EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

Alkalmazott matematikus szak

Bsc szakdolgozat

Lineáris algebra alkalmazásai a gráfelméletben

Témavezető:

Halasi Zoltán

Algebra és Számelmélet Tanszék

Szerző:

Szittya Bence

Budapest, 2017

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A szakdolgozatban szeretném összefoglalni, a gráfokat modellező mátrixok algebrai tulajdonságai, és a gráf geometriai tulajdonságai közti összefüggéseket. Nagyrészt a szomszédsági mátrixxal, és annak sajátértékeivel foglalkozom. A szakdolgozat teljes egészében csak az egyszerű gráfokat vizsgálom, így nincsenek megengedve sem hurok élek, sem pedig többszörös élek.

Az első fejezetben megemlítem a szakdolgozat megértéséhez szükséges gráfelméleti definíciókat, illetve algebrai tételeket, mint például a Perron-Frobenius tételt, mely alapjául szolgál a további állítások jelentős hányadának. A második fejezetben megmutatom, hogyan számlálhatjuk meg egy tetszőleges egyszerű gráf sétáit algebrai úton, valamint mi a kapcsolat a karakterisztikus polinom együtthatói és a gráf között.

A negyedik és ötödik fejezetben a gráf spektrumának tulajdonságairól, illetve a sajátértékek becsléséről szóló tételek szerepelnek. Alsó és felső becslések, a sajátértékeket tartalmazó intervallum meghatározása, illetve különböző gráftulajdonságokból következő eredmények is részét képezik.

Az utolsó fejezetben egyes speciális gráfokról írok, melyek valamilyen kombinatorikai szabályosságot tartalmaznak, mint a páros gráfok, vagy a ciklikus gráfok. Itt a karakterisztikus polinom meghatározásához, valamint a sajátértékek kiszámolásához vannak tételek.

1. fejezet

Alapfogalmak

1.1. Gráfelméleti definíciók, speciális gráfok

Kezdjük a szakdolgozatban fő szerepet játszó szomszédsági mátrix definiálásával. Tegyük fel, hogy G egy gráf $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ csúcshalmazzal, ahonnan vegyünk egy tetszőleges v_i, v_j párt, amire azt mondjuk, hogy szomszédosak ha $(v_i, v_j) \in E(G)$.

1.1.1. Definíció. (Szomszédsági mátrix) Egy n csúcsú gráf szomszédsági mátrixán azt az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrixot értjük, melynek elemei a következőképp adódnak

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } v_i \text{ és } v_j \text{ szomszédosak;} \\ 0, & \text{különben.} \end{cases} \tag{1.1}$$

Vegyünk egy másik hasonló eljárást, ami szintén a mátrixokat használja mint eszközt, a gráfok megragadására.

1.1.2. Definíció. (Illeszkedési mátrix) Egy n csúcsú e darab éllel rendelkező gráf illeszkedési mátrixán azt az $n \times e$-s $\mathbf{B}$ mátrixot értjük, mely a következőképp áll elő

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } e_j \text{ illeszkedik } v_i \text{ csúcsra;} \\ 0, & \text{különben.} \end{cases} \tag{1.2}$$

Folytassuk pár alapfogalommal a gráfelmélet széles tudományából.

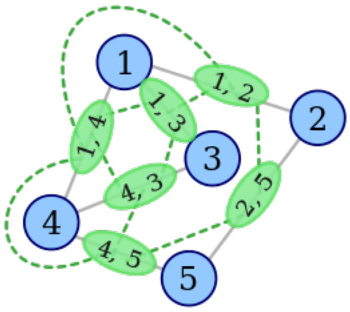
1.1.3. Definíció. (Spektrum) Egy tetszőleges G gráf spektruma azon számpárok sorozata, mely a szomszédsági mátrixának különböző sajátértékeit tartalmazza, multiplicitásukkal párba állítva.

1.1.4. Definíció. (Átmérő) Legyen G egy tetszőleges összefüggő gráf, legyenek $u, v \in V(G)$ tetszőlegesek, valamint definiálja $d(u, v)$ a legrövidebb u-ból v-be menő út hosszát, ezt nevezzük távolságnak. A G gráf átmérője $D = \max_{u,v \in V(G)}(d(u, v))$, azaz a távolságok maximuma.

1.1.5. Definíció. (Élgráf) Egy G gráf $L(G)$ élgráfja a következő konstrukció. A G élei legyenek $L(G)$ csúcsai, valamint $L(G)$-ben akkor fusson él két csúcs között, ha a megfelelő éleknek G-ben van közös csúcsuk, azaz szomszédos élek.

A következő ábrán egyben láthatjuk a gráfot és az abból képzett élgráfot, ahol a gráf csúcsait körök, éleit folytonos vonalak, az élgráf csúcsait pedig ellipszisek, éleit szaggatott vonalak jelölik.

1.1.6. Példa.



1.1.7. Definíció. (Többrészes gráf) Egy G gráfot többrészes gráfnak nevezünk, ha a csúcsait egymástól független osztályokra lehet osztani úgy, hogy az osztályokon belül a csúcsok között nem fut él. Ha G csúcshalmaza két ilyen osztályra bontható, akkor G-t páros gráfnak nevezzük.

1.2. Tételek a mátrixelméletből

Mivel egy gráf szomszédsági mátrixa valós együtthatós szimmetrikus mátrix, hasznát vehetjük a mátrixelmélet egyes ismert eredményeinek. A következő tételek bizonyítás nélkül szerepelnek.

1.2.1. Tétel. (Főtengely tétel) Ha $\mathbf{A}$ egy valós szimmetrikus mátrix, melynek a rendje n, akkor $\mathbf{A}$-nak multiplicitással számolva n darab valós sajátértéke van, és az ezekhez tartozó sajátvektorokból kiválasztható egy ortonormált bázis.

Ha $\mathbf{U}$ mátrix oszlopai egy ortonormált sajátvektorokból álló bázis, akkor $\mathbf{U}^T = \mathbf{U}^{-1}$ és $\mathbf{U}^T\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{D}$, ahol $\mathbf{D}$ a diagonális mátrix, melynek diagonális elemei a megfelelő sajátértékek. Ez adja a diagonalizációs tételt.

1.2.2. Tétel. Ha $\mathbf{A}$ egy valós szimmetrikus mátrix, akkor létezik egy $\mathbf{U}$ mátrix, úgy hogy $\mathbf{U}^T\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{D}$, ahol $\mathbf{D}$ a sajátértékeket tartalmazó valós diagonális mátrix. Ráadásul $\mathbf{A}$ minimál polinomja $\prod(x - \lambda_i)$, ami a különböző λ sajátértékeket tartalmazza.

A következő tétel a nem negatív mátrixok legnagyobb sajátértékéről árul el pár információt, de ehhez előbb be kell vezetnünk egy fogalmat.

1.2.3. Definíció. Egy $\mathbf{A}$ mátrix irreducibilis, ha minden $1 \leq i, j \leq n$-re létezik k természetes szám, hogy $(\mathbf{A}^k)_{ij} \neq 0$.

Ez a szomszédsági mátrix esetében azt jelenti, hogy a mátrix nem hozható blokkdiagonális alakra a csúcsok és a nekik megfelelő sorok és oszlopok permutálásával. Egy gráf szomszédsági mátrixa pontosan akkor nem alakítható blokkdiagonálissá ha a gráf összefüggő.

1.2.4. Tétel. (**Perron-Frobenius**) Ha $\mathbf{A}$ egy nemnegatív mátrix $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ sajátértékekkel, akkor $|\lambda_1| \geq |\lambda_k|$, minden $k = 1, 2, \ldots, n$-re, és van olyan λ_1 sajátértékhez tartozó sajátvektor, aminek minden eleme nemnegatív. Ha $\mathbf{A}$ irreducibilis, akkor a λ_1 sajátérték egyszeres ($\lambda_1 > \lambda_2$), és van olyan sajátvektora, melynek minden eleme pozitív.

Tehát egy összefüggő gráf legnagyobb sajátértéke egyszeres.

A következő tétel egy mátrixnak és annak egy fő részmátrixainak sajátértékeit hasonlítja össze. Egy mátrix fő részmátrixát úgy kaphatjuk, hogy a mátrix egy tetszőleges sorát, és ugyanazon sorszámú oszlopát elhagyjuk.

1.2.5. Tétel. Legyen **A** valós szimmetrikus mátrix $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ sajátértékekkel, és legyenek **A** egy fő részmátrixának sajátértékei $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_{n-1}$. Ekkor $\lambda_i \geq \mu_i \geq \lambda_{i+1}$, minden $i = 1, 2, \ldots, n-1$-re.

Ez a tétel nagyon fontos a gráf sajátértékeinek tanulmányozásában, ugyanis a fő részmátrix megfeleltethető egy indukált részgráfnak, amit úgy kaptunk hogy egyetlen csúcsot hagytunk el az eredeti gráfból.

Ebből egy egyszerű indukcióval következik egy általánosabb tétel.

