hogy minden $n \geq w$ esetén $[1,n]$ bármelyik r-színezése tartalmaz k hosszú számtani sorozatot.*

1.2.3. Megjegyzés. A tétel tetszőlegesen hosszú azonos színű számtani sorozat létezését állítja $\mathbb{Z}^+$ színezéseiben, de ez nem implikálja, hogy létezni fognak végtelen hosszú monokromatikus sorozatok is. Tekintsük például a következő 2-színezést:

$$\underbrace{1}_{1}\underbrace{00}_{2}\underbrace{1111}_{4}\underbrace{00\ldots0}_{8}\underbrace{11\ldots1}_{16}00\ldots$$

azaz minden $j \geq 0$ esetén, az $I_j = [2^j, 2^{j+1} - 1]$ intervallum 1 színű, ha j páros és 0 színű, ha j páratlan. Tetszőleges $k \in \mathbb{Z}$ esetén I_k egy monokromatikus számtani sorozat, de nem létezik végtelen hosszú ilyen sorozat a fenti színezésben.

Tegyük fel, hogy $A = \{a, a + d, a + 2d, \dots\}$ egy végtelen hosszú számtani sorozat. Ekkor létezik olyan n egész, amire $2^n > d$ teljesül és $A \cap I_n$ nemüres. Mivel $d < 2^n$, azt is tudjuk, hogy $A \cap I_{n+1}$ is nemüres. I_n és I_{n+1} ellenkező színűek, így A nem lehet monokromatikus.

A tétel bizonyításához szükségünk lesz két lemmára. Ezek megfogalmazása előtt érdemes bevezetni pár definíciót és tisztázni számtani sorozatok habár nyilvánvaló, de fontos tulajdonságait. Az alábbi állítás biztosítja, hogy a számtani sorozatok invariánsak az eltolásra és nyújtásra.

1.2.4. Állítás. *Legyenek k, r, m, a és b pozitív egészek. Ekkor $[1, m]$ tetszőleges r-színezése akkor, és csak akkor tartalmaz k-hosszú számtani sorozatot, ha a*

$$S = \{a, a + b, a + 2b, \dots, a + (m - 1)b\}$$

bármelyik r-színezése is tartalmaz k-hosszú számtani sorozatot.

Bevezetünk továbbá két definíciót, melyek fontos szerepet játszanak a Van der Waerden-tétel következtő bizonyításában.

1.2.5. Definíció. *Legyenek $r, m, n \geq 1 \in \mathbb{Z}$. Legyen γ egy r-színezése $[1, n + m]$-nek, továbbá $\chi_{\gamma,m}$ jelentse a következő r^m-színezése $[1, n]$-nek: minden $j \in [1, n]$ esetén legyen*

$$\chi_{\gamma,m}(j) = (\gamma(j + 1), \gamma(j + 2), \dots, \gamma(j + m)).$$

Nevezzük $\chi_{\gamma,m}$-et γ-ból származtatott színezésnek, vagy egyszerűen származtatott színezésnek.

1.2.6. Példa. Tekintsük az $r = 2, m = 3$ és $n = 18$ esetet. A $\gamma : [1 : 21] \to \{0, 1\}$ színezés legyen a következő:

011000111100000111111

Ahhoz, hogy leírjuk a γ-ból származtatott $\chi_{\gamma,3}$ 2^3-színezését $[1, 18]$-nak, definiálunk egy $T = \{(i, j, k) : i, j, k \in \{0, 1\}\} \xrightarrow{\gamma} [0, 7]$ megfeleltetést a következőképp:

$$(0,0,0) \leftrightarrow 0; \quad (1,0,0) \leftrightarrow 1; \quad (0,1,0) \leftrightarrow 2; \quad (0,0,1) \leftrightarrow 3;$$
$$(1,1,0) \leftrightarrow 4; \quad (1,0,1) \leftrightarrow 5; \quad (0,1,1) \leftrightarrow 6; \quad (1,1,1) \leftrightarrow 7;$$

Mivel $\chi_{\gamma,3}(1)$ a $(\gamma(2),\gamma(3),\gamma(4)) = (1,1,0)$ hármasnak felel meg, így $\chi_{\gamma,3}(1) = 4$. Hasonlóan kiszámolva $[1,18]$ maradék 17 elemét, megkapjuk a származtatott színezést:

$$410367741000367777$$

1.2.7. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $(k,t;r)$ hármas finom, ha létezik olyan $m = m(k,t;r) \in \mathbb{Z}$, amire teljesül, hogy $[1,m]$ minden r-színezéséhez léteznek olyan $z, x_0, x_1, \dots, x_t$ egész számok, hogy a*

$$T_s = \left\{ b_s + \sum_{i=0}^{s-1} c_i x_i \ : \ c_i \in [1,k] \right\} \qquad 0 \leq s \leq t$$

halmazok mind monokromatikusak, ahol

$$b_s = z + (k+1) \sum_{i=s}^{t} x_i.$$

1.2.8. Megjegyzés. Míg a fenti definíció első ránézésre körülményesnek tűnhet, nagyban megkönnyíti a tétel bizonyítását. Hogy lássuk, hogyan kapcsolódik ez a számtani sorozatokhoz, tekintsük a következő példát: legyenek $c_0 = c_1 = \cdots = c_{s-1} = j$ minden $j = 1,2,\dots,k$ esetén. Ekkor a következő számtani sorozatot kapjuk:

$$\{a + jd \ : \ j = 1,2,\dots,k\} \subseteq T_s,$$

ahol $a = b_s$ és $d = \sum_{i=0}^{s-1} x_i$.

Mostmár prezentálhatjuk a két lemmát, amelyeknek összefésülésével megkapjuk a Van der Waerden-tétel bizonyítását. Indukciót fogunk alkalmazni, azaz belátjuk, hogy $w(k;r)$ létezése implikálja $w(k+1;r)$ létezését.

1.2.9. Lemma. *Legyen $k \geq 1$. Ha $w(k;r)$ létezik minden $r \geq 1$ esetén, akkor a $(k,t;r)$ hármas finom minden $r,t \geq 1$-re.*

Bizonyítás. Legyen $r \geq 1$. Alkalmazzunk t szerinti indukciót, $t = 1$ esettel kezdve. Legyen a finom hármasok definíciójában említett $m = m(k,1;r) = 3w(k;r) + k + 1$, továbbá χ egy tetszőleges r-színezése $[1, 3w(k;r) + k + 1]$-nek. Mivel feltettük, hogy $w(k;r)$ létezik, így a 1.2.4 állítás szerint $[w(k;r)+k+2, 2w(k;r)+k+1]$-nek tartalmaznia kell egy k-hosszú monokromatikus $S = \{a+d, a+2d, \dots, a+kd\}$ számtani sorozatot.

Használva a 1.2.7 definícióbeli jelöléseket, legyen $z = a - (k+1)$, $x_0 = d$, és $x_1 = 1$. Így a $T_0 = \{a + (k+1)d\}$ és $T_1 = S$ halmazokat kapjuk, melyek $[1, m]$ részhalmazai, továbbá (külön-külön) monokromatikusak, bizonyítván, hogy $(k, 1; r)$ egy finom hármas.

Legyen $t \geq 1$, és tegyük fel, hogy a $(k, t; r)$ hármas finom. Bemutatjuk, hogy ekkor $(k, t+1; r)$ is az. Tudjuk, hogy létezik $m = m(k, t; r)$, és legyen $n = 2w(k; r^m)$. Azt állítjuk, hogy $m(k, t+1; r) = n + m$ jó választás. Legyen γ egy r-színezése $[1, n+m]$-nek. Legyen $\chi = \chi_{\gamma,m}$ a γ-ból származtatott r^m színezése $[1, n]$-nek. A lemmában feltettük, hogy $w(k; r^m)$ létezik, így ezt és n definícióját felhasználva azt kapjuk, hogy létezik egy

$$\{a + d, a + 2d, \ldots, a + (k+1)d\} \subseteq [1, n]$$

számtani sorozat, ahol az első k tag monokromatikus χ szerint. Ekkor χ definíciójából következőleg, az $I_j = [a + jd + 1, a + jd + m]$, $1 \leq j \leq k$ halmazok ugyanúgy vannak színezve, a γ színezés szerint. Mivel $(k, t; r)$ finom, ezért léteznek olyan $z, x_0, x_1, \ldots, x_t$ egészek, hogy a T_i-k monokromatikusak γ szerint (1.2.7 definíció). Eszerint minden I_j tartalmazza a következő monokromatikus halmazokat:

$$\begin{aligned} S_s(j) &= T_s + (a + jd) \\ &= \{y + a + jd \;:\; y \in T_s\} \\ &= \left\{ (b_s + a + jd) + \sum_{i=0}^{s-1} c_i x_i \;:\; c_i \in [1, k] \right\} \end{aligned}$$

ahol $s = 0, 1, \ldots, t$. Mivel az I_j halmazok ugyanazon γ színezés szerintiek, így $S_s(u)$ és $S_s(v)$ is ugyanazon színezés szerinti minden $1 \leq u, v \leq k$. Ebből következőleg a

$$Q_s = \left\{ (b_s + a) + \sum_{i=0}^{s-1} c_i x_i + jd \;:\; j, c_i \in [1, k] \right\}$$

halmaz monokromatikus γ szerint minden $s = 0, 1, \ldots, t$ esetén.

