Ramsey-típusú kérdések páros gráfokra

$C_4 - K_{1,n}$ Ramsey-számok

Hatala Imre
Matematika BSc, Alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető: *Héger Tamás*
Számítógéptudományi Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar
Budapest, 2019.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A Ramsey-elmélet Frank Plumpton Ramsey 1930-ban megjelent cikke ([22]) nyomán született. A később Ramsey-tétel néven ismertté vált eredmény, amely eredetileg csak lemmaként szerepelt a cikkben, rövid időn belül önálló elméletté nőtte ki magát, amely ma a kombinatorika és gráfelmélet egyik leginkább kutatott területe. A Ramsey-elmélet mögött húzódó filozófia a következőképpen fogalmazható meg: ha egy struktúra elég nagy, akkor szükségszerűen megjelennek benne speciális részstruktúrák.

Ebben a dolgozatban $C_4 - K_{1,n}$-típusú Ramsey-számokkal fogunk foglalkozni. A dolgozat négy jól elkülöníthető részből áll, amelyek közül az utolsó kettő hordozza a lényegi tartalmat. Az első, rövid részben a klasszikus Ramsey-problémát mutatjuk be, a másodikban pedig bevezetjük azt az eszköztárat, amelyre szükségünk lesz a dolgozat további két részében. A harmadik és negyedik részben foglalkozunk a $C_4 - K_{1,n}$-típusú klasszikus, illetve páros Ramsey-számokkal.

A dolgozatnak egy kisebb és két jelentősebb eredménye van. A klasszikus $C_4 - K_{1,n}$ Ramsey-számok témakörében egyszerű, rövid bizonyítást adunk egy ismert tételre, a páros $C_4 - K_{1,n}$ Ramsey-számok témakörében pedig megcáfolunk egy közel 20 éves sejtést és meghatározunk az irodalomban még nem ismert Ramsey-számokat. Ezenkívül a közölt bizonyítások többsége az eredeti, illetve létező bizonyítások ismerete nélkül született, teljesen önálló munka eredménye.

A dolgozatban a gráfelméleti alapfogalmakat (amelyek megtalálhatók [3]-ban és [18]-ban) ismertnek feltételezzük. A dolgozat egészében csak véges, egyszerű gráfokról lesz szó, így gráf alatt mindig ilyen gráfot értünk. A következő általános jelöléseket fogjuk alkalmazni. $V(G)$ jelöli a G gráf csúcshalmazát, $E(G)$ pedig az élhalmazát. K_n jelöli az n pontú teljes gráfot és $K_{m,n}$ az m és n pontú teljes páros gráfot. $K_{1,n}$ jelöli az $n+1$ pontú csillagot és C_k a k pontú kört. A $G \subset H$ jelentése, hogy G részgráfja H-nak, míg $G \not\subset H$ ennek tagadása. $\bar{G}$ jelöli a $G \subset K_n$ gráf komplementerét (K_n-re nézve) és H^c jelöli a $H \subset K_{m,m}$ páros gráf komplementerét ($K_{m,m}$-re nézve).

2. A Ramsey-tételkör

Az első alfejezetben röviden ismertetjük a klasszikus Ramsey-problémát és bemutatjuk a probléma nehézségét. Mivel a témakört ismertnek feltételezzük, ezért nem célünk részletesen bemutatni és a bizonyításokat sem részletezzük (azok megtalálhatók [18]-ban). A második alfejezetben szót ejtünk a klasszikus eset fő általánosításításairól, különös tekintettel azokra az esetekre, amelyekről a dolgozat szól.

2.1. Klasszikus Ramsey-számok

A következő nevezetes tétel igazolja a klasszikus Ramsey-számok létezését. Megjegyezzük, hogy az eredeti cikkben Ramsey az alábbi állításnál jóval általánosabb tételt bizonyított be, a következő tétel ennek a speciális esete.

2.1.1. Tétel. (Ramsey, [22]) *Tetszőleges $2 \leq k, l$ egész számokhoz létezik olyan r szám, hogy $r \leq n$ esetén K_n minden G részgráfjára igaz, hogy $K_k \subset G$ vagy $K_l \subset \bar{G}$.*

2.1.2. Definíció. *A legkisebb ilyen r számot (klasszikus) Ramsey-számnak nevezzük, és $r(k, l)$-lel jelöljük.*

Az 1. táblázat tartalmazza az ismert $r(k, l)$ Ramsey-számokat, illetve ismeretlen érték esetén az ismert korlátokat $k \leq 7, l \leq 10$ mellett. Láthatjuk, hogy kevés $r(k, l)$ Ramsey-szám értékét ismerjük pontosan, és az ismert alsó és felső korlátok gyorsan távolodnak egymástól. Tekintsük most a $k = l$ speciális esetet, az $r(k, k)$ ún. átlós Ramsey-számok esetét. Ez talán a klasszikus Ramsey-problémának is a legkorábbi formája, amely jól szemlélteti a Ramsey-típusú problémák nehézségét. Tudjuk, hogy $r(3, 3) = 6$ és $r(4, 4) = 18$, de már $r(5, 5)$ értéke sem ismert. Vizsgáljuk meg, milyen becsléseket tudunk adni $r(k, k)$ értékére. Ismeretes, hogy

k, l	3	4	5	6	7	8	9	10
3	6	9	14	18	23	28	36	40 42
4		18	25	36 41	49 61	59 84	73 115	92 149
5			43 48	58 87	80 143	101 216	133 316	149 442
6				102 165	115 298	134 495	183 780	204 1171
7					205 540	217 1031	252 1713	292 2826

1. táblázat. Az ismert $r(k,l)$ értékek és korlátok $k \leq 7, l \leq 10$ mellett [21].

minden $r(k,l)$ Ramsey-számra teljesül az $r(k,l) \leq r(k-1,l)+r(k,l-1)$ egyenlőtlenség. Ebből az összefüggésből indukcióval belátható az alábbi explicit felső korlát $r(k,l)$-re, és ezt felhasználva explicit becslést tudunk adni $r(k,k)$-ra is.

2.1.3. Tétel. (Erdős–Szekeres, [10]) $r(k,l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$.

2.1.4. Tétel. $r(k,k) < 4^{k-1}$.

Exponenciális alsó becslést Erdős Pál adott először [11]-ben. A bizonyítás az egyik első példa a valószínűségi módszer alkalmazására, amely akkoriban teljesen újszerűnek számított. A módszerrel nyert alábbi eredmény meglehetősen meglepte a Ramsey-tételkör korabeli kutatóit, lévén, hogy akkor még neves matematikusok is úgy gondolták, hogy $r(k,k)$ jól becsülhető lesz k alkalmas polinomjával (ld. [1], 13. oldal).

2.1.5. Tétel. ([11]) *Ha* $k \geq 3$, *akkor* $2^{k/2} < r(k,k)$.

Tehát van exponenciális alsó becslésünk $r(k,k)$-ra, mivel azonban a felső becslés is exponenciális, jóval nagyobb alappal, így a két becslés meglehetősen bő korlátokat ad. Azonban máig nem sikerült az exponenciális becslések alapjain javítani, sőt olyan konstrukció sem ismert, amely exponenciális alsó korlátot adna, ami jól prezentálja a probléma nehézségét. Az alábbi két tétel a ma ismert legjobb alsó és felső korlátot adja az átlós Ramsey-számokra, azonban - az előbbiek fényében érthető módon – ezek is meglehetősen tág korlátot adnak.

2.1.6. Tétel. ([24]) $[1+o(1)]\frac{\sqrt{2}k}{e}2^{\frac{k}{2}} \leq r(k,k)$.

2.1.7. Tétel. ([7]) *Létezik olyan C konstans, amelyre*

$$r(k+1,k+1) \leq k^{-(C\log k)/(\log\log k)}\binom{2k}{k}.$$

2.2. Általánosítások

A Ramsey-számoknak számos általánosítása ismert, amelyeket széleskörűen kutatnak. Elsőként azokat az eseteket mutatjuk be, amelyek elő fognak fordulni a dolgozat hátrelévő részében. Az első ilyen eset, amikor teljes gráfok helyett más speciális részgráfok megjelenését követeljük meg.

2.2.1. Definíció. *Jelölje $r(G_1,G_2)$ a legkisebb r számot, amelyre K_r bármely G részgráfjára $G_1 \subset G$ vagy $G_2 \subset \bar{G}$.*

Világos, hogy a 2.1.1. tételben bevezetett Ramsey-számok ennek az esetnek speciális változatai. Éppen ezért ezt az esetet szokás általánosított Ramsey-számoknak nevezni (generalized Ramsey numbers). Megjegyezzük, hogy $r(G_1,G_2)$ létezése következik a klasszikus Ramsey-számok létezéséből. Itt, speciális megkövetelt részgráfok mellett, már jóval többet tudunk mondani, mint a klasszikus esetben. Például minden olyan esetre ismert $r(G_1,G_2)$ értéke, ahol G_1 és G_2 egyaránt csillagok, utak vagy körök (ld. [21]). A 3.2 alfejezetben az $r(C_4,K_{1,n})$ Ramsey-számokkal fogunk foglalkozni, tehát ahol az egyik megkövetelt részgráf a négy csúcsú kör, a másik pedig az $n+1$ pontú csillag. Erre az esetre úgy fogunk hivatkozni, mint $C_4 - K_{1,n}$ klasszikus Ramsey-számok. A klasszikus jelzőt a Ramsey-számok következő általánosításától való megkülönböztetés indokolja.

