Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Ujszászi Zoltán

A Lebesgue-felbontás egy operátorelméleti megközelítése

BSc Szakdolgozat

Témavezető:

Titkos Tamás

MTA Rényi Alfréd Matematikai
Kutatóintézet

Budapest, 2018

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Titkos Tamásnak, az érdekes téma javaslatáért, a mérhetetlen mennyiségű segítségéért, főként a sok-sok konzultáció során adott tanácsaiért, melyekkel sikerült a téma mélyebb megértése felé irányítania. Továbbá köszönet illeti Tarcsay Zsigmondot a hasznos észrevételeiért.

Hálával tartozom Anyukámnak a folyamatos támogatásáért, amely nélkül nem juthattam volna el idáig.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

A mértékelmélet alapjait képező ismeretek egyik pillére a Radon-Nikodym-tétel, ami durván szólva (és a nemnegatív véges esetre szorítkozva) azt mondja, hogy egy μ mérték, ami egy halmazfüggvény, pontosan akkor reprezentálható pontfüggvényként egy másik ν mérték szerint, ha μ abszolút folytonos ν-re nézve. Formálisan,

$$\mu \ll \nu \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists f \in L^1(\nu) \;\; \forall A \in \mathcal{A}: \quad \mu(A) = \int_A f \; d\nu.$$

A fenti ν-majdnem mindenütt nemnegatív $f \in L^1(\nu)$ függvényt a μ mérték ν szerinti Radon-Nikodym-deriváltjának nevezik. A Radon-Nikodym-tételt a funkcionálanalízis nyelvén úgy is megfogalmazhatjuk, hogy $\mu \ll \nu$ pontosan akkor, ha μ reprezentálható mint egy sűrűn definiált pozitív önadjungált operátor az $L^2(\nu)$ téren. Ez az operátor nem más, mint az $f^{1/2}$ függvénnyel való szorzás

$$\mu(A) = \int_A f \; d\nu = \int_X |f^{1/2} \cdot \chi_A|^2 d\nu = \|f^{1/2} \cdot \chi_A\|^2_{L^2(\nu)}.$$

A Lebesgue felbontási tétel azt mondja, hogy tetszőleges μ mérték tetszőleges ν mérték szerint egyértelműen bomlik fel ν-re nézve abszolút folytonos és szinguláris részekre.

A tételnek számtalan bizonyítása ismert, a klasszikus (Radon-Nikodym-tételt használó) bizonyítások mellett [4], találhatunk hálóelméleti technikákat alkalmazó [1], és indirekt bizonyítást is [6]. A szakdolgozat célja, hogy bemutasson egy olyan bizonyítást, amelyet a funkcionálanalízisből ismert, úgynevezett operátor shortolás motivált.

A szakdolgozat felépítése a következő: a második fejezetben az [2] és [3] cikkek bizononyos eredményeit feldolgozva bevezetjük a shortolt operátor fogalmát. A harmadik fejezetben az [5] cikkre támaszkodva megadjuk a Lebesgue felbontási tételnek egy elemi bizonyítását. A dolgozat záró fejezetében először megmutatjuk, hogy a shortolt operátor segítségével hogyan bizonyíthatunk egy, a Lebesgue-tétellel analóg felontási tételt véges dimenziós Hilbert-terek pozitív operátoraira. Végül megmutatjuk, hogy mindkét felbontás megfogalmazható egy közös nyelven, nevezetesen nemnegatív sesquilineris formák és az általuk indukált Hilbert-terek segítségével.

2. fejezet

Operátor short

2.1. Korlátos operátorok

2.1.1. Definíció: *Legyenek* $(X, \|\cdot\|_X)$ *és* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *normált terek, és legyen* $A\colon X \to Y$ *egy lineáris operátor. Azt mondjuk, hogy* A *korlátos, ha létezik* $M \geq 0$ *konstans, hogy*

$$\forall x \in X\colon \quad \|Ax\|_Y \leq M\|x\|_X.$$

Az ilyenek halmazát jelölje $B(X,Y)$*. A* $B(X,X)$ *halmazt a továbbiakban egyszerűen* $B(X)$*-ként fogjuk jelölni.*

2.1.2. Definíció: *Legyen* $\mathscr{H}$ *Hilbert-tér,* $A \in B(\mathscr{H})$ *korlátos lineáris operátor. Azt mondjuk, hogy* A *pozitív, ha* $\forall x \in \mathscr{H}$: $\langle Ax \mid x\rangle_{\mathscr{H}} \geq 0$*. A pozitív operátorok halmazát* $B_+(\mathscr{H})$ *fogja jelölni.*

2.1.3. Megjegyzés: Ha $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrix, akkor a fenti tulajdonságú mátrixokat pozitív szemidefinit mátrixoknak nevezzük. Ennek a tulajdonságnak egy jól ismert karakterizációja, hogy a mátrix minden sajátértéke nemnegatív.

2.1.4. Jelölés: Az $A \in B(\mathscr{H})$ esetén $A \geq 0$ jelentse azt, hogy $A \in B_+(\mathscr{H})$. Ha $A, B \in B(\mathscr{H})$, akkor ezzel értelmet adhatunk az $A \geq B$ jelölésnek is. Azt monduk $A \geq B$, ha $A - B \geq 0$, azaz $A - B \in B_+(\mathscr{H})$. Az így definiált $\leq$ relációval $(B_+(\mathscr{H}), \leq)$ egy részbenrendezett halmaz.

2.1.5. Megjegyzés: Érdemes megjegyezni, hogy $B_+(\mathscr{H})$ nem alkot hálót a fenti részbenrendezésre nézve. Általában, nem triviális kérdés, hogy pozitív operátorok egy halmazának mikor létezik legnagyobb, vagy legkisebb eleme.

2.1.6. Definíció: *A fentiek alapján definiálhatjuk $B_+(\mathscr{H})$-beli operátorok egy intervallumát is a következőképp:* $[A, B] = \{C \in B_+(\mathscr{H}) \mid A \leq C \leq B\}$.

2.1.7. Definíció: *Legyen $\mathscr{H}$ egy $\mathbb{K}$ feletti Hilbert-tér, ahol $\mathbb{K}$ a valós vagy komplex testet jelöli. Egy $t\colon \mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathbb{K}$ leképezést bilineárisnak nevezünk, ha mindkét változójában lineáris. Azt mondjuk, hogy t sesquilineáris, ha első változójában lineáris, második változójában pedig konjugáltan lineáris. Ezeket gyakran hívják bilineáris és sesquilineáris formáknak is.*

2.1.8. Definíció: *Egy $t\colon \mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathbb{K}$ sesquilineáris leképezés korlátos, ha létezik $M > 0$ konstans, hogy minden $x, y \in \mathscr{H}$ esetén $|t(x, y)| \leq M\|x\|\|y\|$.*

2.1.9. Tétel: *Legyen $\mathscr{H}$ komplex Hilbert-tér és legyen $t\colon \mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathbb{K}$ korlátos sesquilineáris forma. Ekkor egyértelműen létezik $A \in B(\mathscr{H})$ korlátos lineáris operátor, hogy*

$$\forall x, y \in \mathscr{H}: \qquad t(x, y) = \langle Ax \mid y\rangle$$

Megfordítva, egy $A \in B(\mathscr{H})$ operátor által a fenti módon indukált forma korlátos.

Bizonyítás: Rögzítsünk le egy $y \in \mathscr{H}$ elemet. Ekkor egy $\psi_y x := t(x, y)$ lineáris funkcionált kapunk. Nyilván t korlátosságából adódik, hogy ψ_y szintén korlátos, hiszen

$$|\psi_y x| = |t(x, y)| \leq M\|x\|\|y\|,$$

így folytonos is, valamint $\|\psi_y\| \leq M\|y\|$, hiszen

$$\|\psi_y\| = \sup\{|\psi_y x|\colon x \in \mathscr{H},\ \|x\| = 1\} \leq \sup\{M\|x\|\|y\|\colon x \in \mathscr{H},\ \|x\| = 1\} = M \cdot 1 \cdot \|y\|.$$

Lévén hogy ψ_y korlátos lineáris funkcionál, alkalmazható rá a Riesz-féle reprezentációs tétel, azaz egyértelműen létezik egy $\widetilde{y} \in \mathscr{H}$, hogy minden $x \in \mathscr{H}$ esetén $\psi_y x = \langle x \mid \widetilde{y}\rangle$. Így minden y-hoz találtunk egy ilyen $\widetilde{y}$-t, legyen C az az operátor, mely ezt a hozzárendelést hajtja végre. Összességében kaptuk tehát, hogy tetszőleges $x, y \in \mathscr{H}$ elemekre $t(x, y) = \langle x \mid Cy\rangle$. Igazolnunk kell, hogy $C \in B(\mathscr{H})$. Nyilván a linearitás adódik t és $\langle \cdot \mid \cdot\rangle$ tulajdonságait kihasználva. Továbbá a korlátosság is rögtön megkapható, ha felhasználjuk hogy egy korlátos lineáris funkcionál normája megegyezik az őt reprezentáló elem normájával, azaz $\|\psi_y\| = \|\widetilde{y}\|$:

$$\|Cy\| = \|\widetilde{y}\| = \|\psi_y\| \leq M\|y\|.$$

Tekintsük a C operátor adjungáltját és jelöljük $A := C^*$-tal. Ekkor $A \in B(\mathscr{H})$ szintén teljesül az adjungált definíciója alapján. Ezzel az állítást igazoltuk, ugyanis

$$t(x, y) = \langle x \mid Cy \rangle = \langle C^* x \mid y \rangle = \langle Ax \mid y \rangle.$$

■

2.1.10. Megjegyzés: Komplex Hilbert-terek esetén a korlátos sesquilineáris formát és így magát az operátort is meghatározza a kvadratikus alak az úgynevezett polarizációs azonosság

$$t(x, y) = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{4} i^k t(x + i^k y, x + i^k y)$$

segítségével. Valós Hilbert-terek esetén óvatosabbnak kell lennünk, ugyanis a

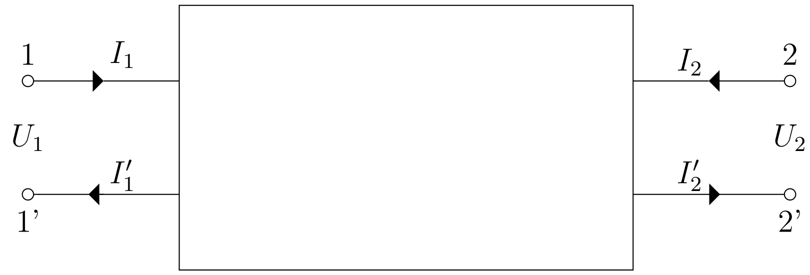
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix kvadratikus alakja megegyezik az azonosan nulla mátrix kvadratikus alakjával. Tehát a $\forall x \in \mathbb{R}^2 : \ t(x, x) = 0$ kvadratikus alak megadásával nem határoznánk meg egyértelműen, hogy melyik mátrix formája a t.