1.2.6. Tétel. Ha H egy indukált részgráfja G-nek, ahol H sajátértékei $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_m$ és G sajátértékei $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$, akkor $\lambda_{i+n-m} \leq \mu_i \leq \lambda_i$ minden $i = 1, 2, \ldots, m$-re.

2. fejezet

Szomszédsági mátrix és séták

A fejezetben szereplő tételek megtalálhatók az [1] 34-35. oldalán a 4.1-es és a 4.4-es, illetve a [2] 8. oldalán a 2.3-as számmal jelölve.

2.1. A szomszédsági mátrix hatványai

A legrégebbi és talán a legalapvetőbb összefüggés, a gráf sajátértékei és geometriai jellemzői között, a sétákról szól. Tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ szomszédsági mátrixa egy gráfnak. Ekkor $\mathbf{A}$ hatványai megszámlálják a sétákat az említett gráfban.

2.1.1. Tétel. Ha a G gráf szomszédsági mátrixa $\mathbf{A}$, akkor az $\mathbf{A}^k$ mátrix ij-edik eleme egyenlő a v_i-v_j csúcsok közötti k hosszú séták számával, ahol $k = 0, 1, \ldots$

Bizonyítás: Az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk. A $k = 0$ eset triviális, hiszen $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$, azaz bármely csúcsból csak önmagába tudunk eljutni 0 hosszú sétával, mégpedig egyféleképp, hogy helyben maradunk. A $k = 1$ esetben pedig magát a szomszédsági mátrixot kapjuk, amiben ott van egyes, ahol létezik 1 hosszú séta, azaz van él a két csúcs között.

Tegyük fel, hogy $k = l - 1$-re teljesül, és lássuk be, hogy akkor $k = l$-re is teljesül. Jelölje $n_l(x, y)$ az x csúcsból az y csúcsba menő l hosszú séták számát. Ezen séták megfeleltethetők az x-ből induló $l - 1$ hosszú sétáknak, amik y egy szomszédjában végződnek, ezért

$$(\mathbf{A}^l)_{xy} = \sum_{d=1}^{n} (\mathbf{A}^{l-1})_{xd} \mathbf{A}_{dy} = \sum_{d=1}^{n} n_{l-1}(x, d) \mathbf{A}_{dy} = \sum_{d \in N(y)} n_{l-1}(x, d) = n_l(x, y),$$

ahol $N(y)$ az y csúcs szomszédjainak halmazát jelöli. Ha az $\mathbf{A}^{l-1}$ mátrix x csúcshoz tartozó sorát, ami az x-ből induló $l-1$ hosszú sétákat tartja számon, megszorozzuk az $\mathbf{A}$ mátrix y csúcshoz tartozó oszlopával, ami az y szomszédjait tartja számon, megkapjuk $(\mathbf{A}^l)_{xy}$ elemet. Mivel az y oszlopában azokban a sorokban van egyes, amiknek megfelelő csúcsokkal szomszédos, máshol pedig nulla áll, így ez a skaláris szorzat kiválasztja és összegzi az x sorából azokat az elemeket, amik az y szomszédaiba futó $l-1$ séták darabszámát jelölik. Ezeket csak egy-egy él köti össze az y-nal, így ez az összeg egyenlő lesz az x-ből y-ba menő l hosszú séták számával.

■

2.1.2. Következmény. Ha $\mathbf{A}$ szomszédsági mátrixa egy G gráfnak, melynek fokszámai $d_1, d_2, \ldots, d_n$, akkor

- $A^2_{ii} = d(v_i)$;
- a G gráf éleinek számát megadja

$$|E(G)| = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = \frac{1}{2}tr(\mathbf{A}^2); \tag{2.1}$$

- a háromszögek száma a gráfban $\frac{1}{6}tr(\mathbf{A}^3)$.

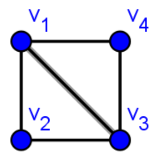
Bizonyítás: Az első pontban szereplő egyenlet baloldalán minden i-re a csúcsból önmagába jutó 2 hosszú séták száma van, ami valóban egyenlő a csúcs fokszámával, hiszen egy ilyen séta csak a csúcsból kiinduló élen oda, majd vissza történhet.

A második pont az előző pontból következik, felhasználva, hogy a gráf éleinek száma fele a fokszámösszegnek.

A harmadik pontban a csúcsból önmagába jutó 3 hosszú séták felelnek meg a háromszögeknek, hiszen ezek a séták valóban egy kört adnak. Tehát az $\mathbf{A}^3$ mátrix átlóelemeit kell összeadnunk, azonban minden háromszöget hatszor számoltunk, ugyanis minden háromszöget bármely csúcsából indulva kétféle irányban járhatjuk körbe.

A következő példa segíthet ezen eredmények megértésében, és ellenőrzésében.

2.1.3. Példa.



$$\mathbf{A}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 2 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Egy gráfot és a hozzá tartozó szomszédsági mátrix hatványait láthatjuk. Valóban, az $\mathbf{A}^2$ mátrix főátlójában az egyes csúcsokhoz tartozó fokszámokat láthatjuk, valamint $\frac{1}{2}tr(\mathbf{A}^2) = 5$, ami egyenlő a gráf éleinek számával. A harmadik pont is teljesülni látszik, $\frac{1}{6}tr(\mathbf{A}^3) = 2$, ami a gráfban szereplő háromszögek száma.

2.2. Sajátértékek és az átmérő

A 2.1.1.-es Tételt arra is használhatjuk, hogy megbecsüljük a gráf átmérőjét a különböző sajátértékeinek száma által.

2.2.1. Tétel. Ha egy G összefüggő gráf átmérője D és van t különböző sajátértéke, akkor

$$D \leq t - 1. \tag{2.2}$$

Bizonyítás: Indirekt bizonyítunk. Tegyük fel, hogy $D \geq t$. Ekkor létezik két csúcs a gráfban v_i és v_j úgy, hogy a távolságuk pontosan t. Így a 2.1.1-es Tétel alapján $\mathbf{A}^t_{ij} > 0$, mivel van köztük legalább egy t hosszú séta, de $\mathbf{A}^k_{ij} = 0$, minden $k = 0, 1, \ldots, t-1$-re, ugyanis a köztük lévő t távolságnál nem lehet rövidebb sétával eljutni egyikből a másikba. Tehát ha $q(x)$ egy tetszőleges t-edfokú polinom, akkor $q(\mathbf{A})$ i-edik sorának j-edik eleme nem lehet nulla. Azonban az 1.2.2. Tétel szerint az **A** mátrix $m(x)$ minimálpolinomja szintén t-edfokú, hiszen t darab különböző sajátértéke van. Ezzel ellentmondásra jutottunk, mert a minimálpolinom definíciójából tudjuk, hogy **A** gyöke $m(x)$-nek, azaz $m(\mathbf{A})$ minden eleme 0.

■

Egyenlőséggel teljesítik például: az n csúcsú teljes gráfok (K_n), az r és s csúcsosztályú teljes páros gráfok ($K_{r,s}$), az n csúcsú körök (C_n), az n csúcsú utak (P_n), r csúcsú teljes gráfok élgráfja ($L(K_r)$), és a teljes egyenlő r osztályú páros gráfok élgráfja ($L(K_{r,r})$) is.

2.3. A karakterisztikus polinom együtthatói

Bizonyított tény a mátrixelméletben, hogy egy tetszőleges mátrix karakterisztikus polinomjának összes együtthatója előáll, a mátrix főminorjainak segítségével. A főminor a mátrix egy részmátrixának determinánsa, amit úgy kapunk meg, hogy az oszlopok egy részsorozata és a sorok ugyanazon részsorozata által meghatározott mátrix determinánsát vesszük.

2.3.1. Tétel. Legyen egy G gráf szomszédsági mátrixának karakterisztikus polinomja

$$\chi(G;\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + c_3\lambda^{n-3} + \ldots + c_n, \tag{2.3}$$

ekkor az együtthatókra igazak a következők

- $c_1 = 0$;
- $-c_2$ egyenlő a G gráf éleinek számával;
- $-\frac{c_3}{2}$ egyenlő a G gráfban lévő háromszögek számával.

Bizonyítás: Minden $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$-re a $(-1)^i c_i$ egyenlő azon főminorok összegével, melyeknek i sora és i oszlopa van. Ez a meglátás amire épül a bizonyítás, a karakterisztikus polinom megadásához szükséges determináns definíció szerinti kiszámításából adódik.

Mivel a c_1 esetében 1×1-es főminorokat veszünk, és a szomszédsági mátrix átlójában csupa nulla szerepel, c_1 egyenlő lesz nullával.

Egy 2×2-es főminor, melynek van nem nulla eleme a következőképp nézhet csak ki:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Egyetlen ilyen minor választható ki minden egyes szomszédos csúcspárhoz a G gráfban, és mindegyiknek az értéke -1. Ezáltal a $(-1)^2 c_2 = -|E(G)|$ egyenletből adódik az eredmény.