2.2.2. Definíció. *Legyenek G_1 és G_2 páros gráfok. Jelölje $b(G_1, G_2)$ a legkisebb b számot, amelyre $K_{b,b}$ bármely H részgráfjára $G_1 \subset H$ vagy $G_2 \subset H^c$.*

Ezt a változatot szokás páros Ramsey-számoknak nevezni (bipartite Ramsey numbers). Itt tehát a teljes gráf helyett a teljes páros gráf részgráfjait vizsgáljuk. Megjegyezzük, hogy $b(G_1, G_2)$ létezése következik a $b(K_{m,m}, K_{n,n})$ Ramsey-számok létezéséből, ami a klasszikus Ramsey-tételhez standard bizonyításához hasonló módszerrel belátható. Itt is vannak olyan gráfcsaládok, amelyek Ramsey-számait meghatározták. Például $b(G_1, G_2)$ ismert azokban az esetekben, amikor G_1 és G_2 egyaránt csillagok vagy utak, vagy ha G_1 csillag és G_2 út (ld. [5], Introduction). A 3.3 alfejezetben a $b(C_4, K_{1,n})$ Ramsey számokkal fogunk foglalkozni. Ezt az esetet $C_4 - K_{1,n}$ páros Ramsey-számoknak fogjuk hívni.

További nevezetes általánosítása a klasszikus Ramsey-problémának a többszínű Ramsey-számok témaköre (multicolor Ramsey numbers). A klasszikus Ramsey-számok esetében ugyanis a $G \subset K_n$ és $\bar{G}$ gráfok helyett beszélhetünk K_n éleinek 2-színezéseiről, ahol az azonos színű élek által meghatározott részgráfok felelnek meg G-nek és $\bar{G}$-nak. Ennek kézenfekvő általánosításával kapjuk a többszínű Ramsey-számokat, amikor K_n tetszőleges m-élszínezése által meghatározott részgráfokat vizsgáljuk. Megjegyezzük még, hogy lehet általánosítani a problémát hipergráfokra, avagy halmazrendszerekre is. A páros Ramsey-számok kivételével az itt felsorolt általánosításokhoz kapcsolódó eredmények remekül össze vannak gyűjtve [21]-ben.

3. $C_4 - K_{1,n}$ Ramsey-számok

A következőkben $C_4 - K_{1,n}$ általánosított Ramsey-számokkal fogunk foglalkozni. Az 3.1. alfejezetben bemutatjuk a szükséges eszköztárat, amely lényegében válogatás a C_4-mentes gráfokkal kapcsolatos alapvető eredményekből. Ezek később fontos szerepet fognak játszani abban, hogy belássuk egy adott gráfról, hogy az tartalmaz-e részgráfként C_4-et vagy sem. A 3.2. alfejezetben a $C_4 - K_{1,n}$ klasszikus Ramsey-számokat fogjuk vizsgálni. Bemutatjuk a kapcsolódó eredményeket és megemlítünk néhány fontos, megválaszolatlan kérdést. A 3.3. alfejezetben még részletesebben fogunk foglalkozni a $C_4 - K_{1,n}$ páros Ramsey-számokkal. Itt is bemutatjuk a témakör eredményeit, majd a fejezet végén megadunk az irodalomban még nem ismert Ramsey-számokat, egyben megcáfolunk egy sejtést.

3.1. C_4-mentes gráfok

Elsőként speciális véges geometriákkal, véges projektív és affin síkokkal foglalkozunk, amelyek illeszkedési gráfjai fontos példát adnak C_4-mentes gráfokra. A 3.3. alfejezetben látni fogjuk, hogy a projektív és affin síkok illeszkedési gráfjai, illetve ezek részgráfjai, kritikus gráfot adnak egyes Ramsey-számokra. A 3.2. alfejezetben pedig az Erdős–Rényi-féle polaritásgráf játszik kulcsszerepet, amelynek konstrukciója a klasszikus véges projektív síkok tulajdonságain alapszik. A fejezet külön nem hivatkozott részei [3],[25] és [17] alapján íródtak.

3.1.1. Definíció. *Legyen $\mathcal{P}$ véges halmaz és elemeit nevezzük pontoknak, $\mathcal{L}$ pedig legyen $\mathcal{P}$ részhalmazainak egy halmaza és elemeit nevezzük egyeneseknek. A $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ pár pontosan akkor véges projektív sík, ha a következő axiómák teljesülnek.*

I. Bármely két ponthoz van pontosan egy egyenes, amely mindkét pontra illeszkedik.

II. Bármely két egyenesnek pontosan egy közös pontja van.

III. Van négy általános helyzetű pont.

A $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ pár pontosan akkor véges affin sík, ha a projektív sík I. és III. axiómája teljesül, azonban a II. axióma helyett a következő párhuzamossági axióma teljesül: bármely P ponthoz és P-re nem illeszkedő L egyeneshez van pontosan egy egyenes, amely P-re illeszkedik, de nincs közös pontja L-lel.

Nem nehéz megmutatni, hogy minden véges projektív síkhoz van olyan q szám, hogy a projektív síknak éppen $q^2 + q + 1$ pontja és egyenese van, minden pontra $q + 1$ egyenes illeszkedik, és minden egyenesnek $q + 1$ pontja van. Ezt a q számot a projektív sík rendjének nevezzük. Megjegyezzük, hogy a projektív sík esetében a III. axióma lecserélhető arra a feltételre, hogy minden egyenesnek legalább 3 pontja van, és minden pontra legalább 3 egyenes illeszkedik.

A projektív és affin síkok között erős kapcsolat áll fenn. Ha egy q-adrendű projektív síknak elhagyjuk egy L egyenesét és annak $q + 1$ pontját, akkor egy olyan q^2 pontból és $q^2 + q$ egyenesből álló struktúrát kapunk, amelyben a projektív sík második axiómája nem teljesül, ugyanis a projektív síkon L minden P pontjára q másik egyenes illeszkedett, amelyeknek P volt az egyetlen közös pontja. Tehát az új struktúrában párhuzamos egyenesek keletkeztek, egész pontosan $q+1$ párhuzamossági osztály, egyenként q egyenessel. Egy-egy ilyen osztály egyenesei lefedik az összes pontot, hiszen ha lenne olyan pont, amelyet nem tartalmaznak, akkor a projektív síkon nem lett volna olyan egyenes, amely ezt a pontot és L megfelelő pontját egyaránt tartalmazta volna, ami ellentmond az I. axiómának. Ebből viszont következik, hogy teljesül az affin sík párhuzamossági axiómája, tehát a keletkezett struktúra éppen egy affin sík.
Affin síkból is lehet projektív síkot konstruálni. Az affin síkon van párhuzamosság, tehát vannak párhuzamossági osztályok. Egy-egy ilyen osztály egyeneseihez vegyünk hozzá egy új, közös pontot (egy ún. ideális pontot), majd a struktúrához

vegyünk hozzá egy új egyenest (az ún. ideális egyenest), amely pontosan ezekből a pontokból áll. Ekkor a kapott struktúrára teljesülnek a projektív sík axiómái, tehát az új struktúra éppen egy projektív sík. Ezt az affin sík projektív lezártjának nevezzük. Ebből következik az is, hogy egy véges affin sík mindig egy projektív sík részstruktúrája, és egy véges affin síknak q^2 pontja és $q^2 + q$ egyenese van, ahol q az affin sík projektív lezártjának rendje.
A későbbiekben fontos lesz nekünk, hogy adott q-ra létezik-e q-adrendű projektív sík. A következő konstrukció alapján tudjuk, hogy ha q prímhatvány, akkor létezik q-adrendű projektív sík. Prímhatvány alatt olyan p^α számot értünk, ahol p prím, és $\alpha \geq 1$ egész szám.

3.1.2. Konstrukció. Mivel q prímhatvány, így létezik q elemű véges test, amelyet $GF(q)$-val jelölünk. Tekintsük az $(x, y, z) \in GF(q)^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ vektorokat, és definiáljuk a következő ekvivalenciarelációt:

$$(x, y, z) \sim (\lambda x, \lambda y, \lambda z), \text{ ahol } \lambda \in GF(q) \setminus \{0\}.$$

Legyen a projektív sík $\mathcal{P}$ alaphalmaza az így kapott ekvivalenciaosztályok halmaza. Adott ekvivalenciaosztályt egyértelműen meghatároz egy tetszőleges eleme, amelyet reprezentánsnak hívunk. Ez alapján az (x, y, z) vektor mostantól a megfelelő ekvivalenciaosztályt reprezentálja. Tekintsük az $[a, b, c] = \{(x, y, z) : ax + by + cz = 0\}$ halmazokat, ahol $(a, b, c), (x, y, z) \in GF(q)^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Világos, hogy $[a, b, c]$ független attól, hogy az (x, y, z) osztályt melyik elemével reprezentáljuk, és az (a, b, c) osztály minden eleme ugyanazt a halmazt adja, tehát az $[a, b, c]$ halmazokra is értelmezhetjük a fenti ekvivalenciarelációt. Legyen $\mathcal{L}$ az $[a, b, c]$ ekvivalenciaosztályok halmaza. Ekkor $\mathcal{L}$ elemei $\mathcal{P}$ részhalmazai, és $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ teljesíti a projektív sík axiómáit, a tartalmazást tekintve illeszkedésnek. $\mathcal{P}$ elemei a $(0, 0, 0)$ vektorral kiegészítve éppen a $GF(q)$ feletti háromdimenziós vektortér egydimenziós alterei, míg $\mathcal{L}$ elemei a $(0, 0, 0)$ vektorral kiegészítve a kétdimenziós alterek. A vektorterek ismert tulajdonságai alapján könnyen látszik, hogy $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ teljesíti az I. és II. axiómát, a III. axiómához pedig $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ és $(1, 1, 1)$ minden q mellett megfelelő lesz. $\square$

A fenti konstrukcióval nyert projektív síkokat szokás klasszikus véges projektív síkoknak nevezni. Tudjuk tehát, hogy minden q prímhatványra létezik q-adrendű projektív sík. Egy nevezetes sejtés szerint nem is létezik másféle projektív sík, csak prímhatványrendű. Ez máig megoldatlan probléma, azonban egyes esetekben sikerült kizárni projektív sík létezését. Ehhez nyújt segítséget az alábbi nevezetes tétel.