2.2. Az operátor short eredete

Az operátor short fogalma első formájában az elektronikában merült fel, egy igen természetes probléma megoldásaként. Bonyolult áramkörök modellezésénél egy gyakori módszer, hogy az áramkör belső működését egy feketedoboznak tekintik és csak a ki- és bemeneteken megjelenő áram és feszültség tekintetében vizsgálják. Egy ki- és bemenet párt portnak neveznek (ha a megfelelő feltételek teljesülnek) és az olyan rendszereket, melyeken n ilyen pár található, n-port hálózatoknak hívják [7]. Az áramkör belső működését (ami esetleg nem is ismert) itt figyelmen kívül hagyják, a portokon megjelenő jelek kapcsolatát pedig mátrixokkal írják le.

Ahhoz, hogy egy ki- bemenet párt portnak nevezhessünk, teljesítenie kell az úgynevezett port feltételt, azaz hogy az egy porton belüli ki- és befolyó áram azonos nagyságú,



2.1. ábra. 2-port hálózat sematikus rajza

csak az iránya ellentétes. Ez a fenti ábrán azt jelenti, hogy $I_1 = I_1'$ és $I_2 = I_2'$. A port feltétel egy 1-port hálózaton az első Kirchoff-törvény értelmében automatikusan teljesül, de $n > 1$ esetén már meg kell követelni, hogy n-portról beszélhessünk. Egy n-port hálózat esetén az áramerősséget és feszültséget egy-egy n-dimenziós vektorral jelöljük, ahol a vektor i. koordinátája az i. porton befolyó (vagy kifolyó, hiszen a port feltétel miatt a kettő azonos) áram erőssége, vagy az i. porton mért feszültség nagysága. Ezeket az ismerős I és V jelölésekkel illetjük és I_i, valamint V_i koordinátákkal hivatkozunk az i. portra vonatkozó értékekre. Az 1-port hálózatokban az áramerősség és feszültség kapcsolatát a jól ismert Ohm-törvény adja meg, $V = R \cdot I$ formában, ahol R az ellenállást jelöli, vagy váltóáramú áramkörökben $V = Z \cdot I$, ahol Z az impedancia, mely az ellenállás váltóáramú áramkörökre való általánosítása. Egy n-port hálózatban az impedancia minden portra kapcsolatot teremt az áramerősség és feszültség között, csakúgy mint 1-portos esetben, így ezt egy $n \times n$-es mátrix formájában szokás felírni. Ekkor az eddigi jelölésekkel továbbra is fennáll az Ohm-törvény:

$$V = Z \cdot I$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{1,1} & \dots & Z_{1,n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ Z_{n,1} & \dots & Z_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix}$$

Az operátor short elnevezés onnan ered, hogy ha Z egy n-port impedancia mátrixa, S pedig egy megfelelő s dimenziós altér melyre shortoljuk az impedancia mátrixot (hamarosan látni fogjuk, hogy ez mit jelent), akkor ismét egy impedancia mátrixot kapunk, mely az altéren kívüli $n - s$ darab port rövidre zárása során keletkező új hálózat impedancia mátrixa. Így tulajdonképp az elnevezés a rövidzár kifejezés angol megfelelőjéből származik. A fogalmat eredetileg mátrixokra vezették be, csak később általánosították végtelen dimenziós Hilbert-téren értelmezett operátorokra. Itt rögtön az általános esetet fogjuk tárgyalni, de fontos kiemelni, hogy éppen ezért a későbbiekben ha mátrixok shortjáról beszélünk, az itt ismertetett eredmények ott is érvényesek lesznek. Most rátérünk az operátor short formális definiálására.

2.3. A shortolt operátor létezése

Ebben a részben definiáljuk az operátor shortot [2] mint egy halmaz legnagyobb elemét és a [3]-ban leírtakat követve be is bizonyítjuk, hogy ez tényleg létezik. Végezetül pedig megadunk egy alternatív módot a shortolt operátor kvadratikus alakjának kiszámítására és így magának a shortolt operátornak egy alternatív definiálására is.

2.3.1. Definíció: *Legyen $A \in B_+(\mathscr{H})$ és $\mathcal{M} \subseteq \mathscr{H}$ zárt altér. Az A operátor $\mathcal{M}$ altérre vett shortjának nevezzük és $A_{/\mathcal{M}}$-mel jelöljük az alábbi halmaz legnagyobb elemét*

$$\{C \in B_+(\mathscr{H}) \mid C \in [0, A];\, \mathrm{ran}(C) \subset \mathcal{M}\},$$

ahol $\mathrm{ran}(C)$ *a C operátor képterét jelöli.*

Hangsúlyozzuk, hogy fenti definícióban a halmaz *legnagyobb* elemeként definiáltuk az operátor shortját, és nem mint maximális elem. Ezt azért kell tisztázni, mert $B_+(\mathscr{H})$ csak részbenrendezett halmaz, ahol ez a két fogalom eltér. A legnagyobb elem természetesen maximális is, de annyival erősebb, hogy ez az elem összehasonlítható minden többi elemmel. Míg maximalitás esetén csak annyit mondhatnánk, hogy nincs olyan elem, mely nála nagyobb lenne. Ez utóbbi viszont fakadhat egyszerűen abból is, hogy bizonyos elemek nem összehasonlíthatóak vele.

2.3.2. Tétel: *Ha $A \in B_+(\mathscr{H})$ és $\mathcal{M} \subseteq \mathscr{H}$ zárt altér, akkor $A_{/\mathcal{M}}$ valóban létezik és egyértelmű.*

Bizonyítás: A bizonyítást az egyértelműség igazolásával kezdjük. Tegyük fel, hogy $A^1_{/\mathcal{M}}$ és $A^2_{/\mathcal{M}}$ is ilyen. Ekkor először $A^1_{/\mathcal{M}}$-re kihasználva, hogy legnagyobb elem, kapjuk, hogy $A^2_{/\mathcal{M}} \leq A^1_{/\mathcal{M}}$, másrészt $A^2_{/\mathcal{M}}$-re ugyanezt kihasználva kapjuk, hogy $A^1_{/\mathcal{M}} \leq A^2_{/\mathcal{M}}$, melyből már következik, hogy $A^1_{/\mathcal{M}} = A^2_{/\mathcal{M}}$, azaz az operátor shortja egyértelmű.

Most rátérünk a létezés bizonyítására. Először csak speciális operátorokra látjuk be az állítást, majd ezek segítségével általánosan is. Mivel $\mathcal{M}$ zárt altér, így alkalmazható rá a Riesz-féle ortogonális felbontási tétel, azaz $\mathscr{H}$ előáll $\mathscr{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$ alakban. Így tehát minden $x \in \mathscr{H}$ esetén $x = x_{\mathcal{M}} + x_{\mathcal{M}^\perp}$, mely $\left[\begin{smallmatrix} x_{\mathcal{M}} \\ x_{\mathcal{M}^\perp} \end{smallmatrix}\right]$ formában is írható. Mivel $A\colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ operátor, ezért maga A is felbontható aszerint, hogy a felbontott tér melyik részéből melyik részébe képez. Legyen tehát $A_{11}\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, $A_{21}\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}^\perp$, $A_{12}\colon \mathcal{M}^\perp \to \mathcal{M}$, $A_{22}\colon \mathcal{M}^\perp \to \mathcal{M}^\perp$. Ezekkel a jelölésekkel ekkor

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Érdemes megjegyeznünk, hogy valójában $A_{12}^* = A_{21}$, mely könnyen adódik. Az A pozitív operátor, így A_{11} és A_{22} is pozitívak, emiatt mindhárom operátor önadjungált. Ezekből rögtön következik is az $A_{12}^* = A_{21}$ tulajdonság, hiszen:

$$A = A^*$$
$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{21}^* \\ A_{12}^* & A_{22}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21}^* \\ A_{12}^* & A_{22} \end{bmatrix}$$

Legyen most A invertálható operátor. Ekkor A_{22} is invertálható, így definiálhatjuk a következő operátort:

$$\widetilde{A}_{/\mathcal{M}} = \begin{bmatrix} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Belátjuk, hogy az így definiált $\widetilde{A}_{/\mathcal{M}}$ valójában az A operátor $\mathcal{M}$ altérre vett shortja. Ennek igazolásához az szükséges, hogy $\widetilde{A}_{/\mathcal{M}} \in \{C \in B_+(\mathscr{H}) \mid C \in [0, A];\ \operatorname{ran}(C) \subset \mathcal{M}\}$, valamint hogy minden $D \in \{C \in B_+(\mathscr{H}) \mid C \in [0, A]; \operatorname{ran}(C) \subset \mathcal{M}\}$ esetén $D \leq \widetilde{A}_{/\mathcal{M}}$. Először meg kell mutassuk, hogy $\widetilde{A}_{/\mathcal{M}} \leq A$. Ehhez legyen $\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] \in \mathscr{H}$ tetszőleges elem a Riesz-féle felbontásában felírva. Tekintsük egy ilyen általános elemre az A operátor kvadratikus alakját:

$$\langle A\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] \mid \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right]\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \;\middle|\; \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} A_{11}x + A_{12}y \\ A_{21}x + A_{22}y \end{bmatrix} \;\middle|\; \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\rangle$$