A összes lehetséges 3×3-as főminort láthatjuk felsorolva:

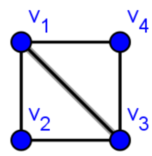
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Az utolsó determináns értéke 2, az összes többié pedig 0. A nem nulla értékű főminor megfelel a gráfban három egymással páronként szomszédos csúcsnak, így a $-c_3$ valóban egyenlő a G-ben lévő háromszögek számának kétszeresével.

∎

Az előző tételnél már használt példán megnézhetjük ezúttal a karakterisztikus polinomról szóló tétel eredményeit is.

2.3.2. Példa. Vegyük a következő gráfot.



A tétel ismeretében meghatározhatjuk a gráf geometriai tulajdonságaiból a gráf karakterisztikus polinomját. A tétel első pontja szerint $c_1 = 0$. Mivel a gráf éleinek száma 5, ezért $c_2 = -5$, illetve $c_3 = -4$, mert 2 háromszög van a gráfban. A v_2 és a v_4 csúcsoknak ugyanazok a szomszédaik, így a szomszédsági mátrixban a hozzá tartozó oszlopok, és persze a sorok is, megegyeznek. Tehát $det(\mathbf{A}) = 0$, amiből következik, hogy $c_4 = 0$. Ezzel meghatároztuk az ábrán látható gráf karakterisztikus polinomját

$$\chi(G; \lambda) = \lambda^4 - 5\lambda^2 - 4\lambda.$$

3. fejezet

A gráf címkéi és sajátértékei közti összefüggések

A fejezetben szereplő tételek megtalálhatók az [1] 39-43. oldalán az 5.1-es, 5.2-es, 5.5-ös és az 5.8-as számmal jelölve.

3.1. Címkézés sajátvektorral

A szomszédsági mátrix $\mathbf{A}$ oszlopai a gráf csúcsainak felelnek meg. Ha G egy n csúcsú gráf $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ csúcsokkal, és $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, akkor $\mathbf{x}$ komponenseire gondolhatunk, mint a csúcsok válós számokkal való címkézéseire.

3.1.1. Tétel. Ha $\mathbf{A}$ szomszédsági mátrixa egy G gráfnak melynek csúcsai $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, és az $\mathbf{x}$ vektor egy címkézése a G csúcsainak, akkor $(\mathbf{Ax})_k$ egyenlő a v_k csúcs szomszédjaira írt címkék összegével, ahol $k = 1, 2, \ldots, n$

Bizonyítás: A szomszédsági mátrix egy sorában ott van egyes, ahol a sornak megfelelő csúcs szomszédos az oszlopnak megfelelő csúccsal, máshol pedig nulla áll. Így a mátrix szorzás definíciójából jön az eredmény.

$\blacksquare$

3.1.2. Következmény. Ha v és w nem szomszédos csúcsok ugyanazokkal a szomszédokkal, és ha $\mathbf{x}$ egy sajátvektor λ sajátértékkel, akkor vagy v és w címkéje egyenlő, vagy $\lambda = 0$.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy v_i és v_j nem szomszédos csúcsok, ugyanazokkal a szomszédokkal, illetve tegyük fel, hogy $\mathbf{x}$ egy sajátvektor λ sajátértékkel. Legyen $N = \{s|(v_i, v_s) \in E(G)\}$. Ha $\sum_{s\in N} x_s$ jelöli a v_i és v_j szomszédjaira írt címkék összegét, akkor

$$\lambda x_i = (\mathbf{A}\mathbf{x})_i = \sum_{s\in N} x_s = (\mathbf{A}\mathbf{x})_j = \lambda x_j,$$

ahol a sajátvektor definícióját, és a 3.1.1.-es tételt használtuk. Ezt átrendezve kapjuk

$$\lambda(x_i - x_j) = 0,$$

amiből vagy $\lambda = 0$, vagy $x_i = x_j$.

3.1.3. Példa. A teljes többrészes gráfok esetében emiatt, a nem nulla sajátértékekhez tartozó sajátvektorokban, az azonos osztályba tartozó csúcsok cimkéi egyenlőek.

3.1.4. Következmény. Ha v és w szomszédos csúcsok ugyanazokkal a szomszédokkal (v-t és w-t leszámítva), és ha $\mathbf{x}$ egy sajátvektor λ sajátértékkel, akkor vagy v és w címkéje egyenlő, vagy $\lambda = -1$.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy v_i és v_j szomszédos csúcsok ugyanazokkal a szomszédokkal, illetve tegyük fel, hogy $\mathbf{x}$ egy sajátvektor λ sajátértékkel. Megint jelölje $\sum_{s\in N} x_s$ a v_i és v_j szomszédjaira írt címkék összegét, ahol $N = \{s|s \neq j, (v_i, v_s) \in E(G)\}$. Ekkor

$$\begin{aligned}\sum_{s\in N} x_s + x_j &= (\mathbf{A}\mathbf{x})_i = \lambda x_i \\ \sum_{s\in N} x_s + x_i &= (\mathbf{A}\mathbf{x})_j = \lambda x_j,\end{aligned}$$

amiből átrendezéssel kapjuk

$$(\lambda + 1)(x_i - x_j) = 0.$$

Tehát $\lambda = -1$ vagy $x_i = x_j$.

3.1.5. Példa. A teljes n csúcsú gráfok (K_n) spektrumának meghatározásánál alkalmazhatjuk ezt az eredményt. K_n sajátértékei az $n-1$ ami egyszeres, és a -1 ami pedig $n-1$-szeres.

Szintén használhatunk sajátvektor címkézést arra, hogy megállapítsunk egy egyszerű eredményt a páros gráfokról. Ehhez szükségünk lesz egy lemmára.

3.1.6. Lemma. Egy G gráf akkor és csak akkor páros, ha minden G-beli kör páros hosszúságú.

Bizonyítás: Ha C egy kör a G páros gráfban, amelynek csúcsosztályai A és B, akkor C pontjai alternálnak A és B között. Tehát világos, hogy C-nek páros sok csúcsa van.

A másik irányhoz megmutatjuk, hogy ha G minden köre páros sok pontból áll, akkor meg tudunk adni megfelelő A és B halmazokat. Tekintsünk egy tetszőleges x pontot a gráfban. Ezt rakjuk A-ba. Most x minden szomszédját rakjuk B-be, és az összes olyan B-beli pont szomszédját amelyet még nem helyeztünk el, rakjuk A-ba. Ezt folytassuk amíg minden pontot, ahova létezik út x-ből, el nem helyeztünk A-ba vagy B-be. Ha a gráf összefüggő, akkor minden pontot sikerült elhelyezni. Ha nem, akkor komponensenként kell megcsinálni ezt az eljárást. Ez az algoritmus azért lesz jó, mert ha egy halmazban lenne két szomszédos csúcs, akkor a gráfban lenne páratlan kör is, ez viszont ellentmondás.

■

3.1.7. Tétel. Egy gráf akkor és csak akkor páros, ha a spektruma szimmetrikus a nullára.

Bizonyítás: ($\Longrightarrow$) Legyen G páros gráf (S, T) osztályokkal. A G szomszédsági mátrixában, először az S csúcsait majd a T csúcsait soroljuk fel. Ekkor

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & M \\ \hline M^T & 0 \end{array}\right],$$

ahol a bal felső blokk $|S| \times |S|$, a jobb alsó blokk pedig $|T| \times |T|$ méretű. Tegyük fel, hogy λ sajátértéke $\mathbf{A}$-nak $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}$ sajátvektorral, ahol $\mathbf{v}_1 \in \mathbb{R}^{|S|}$ és $\mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^{|T|}$. A sajátvektor definíciójából

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \iff \left[\begin{array}{c|c} 0 & M \\ \hline M^T & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} M\mathbf{v}_2 \\ M^T\mathbf{v}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\mathbf{v}_1 \\ \lambda\mathbf{v}_2 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff M\mathbf{v}_2 = \lambda\mathbf{v}_1 \text{ és } M^T\mathbf{v}_1 = \lambda\mathbf{v}_2.$$

Képezzük a $\mathbf{v}$ vektorból a $\mathbf{v}$' vektort, úgy hogy $\mathbf{v}' = [-\mathbf{v}_1 \; \mathbf{v}_2]$. Ekkor, az előbb kapott eredményt felhasználva

$$\mathbf{A}\mathbf{v}' = \begin{bmatrix} M\mathbf{v}_2 \\ -M^T\mathbf{v}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\mathbf{v}_1 \\ -\lambda\mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = -\lambda \begin{bmatrix} -\mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = -\lambda\mathbf{v}'.$$

A $v \to v'$ minden i-re a $\{\lambda_i$ sajátaltere$\} \to \{-\lambda_i$ sajátaltere$\}$ izomorfizmus, ezért az említett sajátalterek dimenziója egyenlő. Tehát azt kaptuk, hogy ha egy páros gráf szomszédsági mátrixának λ_i sajátértéke k_i multiplicitással, akkor $-\lambda_i$ is sajátértéke ugyanazon k_i multiplicitással, azaz a spektruma szimmetrikus a nullára.