Az alábbiakban mutatunk $z', x'_0, x'_1, \ldots, x'_{t+1}$ egészeket, melyek monokromatikus T'_s-ket adnak minden $0, 1, \ldots, t+1$ számra, ezáltal bebizonyítva, hogy $(k, t+1; r)$ is finom. Legyen

$$\begin{aligned} z' &= z + a \\ x'_0 &= d \\ x'_i &= x_{i-1} \quad \text{ahol } 1 \leq i \leq t+1. \end{aligned}$$

Mivel az összes $s = 0, 1, \dots, t$ esetben $T'_{s+1} = Q_s$, ezért a γ színezés szerint T'_{s+1} monokromatikus, ahol $0 \leq s \leq t$. A $T'_0 = \{b_0 + a + (k+1)d\} \in [1, n+m]$ egyelemű halmaz triviálisan monokromatikus. Ezzel eleget tettünk a $(k, t+1; r)$ hármas finomságának feltételeinek, ezáltal bebizonyítva a lemmát.

□

1.2.10. Lemma. *Ha $(k, t; r)$ finom minden $r, t \geq 1 \in \mathbb{Z}$ esetén, akkor $w(k+1; r)$ létezik minden $r \geq 1$ egészre.*

Bizonyítás. Legyen r adott egész, χ pedig egy tetszőleges r-színezés a $\mathbb{Z}^+$ halmazon. Használjuk ki $(k, t; r)$ finomságát a $t = r$ esetben, azaz léteznek olyan $z, x_0, x_1, \dots, x_r$ egészek, hogy a $T_0, T_1, \dots, T_r$ halmazok monokromatikusak χ szerint. A skatulyaelv szerint léteznek olyan $v < w$ egészek, hogy T_v és T_w monokromatikusak, hisz r színnel színeztünk. Ekkor

$$T_v = \left\{ z + (k+1)\sum_{i=v}^{r} x_i + \sum_{i=0}^{v-1} c_i x_i \ : \ c_i \in [1, k] \right\}$$

és

$$T_w = \left\{ z + (k+1)\sum_{i=w}^{r} x_i + \sum_{i=0}^{w-1} c_i x_i \ : \ c_i \in [1, k] \right\}.$$

Legyen $a = z + \sum_{i=0}^{v-1} x_i + (k+1)\sum_{i=w}^{r} x_i$, ekkor mindezt átírva:

$$T_v = \left\{ a + (k+1)\sum_{i=v}^{w-1} x_i + \sum_{i=0}^{v-1} (c_i - 1) x_i \ : \ c_i \in [1, k] \right\}$$

továbbá

$$T_w = \left\{ a - \sum_{i=0}^{v-1} x_i + \sum_{i=0}^{w-1} c_i x_i \ : \ c_i \in [1, k] \right\}.$$

A $c_0 = c_1 = \cdots = c_{v-1} = 1$ választással T_w-ben a következőt kapjuk:

$$T'_w = \left\{ a + \sum_{i=v}^{w-1} c_i x_i \ : \ c_i \in [1, k] \right\}.$$

Ha $d = \sum_{i=v}^{w-1} x_i$, akkor $a + (k+1)d \in T_v$ -t kapjuk, és a 1.2.8 megjegyzés szerint, $\{a+d, a+2d, \dots, a+kd\} \subseteq T'_w$. Ehhez a halmazhoz hozzávéve $a + (k+1)d$-t kapunk egy $k+1$ hosszú monokromatikus számtani sorozatot, amivel beláttuk $w(k+1; r)$ létezését.

□

Az alábbiakban egyesítjük a két lemmát, ezáltal bebizonyítva Van der Waerden tételét.

Bizonyítás. Nyilvánvalóan $w(1;r)$ létezik minden $r \geq 1 \in \mathbb{Z}$ esetén, hisz csak egyetlen elemre van szükségünk. A 1.2.9 lemma szerint $(1,t;r)$ finom minden $r,t \geq 1$ esetén. Ekkor a 1.2.10 lemmát kihasználva azt kapjuk, hogy $w(2;r)$ létezik minden $r \geq 1$ egészre. Ezt az eljárást folytatva minden k-ra és r-re megmutathatjuk $w(k;r)$ létezését, ezzel a bizonyítás kész.

□

A Ramsey-számokhoz hasonlóan, a nemtriviális $w(k;r)$ értékek is kevés esetben ismertek. Az alábbi táblázatban bemutatjuk az eddig ismert legjobb korlátokat ([9], [8], [7]) néhány Van der Waerden-számra.

$k \setminus r$	2	3	4	5
3	9	27	76	> 170
4	35	293	> 1048	> 2254
5	178	> 2173	> 17705	> 98740
6	1132	> 11191	> 91331	> 540025
7	> 3703	> 48811	> 420217	> 1381687

1.2.1. Algoritmusok $w(k;r)$ kiszámítására

Természetesen felmerülő kérdés, hogy mi okozza a $w(k;r)$ értékek kiszámításának bonyolultságát. Tekintsük például a $w(3;5)$ értéket, ami nyilvánvalóan nagyobb, mint $w(3;4) = 76$. Próbáljuk megvizsgálni például az $[1,100]$ esetben, hogy egy színezés tartalmaz-e monokromatikus 3-hosszú számtani sorozatot. 'Brute forceot' használva 5^{100} színezést kellene ellenőriznunk. Ha megtesszük azt az optimista feltételezést, hogy mindez 1 lépésben lehetséges, akkor is $5^{100} \approx 8 \times 10^{69}$ lépésre van szükségünk. Ha lenne egy billió különböző világunk, egy billió különböző várossal, melyek mind fel vannak szerelve egy billió laborral, amikben laboronként egy billió olyan számítógép van, ami másodpercenként egy billió lépést tesz meg, akkor a fenti módszerrel pár évszázad alatt eldönthetnénk, hogy $w(3;5) \leq 100$, és elkezdhetnénk vizsgálni az $[1,99]$ halmazt.

Szerencsére vannak hatásosabb algoritmusok, bemutatunk párat az alábbiakban. Tartsuk magunkat továbbra is ahhoz a terminológiához, miszerint egy színezés megfelelő, ha nem tartalmaz monokromatikus k-hosszú számtani sorozatot. Legyen χ_j egy r-színezés, az n egész végső értéke pedig $w(k;r)$ lesz.

1: $n,\ k\ ,\chi_1(1) \leftarrow 1$ $\quad\triangleright$ χ_1 ekkor még csak az $\{1\}$ halmazon definiált
2: $S \leftarrow \{\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k\}$ és $k \leftarrow |S|$
3: $n \leftarrow n + 1$
4: $S \leftarrow \emptyset$ és $j \leftarrow 0$
5: $i \leftarrow 0$ és $j \leftarrow j + 1$
6: **for** $i = 1\ \ldots\ r$ **do**
7: $\quad\chi_j(n) \leftarrow i$
8: $\quad$**if** $\chi_j\ :\ [1,n] \rightarrow \{1,\ldots,r\}$ megfelelő **then**
9: $\quad\quad S \leftarrow S \cup \{\chi_j\}$
10: $\quad$**end if**
11: **end for**
12: **if** $j < k$ **then GOTO 5**
13: **if** $S \neq \emptyset$ **then GOTO 2**
14: **return** n

Az algoritmus hatékonyabb a brute forcenál, hisz tudjuk, hogy egy színezés csak akkor S-beli, ha nem tartalmaz k-hosszú monokromatikus számtani sorozatot, így lépésről lépésre felépítve a halmazt, nem kell időt pazarolnunk azokra a színezésekre, amik tartalmaznak k-hosszú monokromatikus számtani sorozatokat.

A fenti algoritmus habár effektív, hasznossága korlátozott az alacsonyabb értékű nemtriviális esetre, hiszen a színezések S halmazának elemszáma túl nagyra nőhet, még mielőtt elkezdenénk kidobni a nem megfelelő színezéseket.

Ismertetünk még egy algoritmust, ami az előzővel ellentétben nem ütközik memóriai problémákba a $w(k;r)$ érték megkeresése során. A jelölések hasonlóak, mint az előzőekben.