A skalárszorzat kifejtése és az ortogonalitás kihasználása után a kvadratikus alakra a következő adódik:

$$\langle A\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] \mid \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right]\rangle = \langle A_{11}x \mid x\rangle + \langle A_{12}y \mid x\rangle + \langle A_{21}x \mid y\rangle + \langle A_{22}y \mid y\rangle$$

Ezután írjuk fel $\widetilde{A}_{/\mathcal{M}}$ kvadratikus alakját is:

$$\langle \widetilde{A}_{/\mathcal{M}}\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] \mid \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right]\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \;\middle|\; \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} A_{11}x - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}x \\ 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\rangle$$

Ez a skalárszorzat tulajdonságai és az ortogonalitás alapján a következő alakba írható:

$$\langle \widetilde{A}_{/\mathcal{M}}[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}] \mid [\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}]\rangle = \langle A_{11}x \mid x\rangle - \langle A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}x \mid x\rangle$$

A két kvadratikus alak összehasonlításához vegyük észre, hogy A kvadratikus alakja kifejezhető $\widetilde{A}_{/\mathcal{M}}$ kvadratikus alakjának segítségével. Ehhez legyen $z = y + A_{22}^{-1}A_{21}x$, ahol továbbra is $x \in \mathcal{M}$ és $y \in \mathcal{M}^{\perp}$. Ekkor A kvadratikus alakja előáll:

$$\langle A[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}] \mid [\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}]\rangle = \langle \widetilde{A}_{/\mathcal{M}}[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}] \mid [\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}]\rangle + \langle A_{22}z \mid z\rangle$$

formában. A skalárszorzatot kifejtve az adódik, hogy

$$\langle A_{22}z \mid z\rangle = \langle A_{22}y \mid y\rangle + \langle A_{22}y \mid A_{22}^{-1}A_{21}x\rangle + \langle A_{21}x \mid y\rangle + \langle A_{21}x \mid A_{22}^{-1}A_{21}x\rangle$$

és a skalárszorzat tulajdonságait, valamint az $A_{12}^* = A_{21}$-t felhasználva a kívánt előállításhoz jutunk:

$$\begin{aligned}
\langle A[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}] \mid [\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}]\rangle = \langle \widetilde{A}_{/\mathcal{M}}[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}] \mid [\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}]\rangle + \langle A_{22}z \mid z\rangle &= \\
\langle A_{11}x \mid x\rangle - \langle A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}x \mid x\rangle + \langle A_{22}y \mid y\rangle &+ \\
\langle A_{22}y \mid A_{22}^{-1}A_{21}x\rangle + \langle A_{21}x \mid y\rangle + \langle A_{21}x \mid A_{22}^{-1}A_{21}x\rangle &= \\
(\langle A_{11}x \mid x\rangle + \langle A_{22}y \mid y\rangle + \langle A_{21}x \mid y\rangle) &+ \\
\langle (A_{22}^{-1}A_{21})^*A_{22}y \mid x\rangle + \langle (A_{22}^{-1}A_{21})^*A_{21}x \mid x\rangle - \langle A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}x \mid x\rangle &= \\
(\langle A_{11}x \mid x\rangle + \langle A_{22}y \mid y\rangle + \langle A_{21}x \mid y\rangle) &+ \\
\langle A_{21}^*(A_{22}^{-1})^*A_{22}y \mid x\rangle + \langle A_{21}^*(A_{22}^{-1})^*A_{21}x \mid x\rangle - \langle A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}x \mid x\rangle &= \\
(\langle A_{11}x \mid x\rangle + \langle A_{22}y \mid y\rangle + \langle A_{21}x \mid y\rangle) &+ \\
\langle A_{12}A_{22}^{-1}A_{22}y \mid x\rangle + \langle A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}x \mid x\rangle - \langle A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}x \mid x\rangle &= \\
\langle A_{11}x \mid x\rangle + \langle A_{12}y \mid x\rangle + \langle A_{21}x \mid y\rangle + \langle A_{22}y \mid y\rangle&.
\end{aligned}$$

Ezt az előálítást felhasználva viszont könnyen adódik, hogy $\widetilde{A}_{/\mathcal{M}} \leq A$. Valóban, A_{22} pozitivitása miatt $\langle A_{22}z \mid z\rangle \geq 0$, így ennek elhagyásával A kvadratikus alakja biztosan csökken, ez viszont épp $\widetilde{A}_{/\mathcal{M}}$ kvadratikus alakja. Szükséges még igazolnunk, hogy $\widetilde{A}_{/\mathcal{M}}$ pozitív operátor. Ez viszont azonnali következménye annak, hogy $\langle \widetilde{A}_{/\mathcal{M}}[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}] \mid [\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}]\rangle$ nem függ y-tól, így tetszőleges x esetén választható y úgy, hogy $z = 0$ legyen. Ekkor viszont $\langle A[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}] \mid [\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}]\rangle = \langle \widetilde{A}_{/\mathcal{M}}[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}] \mid [\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}]\rangle$, így A pozitivitása miatt $\widetilde{A}_{/\mathcal{M}} \geq 0$.

Összességében tehát kaptuk, hogy $\widetilde{A}_{/\mathcal{M}} \in \{C \in B_+(\mathscr{H}) \mid C \in [0, A];\ \mathrm{ran}(C) \subset \mathcal{M}\}$. Már csak azt kell megfontolnunk, hogy $\widetilde{A}_{/\mathcal{M}}$ a legnagyobb elem. Ehhez legyen

$$D \in \{C \in B_+(\mathscr{H}) \mid C \in [0, A];\ \mathrm{ran}(C) \subset \mathcal{M}\}$$

tetszőleges, kell hogy $D \leq \widetilde{A}_{/\mathcal{M}}$. Ismét a Hilbert-tér felbontását használva particionáljuk a D operátort is a korábbiak szerint. Ez $\operatorname{ran}(D) \subset \mathcal{M}$ miatt a következő alakot ölti:

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ismét felhasználva, hogy $\operatorname{ran}(D) \subset \mathcal{M}$, az is adódik, hogy D kvadratikus alakja nem függ y választásától. Valóban, hiszen $\langle D[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}] \mid [\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}] \rangle = \langle D_{11}x \mid x \rangle$. Továbbá definíció szerint $D \leq A$. Ezeket kihasználva tetszőleges $[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}] \in \mathscr{H}$ esetén azt kapjuk, hogy

$$\left\langle D \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle D \begin{bmatrix} x \\ -A_{22}^{-1}A_{21}x \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} x \\ -A_{22}^{-1}A_{21}x \end{bmatrix} \right\rangle \leq$$
$$\left\langle A \begin{bmatrix} x \\ -A_{22}^{-1}A_{21}x \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} x \\ -A_{22}^{-1}A_{21}x \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \widetilde{A}_{/\mathcal{M}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\rangle$$

Azaz $\widetilde{A}_{/\mathcal{M}}$ legnagyobb elem, így $\widetilde{A}_{/\mathcal{M}} = A_{/\mathcal{M}}$, mellyel az állítást invertálható operátorok esetén igazoltuk.

Most rátérünk a nem invertálható operátorok esetére. Vegyük észre, hogy ha $A \geq B$ és B invertálható, akkor $A_{/\mathcal{M}} \geq B_{/\mathcal{M}}$, ugyanis $[0, B] \subseteq [0, A]$ és így egy bővebb halmazon veszünk legnagyobb elemet. Tekintsük az $A \in B_+(\mathscr{H})$ nem invertálható operátort. Legyen $(E_n)_n := (\frac{1}{n}I)_n$ invertálható pozitív operátorok monoton csökkenő sorozata, mely erősen konvergál a 0 operátorhoz, azaz $\langle E_n x \mid x \rangle \to \langle 0x \mid x \rangle = 0$. Ekkor $A + E_n$ már invertálható minden $n \in \mathbb{N}_+$ esetén. Valamint a monotonitás miatt fennáll, hogy $A + E_n \geq A + E_m$, ha $n \leq m$. Ekkor az $(A + E_n)_{/\mathscr{M}}$ monoton csökken az iménti észrevétel miatt. Ennek következtében $(A + E_n)_{/\mathscr{M}}$-nek létezik erős limesze, melyet jelöljünk F-fel.

Megmutatjuk, hogy F a $\{C \in B_+(\mathscr{H}) \mid C \in [0, A]; \operatorname{ran}(C) \subset \mathcal{M}\}$ legnagyobb eleme. Mindenekelőtt vegyük észre, hogy $F \leq (A + E_n)_{/\mathscr{M}} \leq A + E_n$ minden n-re, ugyanis invertálható esetben láttuk, hogy az operátor shortja mindig kisebb vagy egyenlő mint maga az operátor. Emiatt rögtön kapjuk az $F \leq A$ egyenlőtlenséget. Szintén az invertálható esetben látottakra hivatkozva $(A + E_n)_{/\mathscr{M}} \geq 0$ minden n esetén, így $F \geq 0$. Definíció szerint $\operatorname{ran}((A + E_n)_{/\mathscr{M}}) \subset \mathcal{M}$ minden n-re, így $\operatorname{ran}(F) \subset \mathcal{M}$ ugyancsak teljesül. Összességében tehát $F \in \{C \in B_+(\mathscr{H}) \mid C \in [0, A]; \operatorname{ran}(C) \subset \mathcal{M}\}$ fennáll. Szükséges még belátnunk, hogy tetszőleges $D \in \{C \in B_+(\mathscr{H}) \mid C \in [0, A]; \operatorname{ran}(C) \subset \mathcal{M}\}$ esetén $D \leq F$. Legyen D ilyen, ekkor $E_n > 0$ miatt $D \leq A < A + E_n$. Az ilyen D-k között $(A + E_n)_{/\mathscr{M}}$ definíció szerint a legnagyobb, így $D \leq (A + E_n)_{/\mathscr{M}}$ minden n esetén, így F definíciója miatt $D \leq F$, tehát F legnagyobb elem. Ezzel a tételt tetszőleges $A \in B_+(\mathscr{H})$ esetén igazoltuk. $\blacksquare$