3.1.3. Tétel. (Bruck—Ryser, [2]) *Ha létezik n-edrendű véges projektív sík és $n \equiv 1, 2$ (mod 4), akkor n két négyzetszám összege.*

A tétel alapján kizárhatjuk például hatodrendű projektív sík létezését. Ugyanakkor a tétel nem mond semmit azokban az esetekben, amikor n felírható két négyzetszám összegeként, például ha $n = 10$, vagy ha $n \not\equiv 1, 2$ (mod 4), például az $n = 12$ esetében. Később számítógépes módszerekkel igazolták, hogy tizedrendű projektív sík sem létezik, így bizonyossá vált, hogy a Bruck—Ryser-tétel nem ad elégséges feltételt n-edrendű projektív sík létezésére. A legkisebb máig megoldatlan eset az $n = 12$.

A bevezetőben említettük, hogy a véges projektív és affin síkok illeszkedési gráfja tipikus példa C_4-mentes gráfra. Az illeszkedési gráf az a $I = (P, L, E(I))$ páros gráf, amelynek egyik csúcsosztályát az adott sík pontjai, a másikat pedig a sík egyenesei alkotják, és pontosan az illeszkedő pont-egyenes párok között fut él. Az így definiált gráf nyilvánvalóan C_4 mentes, hiszen egy 4 csúcsú kör azt jelentené, hogy van olyan pontpár, amelyet két egyenes is tartalmaz, ezt azonban az I. axióma kizárja mind a projektív, mind az affin síkok esetében.
Most bemutatunk egy másik nevezetes C_4-mentes gráfcsaládot, a polaritásgráfokat, amelyeket a véges projektív síkok tulajdonságai alapján egyszerűen konstruálhatunk. Egy projektív sík polaritásának nevezünk egy olyan π bijektív, illeszkedéstartó leképezést, amely a pontokat az egyenesekbe az egyeneseket a pontokba viszi, és π^2 az identikus leképezés. Tekintsünk egy polaritással rendelkező véges projektív síkot. Jelölje $\mathcal{P}$ a projektív sík pontjait, $\mathcal{L}$ az egyeneseit, és π a polaritást. A projektív sík $G(V, E(G))$ polaritásgráfját a következőképpen definiáljuk.

Legyen $V = \mathcal{P}$, és minden $p_i, p_j \in \mathcal{P}$-re legyen $p_i p_j \in E(G)$ pontosan akkor, ha $p_j \in \pi(p_i)$ és $i \neq j$. Könnyen látszik, hogy ez a konstrukció jól definiált egyszerű gráfot ad, amely ráadásul C_4 mentes, hiszen semelyik két csúcsnak nem lehet két közös szomszédja, mivel különböző pontok poláris egyeneseinek nem lehet két közös pontja. Azokat a $p \in \mathcal{P}$ pontokat, amelyekre $\pi(p) = p$, tehát amelyek rajta vannak a saját poláris egyesükön, abszolút pontoknak nevezzük.
Tudjuk, hogy a 3.1.2. konstrukcióval nyert q-adrendű klasszikus projektív síknak van polaritása. Nem nehéz megmutatni, hogy – a konstrukció jelöléseit használva – a $\pi((x,y,z)) = [x,y,z]$ $((x,y,z) \in \mathcal{P})$ és $\pi([x,y,z]) = (x,y,z)$ $([x,y,z] \in \mathcal{L})$ feltételekkel definiált leképezés éppen egy polaritás. A klasszikus projektív síkok polaritásgráfját, amelyet az előbb definiált polaritás határoz meg, szokás Erdős–Rényi-gráfnak hívni a [12] cikk alapján, ahol bevezették a polaritásgráf fogalmát. A későbbiekben polaritásgráf alatt mindig a megfelelő Erdős–Rényi-gráfot fogjuk érteni.
Vizsgáljuk meg, hány csúcsa és hány éle van az Erdős–Rényi-féle polaritásgráfnak. A csúcsok száma nyilvánvalóan q^2+q+1, hiszen ez megegyezik a q-adrendű projektív sík pontjainak számával. Mivel minden pont poláris egyenesén $q+1$ pont van, ezért a csúcsok fokszáma $q+1$, kivéve az abszolút pontokat, amelyeknek csak q, hiszen a hurokéleket kizárja a definíció. Az abszolút pontok – a 3.1.2. jelöléseit használva – pontosan azok az (x,y,z) pontok, amelyek rajta vannak az $[x,y,z]$ egyenesen, azaz teljesítik az $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ egyenletet. Ismert tény, hogy ezt a feltételt pontosan $q+1$ pont (ekvivalenciaosztály) elégíti ki, így a polaritásnak $q+1$ abszolút pontja van. Következésképp a polaritásgráf q-adfokú csúcsainak száma $q+1$, így az élek száma összesen $\frac{1}{2}q^2(q+1) + \frac{1}{2}(q+1)q = \frac{1}{2}q(q+1)^2$.

Térjünk most rá a C_4-mentes gráfok vizsgálatára. Klasszikus Turán-típusú probléma, hogy hány éle lehet maximálisan egy n pontú C_4-mentes egyszerű gráfnak, ezt a számot $ex(n, C_4)$ jelöli. Most egy egyszerű elv alapján felső becslést adunk $ex(n, C_4)$-re. A továbbiakban nevezzük cseresznyéknek a 2 élű utakat, a cseresznye csúcsának az út 2 fokszámú pontját, valamint a cseresznye végpontjainak az 1 fokszámú pontjait. Az elv lényege, hogy egy C_4-mentes gráfban legfeljebb annyi cseresznye lehet, ahány pontpár van, ellenkező esetben ugyanis lenne két cseresznye, amelyek végpontjai megegyeznek, tehát C_4-et alkotnánk. Erre a módszerre a későbbiekben cseresznyeszámolásként, a következő állításra pedig élszámbecslésként fogunk hivatkozni.

3.1.4. Állítás. ([23], [19]) *Ha a $G = (V, E(G))$ egyszerű gráfnak $|V| = n$ pontja van és nem tartalmaz részgráfként C_4-et, akkor*

$$|E(G)| \leq \frac{n}{4}(1 + \sqrt{4n-3}).$$

BIZONYÍTÁS. Jelölje a $v \in V$ csúcs fokszámát $d(v)$. Ekkor a $\sum_{v \in V} \binom{d(v)}{2}$ kifejezés értéke a G-ben lévő cseresznyék száma. Mivel az $f(x) = \binom{x}{2}$ függvény konvex, így a Jensen-egyenlőtlenség alapján a cseresznyék száma akkor minimális, ha a fokszámok a lehető legegyenletesebben oszlanak el. Tegyük fel, hogy minden fokszám d. Ekkor a C_4-mentesség miatt teljesülnie kell az

$$n\binom{d}{2} \leq \binom{n}{2}$$

$$d(d-1) \leq n-1$$

$$\left(d - \frac{1}{2}\right)^2 \leq n - \frac{3}{4}$$

$$d \leq \frac{1}{2} + \sqrt{n - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{4n-3}\right)$$

egyenlőtlenségnek. Következik, hogy $|E(G)| \leq \frac{n}{4}(1 + \sqrt{4n-3})$, mivel ennél több él esetén biztosan a megengedettnél több cseresznye lenne a gráfban. $\square$

Vizsgáljuk meg, teljesülhet-e egy G gráf esetén a fenti becslés egyenlőséggel. Ebben az esetben G-nek d regulárisnak kell lennie, és $d \leq \frac{1}{2}(1+\sqrt{4n-3})$ egyenlőséggel teljesül, hiszen az cseresznyék ily módon minimalizált száma még így is éppen annyi, ahány pontpár van. Mivel d-nek egésznek kell lennie, ezért következik, hogy $\sqrt{4n-3} = 2k+1$ alakú, alkalmas k-val. Ebből az $n = k^2 + k + 1$

feltételt kapjuk. Ha létezik k-adrendű projektív sík, akkor a polaritásgráfnak éppen ennyi pontja van, azonban nem reguláris, és az élszáma $\frac{1}{2}k(k+1)^2$, míg az élszámbecslésből az $ex(k^2+k+1, C_4) \le \frac{1}{2}(k^2+k+1)(k+1)$ felső korlátot kapjuk. Mindenesetre a polaritásgráfból következik, hogy ha q prímhatvány, akkor $\frac{1}{2}q(q+1)^2 \le ex(q^2+q+1, C_4)$.
Egy másik feltételt nyerünk abból, hogy G-ben a cseresznyék és pontpárok száma megegyezik. A C_4 mentesség miatt ebből következik, hogy minden pontpárra pontosan egy cseresznye végei illeszkednek, következésképp bármely két pontnak pontosan egy közös szomszédja van. Ilyen gráfokról szól az alábbi nevezetes tétel.

3.1.5. Definíció. *A $K_{1,2k}$ $(k \ge 1)$ csillag 1 fokszámú csúcsai között vegyünk fel új éleket oly módon, hogy minden csúcsra pontosan egy új él illeszkedjen. Az így nyert $2k+1$ csúcsú gráfot barátsággráfnak nevezzük és F_k-val jelöljük.*

3.1.6. Tétel. (Barátságtétel, [12]) *Ha a G véges, egyszerű gráf bármely két csúcsának pontosan egy közös szomszédja van, akkor G barátsággráf.*

Mivel a barátsággráfok közül csak az $F_1 = K_3$ reguláris, ezért az élszámbecslés csak a K_3 esetében teljesül egyenlőséggel, ez az eset azonban érdektelen a C_4-mentesség szempontjából. Az élszámbecslés tehát az $n \ge 4$ esetekben soha nem teljesül egyenlőséggel. Ugyanakkor a 3.2 alfejezetben fel fogjuk tudni használni kis Ramsey-számok értékének meghatározásához, a cseresznyeszámolós módszer pedig mind a 3.2, mind a 3.3 alfejezetben fontos szerepet fog játszani.
Megjegyezzük, hogy $q \ge 15$-re [13]-ban belátták, hogy $ex(q^2+q+1, C_4) \le \frac{1}{2}q(q+1)^2$. Következésképp, ha $q > 13$ prímhatvány, akkor $ex(q^2+q+1, C_4) = \frac{1}{2}q(q+1)^2$, ahol a polaritásgráf éppen extremális.