1: $i,\ \chi(1) \leftarrow 1$
2: $n \leftarrow r + 1$
3: $i \leftarrow i + 1$
4: $\chi(i) \leftarrow 1$
5: **if** $\chi\ :\ [1, i] \to \{1, 2, \ldots, r\}$ megfelelő **then GOTO 3**
6: **if** $\chi(i) = r$ **then GOTO 9**
7: $\chi(i) \leftarrow \chi(i) + 1$
8: **GOTO 5**
9: **if** i $>$ n **then**
10: $\quad n \leftarrow i$
11: $\quad i \leftarrow i - 1$
12: **end if**
13: **if** $i > 1$ **then GOTO 6**
14: **return** n

Habár a második algoritmus nem rendelkezik memóriaproblémákkal, futásideje így is igen időigényes. Függetlenül attól, hogy hatásosabbak az algoritmusok a triviális brute force megoldásnál, a futásidő ugyanúgy exponenciálisan nő az ellenőrizendő $[1, n]$ intervallum hosszában.

Tegyünk egy egyszerű összehasonlítást aközött, hogy mennyi időbe telik kiszámítani $w(6; 2)$-t $178 = w(5; 2)$-höz képest. Ismert, hogy $w(6; 2) \geq 696$, tételezzük fel, hogy ez az alsó korlát éles. Az $[1, 696]$ intervallum 2-színezéseinek száma 2^{696}, míg az $[1, 178]$ intervallumé 2^{178}. Nem vétünk túl nagy hibát azzal, ha azt feltételezzük, hogy a $w(5; 2)$ kiszámításához szükséges idő úgy aránylik $w(6; 2)$ kiszámítási idejéhez, mint az intervallumok színezéseinek számai, azaz $2^{696-178} = 2^{542}$!

1.2.11. Megjegyzés. A $w(6; 2)$ értéket 2008-ban találták csak meg, ezt különböző "előfeldolgozási" metódusokkal és SAT-problémává való átalakítással tették meg. Erről, és az emögött rejlő számítástudományi technikákról részletesen olvashatunk [7]-ben.

A harmadik algoritmus amit prezentálunk a másodiknak egy finomítása, mely alkalmazza a "culprit"' metódust. Ennek megértéséhez bevezetjük a következő definíciót.

1.2.12. Definíció. *Legyenek $m \in \mathbb{Z}^+$, $k \geq 2$ egész számok, továbbá χ az $[1, m]$ intervallum egy r-színezése. Egy n egész szám culpritja egy olyan $a + (k-2)d$, $a, d \geq 1$ egész szám, amire teljesül, hogy $\{a, a+d, \ldots, a+(k-2)d\}$ egy monokromatikus számtani sorozat, és $a + (k-1)d = n$. Azaz a $(k-1)$-ik tagja egy számtani sorozatnak, melynek a k. tagja n, és az első $k-1$ tagja monokromatikus.*

Egy példán keresztül bemutatjuk hogyan könnyítheti mindez a számításunkat.

1.2.13. Példa. Tegyük fel, hogy a $w(4; 2) = 35$ értéket próbáljuk megkeresni a második algoritmussal. Tekintsük a program következő állapotát: $w = 30$, azaz találtunk egy jó színezést az $[1, 29]$ halmazra, de $[1, 30]$-ra még nem; $i = 26$ és a $\chi(i) = 1$ lépést akarjuk végrehajtani; a színek jelenlegi állása:

$$1, 2, 4, 6, 9, 10, 11, 13, 17, 18, 20, 22, 23$$

1 színnel lettek színezve,

$$3, 5, 7, 8, 12, 14, 15, 16, 19, 21, 24, 25$$

pedig 2 színnel lettek színezve. Ekkor a $\chi(26) = 1$ és a $\chi(26) = 2$ esetben is rossz színezést kapunk, az első esetben a $\{2, 10, 18, 26\}$ halmaz monokromatikus, a másodikban pedig $\{5, 12, 19, 26\}$. Ekkor csökkentjük i-t, majd teszteljük, hogy se 23, se $22\ldots$ színét nem változtathatjuk, hisz az is 4-hosszú monokromatikus számtani sorozatot eredményezne. A legkisebb 1-színű culprit 26-ra nézve 18, azaz amíg $\{2, 10, 18\}$ 1-színű, addig 26 nem lehet az. A legkisebb 2-színű culprit pedig 19, azaz amíg nem változtatunk az $[1, 19]$ halmaz színezésén, addig nincs értelme foglalkozni $\{20, 21, 22, 23, 24, 25\}$ színeivel, mert függetlenül tőlük lesz monokromatikus sorozat. Ezzel számítást spórolnánk, ha egyből 19-et helyeznénk át a 2-színűek halmazába. A másodikkal ellentétben a harmadik algoritmus ezt az elvet követi.

Jelölje $cul_j(i)$ a minimumát i összes j-színű culpritjának. Ekkor az algoritmus pszeudokódja a következő:

```
1: i, χ(1) ← 1
2: n ← r + 1
3: i ← i + 1
4: χ(i) ← 1
5: if i > n then
6:     n ← i
7: end if
8: if χ : [1, i] → {1, 2, ..., r} megfelelő then GOTO 3
9: if χ(i) = r then GOTO 12
10: χ(i) ← χ(i) + 1
11: GOTO 8
12: i ← max{cul_j(i) : 1 ≤ j ≤ r}
13: if χ(i) < r then GOTO 10
14: i ← i − 1
15: if i = 1 then return n
16: GOTO 8
```

Habár az eddigieknél jóval effektívebb, a culprit algoritmus sem alkalmas ismeretlen Van der Waerden számok meghatározására, futásideje miatt.

1.2.14. Megjegyzés. A fentiekben nem volt szó arról, hogy mégis hogyan dönthetjük el egy színezésről, hogy jó-e. Erikson [3] adott egy dinamikus programozáson alapuló $O(n^2)$ futásidejű algoritmust, mely adott $\{i_1, \ldots, i_n\}$ egészekből álló számhalmazban megkeresi a leghosszabb számtani sorozatot. Ezt az algoritmust minimálisan módosítva el tudjuk dönteni, hogy adott r és k esetén egy r-színezett $[1, n]$ intervallum tartalmaz-e k-hosszú monokromatikus számtani sorozatot.

1.3. Schur-tétel

1.3.1. Definíció. *Legyenek $x < y < z$ pozitív egészek. Az $\{x, y, z\}$ számhármast Schur-hármasnak nevezzük, ha teljesül, hogy $x + y = z$.*

1.3.2. Tétel. (Schur) *Minden $r \geq 1$ egész számhoz létezik olyan legkisebb $s = s(r) \in \mathbb{Z}$ (Schur-szám), hogy $[1, s]$ bármely r-színezése tartalmaz egy monokromatikus Schur-hármast.*

Bizonyítás. Ramsey-tétele szerint minden $r \geq 1 \in \mathbb{Z}$ esetén létezik egy $n = R_r(3)$, hogy K_n bármely r-élszínezése tartalmaz monokromatikus háromszöget. Vegyük az $[1, n - 1]$ intervallum egy tetszőleges χ r-színezését. Számozzuk K_n csúcsait $1, 2, \ldots n$-el, majd színezzük az $(i, j) \in E(K_n)$ élt $\chi(|i - j|)$ színűre. Ramsey-tétele szerint az így definiált élszínezésben létezik monokromatikus háromszög, ennek csúcsai $a < b < c$. Így az $(a, b), (b, c), (c, a)$ élek mind ugyanolyan színűek, tehát $x = b - a$, $y = c - b$, $z = c - a$ is azonos színosztályban vannak. Ekkor $x + y = z$ egy monokromatikus megoldás.

$\square$

1.3.3. Következmény. Minden $r \geq 1 \in \mathbb{Z}$ esetén $s(r) \leq R_r(3) - 1$.

A Ramsey és Van der Waerden-számokhoz hasonlóan a Schur-számok is csak alacsony értékek esetén ismertek. Az alábbi táblázatban bemutatjuk a jelenleg ismert [2] Schur-számokat:

Schur-számok	
$s(1)$	1
$s(2)$	4
$s(3)$	13
$s(4)$	44
$s(5)$	$160 \leq 315$

Schur az alábbi tétel céljából kezdett el foglalkozni a monokromatikus Schur-hármasokkal, ennek bizonyításához felhasználunk néhány alapvető csoportelméleti tételt [6].