A következőkben formulát adunk az operátor shortjához tartozó forma kvadratikus alakjára. A korábban leírtak miatt ez akár lehetne a shortolt operátor definíciója is. Azaz definiálhatnánk úgy is, hogy legyen az $\mathcal{M}$-re vett short az az operátor, amelynek kvadratikus alakja az alábbi:

2.3.3. Tétel: *Legyen $A \in B_+(\mathscr{H})$ operátor és $\mathcal{M} \subseteq \mathscr{H}$ zárt altér, $x \in \mathscr{M}$ tetszőleges. Ekkor*

$$\langle A_{/\mathcal{M}}x \mid x\rangle = \inf\left\{ \left\langle A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \,\middle|\, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right\rangle \middle| y \in \mathcal{M}^\perp \right\}$$

Bizonyítás: Az operátor short létezésére vonatkozó bizonyításban láttuk, hogy $A_{/\mathcal{M}} \leq A$, melyből adódóan $\langle A_{/\mathcal{M}}x \mid x\rangle$ alsó korlátja a halmaznak. Abban az esetben, ha A invertálható operátor, akkor $y = -A_{22}^{-1}A_{21}x \in \mathcal{M}^\perp$ választással azt kapjuk, hogy

$$\langle A_{/\mathcal{M}}x \mid x\rangle = \left\langle A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \,\middle|\, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right\rangle$$

így $\langle A_{/\mathcal{M}}x \mid x\rangle$ a halmaz legkisebb eleme, tehát ebben az esetben a formula igaz. Ha A nem invertálható, akkor legyen α a halmaz egy tetszőleges alsó korlátja, továbbá legyen $\varepsilon > 0$ szintén tetszőleges. Ekkor minden $x \in \mathcal{M}$ és $y \in \mathcal{M}^\perp$ esetén

$$\alpha \leq \left\langle A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \,\middle|\, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right\rangle \leq \left\langle (A+\varepsilon I)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \,\middle|\, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right\rangle$$

hiszen α alsó korlát és $A \leq A + \varepsilon I$. Viszont az $A + \varepsilon I$ operátor már invertálható, így az előző esethez hasonlóan y definiálható úgy, hogy $\langle (A+\varepsilon I)[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}] \mid [\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}]\rangle$ épp az $(A+\varepsilon I)_{/\mathcal{M}}$ kvadratikus alakjával egyezzen meg. Hiszen $A + \varepsilon I$ a korábbiakhoz hasonló módon felbomlik négy részre, aszerint, hogy a $\mathscr{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$ melyik részéből melyikbe képez. Így tehát $y = -(A+\varepsilon I)_{22}^{-1}(A+\varepsilon I)_{21}x$ ismételten jó lesz. Ezzel viszont

$$\alpha \leq \left\langle A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \,\middle|\, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right\rangle \leq \left\langle (A+\varepsilon I)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \,\middle|\, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right\rangle = \langle (A+\varepsilon I)_{/\mathcal{M}}x \mid x\rangle$$

Összességében tehát az adódik, hogy minden $\varepsilon > 0$ esetén $\alpha \leq \langle (A+\varepsilon I)_{/\mathcal{M}}x \mid x\rangle$, melyből nyilvánvalóan következik, hogy $\alpha \leq \langle A_{/\mathcal{M}}x \mid x\rangle$. Ezzel tehát azt bizonyítottuk, hogy amellett, hogy $\langle A_{/\mathcal{M}}x \mid x\rangle$ alsó korlát, bármely más alsó korlátnál nagyobb, azaz valóban a legnagyobb alsó korlát. Ezzel tetszőleges A-ra a formulát bizonyítottuk. ■

2.3.4. Megjegyzés: Az imént bizonyított formula egy ekvivalens alakban is megfogalmazható. Az $A_{/\mathcal{M}}$ kvadratikus alakja előáll

$$\langle A_{/\mathcal{M}}x \mid x\rangle = \inf\{\langle A(x-y) \mid x-y\rangle \mid y \in \mathcal{M}^{\perp}\} \tag{3}$$

formában is. Valóban, hiszen csupán annyi módosítás történt, hogy $x+y$ helyett $x-y$-t írtunk, viszont y befutja a teljes $\mathcal{M}^{\perp}$-t és $y \in \mathcal{M}^{\perp}$ esetén $-y \in \mathcal{M}^{\perp}$ is teljesül, így a két különböző megfogalmazás során valójában ugyanazon a halmazon vesszük az infimumot.

Összefoglalva, megmutattuk, hogy tetszőleges $A \geq 0$ operátor és $\mathcal{M}$ zárt altér esetén a

$$\{C \in B_+(\mathscr{H}) \mid C \in [0, A];\ \mathrm{ran}(C) \subset \mathcal{M}\}$$

operátorhalmaznak létezik legnagyobb eleme. Ezt az elemet az A operátor $\mathcal{M}$ altérre vett shortjának nevezzük, és $A_{/\mathcal{M}}$-mel jelöljük. A shortolt operátor kvdratikus alakja nem más, mint

$$\langle A_{/\mathcal{M}}x \mid x\rangle = \inf\{\langle A(x-y) \mid x-y\rangle \mid y \in \mathcal{M}^{\perp}\}.$$

3. fejezet

Lebesgue-felbontás

Ebben a fejezetben az [5] számú hivatkozásban leírtakat dolgozzuk fel. Ahhoz hogy kimondjuk a tételt, szükség van az abszolút folytonosság és a szingularitás fogalmára. Elsőként bevezetjük ezeket a fogalmakat, majd megadjuk a szingularitásnak egy olyan ekvivalens definícióját, amelyet a későbbiekben könnyebben tudunk kezelni.

3.1. Fogalmak, jelölések

3.1.1. Definíció: *Legyen $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér és legyenek $\mu, \nu \colon \mathcal{A} \to [0, \infty)$ nemnegatív, véges értékű mértékek. (Azaz $\mu(X) < +\infty$ és $\nu(X) < +\infty$.) Azt mondjuk, hogy μ abszolút folytonos a ν-re nézve (jelölésben: $\mu \ll \nu$), ha*

$$\forall A \in \mathcal{A}: \quad \nu(A) = 0 \implies \mu(A) = 0.$$

3.1.2. Definíció: *Legyen $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér és legyenek $\mu, \nu \colon \mathcal{A} \to [0, \infty)$ nemnegatív, véges értékű mértékek. A μ és ν szingulárisak (jelölésben: $\mu \perp \nu$), ha létezik $P \in \mathcal{A}$ halmaz, hogy*

$$\forall A \in \mathcal{A}: \quad \mu(A \cap P) = \nu(A \setminus P) = 0.$$

3.1.3. Definíció: *Legyen $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér. Jelöljük az ezen értelmezett nemnegatív véges mértékek halmazát a $\mathscr{M}_{(X,\mathcal{A})}$ szimbólummal. Vezessük be $\mathscr{M}_{(X,\mathcal{A})}$-n a $\leq$ relációt a következőképp:*

$$\mu \leq \nu \iff \forall A \in \mathcal{A}: \quad \mu(A) \leq \nu(A)$$

Nyilvánvaló, hogy az így definiált reláció reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív, így egy részbenrendezett halmazt definiáltunk, melyet $(\mathscr{M}_{(X,\mathcal{A})}; \leq)$-ként fogunk jelölni.

3.1.4. Állítás: *Az* $(\mathscr{M}_{(X,\mathcal{A})}; \leq)$ *részbenrendezett halmaz háló, és tetszőleges* $\mu, \nu \in \mathscr{M}_{(X,\mathcal{A})}$ *esetén a legnagyobb alsó korlát a*

$$(\mu \wedge \nu)(A) = \inf_{P \in \mathcal{A}} \{\mu(A \cap P) + \nu(A \setminus P)\}$$

formában kapható meg. Hasonlóan, a legkisebb felső korlát a

$$(\mu \vee \nu)(A) = \sup_{P \in \mathcal{A}} \{\mu(A \cap P) + \nu(A \setminus P)\}$$

formulával adódik.

Bizonyítás: Azt kell igazolnunk, hogy bármely két elemű részhalmaznak létezik legnagyobb alsó és legkisebb felső korlátja. Ehhez elegendő megmutatni, hogy az állításban szereplő $\mu \wedge \nu$ és $\mu \vee \nu$ halmazfüggvények mértékek, és hogy teljesítik a legnagyobb alsó és legkisebb felső korlát definícióját. Tekintsük a $\mu \wedge \nu$ esetet, először belátjuk, hogy rendelkezik az infimum tulajdonságaival, nevezetesen hogy $\mu \wedge \nu \leq \mu$ és $\mu \wedge \nu \leq \nu$, valamint hogy bármely olyan ϑ esetén, melyre ezek fennállnak, arra igaz, hogy $\vartheta \leq \mu \wedge \nu$. A $\mu \wedge \nu \leq \mu$ és $\mu \wedge \nu \leq \nu$ egyenlőtlenségek valóban teljesülnek, hiszen az infimum definíciója miatt tetszőleges P mérhető halmazra

$$(\mu \wedge \nu)(A) = \inf_{P \in \mathcal{A}} \{\mu(A \cap P) + \nu(A \setminus P)\} \leq \mu(A \cap P) + \nu(A \setminus P)$$

Így $P = A$ választással kapjuk, hogy

$$\mu(A \cap P) + \nu(A \setminus P) = \mu(A) + \nu(\emptyset) = \mu(A)$$

így tényleg $\mu \wedge \nu \leq \mu$. Hasonlóan, $P = \emptyset$ esetén adódik, hogy

$$\mu(A \cap P) + \nu(A \setminus P) = \mu(\emptyset) + \nu(A) = \nu(A)$$

azaz valóban $\mu \wedge \nu \leq \nu$.