Szükségünk lesz még a későbbiekben egy korai eredményre a Zarankiewicz-probléma témaköréből. Az eredeti problémát a névadója vetette fel [29]-ben, a ma ismert formájától némiképp eltérően. A $z(m, n, s, t)$ Zarankiewicz-szám megadja, hogy maximálisan mennyi éle lehet egy m és n elemű csúcsosztályokkal rendelkező páros gráfnak, ha nem tartalmaz $K_{s,t}$ részgráfot, ahol az s csúcs az m, a t csúcs az n elemű osztályban van. Ez tehát olyan extremális probléma, amikor a befogadó gráf páros, a kizárt részgráf pedig teljes páros gráf. Számunkra a $z(n) = z(n, n, 2, 2)$ Zarankiewicz-számok lesznek érdekesek, amelyeket a 3.3 alfejezetben fogunk felhasználni. Belátjuk a következő becslést.

3.1.7. Állítás. (Reiman-becslés, [23])

$$z(m, n, 2, 2) \leq \frac{1}{2}\Big(m + \sqrt{m^2 + 4mn(n-1)}\Big).$$

BIZONYÍTÁS. Legyen $m \geq n$, és $H = (M, N, E(H))$ páros gráf, ahol $|M| = m$ és $|N| = n$. A bizonyítás ötlete ugyanaz, mint a 3.1.4. állítás bizonyításánál, csak itt azokat a cseresznyéket fogjuk megszámolni, amelyek csúcsai a nagyobb pontosztályban, tehát M-ben vannak. A Jensen-egyenlőtlenségből itt is következik, hogy az ilyen cseresznyék száma akkor minimális, ha M-ben minden csúcs foka megegyezik. Tegyük fel hogy a közös fokszám d. Ekkor a C_4-mentesség miatt teljesülnie kell az

$$m\binom{d}{2} \leq \binom{n}{2}$$
$$d(d-1) \leq \frac{n(n-1)}{m}$$
$$d^2 - d + \frac{1}{4} \leq \frac{n(n-1)}{m} + \frac{1}{4}$$
$$(d - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{n(n-1)}{m} + \frac{1}{4}$$
$$d \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{n(n-1)}{m} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{4n(n-1)}{m} + 1}\right)$$

egyenlőtlenségnek. Következik, hogy $|E(H)| \leq \frac{1}{2}\Big(m + \sqrt{m^2 + 4mn(n-1)}\Big)$, mivel ennél több él esetén biztosan a megengedettnél több M-beli csúcsal rendelkező cseresznye lenne a gráfban. $\square$

Megjegyezzük, hogy egy véges projektív vagy affin sík illeszkedési gráfja egyenlőséggel teljesíti a Reiman-becslést. Ezt az extremális tulajdonságot fel is fogjuk használni az 3.3 alfejezetben. Mint említettük, számunkra azok a Zarankiewicz-számok lesznek fontosak, amelyek esetén a befogadó páros gráf pontosztályai azonos elemszámúak, a kizárt részgráf pedig a C_4. Erre a speciális esetre a Reiman-becslés a következőt felső korlátot adja.

3.1.8. Következmény. *Ha a $H = (S, T, E(H))$ páros gráfnak mindkét csúcsosztályában $|S| = |T| = n$ pontja van és nem tartalmaz részgráfként C_4-et, akkor*

$$|E(H)| \leq \frac{n}{2}(1 + \sqrt{4n-3}).$$

A későbbiekben, amikor a Reiman becslésre hivatkozunk, elsősorban erre a következményre fogunk utalni. A C_4-mentes gráfokkal és olyan további extremális kérdésekkel kapcsolatban, amikor a kizárt részgráfok egyike páros, a [14] monográfiát ajánljuk az érdeklődő olvasó figyelmébe, a Zarankiweicz-számokkal kapcsolatban pedig a [8] cikket és hivatkozásait.

3.2. $C_4 - K_{1,n}$ klasszikus Ramsey-számok

A következőkben az $r(C_4, K_{1,n})$ Ramsey-számokkal fogunk foglalkozni. Először egyszerű módszerekkel meghatározzuk kis Ramsey-számok értékét, majd áttekintjük a témakör klasszikus eredményeit, amelyek egy részét a 3.1 alfejezetben bevezetett eszközök segítségével bizonyítjuk is. Ezután összesítjük az $r(C_4, K_{1,n})$ Ramsey-számok pontos értékeire vonatkozó összes eredményt, és bemutatjuk a témakör néhány releváns kérdését. Ebben a részben egyszerű választ adunk egy 30 éves kérdésre, amelyre a válasz már régóta ismert, azonban valamivel hosszabb és bonyolultabb bizonyítással.
A fejezetben, mivel véges projektív síkokra épülnek a témakör konstrukciói, lépten-nyomon prímhatványokról fogunk beszélni. Ugyanakkor a "ha q prímhatvány" feltétel minden esetben lecserélhető arra, hogy "ha létezik q-adrendű projektív sík". Megjegyezzük továbbá, hogy prímhatvány alatt mindig olyan p^α számot értünk, ahol p prím, és $\alpha \geq 1$ egész szám.

Nem kötődik szorosan az általunk vizsgált témához, de megemlítjük, hogy az $r(C_4, K_{1,n})$ Ramsey-számoknak kiemelt szerepe van az olyan Ramsey-számok között, ahol az egyik megkövetelt részgráf a négy csúcsú kör, a másik pedig fa. A következő tétel alapján ugyanis az ilyen típusú Ramsey-számok meghatározása lényegében egyenértékű egy $r(C_4, K_{1,n})$ Ramsey-szám meghatározásával.

3.2.1. Tétel. *([4]) Ha T n pontú fa és T-ben a legnagyobb fokszám $\Delta(T) = m$, akkor*

$$r(C_4, T) = max\{4, n + 1, r(C_4, K_{1,m})\}.$$

Most az egyszerűség kedvéért bevezetjük az $r(n) = r(C_4, K_{1,n})$ jelölést, tehát $r(n)$ a legkisebb egész szám, amelyre $K_{r(n)}$ bármely G részgráfjára igaz, hogy G tartalmaz C_4-et vagy $\bar{G}$ tartalmaz $K_{1,n}$ csillagot. Először egyszerű módszerekkel kiszámoljuk $r(n)$ értékét kis n-ekre. Az alsó korláthoz mutatunk olyan $G \subset K_{r(n)-1}$ részgráfot, amely nem tartalmaz C_4-et és $\bar{G}$ sem tartalmaz $K_{1,n}$-et.

Erre úgy fogunk hivatkozni, hogy G kritikus gráf ($r(n)$-re nézve).
A felső korláthoz megmutatjuk, hogy $K_{r(n)}$-nek nincs olyan G részgráfja, amelyre $C_4 \not\subset G$ és $K_{1,n} \not\subset \bar{G}$ egyszerre teljesülne. A módszer a következő lesz. Ha lenne $K_{r(n)}$-nek ilyen G részgráfja, akkor a $K_{1,n} \not\subset \bar{G}$ feltételből alsó korlátot kapunk G fokszámaira: $\bar{G}$-ben a maximális fokszám legfeljebb $n-1$ lehet, így G-ben minden fokszám legalább $r(n)-1-(n-1) = r(n)-n$. Ezt a feltételt fokszámkritériumnak fogjuk hívni. Másrészt a C_4-mentesség miatt az élszámbecslésből (3.1.4. állítás) felső korlátot kapunk G élszámára: $|E(G)| \leq ex(n, C_4) \leq \left\lfloor \frac{n}{4}\left(1+\sqrt{4n-3}\right)\right\rfloor$. Ezután meg fogjuk mutatni, hogy nem létezhet G ezekkel a feltételekkel.

3.2.2. Állítás. $r(2) = 4$.

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy K_4-nek van $r(2)$-re nézve G kritikus részgráfja. Ekkor az élszámbecslés szerint $|E(G)| \leq 4$, a fokszámkritérium miatt pedig $\delta(G) \geq 2$, és így $4 \leq |E(G)|$. Ez csak úgy lehet ha $|E(G)| = 4$ és minden fokszám 2, ekkor viszont G éppen egy 4 élű kör, következésképp $r(2) \leq 4$. Mivel a $3 < r(2)$ irány triviális, így $r(2) = 4$. □

3.2.3. Állítás. $r(n) = n+3$, *ahol* $3 \leq n \leq 6$.