1.3.4. Tétel. (mod p Fermat) *Legyen $n \geq 1 \in \mathbb{Z}$. Létezik olyan q prím, amire teljesül, hogy minden $p \geq q$ prím esetén az $x^n + y^n \equiv z^n \pmod{p}$ kongruenciának van egész megoldása, amelyre teljesül, hogy $xyz \not\equiv 0 \pmod{p}$.*

Bizonyítás. Tetszőleges $p > s(n)$ prím esetén legyen

$$\mathbb{Z}_p^\times = \{1, 2, \ldots, p - 1\}$$

a nemnulla redukált maradékosztályok csoportja modulo p. Legyen $S = \{x^n \ (mod\ p) : \ x \in \mathbb{Z}_p^\times\}$. Könnyű látni, hogy S részcsoportja $\mathbb{Z}_p^\times$-nek. Ebből következőleg felírhatjuk a csoportunkat, mint mellékosztályok uniója:

$$\mathbb{Z}_p^\times = \bigcup_{i=1}^{k} a_i S \qquad k = (n, p - 1).$$

Most vezessünk be egy k-színezést a $\mathbb{Z}_p^\times$ csoporton. Legyen $t \in \mathbb{Z}_p^\times$ színe az a j, amelyre $t \in a_j S$. Mivel $k \leq n$ és $p-1 \geq s(n)$, ezért Schur-tétele szerint létezik olyan monokromatikus számhármas, $\{a, b, c\} \subseteq \mathbb{Z}_p^\times$, amelyre $a + b = c$. Tehát valamely $1 \geq i \geq k$ esetén, léteznek olyan $a, b, c \in a_i S$ számok, melyekre $a + b = c$. Következésképp léteznek olyan $x, y, z \in \mathbb{Z}_p^\times$ egészek, melyekre $a_i x^n + a_i y^n \equiv a_i z^n \ (mod\ p)$. Végigszorozva a_i^{-1}-el megkapjuk a tétel állítását.

□

1.3.5. Megjegyzés. Az eredeti bizonyítás nem alkalmazta a Ramsey-tételkört, sőt, Ramsey-tételét nem bizonyították 1928-ig, Schur pedig már 1916-ban belátta a fent bizonyított tételt.

1.3.1. Korlátok Schur-számokra

A 1.3.3 következményből már kaptunk egy felső korlátot $s(r)$-re, viszont ez nem valami hasznos, amíg nincs explicit becslésünk $R_r(3)$-ra. Ezt fogjuk orvosolni a következő lemmában.

1.3.6. Lemma. *Minden $r \geq 1 \in \mathbb{Z}$ esetén $R_r(3) \leq 3r!$.*

Bizonyítás. Az $r = 1$ esetben az állítás nyilvánvalóan igaz, így feltehetjük, hogy $r \geq 2$. Minden $1 \leq i \leq r$ esetén jelölje $R_r^i(3)$ a következő Ramsey-számot: $R(\underbrace{3, 3, \ldots, 3}_{i-1}, 2, \underbrace{3, 3, \ldots, 3}_{r-i})$.

Először megmutatjuk, hogy

$$R_r(3) \leq \sum_{i=1}^{r} R_r^i(3). \tag{1.1}$$

(1.1) bizonyításában hasonlóan járunk el, mint a Ramsey-tétel bizonyításánál. Legyen $m = \sum_{i=1}^{r} R_r^i(3)$ és tekintsük K_m egy tetszőleges r-élszínezését. Válasszunk egy v csúcsot. Legyenek a színeink rendre $1, 2, \ldots, r$, és jelölje C_i azon csúcsokhalmazt, amelyeket i színű éllel kötöttünk v-hez. A skatulya-elv szerint létezik olyan j, amelyre $|C_j| \geq R_r^j(3)$. Ekkor a C_j részgráf tartalmaz egy monokromatikus j színű K_2-t, vagy egy $c \in \{1, 2, \ldots, j-1, j+1, j+2, \ldots, r\}$ színű háromszöget. Az utóbbi esetben készen vagyunk, az előbbiben pedig $K_2 \cup \{v\}$ által feszített részgráf egy j-monokromatikus háromszöget ad, ezáltal bebizonyítva (1.1) -et.

Következő lépésben bemutatjuk, hogy $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ esetén

$$R_r^i(3) = R_{r-1}(3). \tag{1.2}$$

Nyilván $R_{r-1}(3) \geq R_r^i(3)$ teljesül, így $R_r^i(3) \geq R_{r-1}(3)$ bizonyítása után készen vagyunk. $R_r^i(3)$ definíciója szerint létezik olyan r-színezése $K_{R_r^i(3)-1}$-nek, amiben nincs $c \in \{1, 2, \ldots, i-1, i+1, i+2, \ldots, r\}$ színű monokromatikus háromszög, se i színű él. Ebből kifolyólag egy $(r-1)$-színezését kapjuk $K_{R_r^i(3)-1}$-nek, ami monokromatikus háromszögmentes. Így $R_r^i(3) \geq R_{r-1}(3)$, tehát 1.2 fennáll.

A (1.2) egyenlőségből látszik, hogy $\sum_{i=1}^r R_r^i(3) = rR_{r-1}(3)$. Továbbá (1.1) szerint $R_r(3) \leq rR_{r-1}(3)$ minden $r \geq 2$ esetén. Az egyetlőnlenség ismételt alkalmazásával, és $R_2(3) = 6$ ismeretében megkaptuk, hogy $R_r(3) \leq 3r!$.

□

A 1.3.3 következményből és a 1.3.6 lemmából együttesen a következőt kaptuk.

1.3.7. Tétel. *Minden $r \geq 1 \in \mathbb{Z}$ esetén $s(r) \leq 3r! - 1$*

Az alábbiakban egy alsó korlátot is bemutatunk.

1.3.8. Tétel. *Minden $r \geq 1 \in \mathbb{Z}^+$ esetén $s(r) \geq \frac{3^r+1}{2}$.*

Bizonyítás. Legyen $n \geq 1$, és $\chi : [1, n] \to \{1, 2, \ldots, r\}$ egy olyan r-színezés, amely nem tartalmaz monokromatikus Schur-hármast. Kreáljunk egy χ-t kiterjesztő $\hat{\chi} : [1, 3n + 1] \to \{1, 2, \ldots, r+1\}$ $(r+1)$-színezést a következőképpen: minden $x \in [n+1, 2n+1]$ esetén legyen $\hat{\chi}(x) = r + 1$, ha pedig $x \in [1, n] \cup [2n + 2, 3n + 1]$, akkor legyen $\hat{\chi}(x) = \chi(y)$, ahol $x \equiv y \pmod{2n + 1}$.

Azt állítjuk, hogy $[1, 3n + 1]$ nem tartalmaz monokromatikus Schur-hármast a $\hat{\chi}$ színezés alatt. Legyen $\{x, y, z\}$ egy Schur-hármas, ahol $x \leq y$. Először tekintsük az $(r + 1)$ esetet: mivel $2(n + 1) > 2n + 1$, ezért $\{x, y, z\}$ nem lehet $(r + 1)$-színű. Most legyen $j \neq r + 1$ tetszőleges szín. A $\hat{\chi}$ és a χ színezések $[1, n]$ halmazra való megszorítása identikus, így $\{x, y, z\} \subseteq [1, n]$ nem lehet monokromatikus j-színű Schur-hármas, a feltevés szerint. Ugyanakkor mivel $(2n+2)+(2n+2) = 4n+4 > 3n+1$, ezért az sem lehetséges, hogy $x, y \in [2n + 2, 3n + 1]$, így $[2n + 2, 3n + 1]$ sem tartalmaz monokromatikus j-színű Schur-hármast, tehát ha létezik ilyen $\{x, y, z\}$, akkor $x \in [1, n]$ és $y \in [2n + 2, 3n + 1]$.

Tegyük fel, hogy létezik $\{x, y, z\}$ j-színű Schur-hármas. Ekkor legyenek az $y', z' \in [1, n]$ egészek a következők:

$$y' \equiv y \pmod{(2n + 1)}$$
$$z' \equiv z \pmod{(2n + 1)}.$$

Ekkor $\{x, y', z'\} \subseteq [1, n]$ egy j-színű monokromatikus Schur-hármas, amivel ellentmondásra jutottunk. Tehát beláttuk, hogy $s(r) \geq n+1$ esetén $s(r+1) \geq 3n+2$, azaz

$$s(r+1) \geq 3s(r) - 1. \tag{1.3}$$

A bizonyítást r szerinti indukcióval fogjuk befejezni. Nyilvánvalóan az $s(1) = 2 \geq \frac{3^1+1}{2}$ esetben igaz az állítás. Legyen $r \geq 1 \in \mathbb{Z}$ és $s(r) \geq \frac{3^r+1}{2}$. Ekkor (1.3) szerint

$$s(r+1) \geq 3s(r) - 1 \geq 3\left(\frac{3^r+1}{2}\right) - 1 = \frac{3^{r+1}+1}{2}.$$

$\square$

2. fejezet

Hales-Jewett tétel

2.1. A tétel kimondásához szükséges definíciók

Az A. W. Hales és R.I. Jewett által bizonyított tétel [4] egy igen általános eredmény, melyből a 'Ramsey-szerű' tételek többsége könnyen származtatható. A fejezetben a [5]-beli bizonyítás egy feldolgozását fogjuk bemutatni. A Hales-Jewett tétel jelenleg a Ramsey-elmélet egyik leghasznosabb eszköze, a kimondásához és bizonyításához bevezetünk néhány fogalmat.