Szükséges még igazolnunk, hogy ha ϑ szintén olyan hogy μ-nél és ν-nél egyaránt kisebb vagy egyenlő, akkor $\mu \wedge \nu$ nagyobb nála, azaz $\mu \wedge \nu$ a legnagyobb alsó korlát. Ez viszont szintén könnyen adódik, ha tetszőleges rögzített mérhető P esetén μ-t és ν-t alulról becsüljük ϑ-val:

$$\mu(A \cap P) + \nu(A \setminus P) \geq \vartheta(A \cap P) + \vartheta(A \setminus P) = \vartheta((A \cap P) \cup (A \setminus P)) = \vartheta(A)$$

Végül P-ben infimumot véve $(\mu\wedge\nu)(A) \geq \vartheta(A)$ egyenlőtlenséghez jutunk, mely tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ halmazra fennáll, így igazoltuk, hogy tényleg legnagyobb az alsó korlátok között. Azaz a

$$(\mu \wedge \nu)(A) = \inf_{P\in\mathcal{A}} \{\mu(A \cap P) + \nu(A \setminus P)\}$$

formula tényleg μ és ν teljesíti az infimumtól megkövetelt tulajdonságokat.

Végezetül szükséges még igazolnunk, hogy $\mu \wedge \nu$ mérték, azaz szintén eleme az $\mathscr{M}_{(X,\mathcal{A})}$ halmaznak. Mivel μ és ν mértékek, így nyilván $\mu \wedge \nu \geq 0$, valamint $0 \leq (\mu \wedge \nu)(\emptyset)\mu(\emptyset) = \nu(\emptyset) = 0$. A σ-addditivitás igazolásához először csak a véges additivitást látjuk be. Legyenek $A, B \in \mathcal{A}$ diszjunkt halmazok, bizonyítani fogjuk, hogy

$$(\mu \wedge \nu)(A \cup B) \geq (\mu \wedge \nu)(A) + (\mu \wedge \nu)(B) \quad \text{és} \quad (\mu \wedge \nu)(A \cup B) \leq (\mu \wedge \nu)(A) + (\mu \wedge \nu)(B).$$

Az első egyenlőtlenség elemi tulajdonságokból azonnal adódik:

$$\begin{aligned}(\mu \wedge \nu)(A \cup B) = \inf_{P\in\mathcal{A}} \{\mu((A \cup B) \cap P) + \nu((A \cup B) \setminus P)\} =\\ \inf_{P\in\mathcal{A}} \{\mu(A \cap P) + \mu(B \cap P) + \nu(A \setminus P) + \nu(B \setminus P)\} \geq\\ \inf_{P\in\mathcal{A}} \{\mu(A \cap P) + \nu(A \setminus P)\} + \inf_{P\in\mathcal{A}} \{\mu(B \cap P) + \nu(B \setminus P)\} =\\ (\mu \wedge \nu)(A) + (\mu \wedge \nu)(B).\end{aligned}$$

A másik egyenlőtlenség igazolásához kicsit átfogalmazzuk a definíciót:

$$(\mu \wedge \nu)(A) = \inf \{\, \mu(G) + \nu(H) \mid G, H \in \mathcal{A},\ G \cap H = \emptyset,\ G \cup H = A \,\}.$$

Legyenek ismét $A, B \in \mathcal{A}$ diszjunkt halmazok és $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Az infimum definíciója miatt létezik az A-nak olyan A_1, A_2 diszjunkt particionálása, hogy

$$\mu(A_1) + \nu(A_2) \leq (\mu \wedge \nu)(A) + \varepsilon.$$

Hasonlóan B-hez szintén léteznek diszjunkt B_1, B_2 halmazok, hogy $B_1 \cup B_2 = B$ és

$$\mu(B_1) + \nu(B_2) \leq (\mu \wedge \nu)(B) + \varepsilon.$$

Kihasználva, hogy $A_1 \cup B_1$ és $A_2 \cup B_2$ az $A \cup B$ egy partícióját adják, adódik hogy

$$\begin{aligned}(\mu \wedge \nu)(A \cup B) = \inf \{\, \mu(G) + \nu(H) \mid G, H \in \mathcal{A},\ G \cap H = \emptyset,\ G \cup H = A \cup B \,\} \leq\\ \mu(A_1 \cup B_1) + \nu(A_2 \cup B_2) = \mu(A_1) + \mu(B_1) + \nu(A_2) + \nu(B_2).\end{aligned}$$

Ha felhasználjuk, hogy az A és B felbontását speciálisan választottuk, azt kapjuk, hogy

$$(\mu \wedge \nu)(A \cup B) \leq \mu(A_1) + \mu(B_1) + \nu(A_2) + \nu(B_2) \leq (\mu \wedge \nu)(A) + \varepsilon + (\mu \wedge \nu)(B) + \varepsilon.$$

Innen ε-nal nullához tartva a kívánt egyenlőtlenség adódik, mellyel a véges additivitást igazoltuk is. A σ-additivitás igazolásához legyen $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ diszjunkt halmazsorozat és be kellene látnunk, hogy $(\mu \wedge \nu)\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty}(\mu \wedge \nu)(A_i)$. A véges additivitás miatt minden $k > 1$ esetén

$$(\mu\wedge\nu)\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = (\mu\wedge\nu)\left(\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \bigcup \left(\bigcup_{i=k+1}^{\infty} A_i\right)\right) = \sum_{i=1}^{k}(\mu\wedge\nu)(A_i) + (\mu\wedge\nu)\left(\bigcup_{i=k+1}^{\infty} A_i\right).$$

Azt kell még belátni, hogy $k \to \infty$ esetén $(\mu \wedge \nu)\left(\bigcup_{i=k+1}^{\infty} A_i\right) \to 0$. Ez viszont rögtön adódik abból, hogy $\mu \wedge \nu \leq \mu$ és $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ konvergens, hisz μ véges mérték, így

$$(\mu \wedge \nu)\left(\bigcup_{i=k+1}^{\infty} A_i\right) \leq \mu\left(\bigcup_{i=k+1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=k+1}^{\infty} \mu(A_i) \to 0.$$

Ezzel igazoltuk, hogy $\mu \wedge \nu$ mérték, így a definiált formula tényleg a két mérték infimumát adja.

Teljesen hasonlóan igazolható, hogy a

$$(\mu \vee \nu)(A) = \sup_{P\in\mathcal{A}}\{\mu(A \cap P) + \nu(A \setminus P)\}$$

formula tényleg a két mérték legkisebb felső korlátját adja. Mivel a dolgozatban csak a legnagyobb alsó korláttal dolgozunk, a legkisebb felső korlátra vonatkozó állítások bizonyítását nem részletezzük. ■

Ezzel tehát igazoltuk, hogy az $(\mathscr{M}_{(X,\mathcal{A})}; \leq)$ részbenrendezett halmaz egy háló és kiszámítási módot adtunk a legnagyobb alsó és legkisebb felső korlát előállítására. A következő lemmában megmutatjuk, hogy két mérték szingularitása ekvivalens azzal, hogy a legnagyobb alsó korlátjuk a nulla mérték.

3.1.5. Lemma: *Legyen $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér és $\mu, \nu\colon X \to [0, \infty)$ véges mértékek. A $\mu \wedge \nu$ legnagyobb alsó korlát pontosan akkor az azonosan 0 mérték, ha*

$$\exists P \in \mathcal{A}\colon \mu(P) = \nu(X \setminus P) = 0.$$

Bizonyítás: Jelölje a legkisebb alsó korlátot $\vartheta := \mu \wedge \nu$, és tegyük fel, hogy $P \in \mathcal{A}$ egy olyan halmaz, melyre

$$\mu(P) = \nu(X \setminus P) = 0.$$

Mivel $\vartheta \leq \mu$ és $\vartheta \leq \nu$, ezért

$$\forall A \in \mathcal{A}: \quad \vartheta(A) = \vartheta((A \cap P) \cup (A \setminus P)) = \vartheta(A \cap P) + \vartheta(A \setminus P) \leq \mu(A \cap P) + \nu(A \setminus P).$$

A mérték monotonitását és az $(A \cap P) \subset P$, valamint $(A \setminus P) \subset (X \setminus P)$ tartalmazásokat felhasználva:

$$\vartheta(A) \leq \mu(A \cap P) + \nu(A \setminus P) \leq \mu(P) + \nu(X \setminus P) = 0 + 0 = 0$$

a P választása miatt. Ezzel az egyik irányt beláttuk.

A másik irány bizonyításához tegyük fel, hogy ϑ az azonosan 0 mérték, azaz minden mérhető A-ra $\vartheta(A) = 0$. Speciálisan $A := X$ választással kapjuk, hogy

$$\vartheta(X) = \inf_{P \in \mathcal{A}} \{\mu(X \cap P) + \nu(X \setminus P)\} = 0.$$

Ekkor az infimum definíciójából adódóan minden $k \in \mathbb{N}$-hez van olyan $S_k \in \mathcal{A}$, amelyre

$$\mu(X \cap S_k) \leq \frac{1}{2^{k+1}} \qquad \text{és} \qquad \nu(X \setminus S_k) \leq \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Legyen $P_n := \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} S_k$ és $P := \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} P_n$. Ekkor

$$\mu(P) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} S_k\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} S_k\right)$$

a mérték folytonossága miatt. A σ-additivitást, valamint az $S_k = X \cap S_k$ egyenlőséget kihasználva azt kapjuk, hogy $\mu(P) = 0$, ugyanis

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} S_k\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mu(S_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mu(X \cap S_k) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

Már csak azt kell meggondolnunk, hogy $\nu(X \setminus P) = 0$. Vegyük észre, hogy

$$\forall k \geq n: \qquad \nu(X \setminus P_n) \leq \nu(X \setminus S_k),$$

hiszen ekkor P_n a definíciója miatt bővebb S_k-nál. Így minden tehát

$$\forall k \geq n: \quad \nu(X \setminus P_n) \leq \frac{1}{2^{k+1}} \qquad \Longrightarrow \qquad \nu(X \setminus P_n) = 0$$

minden n-re. Innen már következik a szükséges egyenlőség, mivel

$$\nu(X \setminus P) = \nu\left(X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n\right) = \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(X \setminus P_n)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(X \setminus P_n) = \sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0.$$

■

Ezzel beláttuk, hogy nemnegatív véges mértékek szingularitása megfogalmazható a parciális rendezés segítségével is. Most rátérünk a Lebesgue felbontási tétel bizonyítására.