BIZONYÍTÁS. Az $n+2 < r(n)$ irányhoz $C_{n+2} \subset K_{n+2}$ alkalmas kritikus gráf mindegyik esetben, mivel C_4-mentes és $\Delta(\bar{C}_{n+2}) = n-1$. Az $r(n) \leq n+3$ irányhoz tegyük fel, hogy K_{n+3}-nak van olyan G C_4-mentes részgráfja, amelyre $\Delta(\bar{G}) \leq n-1$, azaz G-ben minden fokszám legalább 3. Mind a négy esetre belátjuk, hogy nem létezhet G ilyen feltételekkel. Az $n=3$ esetben G-nek 6 pontja van, és a fokszámkritérium alapján legalább 9 élének kellene lennie, azonban az élszámbecslés szerint legfeljebb 8 éle lehet. Az $n = 4$ esetben G-nek 7 pontja van, és az egyik feltétel alapján legalább 11 élének kellene lennie, a másik miatt viszont legfeljebb 10 lehet.
Az $n = 5$ esetben G-nek 8 pontja van, és minden pontjának fokszáma legalább 3. Belátjuk, hogy G már akkor sem lehet C_4-mentes, ha minden fokszám pontosan 3. Tekintsük G egy tetszőleges v csúcsát, és azt a 4 pontot, amelyek v-vel

nem szomszédosak. A 3.2.2. állítás bizonyításából tudjuk, hogy utóbbiak között biztosan van olyan u csúcs, amely a másik három közül legfeljebb eggyel szomszédos, ellenkező esetben C_4-et alkotnának. Mivel azonban u-nak ezenkívül még 2 szomszédja van, és azok csak v szomszédai közül kerülhetnek ki, így G-ben mindenképp lesz C_4. Hasonlóan járunk el az $n = 6$ esetben is. Itt G-nek 9 pontja van, és minden csúcs fokszáma legalább 3. Mivel azonban a fokszámösszegnek párosnak kell lennie, ezért lesz legalább egy v csúcs, amelyre $d(v) \geq 4$. Ekkor G már nem lehet C_4-mentes, mert van 4 v-vel nem szomszédos csúcs, és az előző érvelés érvényes itt is. □

Most bebizonyítunk egy általános felső korlátot $r(n)$-re. Később látni fogjuk, hogy ez a felső becslés sok esetben optimális értéket ad.

3.2.4. Tétel. *([26]) Minden $2 \leq n$-re*

$$r(n) \leq n + \lceil \sqrt{n} \rceil + 1.$$

BIZONYÍTÁS. Legyen $m = n + \lceil \sqrt{n} \rceil + 1$, és tegyük fel indirekt, hogy létezik $G \subset K_m$ kritikus gráf, azaz G nem tartalmaz C_4-et és $\bar{G}$-ben a maximális fokszám legfeljebb $n - 1$. Utóbbiból következik, hogy G-ben minden fokszám legalább $m - n$. A C_4-mentesség miatt teljesülnie kell az

$$m\binom{m-n}{2} \leq \binom{m}{2}$$

$$m\frac{(m-n)(m-n-1)}{2} \leq \frac{m(m-1)}{2}$$

$$(m-n)(m-n-1) \leq m-1$$

$$\left(\lceil \sqrt{n} \rceil + 1\right)\lceil \sqrt{n} \rceil \leq n + \lceil \sqrt{n} \rceil$$

$$\lceil \sqrt{n} \rceil^2 \leq n$$

egyenlőtlenségnek, ellenkező esetben G-ben több cseresznye van, mint ahány pontpár, így lesz benne C_4, ami ellentmondás. Az egyenlőtlenség csak akkor teljesül, mégpedig egyenlőséggel, ha n négyzetszám és G $(m - n)$-reguláris. Ez azt jelenti, hogy G-ben pontosan annyi cseresznye van, mint pontpár, így a C_4 mentesség miatt következik, hogy minden pontpárra pontosan egy cseresznye végei illeszkednek. Ekkor viszont bármely két pontnak pontosan egy közös szomszédja van, így a barátságtétel (3.1.6.) miatt G barátsággráf. Mivel csak egy olyan barátsággráf létezik, amely reguláris, így következik, hogy $G = F_1 = K_3$ és $m - n = 2$. Azonban $m - n = \lceil \sqrt{n} \rceil + 1 \geq 3$, ha $n \geq 2$, így ellentmondásra jutottunk. Ezzel a tétel állítását beláttuk. □

A felső becslés a fenti példákban az $n = 3, 4$ esetekben optimális, a többi esetben eggyel nagyobb a pontos értéknél. A következő esetekben a felső becslés újra pontos lesz.

3.2.5. Állítás. $r(n) = n + 4$*, ahol* $n = 7, 8$.

BIZONYÍTÁS. Az $n \leq n + 4$ irány a felső korlátból következik. A kritikus gráf $r(7)$-hez a Petersen-gráf lesz [26], ami 10 pontú, nincs benne C_4 és 3-reguláris, következésképp a komplementerében a maximális fokszám 6. Egy $r(8)$-ra kritikus gráfot pedig a Petersen gráfból konstruálunk a következőképpen: vegyünk fel egy új v_0 csúcsot, ezt kössük össze a Petersen-gráf egy tetszőleges 2 élű útjának v_1, v_2, v_3 pontjaival, majd hagyjuk el a kiválasztott út egyik élét. Az így kapott gráf 11 pontú, a minimális fokszáma 3, következésképp a komplementerében nincs $K_{1,8}$. Kell még, hogy a konstrukcióval nem sérült a C_4-mentesség, azaz v_0 semelyik két szomszédja között nem vezet 2 élű út. Mivel eredetileg v_1, v_2, v_3 közül ketten-ketten szomszédosak voltak, a harmadik páros között pedig vezetett két élű út (amit az éltörléssel megszüntettünk), így az eredeti gráfban semelyik pontpáros között sem lehetett (másik) 2-hosszú út, hiszen az C_3-mat vagy C_4-et eredményezett volna, a Petersen-gráfról pedig tudjuk, hogy a legrövidebb köre 5 élű. □

Megjegyzés. A Petersen-gráf éppen a $(3, 5)$ paraméterű ketrecgráf, azaz a legkisebb pontszámú 3 reguláris gráf, amelyben C_5 a legrövidebb kör.

Azon esetek, amikor a felső becslés pontos, azért is fontosak, mert a következő alfejezetben ezek segítségével fogjuk tudni meghatározni egyes páros Ramsey számok pontos értékét. Ezért ezt a tulajdonságot kiemelten fogjuk kezelni, és minden felmerülő esetben megvizsgáljuk. Később látni fogjuk, hogy az ismert esetekben mindig vagy éles a felső becslés, vagy pedig eggyel nagyobb a pontos értéknél. A következő, bizonyítás nélkül közölt tétel meghatároz egy olyan esetet, amikor $r(n) \leq n + \lceil \sqrt{n} \rceil$ is teljesül.

3.2.6. Tétel. *([26]) Minden* $1 \leq k$*-re*

$$r(k^2 + 1) \leq k^2 + k + 2.$$

Felhasználva a felső becsléseket, valamint a projektív síkok és a polaritásgráf tulajdonságait, meg tudjuk határozni $r(n)$ pontos értékét speciális n-ekre . Az első esetben $r(n) = n + \lceil \sqrt{n} \rceil$ fog teljesülni, míg a másikban $r(n) = n + \lceil \sqrt{n} \rceil + 1$.

3.2.7. Tétel. *([26]) Ha* q *prímhatvány, akkor*

$$r(q^2 + 1) = q^2 + q + 2.$$

BIZONYÍTÁS. Az $r(q^2 + 1) \leq q^2 + q + 2$ irány következik a 3.2.6. tételből. A $q^2 + q + 1 < r(q^2 + 1)$ irány igazolásához a q-adrendű klasszikus projektív sík polaritásgráfja éppen megfelelő lesz, mivel $q^2 + q + 1$ pontja van, C_4-mentes és a minimális fokszáma q, tehát a komplementerében q^2 a legnagyobb fokszám. □

3.2.8. Tétel. *([26]) Ha* q *prímhatvány, akkor*

$$r(q^2) = q^2 + q + 1.$$

BIZONYÍTÁS. Az $r(q^2) \leq q^2 + q + 1$ irány most a 3.2.4. tételből következik, $q^2 + q$ pontú kritikus gráf pedig egyszerűen konstruálható a q-adrendű klasszikus projektív sík polaritásgráfjából. Tudjuk, hogy a polaritásgráf C_4-mentes, q^2+q+1 pontja van, és q^2 pont fokszáma $q+1$, a $q+1$ abszolút pont foka pedig q. Ha elhagyunk egy olyan csúcsot, a rá illeszkedő élekkel együtt, amelynek csak $q + 1$ fokszámú szomszédai vannak, akkor megfelelő kritikus gráfot kapunk, hiszen $q^2 + q$

pontja lesz, amelyben a minimális fokszám q, így a komplementerében $q^2 - 1$ lesz a legnagyobb fokszám. Ehhez egy tetszőleges abszolút pont megfelelő lesz, mert abszolút pontnak csak $q + 1$ fokú szomszédai lehetnek. Ha ugyanis két abszolút pont szomszédos lenne, az azt jelentené, hogy mindkét pont rajta van a másik poláris egyenesén, de mivel ők maguk is rajta vannak a saját poláris egyenesükön, így a két poláris egyenesnek ekkor két közös pontja lene, ami ellentmond a projektív sík axiómáinak. $\square$

Az előző két tétel meghatároz egy-egy osztályt, amelyek minden n elemére ismerjük $r(n)$ pontos értékét. A következőkben bizonyítás nélkül áttekintjük a további ismert osztályokat. Az eredmények között sok az átfedés olyan értelemben, hogy egyes konstrukciókból, amelyek új eredményre vezetnek, sokszor következnek régebbi eredmények is. Ezekre az átfedésekre nem térünk ki, mindenhol csak az első cikkre hivatkozunk, ahol az eredmény megjelent.