2.1.1. Definíció. *A t-elemű ABC alatt az $A = \{0, 1, \dots, t-1\}$ szimbólumhalmazt fogjuk érteni. Legyen $* \notin A$ egy új szimbólum. Legyenek szavak $*$-t nem tartalmazó szimbólumsorozatok, $*$-t tartalmazó szimbólumsorozatok pedig gyökök. Egy $\tau \in (A \cup \{*\})^n$ gyök és $a \in A$ szimbólum esetén jelölje $\tau(a) \in A^n$ azt a szót, ahol minden $*$-t τ-ban a-ra cserélünk.*

2.1.2. Definíció. *Legyen τ egy gyök. Egy τ-beli kombinatorikus egyenes az alábbi t szó halmaza:*

$$L_\tau = \{\tau(0), \tau(1), \dots, \tau(t-1)\}.$$

2.1.3. Példa. Legyen $\tau = 04 * 2 * 1$ gyöke az $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ABC-nek. Ekkor az alábbi 5 sorban lévő szavak halmaza, azaz

$$L_\tau = \left\{\begin{matrix} 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 2 & 4 & 1 \end{matrix}\right\}$$

egy τ-beli kombinatorikus egyenes. Minden adott gyök meghatározza az egyeneseit, így összesen $(|A|+1)^n - |A|^n)$ kombinatorikus egyenes van $A^n - ben$.

2.2. A tétel kimondása és bizonyítása

2.2.1. Tétel. (Hales-Jewett) *Legyen A egy t-elemű ABC, r pozitív egész. Ekkor létezik olyan $HJ(r,t)$ egész szám, hogy $A^{HJ(r,t)}$ minden r-színezésében létezik monokromatikus kombinatorikus egyenes.*

Hales és Jewett a tételt eredetileg általánosabb struktúrákra, úgynevezett kombinatorikai terekre is belátta, amelyekben több $*_1, \ldots, *_m$ független 'mozgó' koordinátát megengedünk. A bizonyítás áttekinthetősége végett mi csak kombinatorikus 1-terekre, azaz egyenesekre fogjuk belátni a tételt. Hales és Jewett bizonyítása a tételre igen rövid, egy rendkívül gyorsan növekedő felső korlátot ad a $HJ(r,t)$ értékekre. Shelah 1988-ban adott egy alapjaiban eltérő új bizonyítást, mely egy rekurzívan kiszámolható korlátot ad $HJ(r,t)$-re. Ezt fogjuk bemutatni.

Bizonyítás. Minden adott $r \in \mathbb{Z}^+$ szám esetén alkalmazzunk az ABC elemszáma, azaz t szerinti indukciót. A $t = 1$ esetben a tétel állítása triviálisan teljesül. Feltéve, hogy $t-1$ és r esetén az állítás igaz, legyen $n = HJ(r,t-1)$, és definiáljuk az $N_1, \ldots, N_n, N$ egészeket a következőképp:

$$N_1 = r^{t^n} \qquad N_i = r^{t^{n+\sum_{j=1}^{i-1} N_j}} \qquad N = N_1 + \cdots + N_n.$$

Megmutatjuk, hogy $N \in \mathbb{Z}^+$ teljesíti a feltételeket, azaz $HJ(r,t) \leq N$.

Legyen $A = \{0, 1, \ldots, t-1\}$ egy t elemű ABC, és $\chi : A^N \to \{1, \ldots, r\}$ egy tetszőleges színezés. Azt akarjuk megmutatni, hogy létezik legalább egy monokromatikus kombinatorikus egyenes. Egymáshoz 'közeli' egyenesekkel kapcsolatos észrevételek segítségével fogjuk ezt belátni, ehhez bevezetjük a következő definíciót. Azt mondjuk, hogy $a, b \in A^n$ szomszédosak, ha csak egyetlen olyan i koordináta létezik, amelyben eltérnek, és ott $a_i = 0$ és $b_i = 1$:

$$a = a_1 \ldots a_{i-1}\, 0\, a_{i+1} \ldots a_n$$
$$b = b_1 \ldots b_{i-1}\, 1\, b_{i+1} \ldots b_n$$

Legyen $a = a_1 a_2 \ldots a_n \in A^n$, τ_i pedig egy N_i hosszú gyök, $i = 1 \ldots n$. Ekkor $\tau = \tau_1 \tau_2 \ldots \tau_n$ esetén jelölje $\tau(a)$ a következő n hosszú szót:

$$\tau(a) = \tau_1(a_1)\tau_2(a_2) \ldots \tau_n(a_n).$$

Tehát kicseréljük a τ_1-beli $*$-okat a_1-re, a τ_2-belieket a_2-re, és így tovább, majd a kapott szavakat konkatenáljuk.

Azt állítjuk, hogy létezik gyökök n-hosszú $\tau = \tau_1\tau_2\ldots\tau_n$ sorozata, amire teljesül, hogy $\chi(\tau(a)) = \chi(\tau(b))$ minden szomszédos $a, b \in A^n$ esetén. Az alábbiakban megvizsgáljuk, hogyan is implikálja ez a tétel állítását.

Használva az A^N halmaz χ színezését és az előbbi állításbeli τ gyököt, legyen $\chi' : (A - \{0\})^n \to \chi(\tau(a))$ egy r-színezés. Mivel az $A - \{0\}$ ABC csak $t - 1$ szimbólummal rendelkezik, és $n = HJ(r, t-1)$, alkalmazhatjuk az indukciós feltevést a χ' színezésre, miszerint létezik olyan

$$\nu = \nu_1\nu_2\ldots\nu_n \in \big((A - \{0\}) \cup \{*\}\big)^n$$

gyök, amire igaz, hogy az

$$L_\nu = \{\nu(1), \nu(2), \ldots, \nu(t-1)\}$$

kombinatorikus egyenes monokromatikus χ'-ben. Tekintsük a

$$\tau(\nu) = \tau_1(\nu_1)\tau_2(\nu_2)\ldots\tau_n(\nu_n)$$

szimbólumsorozatot, melynek hossza N, továbbá gyök, hisz ν is gyök volt, tehát rendelkezik legalább egy $*$-al. Azt állítjuk, hogy az

$$L_{\tau(\nu)} = \Big\{\tau\big(\nu(0)\big), \tau\big(\nu(1)\big), \ldots, \tau\big(\nu(t-1)\big)\Big\}$$

kombinatorikus egyenes monokromatikus az eredeti χ színezés alatt. Az indukciós feltevésből tudjuk, hogy χ' ugyanazt a színt rendeli a $\nu(1), \ldots, \nu(t-1)$ szavakhoz, χ' definíciójából következőleg pedig abban is megbizonyosodhatunk, hogy a fent specifikált τ esetén $\tau\big(\nu(1)\big), \ldots, \tau\big(\nu(t-1)\big)$ is monokromatikus, χ alatt. Még azt kell belátnunk, hogy $\tau\big(\nu(0)\big)$ és $\tau\big(\nu(1)\big)$ is ugyanolyan színt kap χ alatt. Ha ν csak egy $*$ szimbólumot tartalmaz, akkor $\nu(0)$ szomszédos $\nu(1)$-vel. Több $*$ szimbólum esetén létezik szomszédok olyan sorozata, melyeken keresztül eljuthatunk $\nu(0)$ -ből $\nu(1)$-be, tekintsük például a következőt:

$$\begin{aligned}
\nu(1) &= \ldots 1 \ldots 1 \ldots 1 \ldots \\
&= \ldots 0 \ldots 1 \ldots 1 \ldots \\
&= \ldots 0 \ldots 0 \ldots 1 \ldots \\
\nu(0) &= \ldots 0 \ldots 0 \ldots 0 \ldots
\end{aligned}$$

Így τ definíciója miatt $L_{\tau(\nu)}$ valóban monokromatikus egyenes.

Az alábbiakban bebizonyítjuk a fenti állítást. Emlékezzünk, hogy gyökök egy olyan $\tau = \tau_1\tau_2\ldots\tau_n$ n-hosszú sorozatát keressük, ahol τ_i hossza N_i, és minden $a, b \in A^n$ szomszéd esetén $\tau(a)$ és $\tau(b)$ azonos színűek.

A gyökök létezését i szerinti 'fordított indukcióval' fogjuk bizonyítani, azaz tegyük fel, hogy a $\tau_{i+1}, \ldots, \tau_n$ gyököket már megtaláltuk. A célunk, hogy megtaláljuk ezek után τ_i-t.