3.2. A Lebesgue-felbontás

Az alábbiakban megadjuk a klasszikus Lebesgue felbontási tételnek egy teljesen elemi, minden más mértékelméleti tétel használatát elkerülő bizonyítását. A szakdolgozat utolsó fejezetében megmutatjuk majd, hogy a bizonyítás hátterében egy, az operátor shortolással analóg gondolat áll.

3.2.1. Tétel: *Legyenek $(X, \mathcal{A})$ egy mérhető tér, μ és ν véges mértékek az $\mathcal{A}$ σ-algebrán. Ekkor μ egyértelműen előáll $\mu = \mu_{ac} + \mu_s$ alakban, ahol $\mu_{ac} \ll \nu$ és $\mu_s \perp \nu$.*

Bizonyítás: Legyen $\mathcal{E}$ a komplex értékű $\mathcal{A}$-mérhető lépcsősfüggvények vektortere és tekintsük ebben az $\mathcal{N}$-nel jelölt, ν szerint nullmértékű halmazok karakterisztikus függvényei által generált alteret. Definiáljuk a μ_{ac} részt a következőképp

$$\forall A \in \mathcal{A}: \qquad \mu_{ac}(A) := \inf_{\psi \in \mathcal{N}} \int_X |\chi_A - \psi|^2 d\mu.$$

Megjegyezzük, hogy ebben a fejezetben az integrál mindig csak egy véges összeget jelent. Mindenekelőtt azt kell belátnunk, hogy az így definiált μ_{ac} halmazfüggvény egy mérték, és hogy μ_{ac} abszolút folytonos ν-re nézve. A $\mu_{ac} \geq 0$ egyenlőtlenség nyilván teljesül, hiszen nemnegatív függvények integráljai nemnegatívak és ilyenek infimuma szintén nemnegatív. Könnyen látszik, hogy $\mu_{ac} \leq \mu$. Ehhez egyszerűen ismét az infimum definícióját hívjuk segítségül, nevezetesen

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad \forall \psi \in \mathcal{N}: \qquad \inf_{\psi \in \mathcal{N}} \int_X |\chi_A - \psi|^2 d\mu \leq \int_X |\chi_A - \psi|^2 d\mu.$$

Innen egy egyszerű $\psi \equiv 0$ választással az állított egyenlőtlenséget kapjuk, hiszen

$$\forall A \in \mathcal{A}: \qquad \mu_{ac}(A) = \inf_{\psi \in \mathcal{N}} \int_X \left|\chi_A - \psi\right|^2 d\mu \leq \int_X \left|\chi_A\right|^2 d\mu = \mu(A).$$

Csak annyi kell még, hogy $0 \equiv \psi \in \mathcal{N}$, de ez pedig azért igaz, mert $0 \equiv \chi_\emptyset$ és $\nu(\emptyset) = 0$. Ezt az egyenlőtlenséget felhasználva rögtön kapjuk, hogy $\mu_{ac}(\emptyset) = 0$, ugyanis

$$\mu_{ac}(\emptyset) \leq \mu(\emptyset) = 0.$$

Sőt, az is azonnal adódik, hogy μ_{ac} abszolút folytonos ν-re nézve. Valóban, $\nu(A) = 0$ esetén $\chi_A \in \mathcal{N}$, így

$$\mu_{ac}(A) = \inf_{\psi \in \mathcal{N}} \int_X \left|\chi_A - \psi\right|^2 d\mu \leq \int_X \left|\chi_A - \chi_A\right|^2 d\mu = 0.$$

Szükséges még igazolnunk, hogy μ_{ac} σ-additív. Ehhez először a véges additivitást fogjuk belátni a következő, diszjunkt A_1 és A_2 mérhető halmazok esetén fennálló halmazegyenlőség segítségével:

$$\{\psi \in \mathcal{N} \,|\, [\psi \neq 0] \subseteq A_1 \cup A_2\} = \{\psi_1 + \psi_2 \in \mathcal{N} \,|\, [\psi_i \neq 0] \subseteq A_i,\, i = 1, 2\}. \tag{4}$$

A halmazegyenlőség igazolásához vegyünk először egy tetszőleges $\psi \in \mathcal{N}$ elemet, amelyre $[\psi \neq 0] \subseteq A_1 \cup A_2$ teljesül, és írjuk ψ-t

$$\psi = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \chi_{C_j}$$

alakban, ahol a C_j halmazok páronként diszjunktak. Ekkor a

$$\psi_i := \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \chi_{C_j \cap A_i} \qquad (i = 1, 2)$$

lépcsősfüggvények összege ψ, és $\psi_1 + \psi_2$ benne van az egyenlőség jobb oldalán álló halmazban. A fordított irányú tartalmazás nyilvánvaló, hiszen ha ψ_1 és ψ_2 olyan függvények, amelyekre $[\psi_i \neq 0] \subseteq A_i$ $(i = 1, 2)$, akkor világos, hogy $\psi = \psi_1 + \psi_2$ eleme a bal oldalon álló halmaznak. Ezt a halmazegyenlőséget felhasználva könnyű lesz igazolni, hogy μ_{ac} valóban végesen additív. Először vegyük észre, hogy a definícióban szereplő infimumot a teljes altér helyett elég csak a következő alakban venni:

$$\mu_{ac}(A) := \inf_{\psi \in \mathcal{N}} \int_X \left|\chi_A - \psi\right|^2 d\mu = \inf_{\substack{\psi \in \mathcal{N} \\ [\psi \neq 0] \subseteq A}} \int_X \left|\chi_A - \psi\right|^2 d\mu.$$

Ugyanis bontsuk fel ψ-t olyan $\psi_1 + \psi_2$ $(\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{N})$ összegre, ahol $[\psi_1 \neq 0] \subseteq A$ és $[\psi_2 \neq 0] \subseteq (X \setminus A)$. Ekkor

$$\int_X |\chi_A - \psi|^2 d\mu = \int_X |\chi_A - \psi_1|^2 d\mu + \int_X |\psi_2|^2 d\mu.$$

A fenti annak az egyszerűen igazolható ténynek a következménye, hogy általában is igaz, hogy ha $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{E}$ olyan függvények, amelyekre $[\xi_1 \neq 0] \cap [\xi_2 \neq 0] = \emptyset$ teljesül, akkor $|\xi_1 + \xi_2|^2 = |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2$. Tehát azt kaptuk, hogy az infimum mögött álló kifejezés értékét csak csökkentjük, ha ψ_2-t nullának választjuk, vagy ami ugyanazt jelenti, csak olyan függvényekre szorítkozunk, amelyekre $[\psi \neq 0] \subseteq A$. Most felhasználjuk ezt az észrevételt, és a (4) egyenlőséget. Legyenek tehát $A, B \in \mathcal{A}$ diszjunkt halmazok, ekkor fennáll a következő:

$$\mu_{ac}(A \cup B) = \inf_{\substack{\psi \in \mathcal{N} \\ [\psi \neq 0] \subseteq A \cup B}} \int_X |\chi_{A \cup B} - \psi|^2 d\mu = \inf_{\substack{\psi_1 + \psi_2 \in \mathcal{N} \\ [\psi_1 \neq 0] \subseteq A \\ [\psi_2 \neq 0] \subseteq B}} \int_X |\chi_A + \chi_B - (\psi_1 + \psi_2)|^2 d\mu$$

A korábbi okoskodással könnyedén adódik, hogy

$$\mu_{ac}(A \cup B) = \inf_{\substack{\psi_1 \in \mathcal{N} \\ [\psi_1 \neq 0] \subseteq A}} \int_X |\chi_A - \psi_1|^2 d\mu + \inf_{\substack{\psi_2 \in \mathcal{N} \\ [\psi_2 \neq 0] \subseteq B}} \int_X |\chi_B - \psi_2|^2 d\mu = \mu_{ac}(A) + \mu_{ac}(B).$$

Innen adódik, hogy $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ véges sok páronként diszjunkt halmazok esetén

$$\mu_{ac}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu_{ac}(A_i),$$

mellyel μ_{ac} végesen additív voltát beláttuk.

A σ-additivitás igazolásához azt kellene látnunk, hogy $\mu_{ac}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) - \sum_{i=1}^{\infty} \mu_{ac}(A_i) = 0$ fennáll, ha $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$, páronként diszjunkt halmazok. Elég azt felhasználnunk, hogy $\mu_{ac} \leq \mu$ és hogy μ mérték. A σ-additivitás igazolásához használjuk ki a következő nyilvánvaló összefüggéseket:

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \left(\mu_{ac}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) - \sum_{i=1}^{n} \mu_{ac}(A_i) \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\mu_{ac}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) - \mu_{ac}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \right) =$$
$$\lim_{n\to\infty} \mu_{ac}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mu_{ac}\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i\right) \leq \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i\right) = 0.$$

Ezzel igazoltuk, hogy μ_{ac} mérték, így a definíció tényleg egy ν-re nézve abszolút folytonos mértéket ad meg. Be kell még bizonyítanunk, hogy $\mu_s := \mu - \mu_{ac}$ szinguláris ν-re nézve és hogy a felbontás egyértelmű. Láttuk, hogy μ_{ac} egy olyan mérték, melyre igaz, hogy $\mu_{ac} \leq \mu$ és $\mu_{ac} \ll \nu$. Vegyünk egy tetszőleges ϑ mértéket, mely szintén ezekkel a tulajdonságokkal rendelkezik. Megmutatjuk, hogy az ilyenek között μ_{ac} maximális. Legyen $\psi \in \mathcal{N}$ tetszőleges, ekkor fennál hogy

$$\vartheta(A) = \int_X \chi_A d\vartheta = \int_X |\chi_A|^2 d\vartheta = \int_X |\chi_A - \psi|^2 d\vartheta$$