3.2.9. Tétel. *Legyen q prímhatvány.*

1. *Ha $q = 3$ és $t = 2$ vagy $q \geq 5$ páratlan és $t = 2, 4, \ldots, 2\lceil \frac{q}{4} \rceil$, akkor [27] alapján*
$$r(q^2 - t) = q^2 - t + q + 1.$$
2. *Ha $q = 5, 7$ és $t = 1$ vagy $q \geq 9$ páratlan és $t = 1, 3, \ldots, 2\lceil \frac{q}{4} \rceil - 3$, akkor [31] alapján*
$$r(q^2 - t) = q^2 - t + q + 1.$$
3. *Ha $q = 2$ és $t = 1$ vagy $q \geq 4$ páros és $1 \leq t \leq q + 1, t \neq q$, akkor [27] alapján*
$$r(q^2 - t) = q^2 - t + q + 1.$$
4. *Ha $q \geq 5$ páratlan és $t = 2, 4, \ldots, 2\lceil \frac{q}{4} \rceil$, akkor [32] alapján*
$$r(q^2 - q - t) = q^2 - t.$$

5. *Ha* $q \geq 4$ *páros és* $t = 1$*, akkor [20] alapján*

$$r(q^2 - 2q + t) = q^2 - q + t.$$

6. *Ha* $q \geq 4$ *páros és* $t = -1, 2$*, akkor [32] alapján*

$$r(q^2 - 2q + t) = q^2 - q + t.$$

Megjegyzés. Az 1-3. és 5. pont igazolásához a projektív síkok és polaritásgráfok tulajdonságait használták fel a hivatkozott cikkekben, a 4. és 6. ponthoz szükséges konstrukciók pedig véges testek tulajdonságain alapulnak [32]-ben. Utóbbi cikkben nem említik sem a projektív síkokat, sem a polaritásgráfokat, ami azért érdekes, mert a témakör gyakorlatilag minden eredménye kapcsolatba hozható ezekkel a területekkel.

Megjegyzés. A következő alfejezetben fontos lesz, ezért megjegyezzük, hogy a tétel mely eseteiben pontos az általános felső becslés. Az 1-3. pontban, a 4. pont $q = 5$, $t = 4$ esetében és az 5-6. pont $t = -1, 1$ eseteiben kapott Ramsey-számok $r(n) = n + \lceil\sqrt{n}\rceil + 1$ alakúak, tehát ezekben az esetekben az általános felső korlát optimális. A 4. pont többi esetében és a 6. pont $t = 2$ esetében pedig $r(n) = n + \lceil\sqrt{n}\rceil$ eredményt kapunk.

A fentieken kívül más Ramsey-számokból további $r(n)$ értékeket számíthatunk ki. Jelölje W_n az $n + 1$ csúcsú kerékgráfot, amelyet úgy kapunk, ha C_n minden csúcsát összekötjük egy $n + 1$. csúccsal. A [30] cikkben megmutatták, hogy $r(C_4, K_{1,n}) = r(C_4, W_n)$, ha $n \geq 6$. Ennek segítségével a következő Ramsey-számokat határozták meg.

3.2.10. Állítás. *([30])*

1. *Ha* $11 \leq n \leq 5$*, akkor* $r(n) = n + 5$.

2. *Ha* $18 \leq n \leq 20$*, akkor* $r(n) = n + 5$.

3. Ha $34 \leq n \leq 36$*, akkor* $r(n) = n + 7$.

4. $r(43) = 51$.

Az eddigiek alapján összefoglaljuk, ami a kis $r(n)$ számokról ismert. A 2. táblázat tartalmazza az ismert $r(n)$ értékeket $n \leq 50$ mellett. Az $f(n) - r(n)$ értékek jelzik, hogy pontos-e az általános felső becslés, ahol $f(n) = n + \lceil \sqrt{n} \rceil + 1$. Ha $f(n) - r(n) = 0$, akkor $r(n) = n + \lceil \sqrt{n} \rceil + 1$, így a felső becslés optimális, ha pedig $f(n) - r(n) = 1$, akkor $r(n) = n + \lceil \sqrt{n} \rceil$.

n	$r(n)$	$f(n) - r(n)$	n	$r(n)$	$f(n) - r(n)$
2	$n+2$	1	$34-36$	$n+7$	0
$3-4$	$n+3$	0	37	$?$	
$5-6$	$n+3$	1	38	$n+7$	1
$7-9$	$n+4$	0	39	$?$	
10	$n+4$	1	40	$n+7$	1
$11-16$	$n+5$	0	$41-42$	$?$	
$17-20$	$n+5$	1	43	$n+8$	0
21	$n+6$	0	44	$?$	
22	$?$		45	$n+8$	0
$23-25$	$n+6$	0	46	$?$	
26	$n+6$	1	$47-49$	$n+8$	0
$27-33$	$?$		50	$n+8$	1

2. táblázat. Az ismert $r(n)$ értékek $n \leq 50$ mellett, és $f(n) - r(n)$ értékei, ahol $f(n) = n + \lceil \sqrt{n} \rceil + 1$.

Felmerül a kérdés, hogy hogyan határozhatnánk meg az ismeretlen $r(n)$ értékeket. Kézenfekvő ötlet, hogy használjuk fel a már ismert eseteket is. Például érvényes az $r(n) \leq r(n+1)$ alsó becslés, hiszen $r(n)$ egy kritikus gráfja nyilván $r(n+1)$-re is kritikus. Azonban $r(n)$ segítségével felső becslést is tudunk adni $r(n+1)$-re. A [4] cikkben tették fel a kérdést, hogy $r(n+1) \leq r(n) + 2$ mindig teljesül-e. A választ [6]-ban találjuk: az összefüggés minden n-re teljesül. Most erre a tételre adunk egy [6]-tól független, rövidebb bizonyítást, amely egyszerű észrevételeken kívül csak a barátságtételt használja fel.

3.2.11. Tétel. *([6]) Minden* $2 \leq n$*-re*

$$r(n+1) \leq r(n) + 2.$$

BIZONYÍTÁS. Indirekt tegyük fel, hogy $r(n) + 2 < r(n+1)$, tehát van olyan $G \subset K_{r(n)+2}$, amelyre $C_4 \not\subset G$ és $K_{1,n+1} \not\subset \bar{G}$. Következésképp $\Delta(\bar{G}) \leq n$, és így $\delta(G) \geq r(n) - n + 1$. Ha G-nek van két olyan pontja, amelyeknek nincs közös szomszédja, akkor tekintsük azt a $G' \subset K_{r(n)}$ gráfot, amelyet G-ből ezen két pont és éleik elhagyásával kapunk. G' továbbra is C_4-mentes és a minimális fokszáma legalább $r(n) - n$, mivel minden csúcsról legfeljebb egy élt hagytunk el. Ekkor $\bar{G}'$-ben a maximális fokszám legfeljebb $n - 1$, tehát nem lehet benne $K_{1,n}$. Tehát G' kritikus gráf $r(n)$-re, amiből az $r(n) < r(n)$ ellentmondás következik.
Ha G-ben bármely két pontnak van közös szomszédja, akkor minden pontpárnak pontosan 1 közös szomszédja kell hogy legyen, hiszen ellenkező esetben G-ben találnánk C_4-et. Ekkor viszont a barátságtétel miatt G szükségképpen barátsággráf, amiből $\delta(G) = 2$ következik. Mivel $\delta(G) \geq r(n) - n + 1$, ezért azt kapjuk, hogy $n + 1 \geq r(n)$. Azonban ez ellentmondás, hiszen egy $n + 1$ csúcsú út mutatja minden n-re, hogy $n + 1 < r(n)$. □

A [4] cikkben meghatározták továbbá a következő általános alsó korlátot $r(n)$-re.

3.2.12. Tétel. *([4])* $n + \sqrt{n} - 6n^{11/40} \leq r(n)$*, minden* $n \geq 2$ *esetén.*

Sajnos ez meglehetősen messze van az ismert felső korlátoktól, mivel $n^{11/40}$ értéke legalább 1, de már $n = 13$-ra a 2-t is eléri. Ugyanebben a cikkben megfogalmazták a következő sejtést, amelynek igazolásáért vagy cáfolatáért Erdős Pál, az egyik szerző, 100 \$ jutalmat ajánlott fel.

3.2.13. Sejtés. *$r(n) < n + \sqrt{n} - c$ végtelen sok n-re, ahol c tetszőleges konstans.*

Megjegyezzük, hogy $c < 0$ eset semmitmondó, ezért c-t nemnegatívnak tekintjük. Az eddigiek alapján láttuk, hogy minden ismert esetben $r(n) = n + \lceil\sqrt{n}\rceil + 1$, vagy $r(n) = n + \lceil\sqrt{n}\rceil$. Ez alapján [31]-ben és [32]-ben a következő kérdést fogalmazták meg.

3.2.14. Kérdés. *Igaz-e, hogy $r(n) = n + \lceil\sqrt{n}\rceil + 1$ vagy $r(n) = n + \lceil\sqrt{n}\rceil$ minden $n \geq 2$-re?*

Ha erre a kérdésre igennel tudunk válaszolni, akkor az negatív választ ad az előző sejtésre. Megfogalmazhatunk egy másik releváns kérdést is.

3.2.15. Kérdés. *Igaz-e $r(n) < r(n+1)$ minden $n \geq 2$-re?*

Ha ez igaz lenne, az nagy előrelépést jelentene további $r(n)$-ek meghatározásában. Például olyan esetekben, amikor $r(n)$ és $r(n+k)$ ismert ($k \geq 2$), és $r(n+k) - r(n) = k$, akkor minden n és $n+k$ közé eső l-re következne $r(l)$ értéke. A 2. táblázat alapján a kis $r(n)$-ek között is vannak ilyen esetek, de a 3.2.9. tételből ráadásul ilyen esetek egész osztályait kapjuk. Továbbá ha $r(n) < r(n+1)$ minden esetben teljesül, akkor negatív választ adhatunk [4] egy másik kérdésére, amelynek a részkérdése éppen az, hogy $r(n) = r(n+1)$ teljesül-e végtelen sok n-re. Megjegyezzük, hogy a kérdés megfogalmazásából úgy tűnik, mintha a szerzők találtak volna arra utaló jelet, hogy $r(n) = r(n+1)$ valamikor teljesül, azonban a cikkben nincs ezzel kapcsolatos utalás.