Legyen $L_{i-1} = \sum_{j=1}^{i-1} N_j$, azaz a $\tau_1\tau_2\ldots\tau_{i-1}$ gyök hossza. Az i. szegmens, azaz τ_i hossza N_i. Legyen $k = 0, 1, \ldots, N_i$ esetén legyen W_k a következő N_i hosszú szó:

$$W_k = \underbrace{0\ldots0}_{k}\underbrace{1\ldots1}_{N_i-k}.$$

Továbbá definiáljuk a χ_k r-színezését az $A^{L_{i-1}+n-i}$ halmaznak $k = 0, 1, \ldots, N_i$ esetén. Legyen $x = x_1x_2\ldots x_{L_{i-1}-1}y_{i+1}\ldots y_n \in A^{L_{i-1}+n-i}$, ekkor:

$$\chi_k\big(x_1x_2\ldots x_{L_{i-1}-1}y_{i+1}\ldots y_n\big) = \chi\big(x_1x_2\ldots x_{L_{i-1}-1}W_k\tau_{i+1}(y_{i+1})\ldots\tau_m(y_n)\big).$$

Ekkor van N_i+1 darab színezésünk, $\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_{N_i}$. Az $A^{L_{i-1}+n-i}$ halmaz r-színezéseinek a száma legfeljebb

$$r^{t^{L_{i-1}+n-i}} \le r^{t^{L_{i-1}+n}} = N_i.$$

A skatulyaelv szerint ekkor léteznek olyan $s < k$ egészek, melyekre $\chi_s = \chi_k$. Legyen ekkor a keresett gyök a következő:

$$\tau_i = \underbrace{0\ldots0}_{s}\underbrace{*\cdots*}_{k-s}\underbrace{1\ldots1}_{N_i-k}$$

Az eképpen definiált $\tau_1, \ldots, \tau_n$ gyökök eleget tesznek a tétel állításának, ugyanis vegyük észre, hogy

$$\tau_i(0) = W_k \qquad \text{és} \qquad \tau_i(1) = W_s,$$

és ha veszünk két tetszőleges a, b szomszédot, amik az i-dik koordinátában térnek el:

$$a = a_1\ldots a_{i-1}\,0\,a_{i+1}\ldots a_n$$
$$b = a_1\ldots a_{i-1}\,1\,a_{i+1}\ldots a_n,$$

akkor

$$\tau(a) = \tau_1(a_1)\ldots\tau_{i-1}(a_{i-1})\tau_i(0)\tau_{i+1}(a_{i+1})\ldots\tau_n(a_n)$$
$$\tau(b) = \tau_1(a_1)\ldots\tau_{i-1}(a_{i-1})\tau_i(1)\tau_{i+1}(a_{i+1})\ldots\tau_n(a_n),$$

és mivel $\chi_s = \chi_k$,

$$\begin{aligned}\chi(\tau(a)) &= \chi\big(\tau_1(a_1)\dots\tau_{i-1}(a_{i-1})\,W_k\,\tau_{i+1}(a_{i+1})\dots\tau_n(a_n)\big)\\ &= \chi_k\big(\tau_1(a_1)\dots\tau_{i-1}(a_{i-1})a_{i+1}\dots a_n\big)\\ &= \chi_s\big(\tau_1(a_1)\dots\tau_{i-1}(a_{i-1})a_{i+1}\dots a_n\big)\\ &= \chi\big(\tau_1(a_1)\dots\tau_{i-1}(a_{i-1})\,W_s\,\tau_{i+1}(a_{i+1})\dots\tau_n(a_n)\big) = \chi\big(\tau(b)\big).\end{aligned}$$

Ezzel bebizonyítottuk az állítást, ezáltal befejeztük a Hales-Jewett tétel bizonyítását.

□

2.3. Következmények

2.3.1. Állítás. *A Hales-Jewett tételből következik a Van der Waerden-tétel.*

Bizonyítás. Azt szeretnénk belátni, hogy létezik olyan $w(k;r) \in \mathbb{Z}^+$, amire teljesül, hogy $[1,\dots,w(k;r)]$ minden r-színezése tartalmaz k-hosszú számtani sorozatot. Legyen $w(k;r) = n(k-1)$, ahol $n = HJ(r,k)$ a Hales-Jewett tételből. Tekintsük az $A = \{0,1,\dots,k-1\}$ ABC-t, és legyen az $f : A^n \to [1,\dots,w(k;r)]$ leképezés minden $x = (x_1,\dots,x_n) \in A^n$ esetén a koordináták összege, azaz

$$f(x) = x_1 + \dots + x_n.$$

Az f leképezés segítségével definiálunk egy színezést az A^n halmazon, $x \in A^n$ színe legyen $f(x)$. Könnyen látszik, hogy minden

$$L_\tau = \{\tau(0),\tau(1),\dots,\tau(k-1)\}$$

kombinatorikus egyenes egy k-hosszú számtani sorozatot ad, hisz $f\big(\tau(i+1)\big)$ és $f\big(\tau(i)\big)$ között a különbség mindig a τ-beli $*$-ok számával fog megegyezni, azaz ugyanannyi lesz. A Hales-Jewett tétel szerint létezik monokromatikus kombinatorikus egyenes, amiből megkapjuk a monokromatikus k-hosszú számtani sorozatot.

□

A Hales-Jewett tétel segítségével általánosabb struktúrákon is egyszerűen bizonyíthatunk Ramsey-típusú állításokat, az alábbi példában ezt fogjuk bemutatni.

2.3.2. Definíció. *A $W \subset \mathbb{Z}^m$ vektorhalmaz homotetikus másolata a $V \subset \mathbb{Z}^m$ halmaznak, ha létezik olyan $u \in \mathbb{Z}^m$ vektor és $0 \neq \lambda \in \mathbb{Z}$ skalár, melyekre igaz, hogy*

$$W = u + \lambda V := \{u + \lambda v \ : \ v \in V\},$$

azaz létezik egy eltolásból és nyújtásból álló $V \to W$ bijekció.

2.3.3. Tétel. (Gallai-Witt) *Vegyük $\mathbb{Z}^m$ egy tetszőleges r-színezését. Ekkor minden $V \subset \mathbb{Z}^m$ véges részhalmaznak létezik egy $W \subset \mathbb{Z}^m$ monokromatikus homotetikus másolata.*

Bizonyítás. Legyen $V = \{v_1, \ldots, v_t\} \subset \mathbb{Z}^m$, továbbá $n = HJ(r,t)$. Definiáljuk az $f : V^n \to \mathbb{Z}^m$ függvényt, mint $f(v) = v_1 + \cdots + v_n$, ahol $v = (v_1, \ldots, v_n)$. Ekkor f indukál egy r-színezést a V^n halmazon, ahol $\chi(v) = f(v) \in \mathbb{Z}^m$.

A Hales-Jewett tétel szerint ekkor olyan $\tau = \tau_1 \ldots \tau_n$ gyök, mely esetén az

$$L_\tau = \{\tau(v_1), \ldots, \tau(v_t)\} \subset V^n$$

kombinatorikus egyenes monokromatikus. Legyen $\alpha = \{i \ : \ \tau_i = *\}$ indexhalmaz és $\lambda = |\alpha| \neq 0$, hisz az ellentmondana annak, hogy τ gyök. Válasszuk meg az $u \in \mathbb{Z}^m$ vektort, mint $u = \sum_{i \in \alpha} v_i$. Ekkor definíció szerint

$$f\big(\tau(v_j)\big) = \sum_{i \in \alpha} v_i + \sum_{i \notin \alpha} v_j = u + \lambda v_j.$$

Ebből következőleg

$$f(L_\tau) = \{f\big(\tau(v_1)\big), \ldots, f\big(\tau(v_t)\big) = \{u + \lambda v_j \ : \ j = 1, \ldots t\}$$

egy monokromatikus homotetikus másolata V-nek.

□

2.3.4. Tétel. *Tetszőleges $r, k \in \mathbb{N}$ természetes számokhoz létezik olyan $S \subset \mathbb{N}$ részhalmaz, hogy S-ben nincs $k+1$ hosszú számtani sorozat, de S minden r-színezése tartalmaz k hosszú monokromatikus számtani sorozatot.*

Bizonyítás. A 2.3.1 állítás bizonyításának jelöléseit használjuk, illetve jelöljük p-vel a legkisebb k-nál nagyobb prímet. Tekintsük azt az $f : A^n \to \mathbb{N}$ leképezést ahol

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A^n \mapsto x_1 + x_2 p + x_3 p^2 + \ldots + x_n p^{n-1},$$

és legyen S az f értékkészlete. Az $x_i < p$ egyenlőtlenség miatt tetszőleges S színezés megad egy színezést A^n-en, és az ottani monokromatikus egyenes biztosítja a k hosszú monokromatikus számtani sorozat létezését S-ben, akárcsak az előző tétel bizonyításában.