($\Longleftarrow$) Tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ spektruma szimmetrikus. A következőkben láthatjuk, hogy ekkor $\mathbf{A}^{2k+1}$ spektruma is szimmetrikus, ahol k nem negatív egész, a sajátértékek pedig mind valós értékűek. Az $\mathbf{A}$ mátrix szimmetrikus, ezért az 1.2.2.-es tétel értelmében diagonalizálható, így hatványozásnál a diagonális mátrix átlóelemei, a sajátértékek hatványozódnak a mátrixszorzás tulajdonságainak következtében.

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^T \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^2 = (\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^T)(\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^T) = \mathbf{U}\mathbf{D}^2\mathbf{U}^T \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{A}^l = (\mathbf{U}\mathbf{D}^{l-1}\mathbf{U}^T)(\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^T) = \mathbf{U}\mathbf{D}^l\mathbf{U}^T$$

A mátrixelméletből tudjuk, hogy a mátrix nyoma egyenlő a multiplicitásukkal megszorzott sajátértékek összegével, ami ez esetben 0, ezért $tr(\mathbf{A}^{2k+1}) = \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{A}^{2k+1})_{ii} = 0$. Minden i-re $(\mathbf{A}^{2k+1})_{ii}$ nem negatív, hiszen $\mathbf{A}$ nem negatív, tehát $tr(\mathbf{A}^{2k+1})$ csak akkor lesz egyenlő nullával, ha $\mathbf{A}^{2k+1}$ minden átlóeleme 0. A 2.1.1-es Tétel alapján bármely k-ra nincs $2k+1$ hosszú séta v_i-ből v_i-be tetszőleges i-re, azaz nincs páratlan hosszú kör a gráfban, azaz minden kör páros hosszúságú. Ez akkor és csak akkor igaz, ha G páros gráf a 3.1.6.-os Lemma értelmében.

■

3.2. A Perron-Frobenius tétel és a Rayleigh-hányados alkalmazása

3.2.1. Definíció. Legyen adva $\mathbf{A}$ mátrix és $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ úgy, hogy $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. A Rayleigh-hányadost a $\langle \mathbf{Ax}, \mathbf{x} \rangle / \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ hányados definiálja.

3.2.2. Tétel. Legyen G egy gráf melynek szomszédsági mátrixa $\mathbf{A}$, és sajátértékei $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$. Ekkor $\langle \mathbf{Ay}, \mathbf{y} \rangle / \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$ értéke beleesik a $[\lambda_n, \lambda_1]$ intervallumba tetszőleges $\mathbf{y} \neq 0$-ra. Továbbá $\langle \mathbf{Ay}, \mathbf{y} \rangle / \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \lambda_1$ pontosan akkor teljesül, ha $\mathbf{y}$ egy λ_1-hez tartozó sajátvektor, valamint $\langle \mathbf{Ay}, \mathbf{y} \rangle / \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \lambda_n$ pontosan akkor, ha $\mathbf{y}$ egy λ_n-hez tartozó sajátvektor.

Bizonyítás: Legyen $\mathbf{y}$ egy nem nulla vektor, és legyen $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ az $\mathbf{A}$ sajátvektoraiból álló ortonormált bázis. Ekkor $\mathbf{y} = \sum r_i x_i$ felírva a bázisban, továbbá a sajátvektor definíciójából $\mathbf{Ax}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$ minden $i = 1, 2, \ldots, n$-re. $\mathbf{A}$ az ortonormáltság miatt

$$\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j; \\ 0, & \text{ha } i \neq j. \end{cases}$$

Ezeket felhasználva, és azt hogy $\mathbf{A}$ lineáris függvény, a skaláris szorzat pedig bilineáris függvény, a következőt kapjuk

$$\frac{\langle \mathbf{Ay}, \mathbf{y} \rangle}{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle} = \frac{\langle \mathbf{A}(\sum_i r_i \mathbf{x}_i), \sum_i r_i \mathbf{x}_i \rangle}{\langle \sum_j r_j \mathbf{x}_j, \sum_j r_j \mathbf{x}_j \rangle} = \frac{\langle \sum_i r_i \mathbf{Ax}_i, \sum_i r_i \mathbf{x}_i \rangle}{\sum_{i,j} r_i r_j \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle} = \frac{\langle \sum_i r_i \lambda_i \mathbf{x}_i, \sum_i r_i \mathbf{x}_i \rangle}{\sum_{i,j} r_i r_j \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle} =$$

$$= \frac{\sum_{i,j} \lambda_i r_i r_j \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle}{\sum_{i,j} r_i r_j \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle} = \frac{\sum_i r_i^2 \lambda_i}{\sum_j r_j^2} = \sum_i \frac{r_i^2}{\sum_j r_j^2} \lambda_i$$

Legyen

$$\alpha_i = \frac{r_i^2}{\sum_{i=1}^n r_j^2} \quad \forall\, i\text{-re} \quad \Rightarrow \quad \forall\, i\text{-re} \quad 0 \leq \alpha_i \leq 1 \quad \wedge \quad \sum_i \alpha_i = 1,$$

így

$$\frac{\langle \mathbf{Ay}, \mathbf{y} \rangle}{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i.$$

A fent kapott eredményt becsüljük felülről, úgy hogy minden sajátértéket kicserélünk a legnagyobbra, és becsüljük alulról, úgy hogy minden sajátértéket kicserélünk a legkisebbre.

$$\lambda_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_n \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_1 = \lambda_1.$$

A jobb oldali egyenlőtlenségnél egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $\alpha_i = 0$ minden i-re melyre $\lambda_i < \lambda_1$, a bal oldali egyenlőtlenségnél egyenlőség pedig akkor és csak akkor áll fenn, ha $\alpha_i = 0$ minden i-re melyre $\lambda_i > \lambda_n$.

■

Érdemes meggondolni azt is, hogy ha λ_1 a legnagyobb sajátértéke a G összefüggő gráfnak, $\mathbf{x}$ pedig egy hozzá tartozó sajátvektor, és $\langle \mathbf{A}\mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle / \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \lambda_1$, akkor $\mathbf{y}$ felírható a sajátvektorok konvex kombinációjaként. A Perron-Frobenius tétel értelmében λ_1 egyszeres, ezért $\mathbf{y} = r\mathbf{x}$, ahol $r \neq 0$, valamint $\mathbf{y}$ összes koordinátája pozitív vagy az összes koordinátája negatív, ami szintén az előbb említett tétel következménye.

3.2.3. Következmény. Legyen H egy valódi indukált részgráfja egy összefüggő G gráfnak, továbbá legyen H maximális sajátértéke μ és G maximális sajátértéke λ, ekkor $\mu < \lambda$.

Bizonyítás: Tudjuk hogy $\mu \leq \lambda$ az 1.2.5.-ös Tételből. Ha $\mathbf{z}$ egy sajátvektora H-nak μ sajátértékkel, akkor kiegészíthetjük $\mathbf{z}$-t $\mathbf{y}$ vektorrá úgy, hogy nullákat írunk a kitörölt csúcsoknak megfelelő helyekre. Legyen a G és H gráfok szomszédsági mátrixai $\mathbf{A}_G$ és $\mathbf{A}_H$. Feltehető, hogy G csúcsai $\{v_1, \ldots, v_{|H|}, v_{|H|+1}, \ldots, v_n\}$, ahol az első $|H|$ darab csúcs a H indukált gráf csúcsai. Ekkor $\langle \mathbf{A}_G\mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle / \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \mu$. Ugyanis

$$\mathbf{A}_H\mathbf{z} = \mu\mathbf{z} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}_G\mathbf{y} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_H & \star \\ \hline \star & \star \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{z} \\ \hline 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{A}_H\mathbf{z} \\ \hline \star \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mu\mathbf{z} \\ \hline \star \end{array}\right] \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\langle \mathbf{A}_G\mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle}{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle} = \frac{\left\langle \left[\begin{array}{c|c} \mu\mathbf{z} & \star \end{array}\right]^T, \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{z} & 0 \end{array}\right]^T \right\rangle}{\left\langle \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{z} & 0 \end{array}\right]^T, \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{z} & 0 \end{array}\right]^T \right\rangle} = \frac{\langle \mu\mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle}{\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle} = \frac{\mu\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle}{\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle} = \mu.$$

Tegyük fel, hogy $\mu = \lambda$. Ekkor az előző bekezdésben meggondoltak alapján $\mathbf{y}$ összes koordinátája nem nulla, ami akkor történhet csak meg, ha $H = G$. Ez ellentmondás, tehát $\mu < \lambda$.

3.2.4. Következmény. Ha e egy éle a G összefüggő gráfnak, akkor a G legnagyobb sajátértéke szigorúan nagyobb a $G - e$ legnagyobb sajátértékénél.