Az utolsó egyenlőség azért teljesül, mert $\int_X \chi_A \cdot \psi d\vartheta = 0$ és $\int_X |\psi|^2 d\vartheta = 0$, ugyanis ψ a ν szerint nullmértékű halmazok karakterisztikus függvényeinek lineáris kombinációjaként áll elő, viszont $\vartheta \ll \nu$ miatt az is igaz, hogy ezek ϑ szerint is nullmértékűek. A $\vartheta \leq \mu$ feltételt felhasználva adódik, hogy

$$\vartheta(A) = \int_X |\chi_A - \psi|^2 d\vartheta \leq \int_X |\chi_A - \psi|^2 d\mu$$

az $\mathcal{N}$ halmazon infimumot véve pedig kapjuk, hogy

$$\vartheta(A) \leq \inf_{\psi \in \mathcal{N}} \int_X |\chi_A - \psi|^2 d\mu = \mu_{ac}(A)$$

tehát $\vartheta \leq \mu_{ac}$, azaz μ_{ac} tényleg maximális. Most tekintsük $\mu_s \wedge \nu$-t, a μ_s és ν mértékek legnagyobb alsó korlátját. Belátjuk, hogy $\mu_s \wedge \nu = 0$, ekkor a (3.1.5) Lemma szerint μ_s és ν szingulárisak. Nyilván mivel $\mu_s \wedge \nu$ az infimum, így teljesül, hogy $\mu_s \wedge \nu \leq \mu_s$ és $\mu_s \wedge \nu \leq \nu$, továbbá emiatt $\mu_{ac} + (\mu_s \wedge \nu) \leq \mu$. Ekkor viszont $\mu_{ac} + (\mu_s \wedge \nu) \ll \nu$ is fennáll, hisz ha egy $A \in \mathcal{A}$ esetén $\nu(A) = 0$, akkor $\mu_{ac}(A) = 0$ és $(\mu_s \wedge \nu)(A) \leq \nu(A) = 0$. Ebből már következik, hogy $\mu_s \wedge \nu$ csak az azonosan nulla mérték lehet. Ezzel beláttuk, hogy μ_s és ν valóban szingulárisak.

Az egyértelműség bizonyításához tegyük fel, hogy $\mu = \mu_1 + \mu_2$, ahol $\mu_1 \ll \nu$, valamint $\mu_2 \perp \nu$. A μ_{ac} maximalitásából adódóan $\mu_{ac} - \mu_1 \geq 0$, és az is világos, hogy $\mu_{ac} - \mu_1 \ll \nu$. Másfelől az is igaz, hogy $(\mu_{ac} - \mu_1) \perp \nu$, és így $\mu_{ac} = \mu_1$. Tegyük fel ugyanis, hogy η egy olyan mérték, amelyre $\eta \leq \mu_{ac} - \mu_1$ és $\eta \leq \nu$ is teljesül. Ekkor az $\eta \leq \mu_{ac} - \mu_1 \leq \mu - \mu_1 = \mu_2$ egyenlőtlenségek és $\mu_2 \perp \nu$ feltétel miatt $\eta = 0$. Ezzel a Lebesgue-felbontás létezését és egyértelműségét igazoltuk.

$\blacksquare$

4. fejezet

A Lebesgue-felbontás és az operátor short kapcsolata

A fejezet célja, hogy rávilágítson a Lebesgue felbontásban szereplő abszolút folytonos rész képzése és az operátor shortolás közti analógiára. Az egyszerűség kedvéért ebben a fejezetben végig a véges dimenziós esetre szorítkozunk.

4.1. Pozitív szemidefinit mátrixok felbontása

Ebben a részben a mértékeknél látott Lebesgue-felbontással analóg módon pozitív operátorok felbontását fogjuk vizsgálni. Ehhez az alábbiakban definiáljuk az abszolút folytonosság és a szingularitás fogalmát.

4.1.1. Definíció: *Legyenek A és B pozitív operátorok a véges dimenziós $\mathscr{H}$ Hilbert-téren. Azt mondjuk, hogy A abszolút folytonos B-re nézve, (jelölésben $A \ll B$), ha minden $x \in \mathscr{H}$ esetén $\langle Bx \mid x\rangle = 0$-ból következik, hogy $\langle Ax \mid x\rangle = 0$.*

Ez teljesen analóg a mértékek esetén látott definícióval (μ akkor abszolút folytonos ν-re nézve, ha minden $A \in \mathcal{A}$ esetén $\nu(A) = 0$-ból következik, hogy $\mu(A) = 0$). Hogy ezt belássuk, idézzük fel, hogy minden $A \geq 0$ pozitív operátorhoz egyértelműen létezik olyan $A^{1/2}$-del jelölt pozitív operátor, amelyre $A^{1/2}A^{1/2} = A$. Erre az operátorra (megint csak a véges dimenziós feltevés miatt az is teljesül), hogy $\ker A^{1/2} = \ker A$ és $\operatorname{ran} A^{1/2} = \operatorname{ran} A$. Ehhez elég meggondolni, hogy $A^{1/2}x = 0$ esetén $Ax = A^{1/2}(A^{1/2}x) = A^{1/2}0 = 0$ teljesül. Megfordítva, ha $Ax = 0$, akkor $0 = \langle Ax \mid x\rangle = \|A^{1/2}x\|^2$, és így $A^{1/2}x = 0$. Tehát az $A \ll B$ tulajdonság tényleg úgy is fogalmazható, hogy $Bx = 0$ esetén $Ax = 0$.

4.1.2. Definíció: *Legyenek A és B pozitív operátorok a véges dimenziós $\mathscr{H}$ Hilbert-téren. Az A és B operátorokat szingulárisnak nevezzük (jelölésben $A \perp B$), ha minden C pozitív operátorra a $0 \leq C \leq A$-ból és $0 \leq C \leq B$-ből következik, hogy $C = 0$.*

Ez a definíció szintén közel analóg a mértékek szingularitásának definíciójával, ha figyelembe vesszük a (3.1.5) eredményét, melyben arra jutottunk, hogy két mérték pontosan akkor szinguláris, ha a legnagyobb alsó korlátjuk az azonosan nulla mérték. Az abszolút folytonosság és a szingularitás definíciójának bevezetése után pedig most megadunk egy, a Lebesgue-felbontáshoz hasonló felbontási tételt pozitív szemidefinit mátrixokra.

4.1.3. Tétel: *Legyen $\mathscr{H}$ véges dimenziós Hilbert-tér, $A, B \in B_+(\mathscr{H})$ pozitív operátorok. Ekkor A előáll $A = A_{ac} + A_s$ alakban, úgy hogy $A_{ac} \ll B$ és $A_s \perp B$.*

Bizonyítás: Vegyük észre, hogy az abszolút folytonosság definíció átfogalmazható. Ha $Dx = 0$-ból következik, hogy $Cx = 0$, az pontosan azt jelenti, hogy $\ker D \subseteq \ker C$. Kihasználva, hogy az operátorok pozitívak, így önadjungáltak is, kapjuk, hogy $\ker D^* \subseteq \ker C^*$. Továbbá felhasználva, hogy egy operátor adjungáltjának magtere megegyezik az operátor képének ortogonális kiegészítő terével, adódik, hogy $\operatorname{ran} C \subseteq \operatorname{ran} D$.
Legyen $A_{ac} = A_{/\operatorname{ran} B}$. A második fejezetben láttuk, hogy a shortolt operátor képtere része annak az altérnek, melyre nézve shortoltuk, így teljesül, hogy $\operatorname{ran} A_{/\operatorname{ran} B} \subseteq \operatorname{ran} B$, azaz a fenti érvelés alapján az így definiált A_{ac} abszolút folytonos B-re nézve. Jegyezzük meg, hogy A_{ac} a legnagyobb operátor, amelyet A majorál, és amelynek képtere része $\operatorname{ran} B$-nek, vagy ami ezzel ekvivalens, ami eltűnik $\ker B$-n.

A továbbiakban jelöljük az $A - A_{ac}$ részt A_s-sel. Igazolnunk kell még, hogy A_s és B szingulárisak. Vegyünk egy $S \geq 0$ operátort, melyre $S \leq A_s$ és $S \leq B$, megmutatjuk, hogy $S = 0$. Az $S \leq A_s$ egyenlőtlenségből adódik, hogy $S + A_{ac} \leq A$. Viszont az operátor short tulajdonságaiból adódóan A_{ac} a legnagyobb olyan operátor, mely kisebb mint A és amely abszolút folytonos B-re. Az $S + A_{ac}$ szintén ilyen, hiszen $\langle Bx \mid x \rangle = 0$ esetén

$$\langle (S + A_{ac})x \mid x \rangle = \langle Sx \mid x \rangle + \langle A_{ac}x \mid x \rangle \leq \langle Bx \mid x \rangle + \langle A_{ac}x \mid x \rangle = 0.$$

Így tehát $S + A_{ac} \leq A_{ac}$, melyből S pozitivitása miatt $S = 0$ adódik. Ezzel a szingularitást is igazoltuk. ■

Ezzel a tétellel nemcsak beláttuk, hogy pozitív szemidefinit mátrixokra létezik egy, a Lebesgue-felbontással teljesen analóg felbontás, hanem az abszolút folytonos és szinguláris részek előállításának módját is megadtuk. Használjuk ugyanis az $(1)-ben$ látott felírását a mátrixnak a tér $\mathscr{H} = \operatorname{ran} B \oplus \ker B$ felbontása mellett. Az iménti bizonyításban láttuk, hogy az abszolút folytonos rész $A_{ac} = A_{/\operatorname{ran} B}$ alakban adódik, így (2) szerint

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

formában adható meg explicit módon a felbontás.

4.2. Kapcsolat a Lebesgue-felbontás és az operátor short között

Ebben a fejezetben rávilágítunk a két felbontás hasonlóságára. Ehhez szükség lesz a nemnegatív sesquilináris forma által indukált Hilbert-tér fogalmára.

4.2.1. Definíció: *Legyen $\mathcal{X}$ vektortér, ekkor egy $t\colon \mathcal{X}\times\mathcal{X} \to$ függvényt fél-skalárszorzatnak nevezünk, ha teljesülnek az alábbiak:*

(i) $t(x,x) \geq 0$ *minden* $x \in \mathcal{X}$ *esetén.*

(ii) $t(\lambda x + y, z) = \lambda t(x,z) + t(y,z)$ *minden* $x, y, z \in \mathcal{X}$; $\lambda \in \mathbb{C}$.

(iii) $t(x, \lambda y + z) = \overline{\lambda} t(x,y) + t(x,z)$ *minden* $x, y, z \in \mathcal{X}$; $\lambda \in \mathbb{C}$.