3.3. $C_4 - K_{1,n}$ páros Ramsey-számok

A következőkben a $b(C_4, K_{1,n})$ páros Ramsey-számokkal fogunk foglalkozni. Először egyszerű módszerekkel meghatározzuk kis Ramsey-számok értékét, majd ismertetjük a témakör eredményeit, amelyeket a 3.1 alfejezetben bevezetett eszközök segítségével bizonyítunk is. Felhasználjuk a Reiman-becslést, és kulcsofontosságú szerepe lesz a véges projektív síkoknak, amelyek segítségével kritikus gráfokat fogunk konstruálni. A fejezet végén megadunk az irodalomban még nem ismert Ramsey-számokat, egyben megcáfolunk egy sejtést. Ebben is szerepe lesz a projektív síkoknak.
Itt is megjegyezzük, hogy a tételekben a "ha q prímhatvány" feltétel minden esetben lecserélhető arra, hogy "ha létezik q-adrendű projektív sík", és hogy prímhatvány alatt mindig olyan p^α számot értünk, ahol p prím, és $\alpha \geq 1$ egész szám.

Most az egyszerűség kedvéért bevezetjük a $b(n) = b(C_4, K_{1,n})$ jelölést. Tehát $b(n)$ a legkisebb egész szám, amelyre $K_{b(n),b(n)}$ bármely H részgráfjára igaz, hogy H tartalmaz C_4-et vagy H^c tartalmaz $K_{1,n}$-et. A következőkben egyszerű módszerekkel meghatározzuk $b(n)$ értékét kis n-ekre. Az alsó korláthoz $H \subset K_{b(n)-1,b(n)-1}$ kritikus gráfokat konstruálunk, a felső korláthoz pedig megmutatjuk, hogy egy $H \subset K_{b(n),b(n)}$ gráf nem lehet kritikus. A módszer hasonló lesz, mint az $r(C_4, K_{1,n})$ számok esetében, csak itt a Reiman-becslésből kapunk felső korlátot H élszámára (3.1.8. következmény), míg a fokszámkritériumból $\Delta(H^c) \leq n-1$, és így $\delta(H) \geq b(n) - n + 1$ következik.

3.3.1. Állítás. $2 \leq n \leq 4$ *mellett* $b(n) = n + 2$

BIZONYÍTÁS. Tekintsük az $n = 2$ esetet. Tegyük fel, hogy $K_{4,4}$-nek van olyan C_4-mentes H részgráfja, amelyre H^c nem tartalmaz $K_{1,2}$ csillagot, azaz $\Delta(H^c) = 1$. Utóbbiból következik, hogy $\delta(H) \geq 3$, tehát H-nak legalább 12 éle van. Másrészt viszont H-nak legfeljebb $z(n)$ éle lehet. A Reiman-becslés szerint $z(n) \leq \left\lfloor \frac{n}{2}(1 + \sqrt{4n-3}) \right\rfloor$, ami $n = 2$-re 9-et ad. Tehát ilyen H részgráf nem létezhet, és ebből következik, hogy $b(2) \leq 4$.

A $4 \leq b(2)$ alsó korlát igazolásához mutatnunk kell egy olyan C_4-mentes részgráfot $K_{3,3}$-ban, amelyben minden csúcs foka legalább 2, ehhez pedig $K_{3,3}$ bármely 6 élű köre jó lesz. Ezzel beláttuk, hogy $b(2) = 4$. Az $n = 3, 4$ esetekben a $b(n) \leq n + 2$ irány igazolása ugyanígy történik, a $n + 2 \leq b(n)$ irányt pedig $K_{4,4}$ egy 8 élű és $K_{5,5}$ egy 10 élű köre igazolja. □

3.3.2. Állítás. $5 \leq n \leq 9$ *mellett* $b(n) = n + 3$

BIZONYÍTÁS. A $b(n) \leq n + 3$ irány igazolása teljes mértékben megegyezik az előző bizonyítás gondolatmenetével. A másik irány is hasonló, csak itt már olyan C_4-mentes részgráfot kell mutatnunk $K_{n+2,n+2}$-ben, amelyben minden fokszám legalább 3.
Tekintsük az $n = 5$ esetet. Legyenek $K_{7,7}$ pontosztályai $S = \{s_1, \dots, s_7\}$ és $T = \{t_1, \dots, t_7\}$. A csúcsok indexeit modulo 7 fogjuk tekinteni, de az átláthatóság kedvéért ezt nem jelöljük külön. Ebben az értelemben legyen a H kritikus részgráf élhalmaza $E(H) = \{s_i t_j |\ i = 1, \dots, 7$ és $j \in \{i, i+2, i+6\}\} = \{t_k s_l |\ k = 1, \dots, 7$ és $l \in \{k, k+1, k+5\}\}$. Tekintsünk most egy tetszőleges s_i csúcsot. Ez csak akkor lehet C_4-nek csúcsa, ha valamely két szomszédjának van s_i-től különböző közös szomszédja. Azonban s_i szomszédai t_i, t_{i+2} és t_{i+6}, akiknek az s_i-től különböző szomszédai: $s_{i+1}, s_{i+5}, s_{i+2}, s_{i+2+1} = s_{i+3}, s_{i+6}, s_{i+6+5} = s_{i+4}$. Másrészt t_{i+2} másik két szomszédja s_{i+2} és $s_{i+2+1} = s_{i+3}$. Tehát semelyik s_i csúcs nem lehet csúcsa C_4-nek, így H-ban nincsen C_4. Másrészt minden csúcs foka 3, így H^c-ben nincs $K_{1,5}$, és ezzel beláttuk, hogy $8 \leq b(5)$.
Az előbb konstruált H-ra tekinthetünk úgy is, hogy az $s_i t_i$ és $s_i t_{i+6}$ élek alkotta C_{14}-hez hozzávesszük még az $s_i t_{i+2}$ éleket. Ugyanezen elv alapján konstruálhatunk kritikus gráfot az $n = 6, 7, 8, 9$ esetekben is. A konstrukció és a bizonyítás csak a modulusban és az indexelésben kölünbözik. □

Megjegyzés. Az $n = 5$ esetben konstruált kritikus gráf nem más, mint a Heawood-gráf, ami a $(3, 6)$ paraméterű ketrecgráf, azaz a minimális csúcsszámú 3-reguláris gráf, amelyben a legrövidebb kör 6 élű.

Most egy általános felső becslést adunk $b(n)$-re, amelyet úgy kapunk, hogy az előző bizonyításokban használt módszert általános n-re alkalmazzuk.

3.3.3. Tétel. *([5]) Minden $2 \leq n$-re*

$$b(n) \leq n + \lceil \sqrt{n} \rceil.$$

BIZONYÍTÁS. Legyen $m = n + \lceil \sqrt{n} \rceil$, és tegyük fel, hogy $K_{m,m}$-nek van H részgráfja, amelyre $C_4 \not\subseteq H$ és $K_{1,n} \not\subseteq H^c$. Következésképp $\Delta(H^c) \leq n - 1$, és így $\delta(H) = m - n + 1$. A fokszámkritérium és a Reiman-becslés segítségével becsüljük H élszámát:

$$m(m-n+1) \leq |E(H)| \leq \left\lfloor \frac{m}{2}(1 + \sqrt{4m-3}) \right\rfloor.$$

H létezéséhez szükséges, hogy teljesüljön az

$$m(m-n+1) \leq \frac{m}{2}(1 + \sqrt{4m-3})$$

$$m - n + 1 \leq \frac{1 + \sqrt{4m-3}}{2}$$

$$\lceil \sqrt{n} \rceil + \frac{1}{2} \leq \frac{\sqrt{4n + 4\lceil \sqrt{n} \rceil - 3}}{2}$$

$$\lceil \sqrt{n} \rceil^2 + \lceil \sqrt{n} \rceil + \frac{1}{4} \leq n + \lceil \sqrt{n} \rceil - \frac{3}{4}$$

$$\lceil \sqrt{n} \rceil^2 \leq n - 1$$

egyenlőtlenség. Mivel azonban minden $n \geq 2$-re $\lceil \sqrt{n} \rceil^2 > n-1$, így nem létezhet $K_{m,m}$-nek ilyen H részgráfja, és ezzel a tételt igazoltuk. $\square$

Észrevehetjük, hogy a kapott felső becslés $2 \leq n \leq 9$ mellett pontos, hiszen $\lceil \sqrt{n} \rceil = 2$, ha $2 \leq n \leq 4$, és $\lceil \sqrt{n} \rceil = 3$, ha $5 \leq n \leq 9$. Látni fogjuk, hogy a becslés más esetekben is optimális, és a segítségével újabb $b(n)$-ek értékét tudjuk meghatározni.

Most bebizonyítunk egy összefüggést, ami az $r(n)$ és $b(n)$ számok között teremt kapcsolatot, és ezzel nyerünk egy alsó korlátot a $b(n)$ számokra. Megjegyezzük, hogy G_1 és G_2 páros gráfokra fennáll az $r(G_1, G_2) \leq 2b(G_1, G_2)$ egyenlőtlenség [28], ami az élszínezéses megközelítéssel könnyen látszik: $b = b(G_1, G_2)$-ből következik, hogy $K_{b,b}$ éleit nem lehet két színnel úgy kiszínezni, hogy ne legyen se egyszínű G_1, se egyszínű G_2, ám világos, hogy ekkor K_{2b} éleit sem lehet így kiszínezni, mivel $K_{b,b} \subset K_{2b}$, és így $r(G_1, G_2) \leq 2b$. Ennél azonban jóval erősebb összefüggést tudunk belátni a $C_4 - K_{1,n}$ Ramsey-számok esetében.