Bizonyítás: Legyen $H = G - e$. Ha H nem összefüggő, akkor két komponens keletkezett, melyeket külön-külön megvizsgálunk. A komponensei felfoghatók a G valódi indukált részgráfjaiként, így az előző következmény érvényesül ez esetben, miszerint az indukált részgráf legnagyobb sajátértéke szigorúan kisebb mint az eredeti gráf legnagyobb sajátértéke. Ez mindkét komponensre igaz, így az egész H-ra is igaz lesz, ugyanis egy nem összefüggő gráf spektruma egyenlő a komponensei spektrumának uniójával. Ha H összefüggő, akkor legyen $\mathbf{x}$ a H azon sajátvektora, mely a legnagyobb μ sajátértékéhez tartozik. Ha a törölt él v_i-t és v_j-t kötötte össze, és ha $\mathbf{A}$ a G gráf, $\mathbf{B}$ a H gráf, $\mathbf{C}$ pedig a kihagyott él szomszédsági mátrixa, akkor a G legnagyobb sajátértéke $\lambda(G)$ alulról becsülhető a 3.2.1.-es tétel alapján:

$$\lambda(G) \geq \frac{\langle \mathbf{Ax}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \frac{\langle \mathbf{Bx}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} + \frac{\langle \mathbf{Cx}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \mu + \frac{2x_i x_j}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}.$$

Mivel az $\mathbf{x}$ vektornak csak pozitív vagy csak negatív elemei vannak az 1.2.3.-as Tétel értelmében, a G legnagyobb sajátértéke biztosan nagyobb mint a H legnagyobb sajátértéke.

Most pedig következzen egy tétel a fokszámok és a legnagyobb sajátérték kapcsolatáról, amely szintén az 1.2.3.-as Tétel eredményein alapszik.

3.2.5. Tétel. Ha G egy összefüggő gráf melynek fokszámai $d_1, d_2, \ldots, d_n$, és maximális sajátértéke λ_1, akkor

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d_i \leq \lambda_1 \leq \max_i d_i. \tag{3.1}$$

Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha a gráf reguláris.

Más szóval, a legnagyobb sajátérték a fokszámok átlaga és a legnagyobb fokszám közé esik, és akkor egyenlő bármelyik értékkel, ha a gráf reguláris.

Bizonyítás: A Perron-Frobenius tételből levezethető, hogy egy nem negatív mátrix legnagyobb sajátértéke λ_1 becsülhető az $(\mathbf{Ax})_i/x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ értékekkel, ahol $\mathbf{x}$ egy nem negatív vektor. A legnagyobb sajátérték kielégíti

$$\min_i \left\{ \frac{(\mathbf{Ax})_i}{\mathbf{x}_i} \right\} \leq \lambda_1 \leq \max_i \left\{ \frac{(\mathbf{Ax})_i}{\mathbf{x}_i} \right\}.$$

Ha $\mathbf{x}$-et a csupa 1 vektornak választjuk, és $\mathbf{A}$ szomszédsági mátrixa a G gráfnak, melynek fokszámai $d_1, d_2, \ldots, d_n$, akkor azt kapjuk, hogy

$$\min_i d_i \leq \lambda_1 \leq \max_i d_i.$$

Továbbá ha ugyanazon csupa 1 vektorral alkalmazzuk a 3.2.1.-es tételt

$$\frac{\langle \mathbf{Ax}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \leq \lambda_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} \leq \lambda_1.$$

A számlálóban $\mathbf{Ax}$ mátrixszorzat egy vektort ad, melynek elemei a fokszámok, amit ha skalárisan szorzunk a csupa 1 vektorral, a fokszámösszeget kapjuk. A nevezőben két csupa 1 vektor skaláris szorzata egyenlő a vektorok dimenziójával. Ezzel megkaptuk a bizonyítandó állítást.

Ejtsünk pár szót az egyenlőségről. Tegyük fel, hogy $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} = \lambda_1$, és legyen $\mathbf{u}$ a csupa 1 vektor. Ekkor $\langle \mathbf{Au}, \mathbf{u} \rangle / \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \lambda_1$, amiből arra következtethetünk a 3.2.2.-es Tétel egyenlőségről szóló része miatt, hogy $\mathbf{u}$ a λ_1-hez tartozó sajátvektora $\mathbf{A}$-nak. A sajátvektor definíciója miatt

$$\mathbf{Au} = \lambda_1 \mathbf{u} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_1 \end{pmatrix},$$

ahol d_i a v_i csúcs fokszámát jelöli minden i-re. Tehát a G gráf reguláris. Annak bizonyítása, hogy $\lambda_1 = max_i d_i$ feltételből következik, hogy a gráf reguláris, az az 5.1.1.-es Tétel mintájára történik.

■

4. fejezet

Becslések a sajátértékekre

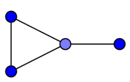
Ezen fejezet célja azon gráfok megtalálása melyeknek legkisebb illetve legnagyobb sajátértéke közel van a nullához. A fejezetben szereplő tételek megtalálhatók az [1] 43-49. oldalán a 6.1-es, 6.2-es, 7.1-es, 7.3-as és a 7.4-es számmal jelölve.

4.1. Becslések a legkisebb sajátértékre

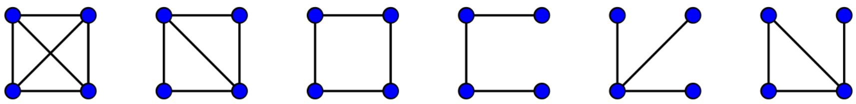
A gráf spektrumának tanulmányozásában ismétlődő téma a sajátértékekre alsó becslések keresése. Ebben a fejezetben a legkisebb sajátérték jelölése $\lambda_n(G)$.

4.1.1. Tétel. Legyen G egy összefüggő gráf melynek legkisebb sajátértékét jelölje $\lambda_n(G)$. Ekkor

- $\lambda_n(G) \leq 0$, ahol egyenlőség abban az esetben van ha G a nullgráf;
- ha G nem a nullgráf, akkor $\lambda_n(G) \leq -1$, ahol egyenlőség akkor és csak akkor van, ha G teljes gráf;
- ha G se nem teljes, se nem nullgráf, akkor $\lambda_n(G) \leq -\sqrt{2}$, ahol az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül ha $G = K_{1,2}$;
- ha G se nem teljes, se nem $K_{1,2}$, és ha $\lambda_n(G) \geq -1.5$, akkor a G gráf a következő



Bizonyítás: Mivel nem engedünk meg hurok éleket, $tr(\mathbf{A}) = \sum \lambda_i = 0$. Ha van pozitív sajátérték, akkor kell lennie negatív sajátértéknek is, ha pedig nincs pozitív sajátérték akkor csak nulla sajátértékek lehetnek, hiszen a sajátértékek összege nulla. Így $\mathbf{A} = 0$, azaz G-nek nincs éle. Ezzel be is láttuk az első pontot. Ha a gráfnak van éle, akkor az az él egy két csúcsból álló indukált részgráf, amihez tartozó szomszédsági mátrix sajátértékei $\mu_2 = -1$ és $\mu_1 = 1$. Erre alkalmazzuk az 1.2.5.-ös Tételt $i = 2, m = 2$ esetén, amire $\lambda_{2+n-2} \leq \mu_2$, azaz $\lambda_n \leq -1$. Ha G nem teljes gráf és persze összefüggő, akkor $K_{1,2}$ indukált részgráfja, melynek sajátértékei $0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$. Ebből következnek a kettes és a hármas pontok, ahol a kettes pontban az egyenlőség a 3.1.4.-es Következmény miatt teljesül. Azon összefüggő gráfok között melyeknek négy csúcsuk van



az egyetlen olyan amire $\lambda_n(G) \geq -1.5$ igaz, az a tétel negyedik pontjában illusztrált gráf. Ami ugyanaz mint az utolsó gráf a fenti ábrán. Ha G legalább 5 csúcsú összefüggő gráf, akkor létezik H összefüggő 4 csúcsú indukált részgráfja, amely nem izomorf az előbb említett gráffal.

■

Az előző tétel azt mutatja, hogy csak kevés olyan gráf van, melynek legkisebb sajátértéke $\lambda_n(G) \geq -1.5$. A következő tétel szerint ugyanez nem mondható el $\lambda_n(G) \geq -2$-re, azonban ehhez lássunk előbb egy segéd állítást.

4.1.2. Lemma. Tegyük fel, hogy a G gráf csúcs-él illeszkedési mátrixa $\mathbf{X}$

$$(\mathbf{X})_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } v_i \text{ és } e_j \text{ illeszkednek;} \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Legyen továbbá a G gráf szomszédsági mátrixa $\mathbf{A}$, valamint az $L(G)$ élgráf szomszédsági mátrixa $\mathbf{A}_L$. Ekkor

- $\mathbf{X}^T\mathbf{X} = \mathbf{A}_L + 2\mathbf{I}_m$;
- ha G k-reguláris gráf, akkor $\mathbf{X}\mathbf{X}^T = \mathbf{A} + k\mathbf{I}_n$.

Bizonyítás: Észre vehető, hogy $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ főátlójában csupa kettes van, mivel $\mathbf{X}^T$ minden sorában két darab egyes van, és minden sort önmagával szoroztunk skalárisan. A főátlón kívüli elemek pedig vagy 1, ha a két összeszorzott vektornak megfelelő élnek van közös csúcsa, vagy 0 egyébként. Ez pedig a főátló helyére nullákat írva pont az élgráf illeszkedési mátrixa. Ezzel a lemma első pontját beláttuk.