Most megmutatjuk, hogy S-ben nincs $k+1$ hosszú számtani sorozat. Indirekt tegyük fel, hogy van ilyen, és a differenciája $d \neq 0$. Legyen j a legkisebb olyan helyiérték sorszáma, ahol d p-es számrendszerben való felírásában nem 0 szerepel (az egyes helyiérték sorszáma 0, a p-es helyiértéké 1, és így tovább). Ekkor $j < n$, hiszen $d < p^n$. Most ha tekintjük a $k+1$ hosszú S-beli számtani sorozat elemeit p-es számrendszerben felírva, azt kapnánk, hogy azok j-dik helyiértékén $k+1$ féle különböző érték szerepel. De S definíciója miatt a j-dik helyiértéken S-ben csak k féle érték állhat, ez az ellentmondás bizonyítja a tétel állítását.

$\square$

3. fejezet

Általánosított amőbák

3.1. Az eredeti játék kiterjesztései

Az amőba, tradicionálisan egy 3×3-as négyzetrácson játszott kétszemélyes játék, melyen a játékoson felváltva helyezik el a szimbólumaikat, melyek szokás szerint 'X' és 'O'. A nyertes az, aki először ér el egy horizontális, vertikális, vagy átlós 3-hosszú egyenest a szimbólumaival. Ismert általánosítása ennek, ahol egy $m \times n$ rácson kell k-hosszú egyenest elérni. Absztraktabb, de természetes kiterjesztése ennek, ha egy $m_1 \times \cdots \times m_n$ n-dimenziós rácsra visszük át a játékot. A fejezet során az $m_1 = \cdots = m_n = t \in \mathbb{N}$ esetű kétszemélyes játékokkal fogunk foglalkozni.

A játéknak ekkor minden állása izomorf $[1, t]^n$ egy részleges 2-színezésével. Ha ez tartalmaz monokromatikus k-egyenest, akkor nyerő állásról beszélünk. Ha t^n minden eleméhez hozzárendeltünk egy színt, de nem létezik monokromatikus k-egyenes, azt döntetlennek nevezzük. Nyilvánvaló, hogy nem minden színezés érhető el a játékból, így érdemes megkülönböztetni azokat a színezéseket, melyeket megkaphatunk a játék szabályait követve, ezeket fogjuk *korrekt színezéseknek* hívni.

Az általánosított amőba, játékelméleti terminológiával élve, egy teljesinformációs játék, hisz például a pókerrel, vagy a fogolydilemmával ellentétben, itt minden játékos tisztában van az előző lépésekkel, a játék jelenlegi állásával, és a nyeréshez szükséges feltételekkel. Az alábbiakban teszünk pár meggondolást, melyek segítségünkre lesznek abban, hogy alkalmazzuk a Hales-Jewett tételt az általánosított amőbákra. Bizonyos játékelméleti tételeket nem fogunk teljes általánosságban kimondani, ezek precíz alakját megtekintheti az olvasó [1]-ben.

3.1.1. Tétel. (Zermelo) *Minden véges, döntetlen nélküli, kétszemélyes teljesinformációs játék esetén az egyik játékos létezik nyerő stratégiával.*

Bizonyítás. Mindkét játékos nyilván nem rendelkezhet nyerő stratégiával, hisz akkor a végeredmény az lenne, hogy mindketten nyernek, amivel ellentmondásra jutunk.

Az első játékos válassza azt a stratégiát, melyben meggyőződik, hogy a lépése után a második játékosnak nem lesz nyerő stratégiája a játék hátralévő részére. Ha ez nem lehetséges, akkor a második játékosnak már az elején volt egy nyerő stratégiája. Ellenkező esetben az első játékos stratégiája nyereséghez vezet, hisz a feltevéseink szerint a játék véges, és nincs döntetlen állás.

□

Az, hogy egy játékos minden körben a legoptimálisabb lépést teszi, nem garantálja, hogy nyerő stratégiával is rendelkezhet. Az általánosított amőbákra is igaz, hogy a második játékos hiába játszik 'tökéletesen', nem garantált, hogy nyer, sőt, az alábbi is teljesül.

3.1.2. Állítás. *Az általánosított amőbában ha valaki rendelkezik nyerő stratégiával, akkor az csak az első játékos lehet.*

Bizonyítás. Egy általános stratégialopó érvelést fogunk alkalmazni. Tegyük fel, hogy a második játékos rendelkezik egy S nyerő stratégiával. Az első játékos ekkor tesz egy 'X'-et a tábla egy véletlen pontjára, amire a második játékos válaszol egy S szerint elhelyezett 'O'-val. Ha eltekintünk az első véletlenszerűen elhelyezett 'X'-től, akkor az első játékos pont abban a helyzetben találja magát, mint a második az előző körben: azaz egyetlen ellenfél által elfoglalt hely van a táblán.

Ekkor az első játékos alkalmazhatja hasonlóan az S stratégiát - kivéve, ha az lenne a következő S-beli lépés, hogy oda helyezzen 'X'-et, ahova már a játék elején ezt véletlenszerűen megtette. Ekkor ismét helyezzen el véletlenszerűen egy 'X'-et, ekkor összesítve van a táblán egy véletlenszerűen elhelyezett 'X', és egy S stratégiát követő 'X'. Ha az S stratégia később megkövetelné, hogy a véletlenszerűen elhelyezett 'X' helye legyen a következő lépés, akkor ismételten elhelyezünk egy véletlenszerű 'X'-et.

Követve az S stratégiát, az első játékos egy idő után elér egy nyerő pozíciót (továbbá maradhat egy véletlenszerűen elhelyezett 'X'), ami ellentmond annak, hogy a második játékos rendelkezett egy S nyerő stratégiával, tehát ilyen nem létezhet.

□

3.2. Dimenzióküszöb nyerő stratégia létezésére

3.2.1. Tétel. *Minden $t \in \mathbb{N}$ táblaméret esetén létezik olyan $N = HJ(2,t)$, amire igaz, hogy $[1,t]^N$ bármely 2-színezése tartalmaz $t_0 \leq t$-hosszú monokromatikus egyenest, azaz kellően nagy dimenzió esetén nem lehet döntetlen, így az első játékos rendelkezik nyerő stratégiával.*

Bizonyítás. A Hales - Jewett tétel szerint $[1,t]^N$ bármely két színezésében létezik monokromatikus kombinatorikus egyenes, tehát az $[1,t]^N$-en játszott általánosított amőba nem végződhet döntetlennel. Így azonban a 3.1.2 állítás miatt a kezdő rendelkezik nyerő stratégiával.

□

A $HJ(2,t)$ érték egy felső korlátot ad arra, hogy hány dimenzió szükséges a nyerő stratégia garantálásához. Ismert, hogy az $[1,3]^3$ esetben létezik nyerő stratégia, de lehetséges a döntetlen. A Hales-Jewett tétel Shelah-féle bizonyításából eredő felső korlát szerint

$$HJ(2,3) \leq 512 + 2^{3^{514}} \approx 5.24 \cdot 10^{244},$$

ugyanakkor ismert, hogy $HJ(2,3) = 4$. Ez azt jelenti, hogy 4-dimenzióban a 3×3-as amőbában nem lehet döntetlen. Ugyanakkor ellenőrzött, hogy korrekt-állású döntetlen már 3 dimenzióban sem lehetséges a 3×3-as esetben. Az alábbiak egyszerű megkülönböztetésére bevezetünk pár jelölést.

3.2.2. Definíció. *Legyen $GHJ(t)$ a legkisebb pozitív egész, amire teljesül, hogy az $[1,t]^{GHJ(t)}$ általánosított amőbában létezik nyerő stratégia.*

3.2.3. Definíció. *Legyen $N = HJ_{korrekt}(r,t)$ a legkisebb pozitív egész, amire teljesül, hogy az $[1,t]^N$ halmaz összes korrekt r-színezésében létezik monokromatikus kombinatorikus egyenes.*

3.2.4. Definíció. *Legyenek $t, n \in \mathbb{N}$. Az $[1,t]^n$ esetben rétegnek hívunk egy $[1,t]^{n-1}$-beli állást. Minden $[1,t]^n$-beli pozíció pontosan t rétegből áll.*

3.2.5. Állítás. *$HJ_{korrekt}(2,3) = 3$, azaz nincs korrekt döntetlen a 3-dimenziós 3×3-as amőbában.*

Bizonyítás. Használjuk a tradicionális 'XO' jelölést a két játékosra. Tudjuk, hogy csak 2 darab döntetlen állás létezik az $[1,3]^2$ játékban forgatás, tükrözés és csere erejéig, ezek:

$$(1)\begin{bmatrix} O & X & O \\ X & O & X \\ X & O & X \end{bmatrix} \qquad (2)\begin{bmatrix} X & O & X \\ O & X & X \\ O & X & O \end{bmatrix}$$

Tudjuk, hogy $[1,3]^3$ 3 réteggel rendelkezik, legyenek ezek sorra $(1,2,3)$. Ezek mindegyike döntetlen állású kell legyen, továbbá az egyesítésük se tartalmazhat monokromatikus egyenest. Első lépésben tegyük fel, hogy az első réteg (1) felcseréltje, második lépésben pedig azt, hogy a második réteg középső eleme 'O'.