Azaz a fél-skalárszorzat egy nemnegatív sesquilineáris forma.

4.2.2. Állítás: *Legyen $\mathscr{H}$ egy komplex Hilbert-tér, $A \in B_+(\mathscr{H})$ pozitív operátor. Ekkor $\langle x \mid y\rangle_A := \langle Ax \mid y\rangle_{\mathscr{H}}$ fél-skalárszorzat.*

Bizonyítás: Ez A pozitivitásának nyilvánvaló következménye, hiszen $0 \leq \langle Ax \mid x\rangle = \langle x \mid x\rangle_A$ teljesül minden $x \in \mathscr{H}$. ∎

4.2.3. Megjegyzés: Az imént definiált $\langle\cdot \mid \cdot\rangle_A$ nem skalárszorzat, hiszen tegyük fel, hogy A nem injektív, ekkor $\exists x \neq 0 \in \ker A$ így $\langle x \mid x\rangle_A = \langle Ax \mid x\rangle_{\mathscr{H}} = \langle 0 \mid x\rangle_{\mathscr{H}} = 0$.

4.2.4. Állítás: *Legyen $(X, \mathcal{A})$ egy mérhető tér, μ pedig egy nemnegatív véges mérték $\mathcal{A}$-n. Jelölje a komplex $\mathcal{A}$-mérhető lépcsősfüggvények vektorterét $\mathcal{E}$. Ekkor $\langle\varphi \mid \psi\rangle_\mu := \int_X \varphi\overline{\psi} d\mu$ egy fél-skalárszorzat.*

Bizonyítás: A linearitás és a konjugált linearitás az integrál linearitásának következménye, a nemnegativitás pedig abból következik, hogy

$$\langle \varphi \mid \varphi \rangle_\mu = \int_X |\varphi|^2 d\mu \geq 0.$$

■

A következőkben mutatunk egy konstrukciót, mely segítségével egy vektortérből és fél-skalárszorzatból Hilbert-teret készíthetünk.

Könnyedén igazolt, hogy a $\tilde{t}(x) := \sqrt{t(x,x)}$ egyenlőséggel értelmezett függvény félnorma. A fél-skalárszorzat csak annyiban különbözik a skalárszorzattól, hogy nem igaz rá, hogy $t(x,x) = 0$ csak $x = 0$ esetén fordulhat elő. Ettől a problémától kell megszabadulnunk. A konstrukció alapötlete az, hogy azon x elemeket, melyekre $t(x,x) = 0$ egyszerűen vonjuk össze egy elemmé. Ehhez tekintsük a $\ker \tilde{t} = \{x \in \mathcal{X} \mid \tilde{t}(x) = 0\}$ halmazt. Mivel $\tilde{t}$ egy félnorma, ezért teljesíti a háromszög egyenlőtlenséget, és így $\ker \tilde{t} \subseteq \mathcal{X}$ egy lineáris altér. Faktorizáljuk le $\mathcal{X}$-t ezzel az altérrel, ekkor az $\mathcal{X}/\ker \tilde{t} = \{x + \ker \tilde{t} \mid x \in \mathcal{X}\}$ faktortérhez jutunk. Más szóval, definiálunk az $\mathcal{X}$ vektortéren egy $\sim$ ekvivalencia relációt, mely szerint $x \sim y$ pontosan akkor, ha $x - y \in \ker \tilde{t}$. A faktortérben pontosan a $\sim$ által definiált ekvivalencia osztályok kerültek összevonásra, azaz minden osztályt pontosan egy elem reprezentál. Azaz a faktortér elemei $[x]$ ekvivalencia osztályok, ahol $[x]$ jelöli az összes olyan y halmazát melyre igaz, hogy $x \sim y$. Vezessük be az $\mathcal{X}/\ker \tilde{t}$ faktortéren a következő félskalárszorzatot:

$$\langle \cdot \mid \cdot \rangle_t : \mathcal{X}/\ker \tilde{t} \times \mathcal{X}/\ker \tilde{t} \to \mathbb{C}, \qquad \langle [x] \mid [y] \rangle_t := t(x,y)$$

Ezzel elértük, hogy $[x] \in \mathcal{X}/\ker \tilde{t}$ esetén $\langle [x] \mid [x] \rangle_t = 0$ pontosan akkor, ha $[x] = [0]$, azaz a 0-t reprezentáló osztály. Így az $(\mathcal{X}/\ker \tilde{t}, \langle \cdot \mid \cdot \rangle_t)$ tér egy pre-Hilbert-tér. Ennek a pre-Hilbert-térnek a teljessé tételét $\mathscr{H}_t$-vel jelöljük, és a t-hez tartozó Hilbert-térnek nevezzük.

Tehát az $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_A$ segítéségével minden $A \in B_+(\mathscr{H})$ operátorhoz tudunk konstruálni egy $\mathscr{H}_A$ Hilbert-teret, és hasonlóan, minden μ nemnegatív véges mértékhez egy $\mathscr{H}_\mu$ Hilbert-teret (amely valójában a jól ismert $L^2(\mu)$ tér).

Most érkeztünk el végre arra a pontra, hogy egy kontextusba helyezzük a Lebesgue-felbontásra adott bizonyítást, illetve hogy megvilágítsuk az operátor shortolással való kapcsolatát. Választ kapunk arra is, hogy a Lebesgue-felbontás bizonyítása során az első ránézésre talán furcsának tűnő definíció az abszolút folytonos rész definiálására, honnan is származtatható valójában. Ehhez ugyanazokon a lépéseken keresztül eljutunk a Lebesgue-felbontásban definiált abszolút folytonos részig, valamint a pozitív szemidefinit mátrixok felbontásában megadott abszolút folytonos részig.

Emlékezzünk vissza, hogy a mátrixfelbontás esetén az abszolút folytonos részt

$$A_{ac} = A_{/\operatorname{ran} B}$$

formában adtuk meg. Tekintsük ennek az operátornak az

$$x \mapsto \langle A_{/\operatorname{ran} B} x \mid x \rangle = \langle x \mid x \rangle_{\mathscr{H}_{A_{/\operatorname{ran} B}}}$$

kvadratikus alakját. Ez a shortolt operátor által meghatározott Hilbert-térben úgy is írható, mint egy normanégyzet

$$\langle x \mid x \rangle_{\mathscr{H}_{A_{/\operatorname{ran} B}}} = \|x\|^2_{\mathscr{H}_{A_{/\operatorname{ran} B}}}.$$

Másrészt a (2.3.4) szerint a shortolt operátor kvadratikus alakja meghatározható a

$$\left\langle A_{/\operatorname{ran} B} x \mid x \right\rangle = \inf \left\{ \langle A(x-y) \mid x-y \rangle \middle| y \in (\operatorname{ran} B)^{\perp} \right\}$$

képlettel. Ezt az előbbi érveléshez hasonlóan felírhatjuk az indukált Hilbert-térben, nevezetesen:

$$\left\langle A_{/\operatorname{ran} B} x \mid x \right\rangle = \inf \left\{ \|x-y\|^2_{\mathscr{H}_A} \mid y \in (\operatorname{ran} B)^{\perp} \right\} = \inf \left\{ \|x-y\|^2_{\mathscr{H}_A} \mid y \in \ker B \right\}$$

Az eddigiek összevetve tehát, kapjuk hogy az abszolút folytonos rész kvadratikus alakja nem más, mint

$$\langle A_{ac} x \mid x \rangle = \|x\|^2_{\mathscr{H}_{A_{ac}}} = \inf \left\{ \|x-y\|^2_{\mathscr{H}_A} \middle| y \in \ker B \right\}, \tag{5}$$

mely valójában az x vektor $\ker B$ altértől vett távolságának négyzete a $\mathscr{H}_A$ Hilbert-térben.

Hasonló gondolatmenetet követhetünk a Lebesgue-felbontásnál látottak esetén is. Itt az abszolút folytonos részt a

$$\mu_{ac}(A) = \inf_{\psi \in \mathcal{N}} \int_X \left| \chi_A - \psi \right|^2 d\mu$$

formulával definiáltuk. Mivel

$$\mu_{ac}(A) = \int_X |\chi_A|^2 d\mu_{ac} = \|\chi_A\|^2_{\mathscr{H}_{\mu_{ac}}}$$

ezért a fenti formula úgy is írható, hogy

$$\|\chi_A\|^2_{\mathscr{H}_{\mu_{ac}}} = \mu_{ac}(A) = \inf\left\{ \|\chi_A - \psi\|^2_{\mathscr{H}_\mu} \middle| \psi \in \mathcal{N} \right\}.$$

Ez ismét egy távolságnégyzetként fogható fel, mégpedig a χ_A függvény $\mathcal{N}$ altértől vett távolságának négyzete.

Az látszik tehát, hogy a két felbontásban az abszolút folytonos rész teljesen hasonlóan kapható meg, mindkét esetben az operátor shortolásra kapott formula segítségével. Azt is látjuk, hogy az operátor esetben a B magterétől számítjuk a távolságnégyzetet, mértékek esetén pedig a ν szerint eltűnő függvények alterétől.

Irodalomjegyzék

[1] Aliprantis, C., Burkinshaw, O., *Principles of Real Analysis*, Third Edition, Academic Press, 1998.

[2] Anderson, W. N., *Shorted operators*, SIAM Journal on Applied Mathematics Vol. 20, No. 3 (1971), 520–525.

[3] Anderson, W. N., Trapp, G. E., *Shorted operators II.*, SIAM Journal on Applied Mathematics Vol. 28, No. 1 (1975), 60–71.

[4] Halmos, P., *Measure theory*, Springer Verlag, New York, 1974.

[5] Titkos, T., *A simple proof of the Lebesgue decomposition theorem*, The Amer. Math Monthly, 122 (8) (2015), 793–794.

[6] Yam Ting Woo, J., *An elementary proof of the Lebesgue decomposition theorem*, The Amer. Math. Monthly, 78 (7) (1971), 783.

[7] Yang, W.Y., Seung C. L., *Circuit Systems with MATLAB and PSpice*, John Wiley & Sons (2007)