Ha G k-reguláris, akkor az $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$ főátlójában csupa k van, mivel $\mathbf{X}$ minden sorában k darab egyes van, és minden sort önmagával szoroztunk skalárisan. A főátlón kívül, pedig egyes áll, ha az összeszorzott sornak és oszlopnak megfelelő csúcs szomszédos, és nulla küllönben, ami éppen a G szomszédsági mátrixának definíciója.

4.1.3. Tétel. Bármely $L(G)$ élgráf kielégíti a $\lambda_n(L(G)) \geq -2$ egyenlőtlenséget.

Bizonyítás: Legyen $\mathbf{K}$ a csúcs-él illeszkedési mátrixa G-nek, és legyen $\mathbf{A}(L(G))$ a szomszédsági mátrixa $L(G)$-nek. Tudjuk hogy $\mathbf{K}$ minden oszlopában két darab egyes szerepel és a többi nulla. Ekkor

$$\mathbf{K}^T\mathbf{K} = 2\mathbf{I} + \mathbf{A}(L(G)).$$

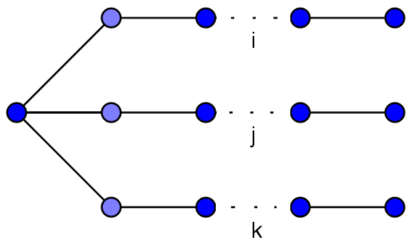
Mivel $\mathbf{K}^T\mathbf{K}$ mindig pozitív szemidefinit, ezért sajátértékei nem negatívak. Általában $\mathbf{M} + c\mathbf{I}$ sajátértékei ugyanazok mint $\mathbf{M}$ sajátértékei c-vel megnövelve, tehát egy kis egyenletrendezésből adódik, hogy $\lambda_n(L(G)) \geq -2$.

∎

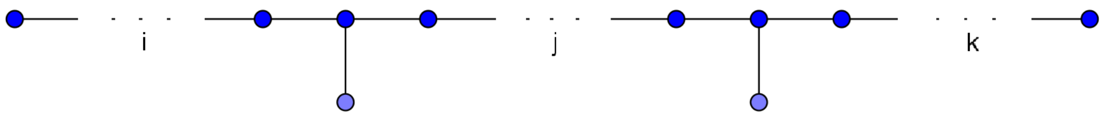
4.2. Becslések λ_1, λ_2-re

Ezen alfejezetben a felső becsléseket adó tételeket bizonyítás nélkül említjük az egyszerűség kedvéért, ugyanis hosszasan kellene taglalni a hozzá szükséges előismereteket. Kezdjük a tételekben szereplő gráfok definiálásával.

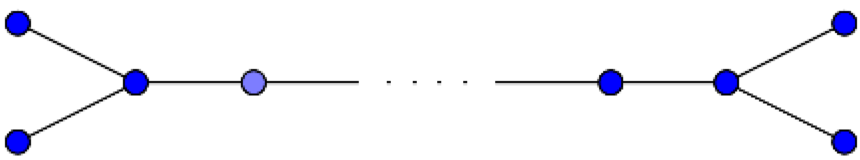
4.2.1. Definíció. ($T(i, j, k)$ gráf) Vegyünk három utat, melyek i, j és k darab csúcsból állnak, majd adjunk hozzá egy új csúcsot, amely szomszédos mindegyik út egy-egy végpontjával. A kapott gráf egy fa $i + j + k + 1$ darab csúccsal, azon belül három levéllel és egy csúccsal, amelynek a foka három.



4.2.2. Definíció. ($S(i, j, k)$ gráf) Vegyünk egy $i+j+k+2$ hosszú utat, és adjunk hozzá két csúcsot, úgy hogy az egyik az út végétől számított $(i + 1)$-edik csúccsal legyen szomszédos, a másik pedig az út ugyanazon végétől számított $(i + j + 2)$-edikkel.



4.2.3. Tétel. Ha G egy összefüggő gráf melynek legnagyobb sajátértéke $\lambda_1 = 2$, akkor G valamelyik a következő gráfok közül: C_n, $K_{1,4}$, $T(2, 2, 2)$, $T(3, 3, 1)$, $T(5, 2, 1)$, vagy



Annak bizonyítása, hogy minden egyes ilyen gráfnak a maximális sajátértéke 2, csúcs címkézéssel történik. Lássuk is be az ábrán szereplő gráfra.

Bizonyítás: Címkézzük a gráf csúcsait a λ_1-hez tartozó egy sajátvektora szerint. A Perron-Frobenius tétel szerint λ_1 egyszeres, így a sajátvektorát a megfelelő skalárral leosztva kaphatjuk, hogy a baloldali levelek eggyel legyenek címkézve. Ekkor a gráf szimmetriája miatt a jobboldali levelek címkéinek is egynek kell lennie. A levelek elhagyásával kapott út csúcsaira írt címkéket jelölje sorban $a_1, a_2, \dots, a_n$. A 3.1.1.-es Tétel szerint $a_1 = a_n = \lambda_1$, $a_2 = \lambda_1^2 - 2$, és $\lambda_1 a_i = a_{i-1} + a_{i+1}$ teljesül, minden $1 < i < n$-re:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & & & \\ 1 & 1 & 0 & 1 & & & \mathbf{0} & & \\ & & 1 & 0 & 1 & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & 1 & 0 & 1 & & \\ & & \mathbf{0} & & & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & & & & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tegyük fel, hogy $\lambda_1 > 2$. Ekkor egyrészt $a_2 = \lambda_1^2 - 2 > \lambda_1 = a_1$. Másrészt, $2a_i < \lambda_1 a_i$, illetve $\lambda_1 a_i = a_{i-1} + a_{i+1}$-ből $a_i < max(a_{i-1}, a_{i+1})$ következik. Ezt többször alkalmazva, mivel $a_1 < a_2$, adódik, hogy $a_2 < a_3 \Rightarrow a_3 < a_4 \Rightarrow \dots \Rightarrow a_{n-1} < a_n$, tehát $a_1 < a_n$, ami ellentmondás.

Hasonlóan adódik, hogyha $o < \lambda_1 < 2$, akkor $a_2 < a_1$, és $a_i > min(a_{i-1}, a_{i+1})$, amiből $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n$ következne, ami ismét ellentmondás. Tehát $\lambda_1 = 2$.

■

4.2.4. Következmény. Ha G egy összefüggő gráf melynek legnagyobb sajátértéke $\lambda_1 < 2$, akkor G valamelyik a következő gráfok közül: egy n hosszú út, $T(1,1,r)$, $T(1,2,4)$, $T(1,2,3)$ vagy $T(1,2,2)$.

Bizonyítás: Jelölje $\lambda_1(G)$ a G gráf legnagyobb sajátértékét. Tegyük fel, hogy G nem fa gráf, úgy hogy $\lambda_1(G) < 2$. Ekkor létezik indukált részgráfjaként C_k kör valamilyen k-ra. A 4.2.3.-as Tétel értelmében $\lambda_1(C_k) = 2$, amiből a 3.2.3.-as Tétel értelmében $\lambda_1(G) > 2$, ami ellentmondás. Tehát ha egy G gráf legnagyobb sajátértéke kisebb mint 2, akkor G egy fa.

Továbbá $K_{1,4}$ nem lehet indukált részgráfja G-nek, hiszen használva a 3.2.3.-as és a 4.2.3-as Tételeket, azt kapjuk hogy, $2 = \lambda_1(K_{1,4}) < \lambda_1(G) < 2$, ami ellentmondás. Ha egy fa gráf maximális fokszáma legalább 4, akkor létezik $K_{1,4}$ indukált részgráfjaként, ezért G-nek a maximális fokszáma legfeljebb 3 lehet csak. Nézzük meg azt az esetet, amikor ez az érték az 1. Mivel G összefüggő, nem lehet más, mint az egy 1 hosszú út, melynek sajátértékei a $\pm 1 < 2$. Ha a G maximális fokszáma 2, akkor a G nem lehet más mint az n hosszú út (P_n). Mivel P_n indukált részgráfja C_{n+1}-nek, ezért ismét használva a már említett tételeket $\lambda_1(P_n) < \lambda_1(c_{n+1}) = 2$, ami megfelel a feltételnek.

Most vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor G maximális fokszáma 3. Kizárhatjuk azt, hogy több ilyen 3 fokú csúcsa van, ugyanis akkor a 4.2.3.-as Tétel ábráján szereplő gráf indukált részgráfja lenne, ami ellentmondás lenne, az előbb többször is akalmazott meggondolás miatt. Tehát ebben az esetben G egy fa, melynek maximális fokszáma 3, és csak egy darab 3 fokú csúcsa van. Egy gráf akkor és csak akkor ilyen, ha az a gráf $T(i,j,k)$.