Ekkor ha el akarjuk kerülni X nyereségét, a (1) következő forgatását kell 3. rétegnek választanunk:

$$(1)\begin{bmatrix} X & O & X \\ O & X & O \\ O & X & O \end{bmatrix} \qquad (2)\begin{bmatrix} & & \\ & O & \\ & & \end{bmatrix} (3) \quad \begin{bmatrix} X & O & X \\ X & O & X \\ O & X & O \end{bmatrix}$$

Könnyű ellenőrizni, hogy ekkor bárhogyan is választjuk meg a második réteg elemeit, elkerülhetetlen a nyert állás. Hasonlóan járunk el, ha az első esetben egyéb döntetlen állásból indulunk, vagy a második lépésben 'X'-et választjuk, mint középső szimbólum.

□

Általánosságban is igaz, hogy egy korrekt döntetlen $[1,t]^n$-ben előáll, mint t darab korrekt döntetlen réteg. Megvizsgáljuk az n-dimenzióban lévő korrekt döntetlenek számát, majd adunk egy alsó korlátot $GHJ(t)$-re. Ehhez szükségünk lesz pár újabb definícióra.

3.2.6. Definíció. *Két állást ekvivalensnek tekintünk, ha azok forgatásokkal, tükrözésekkel, valamit cserékkel ($X \to O, O \to X$) egymásba vihetők. Legyen $\sim$ az ekvivalencia jele.*

3.2.7. Definíció. *Legyen $D_{t,n}$ az $[1,t]^n$-beli korrekt döntetlenek $\sim$ alatti ekvivalencia-osztályainak halmaza, továbbá legyen $d_{t,n} = |D_{t,n}|$.*

Tehát fentebb beláttuk, hogy $d_{3,3} = 0$. A Hales-Jewett tételből pedig következik, hogy minden $t \in \mathbb{N}$ számhoz létezik olyan n_0 korlát, hogy minden $n \geq n_0$ esetén $d_{t,n} = 0$.

A $D_{t,n} \subseteq [1,t]^n$ halmaz elemeit egyszerű empirikus konstrukcióval előállíthatjuk. A $t = 1$ esetben nyilvánvaló, hogy mik lesznek az elemek. Az általános $D_{t,n}$ esetben pedig vegyünk t nem feltétlenül különböző réteget $D_{t,n-1}$-ből, majd ezeket sorba illesszük egymás mellé. Ha az így kapott $A \in [1,t]^n$ állás (korrekt) döntetlen, akkor bevesszük $D_{t,n}$-be, ha nem, akkor elvetjük.

Az $[1,t]^n$ halmaz 2-színezéseinek száma 2^{t^n}. Ezek közül

$$\binom{t^n}{\lfloor (t^n)/2 \rfloor}$$

színezés korrekt. Általánosságban is igaz, hogy r szín esetén a korrekt színezések száma

$$\binom{t^n}{\lfloor (t^n)/r \rfloor}\binom{t^n - \lfloor (t^n)/r \rfloor}{\lfloor (t^n)/r \rfloor}\cdots\binom{t^n - (r-2)\lfloor (t^n)/r \rfloor}{\lfloor (t^n)/r \rfloor} = \prod_{i=0}^{r-2}\binom{t^n - i \cdot \lfloor (t^n)/r \rfloor}{\lfloor (t^n)/r \rfloor},$$

ahol a ki nem választott pontok kapják az r. színt. Ismét téve egy optimista feltételezést, miszerint 1 lépésben el tudjuk dönteni egy korrekt állásról, hogy döntetlen-e, már a $t = 4, n = 4$ esetben $5 \cdot 77 \cdot 10^{75}$ legális állás van, melyet ellenőriznünk kéne.

Az alsó korlátról Hales és Jewett eredeti publikációjukban [4] az alábbit fedezték fel, melyet bizonyítás nélkül közlünk.

3.2.8. Tétel. *Ha t páratlan és $t \geq 3^n - 1$, vagy t páros és $t \geq 2^{n+1} - 2$, akkor a második játékos rendelkezik döntetlent hozó stratégiával az $[1,t]^n$ kétszemélyes általánosított amőbában.*

Ha a második játékos rendelkezik döntetlent eredményező stratégiával, akkor az első játékos nyilván nem rendelkezhet nyerő stratégiával. A tételt átfogalmazva azt kapjuk, hogy az $[1,t]^n$ kétszemélyes általánosított amőbában nincs egyik játékos számára se nyerő stratégia, ha:

- $t \equiv 1 \ (mod\ 2)$ esetén
$$t \geq 3^n - 1 \iff \frac{\ln(t+1)}{\ln(3)} \geq n,$$
- $t \equiv 0 \ (mod\ 2)$ esetén
$$t \geq 2^{n+1} - 2 \iff \frac{\ln(t+2)}{\ln(2)} - 1 \geq n.$$

Hogy egységessítsük majd a korlátokat, tegyük meg az alábbi egyszerű észrevételt:

3.2.9. Állítás. *Minden $t > 2$ egész esetén*

$$\frac{\ln(t+1)}{\ln(3)} < \frac{\ln(t+2)}{\ln(2)} - 1$$

Bizonyítás. A $t = 2$ esetben egyenlőség áll fenn, $\frac{\ln(t+1)}{\ln(3)}$ pedig nyilvánvalóan lassabban növekszik, mint $\frac{\ln(t+2)}{\ln(2)}$ ezt követően.

$\square$

3.2.10. Megjegyzés. Az általánosság végett jegyezzük meg, hogy nem szükséges a $t > 2$ esetre szorítkoznunk, hisz $D_{2,n} = \emptyset$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, mivel $[1, 2]^2$-ben $\sim$ alatt csak az alábbi két állás létezik:

$$(1) \begin{bmatrix} X & X \\ O & O \end{bmatrix} \qquad (2) \begin{bmatrix} X & O \\ O & X \end{bmatrix},$$

melyek közül egyik sem döntetlen, így nincs olyan réteg, amiből építeni tudnánk $D_{2,n+1}$-et.

Mint már említettük, nyerő stratégia létezése garantált, ha nincs korrekt döntetlen állás, de mint azt láttuk (hivatkozás)-ben, a nyerő stratégiából nem következik, hogy nem lehet korrekt döntetlen. Az eddig belátottakat a következő tételben foglaljuk össze:

3.2.11. Tétel. *Egy $[1, t]^n$ kétszemélyes általánosított amőba esetén létezik az első játékos számára nyerő stratégia, ha $n = GHJ(t)$, ahol:*

$$\frac{\ln(t+1)}{\ln(3)} < GHJ(t) \leq HJ_{korrekt}(2, t) \leq HJ(2, t) < \infty.$$

Habár rengeteg optimalizált algoritmus létezik ezen értékek keresésére, a számítógépek jelenlegi kapacitása nem ad lehetőséget arra, hogy ezen küszöbszámok pontos értékét meghatározzuk.

Irodalomjegyzék

[1] J. BECK: *Combinatorial Games: Tic-Tac-Toe Theory*, Cambridge University Press, (2008).

[2] J. CHAPELLON: *Modular Schur numbers*, https://arxiv.org/pdf/1306.5635.pdf, (2013).

[3] J. ERICKSON: *Finding longest arithmetic progressions*, http://jeffe.cs.illinois.edu/pubs/arith.html, (1999).

[4] A. W. HALES, R. T. JEWETT: *Regularity and positional games*, Trans. Amer. Math. Soc. 106, (1963).

[5] S. JUKNA: *Extremal Combinatorics With Applications in Computer Science*, Springer, (2001).

[6] E. KISS: *Bevezetés az algebrába*, Typotex, (2007).

[7] M. KOURIL, J. L. PAUL: *The van der Waerden Number w(2;6) Is 1132*, Experimental Mathematics 17, (2008).

[8] B. M. LANDMAN, A. ROBERTSON: *Ramsey theory on the integers*, American Mathematical Society, (2004).

[9] J. RABUNG, M. LOTTS: *Improving the use of cyclic zippers in finding lower bounds for van der Waerden numbers*, Electron. J. Combin. 19, (2012).

[10] S. P. RADZISZOWSKI: *Small Ramsey Numbers - ElJC revision #15*, http://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/DS1/pdf, (2017).