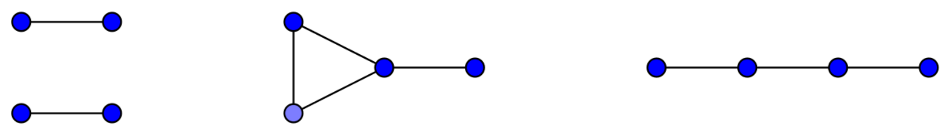
A továbbiakban is többször felhasználjuk a 4.2.3.-as és a 3.2.3-as Tételeket. Tegyük fel, hogy $i \leq j \leq k$. Ezt megtehetjük, ugyanis nem számít a sorrendjük. Ha $2 \leq i$, akkor $T(2,2,2)$ indukált részgráf $T(i,j,k)$-ban. Mivel $\lambda_1(T(2,2,2)) = 2$, ezért $\lambda_1(T(i,j,k)) > 2$, ami ellentmondás. Tehát $i = 1$. Ha $j \geq 3$, akkor $T(1,3,3)$ indukált részgráf $T(1,j,k)$-ban. Mivel $\lambda_1(T(1,3,3)) = 2$, ezért $\lambda_1(T(1,j,k)) > 2$, ami ellentmondás. Tehát $j \leq 2$. Tegyük fel, hogy $j = 2$. Ha $k \geq 5$, akkor $T(1,2,5)$ indukált részgráf $T(1,2,k)$-ban. Mivel $\lambda_1(T(1,2,5)) = 2$, ezért $\lambda_1(T(1,2,k)) > 2$, ami ellentmondás. Tehát $k < 5$. Ha $k = 2,3,4$, akkor $T(1,2,k)$ indukált részgráf $T(1,2,5)$-ban. Mivel $\lambda_1(T(1,2,5)) = 2$, ezért $\lambda_1(T(1,j,k)) < 2$, ami megfelel a feltételnek. Tegyük fel továbbá, hogy $i = 1$, $j = 1$ és k egyenlő valami tetszőleges r nem negatív egésszel. Ekkor $T(1,1,r)$ indukált részgráfja a 4.2.3.-as Tétel ábráján szereplő gráfnak (az egyik levelet elhagyva), melynek legnagyobb sajátértéke 2. Ebből következik, hogy $\lambda_1(T(1,1,r)) < 2$. Ezzel beláttuk az állítást.

Érdekességként nézzünk meg még egy tételt ezen különleges gráfokról.

4.2.5. Tétel. Ha G egy gráf melynek legnagyobb sajátértéke λ_1, amire igaz hogy $2 < \lambda_1 < (2+\sqrt{5})^{1/2}$, akkor G valamelyik a következők közül:

- $T(1,2,k)$, ahol $k > 5$;
- $T(1,j,k)$, ahol $2 < j < k$;
- $T(2,2,k)$, ahol $2 < k$;
- $T(2,3,3)$;
- $S(j,k,l)$, úgy hogy $(j,l) \neq (1,1)$ és k elég nagy.

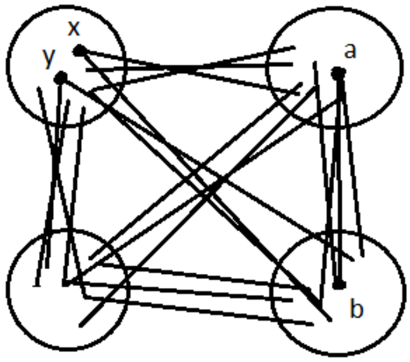
4.2.6. Tétel. $\lambda_2(G) \leq 0$ akkor és csak akkor, ha G teljes többrészes gráf.



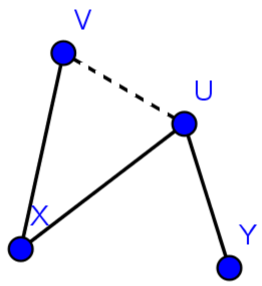
Bizonyítás: Az ábrán láthatók azok a négy csúcsú gráfok, amelyeknek van két pozitív sajátértéke, ezért a 1.2.4.-es Tétel értelmében egyik sem lehet indukált részgráfja egy olyan G gráfnak, amire $\lambda_2(G) \leq 0$. Gondoljuk meg, hogy mivel a G gráf összefüggő, az egyetlen lehetséges eset, hogy G teljes többrészes gráf.

Hozzunk létre egy R relációt. Két csúcs $a, b \in V(G)$ relációban állnak egymással, akkor és csak akkor, ha $(a,b) \notin (E(G))$. Ekkor G teljes többrészes gráf akkor és csak akkor, ha R ekvivalencia reláció $V(G)$-n, azaz reflexív, szimmetrikus és tranzitív. A reflexivitás könnyen látható, hogy teljesül, ugyanis nem engedünk meg hurokéleket, így minden csúcs önmagával relációban áll. A szimmetria abból következik, hogy a G gráf irányítatlan. A tranzitivitás már nem ilyen egyszerű.

Ha az R reláció tranzitív is az adott gráfra (azaz R ekvivalenciareláció), akkor azt állítjuk, hogy a gráfunk teljes többrészes gráf. Legyenek $x, y, a, b \in V(G)$. Definíció szerint, ha x relációban áll y-nal, akkor $(x,y) \notin E(G)$. Ha pedig a nem áll relációban b-vel, akkor $(a,b) \in E(G)$. Ezáltal $V(G)$-n osztályok vannak. Ezt illusztrálja a következő ábra



Tegyük fel, hogy G nem tartalmazza indukált részgráfként az ábrán látható gráfok egyikét sem. Belátjuk, hogy R tranzitív. Jelölje $N(x)$ az x csúcs szomszédainak halmazát. A gráfban akkor és csak akkor nincs a harmadik gráf indukált részgráfként, ha a G átmérője legfeljebb 2, ami akkor és csak akkor igaz, ha minden $x, y \in V(G)$-re amire $(x, y) \notin E(G)$ teljesül, hogy $N(x) \cap N(y) \neq \emptyset$. Belátjuk, hogy ha a második gráf sincs benne indukált részgráfként, akkor $N(x) = N(y)$, ha $(x, y) \notin E(G)$.



Tegyük fel, hogy $(x, y), (v, y) \notin E(G)$ illetve, hogy $N(x) \nsubseteq N(y)$ amiből következik, hogy létezik $v \in N(x) \setminus N(y)$. Legyen $u \in N(x) \cap N(y)$. Ekkor két eset lehetséges. Az egyik, hogy $(v, u) \notin E(G)$, azaz (x, y, u, v) által indukált részgráf pont a harmadik gráf az ábrán, ami ellentmondás. A másik pedig, hogy $(v, u) \in E(G)$, azaz (x, y, u, v) által indukált részgráf az ábrán látható második gráfot adja, ami szintén ellentmondás. Az x, y-ra szimmetrikusan következik, hogy $N(x) \nsupseteq N(y)$, tehát $N(x) = N(y)$.

Ha $x, y, z \in V(G)$-re $(x, y) \notin E(G)$ és $(y, z) \notin E(G)$, akkor az előzőek miatt $N(x) = N(y)$ és $N(y) = N(z)$, azaz $N(x) = N(z)$. Mivel $x \notin N(x) = N(z)$, ezért $(x, z) \notin E(G)$. Ezzel beláttuk, hogy az R reláció tranzitív.

■

5. fejezet

Speciális gráfokról szóló tételek

Ebben a fejezetben olyan gráfokat tárgyalunk, melyek valamiféle kombinatorikai szabályosságot tartalmaznak, melynek következtében a spektrumuk különböző jellegzetességekkel rendelkezik. Egy gráfot k-regulárisnak mondunk, ha minden csúcs foka k. Ez a kézenfekvő kombinatorikai szabályosság érdekes következményeket eredményez a sajátértékekre nézve. A fejezetben szereplő tételek megtalálhatók a [2] 14-19. oldalán a 3.1-es, 3.5-ös, és a 3.8-as számmal jelölve.

5.1. Reguláris gráfok

5.1.1. Tétel. Legyen G egy k-reguláris gráf, ekkor

- k sajátértéke G-nek;
- ha G összefüggő, akkor a k multiplicitása 1;
- bármely λ sajátértékre igaz, hogy $|\lambda| \leq k$.

Bizonyítás: Legyen $\mathbf{u} = [1, 1, \ldots, 1]^T$, valamint legyen a G gráf szomszédsági mátrixa $\mathbf{A}$. Ekkor $\mathbf{Au} = k\mathbf{u}$, ugyanis minden sorban pontosan k darab 1-es szerepel, tehát a k sajátérték.

Legyen $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ tetszőleges nem nullvektor, amire $\mathbf{Ax} = k\mathbf{x}$. Tegyük fel, hogy x_j egy legnagyobb abszolútértékű eleme az $\mathbf{x}$-nek. Mivel $(\mathbf{Ax})_j = kx_j$, azt kapjuk, hogy

$$\sum_{x_i \in N(x_j)} x_i = kx_j.$$

A bal oldalon egy k-tagú összeg áll, ugyanis azon csúcsokhoz tartozó koordinátákat adtuk össze melyek szomszédosak az x_j koordinátához tartozó csúccsal. Mivel minden i-re $x_i \leq x_j$, az egyenlőség csak akkor lehet igaz, ha $x_i = x_j$ minden i-re a szummában. Ha a gráf összefüggő, akkor ezt az eljárást folytatva megmutathatjuk, hogy az $\mathbf{x}$ vektor összes koordinátája egyenlő. Azt kaptuk, hogy az $\mathbf{x}$ skalárszorosa az $\mathbf{u}$ vektornak, tehát a k-hoz tartozó sajátvektorok által kifeszített altér dimenziója 1, amiből az következik, hogy a k multiplicitása is 1. Ezzel beláttuk az állítás második pontját. Megjegyzés: a Perron-Frobenius tételből ez azonnal következik.

Tegyük fel, hogy $\mathbf{Ay} = \lambda\mathbf{y}$, ahol $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, valamint legyen y_j a legnagyobb abszolútértékű eleme az $\mathbf{y}$-nak. Ugyanazon meggondolás alapján, mint az előbb

$$\sum_{y_i \in N(y_j)} y_i = ky_j.$$

Vegyük az egyenlet mindkét oldalának abszolútértékét, aztán alkalmazzuk a háromszög-egyenlőtlenséget, majd becsüljünk felülről minden tagot y_j-vel.

$$|\lambda||y_j| = |\sum_{y_i \in N(y_j)} y_i| \leq \sum_{y_i \in N(y_j)} |y_i| \leq k|y_j|.$$

Ezzel megkaptuk, hogy $|\lambda| \leq k$.

■

Az előző tétel szerint, ha G k-reguláris gráf, akkor a legnagyobb sajátértéke k. Így, ha G k-reguláris, akkor $\lambda_1 = k$, és $\lambda_1(L(G)) = 2k - 2 = 2\lambda_1(G) - 2$. Emiatt feltételezhetjük, hogy G és $L(G)$ többi sajátértékei közt is van valami kapcsolat. Ezt tárgyalja a következő tétel.

5.1.2. Tétel. Ha G egy k-reguláris gráf n csúccsal és $m = \frac{1}{2}nk$ éllel, akkor

$$\chi(L(G); \lambda) = (\lambda + 2)^{m-n}\chi(G; \lambda + 2 - k). \tag{5.1}$$

Bizonyítás: Definiáljunk két mátrixot, melyeknek $m + n$ sora és oszlopa van:

$$\mathbf{U} = \left[\begin{array}{c|c} \lambda\mathbf{I}_n & -\mathbf{X} \\ \hline 0 & \mathbf{I}_m \end{array}\right], \quad \mathbf{V} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_n & \mathbf{X} \\ \hline \mathbf{X}^T & \lambda\mathbf{I}_m \end{array}\right].$$

Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{UV} = \left[\begin{array}{c|c} \lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{X}\mathbf{X}^T & 0 \\ \hline \mathbf{X}^T & \lambda\mathbf{I}_m \end{array}\right], \quad \mathbf{VU} = \left[\begin{array}{c|c} \lambda\mathbf{I}_n & 0 \\ \hline \lambda\mathbf{X}^T & \lambda\mathbf{I}_m - \mathbf{X}^T\mathbf{X} \end{array}\right].$$

Mivel a determinánsra vonatkozó szorzástételből tudjuk, hogy $det(\mathbf{UV}) = det(\mathbf{VU})$, a következőt kapjuk:

$$\lambda^m det(\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{X}\mathbf{X}^T) = \lambda^n det(\lambda\mathbf{I}_m - \mathbf{X}^T\mathbf{X}).$$

Írjuk fel $L(G)$ karakterisztikus polinomját:

$$\chi(L(G); \lambda) = det(\lambda\mathbf{I}_m - \mathbf{A}_L) =$$

alkalmazva a 4.1.2.-es Lemma első pontját:

$$= det((\lambda + 2)\mathbf{I}_m - \mathbf{X}^T\mathbf{X}) =$$

a determináns szorzástételéből kapott eredmény miatt:

$$= (\lambda + 2)^{m-n} det((\lambda + 2)\mathbf{I}_n - \mathbf{X}\mathbf{X}^T) =$$

felhasználva a 4.1.2.-es Lemma második pontját, és a determinánson belüli átrendezésből:

$$= (\lambda + 2)^{m-n} det((\lambda + 2 - k)\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = (\lambda + 2)^{m-n}\chi(G; \lambda + 2 - k).$$

■

5.2. Ciklikus gráfok

Ahhoz hogy beszélhessünk a ciklikus gráfokról, előbb meg kell értenünk a ciklikus mátrixok fogalmát.

5.2.1. Definíció. (Ciklikus mátrix) Egy $n \times n$-es $\mathbf{S}$ mátrixot ciklikusnak nevezzük, ha az elemei kielégítik a következőt

$$s_{ij} = s_{1,j-i+1}, \tag{5.2}$$

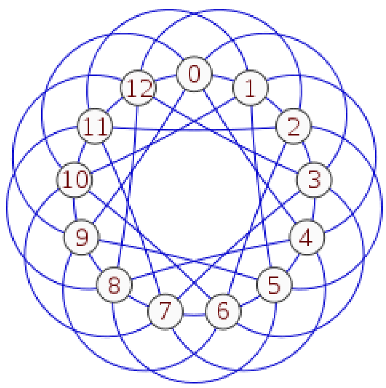
ahol az indexeket $\mod n$ számoljuk.

Más szóval minden ciklikus mátrix eredeztethető az első sorából úgy, hogy az i-edik sor az első sornak $i-1$ elemmel való ciklikus eltoltja.

5.2.2. Definíció. (Ciklikus gráf) G gráfot ciklikusnak nevezzük, ha a csúcsai sorbarendezhetők úgy, hogy a szomszédsági mátrixa ciklikus legyen.

Nézzük meg a következő ciklikus gráfot, és a hozzá tartozó szomszédsági mátrixot, mely a képen látható csúcsszámozással ciklikus mátrixot alkot.

5.2.3. Példa.



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & & & & & & \vdots & & & & & & \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Látható, hogy ha egy gráf ciklikus, akkor reguláris is, hiszen a ciklikus mátrix definíciójából adódik, hogy a gráf szomszédsági mátrixának minden sorában ugyanannyi 1-es szerepel.

5.2.4. Tétel. Tegyük fel, hogy $[0, a_2, \ldots, a_n]$ az első sora egy G ciklikus gráf szomszédsági mátrixának. Ekkor a G sajátértékei

$$\lambda_r = \sum_{j=2}^{n} a_j \omega^{(j-1)r}, \quad \text{minden } r = 0, 1, \ldots, n-1\text{-re}, \quad \text{ahol } \omega = \exp(2\pi i/n). \tag{5.3}$$

Bizonyítás: Legyen $\mathbf{W}$ az a ciklikus mátrix, melynek első sora $[0, 1, 0, \ldots, 0]$, és legyen $\mathbf{S}$ egy általános ciklikus mátrix melynek első sora $[s_1, s_2, \ldots, s_n]$. Ekkor közvetlen számításból kapható, hogy

$$\mathbf{S} = \sum_{j=1}^{n} s_j \mathbf{W}^{j-1}.$$

Határozzuk meg $\mathbf{W}$ karakterisztikus polinomját:

$$det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{W}) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & & & & \\ & \lambda & -1 & & & \\ & & & & & \mathbf{0} \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & \mathbf{0} & & & \\ & & & & \lambda & -1 \\ -1 & & & & & \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 & & & \\ & & & \mathbf{0} & \\ & \ddots & \ddots & & \\ \mathbf{0} & & & \lambda & -1 \\ & & & & \lambda \end{vmatrix} + (-1)^{n-1}(-1) \begin{vmatrix} -1 & & & & \\ \lambda & -1 & & \mathbf{0} & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & \mathbf{0} & & & \\ & & & \lambda & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda \cdot \lambda^{n-1} + (-1)^{n-1}(-1)(-1)^{n-1} = \lambda^n + (-1)^{2n-1} = \lambda^n - 1$$

Ebből $\mathbf{W}$ sajátértékei az n-edik egységgyökök, az $1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$, ahol $\omega = \exp(2\pi i/n)$.

Ekkor azt kapjuk **A** sajátértékeire, hogy

$$\lambda_r = \sum_{j=1}^{n} s_j \omega^{(j-1)r}, \qquad r = 0, 1, \dots, n-1.$$

Ezt átírva a tételben szereplő ciklikus mátrixra, melynek első sora $[0, a_2, \dots, a_n]$:

$$\lambda_r = \sum_{j=2}^{n} a_j \omega^{(j-1)r}, \qquad r = 0, 1, \dots, n-1.$$

■

Irodalomjegyzék

[1] Lowell W. Beineke; Robin J. Wilson:Topics in Algebraic Graph Theory, University of Cambridge

[2] Normann Biggs: Algebraic Graph Theory, London School of Ecomonics

[3] Lovász László: Eigenvalues of graphs
http://www.cs.elte.hu/ lovasz/eigenvals-x.pdf

[4] Chris Godsil; Gordon Royle: Algebraic Graph Theory

[5] Rob Beezer: An Introduction to Algebraic Graph Theory
http://buzzard.ups.edu/talks/beezer-2009-pacific-agt.pdf

[6] Ravindra B. Bapat: Graphs and Matrices