3.3.4. Tétel. ([5]) *Minden $2 \leq n$-re*

$$r(n) \leq b(n+1).$$

BIZONYÍTÁS ([5] ALAPJÁN). Legyen $m = r(n) - 1$ és $G = \big(\{v_1, \ldots, v_m\}, E(G)\big)$ kritikus gráf $r(n)$-hez, azaz olyan részgráf K_m-ben, amire $C_4 \not\subset G$ és $K_{1,n} \not\subset \bar{G}$. Most G-ből konstruálunk egy H páros gráfot, ami részgráfja $K_{m,m}$-nek, és $C_4 \not\subset H$, valamint $K_{1,n+1} \not\subset H^c$.
Legyen $H = \big(\{s_1, \ldots, s_m\}, \{t_1, \ldots, t_m\}, E(H)\big)$ olyan , ahol $s_i t_j \in E(H)$ pontosan akkor, ha $v_i v_j \in E(G)$. Tegyük fel, hogy H-ban van C_4, jelölje a csúcsait s_i, s_j és t_k, t_l. Mivel G-ben nincs hurokél, ezért az i, j, k, l indexek mindegyike különböző. Ekkor azonban a konstrukció miatt a v_i, v_k, v_j, v_l csúcsok C_4-et alkotnak G-ben, ami ellentmondás.
Kell még, hogy $K_{1,n+1} \not\subset H^c$. Mivel $\bar{G}$-ben nincs $K_{1,n}$, ezért $\Delta(\bar{G}) \leq n - 1$, következésképp $\delta(G) \geq m - 1 - (n-1) = m - n$. Ugyanakkor H konstrukciója miatt $d(s_i) = d(v_i)$ és $d(t_j) = d(v_j)$ minden $i, j = 1, \ldots, m$-re, tehát $\delta(H)$ legalább $m - n$. Emiatt $\Delta(H^c) \leq n$, amiből következik, hogy $K_{1,n+1}$ nem részgráfja H^c-nek. Tehát H mutatja, hogy $m = r(n) - 1 < b(n+1)$, és ebből következik, hogy $r(n) \leq b(n+1)$. □

3.3.5. Következmény. ([5]) *Ha n nem négyzetszám és $r(n) = n + \lceil \sqrt{n} \rceil + 1$, akkor*

$$b(n+1) = n + \lceil \sqrt{n} \rceil + 1.$$

BIZONYÍTÁS. Az előző tételből és az általános felső becslésből kapjuk, hogy $n + \lceil\sqrt{n}\rceil + 1 \leq b(n+1) \leq n + 1 + \lceil\sqrt{n+1}\rceil$. Mivel n nem négyzetszám, így $\lceil\sqrt{n}\rceil = \lceil\sqrt{n+1}\rceil$, tehát következik, hogy $b(n+1) = n + \lceil\sqrt{n}\rceil + 1$. □

A 3.3.5. következmény tehát megadja $b(n)$ értékét azon n-ek osztályára, ahol n nem négyzetszám és $r(n) = n + \lceil\sqrt{n}\rceil + 1$. Emlékeztetünk, hogy a 3.2 alfejezetben mindenhol megadtuk, hogy az ismert $r(n)$ értékek mikor teljesítik az $r(n) = n + \lceil\sqrt{n}\rceil + 1$ feltételt. A legkisebb n, amelyre ez alapján ki tudjuk számolni $b(n)$ értékét, és más tételből nem fogjuk megkapni, az $n = 27$. Az 3.2.7. állítás alapján $r(26) = 32$, és mivel $n = 26$-ra teljesülnek a 3.3.5. következmény feltételei, így $b(27) = 32$.

A következőkben meghatározunk további osztályokat, amelyek $b(n)$ értékeire optimális alsó korlátot tudunk adni. Kezdetben a véges projektív és affin síkok tulajdonságait fogjuk felhasználni. A 3.1 alfejezetben említettük, hogy ezen speciális struktúrák illeszkedési gráfja példát ad arra, amikor a Reiman-becslés egyenlőséggel teljesül. Mivel a projektív és affin síkok tulajdonsági alapján ismerjük az illeszkedési gráf csúcsainak fokszámát, kézenfekvő, hogy ezeket felhasználva adjunk alsó becslést a $b(n)$ Ramsey-számokra.

3.3.6. Állítás. ([16]) *Ha q prímhatvány, akkor*

$$b(q^2 + 1) = q^2 + q + 2.$$

BIZONYÍTÁS. Tekintsük a q-adrendű projektív sík illeszkedési gráfját. Mindkét pontosztályban $q^2 + q + 1$ csúcs van, minden csúcs foka $q + 1$. Az illeszkedési gráfban nincs C_4, a komplementerében pedig minden csúcs foka q^2, tehát nem tartalmaz K_{1,q^2+1} csillagot. Következésképp $q^2 + q + 1 < b(q^2 + 1)$. Másrészt az általános felső korlátból $b(q^2 + 1) \leq q^2 + 1 + \left\lceil\sqrt{q^2 + 1}\right\rceil = q^2 + q + 2$, és ezzel az állítást beláttuk. □

3.3.7. Állítás. ([16]) *Ha q prímhatvány, akkor*

$$b(q^2 - q + 1) = q^2 + 1.$$

BIZONYÍTÁS. Az alsó korláthoz konstruálnunk kell egy olyan C_4-mentes páros gráfot, amelynek mindkét pontosztálya q^2 elemű, és minden fokszám legalább q, így a komplementerében nem lesz K_{1,q^2-q+1}. Ehhez tekintsük most a q-adrendű affin sík $I = (P, L, E(I))$ illeszkedési gráfját, ahol P a pontok, L az egyenesek csúcsosztályát jelöli. A q-adrendű affin síkot úgy kapjuk a q-adrendű projektív síkból, hogy kitörlünk egy egyenest, és annak $q+1$ pontját. Itt tehát $|P| = q^2$, P-ben minden fokszám $q+1$, illetve $|L| = q^2+q$, L-ben minden fokszám q. Most töröljük L-ből az affin sík egy tetszőleges párhuzamossági osztályának egyeneseit reprezentáló csúcsokat és a rájuk illeszkedő éleket. Ekkor $|P| = |L| = q^2$ lesz, és minden fokszám q lesz, hiszen csak P csúcsain változott a fokszám: minden csúcson pontosan eggyel csökkent. Ugyanis egy párhuzamossági osztály egyenesei páronként diszjunktak, és lefedik a sík minden pontját. Világos továbbá, hogy az így nyert gráf C_4-mentes, hiszen részgráfja az affin sík illeszkedési gráfjának. Következésképp $q^2 < b(q^2-q+1)$. Másrészt az általános felső korlátból $b(q^2-q+1) \leq q^2-q+1+\left\lceil\sqrt{q^2-q+1}\right\rceil = q^2+1$, és ezzel az állítást beláttuk.$\square$

Ezek után felmerül a kérdés, hogy nem nyerhetnénk-e újabb alsó korlátokat úgy, hogy az előző bizonyítás gondolatmenetét alkalmazva, azonban projektív sík illeszkedési gráfjából kiindulva konstruálunk kritikus gráfokat. A válasz az, hogy nyerhetünk, és éppen ezt az eljárást fogjuk alkalmazni a következő lemma bizonyításához, amelyből – mint később látjuk – optimális alsó korlátokat fogunk kapni.

3.3.8. Lemma. *Ha q prímhatvány és $0 \leq t \leq q$, akkor*

$$q^2 + t < b(q^2 - q + 1 + t).$$

BIZONYÍTÁS. Meg kell mutatnunk, hogy K_{q^2+t,q^2+t}-nek van olyan H részgráfja, amelyre $C_4 \not\subseteq H$ és $K_{1,q^2-q+1+t} \not\subseteq H^c$. Utóbbi feltétel azt jelenti, hogy $\Delta(H^c) \leq q^2-q+t$, ami a $\delta(H) \geq q$ feltétellel ekvivalens. Tehát a bizonyításhoz meg kell mutatnunk, hogy minden $q^2 \leq m \leq q^2+q$ esetre létezik $K_{m,m}$-nek olyan C_4-mentes $H(m)$ részgráfja, amelyben minden fokszám legalább q.

Tekintsük most a q-adrendű projektív sík $I = (P, L, E(I))$ illeszkedési gráfját, ahol P a pontok, L az egyenesek csúcsosztályát jelöli. Tudjuk, hogy $|P| = |L| = q^2 + q + 1$, és minden fokszám $q + 1$. Mostantól P és L pontjaira úgy is hivatkozunk, mint a projektív sík pontjai és egyenesei, és ezzel a szóhasználattal élve a konstrukció a következő lesz.

1. Válasszunk ki egy tetszőleges $l \in L$ egyenest és egy rá illeszkedő $p \in P$ pontot I-ben. Jelölje az I-beli szomszédaik halmazát rendre $N(l)$ és $N(p)$.
2. Az első lépésben töröljük l-t és p-t, valamint a rájuk illeszkedő összes élt I-ből. Az így kapott gráfot jelölje $I_1 = (P_1, L_1, E(I_1))$.
3. Minden további $i = 2, \ldots, (q + 1)$-edik lépésben az új $I_i = (P_i, L_i, E(I_i))$ gráfot úgy kapjuk, hogy I_{i-1}-ből törlünk egy tetszőleges $P_{i-1} \cap N(p)$-beli és egy tetszőleges $L_{i-1} \cap N(l)$-beli csúcsot, valamint a rájuk illeszkedő összes élt.

Világos, hogy az i. lépésben nyert I_i páros gráf mindkét pontosztálya $q^2 + q + 1 - i$ elemű, továbbá C_4-mentes, hiszen részgráfja az eredeti I illeszkedési gráfnak. A kérdés, hogy mi helyzet az I_i-beli fokszámokkal? Mivel a pontok csúcsosztályából sorban elhagyott csúcsok a projektív síkon mind az e egyenes pontjai, bármely másik egyenes pontosan eggyel volt szomszédos ezek közül I-ben. Következésképp az egyes egyenesek fokszáma összesen eggyel csökkent, azaz minden lépés után legalább q, I_{q+1}-ben pedig pontosan q. Továbbá mivel az egyenesek csúcsosztályából sorban elhagyott csúcsok a projektív síkon mind p-re illeszkedő egyenesek, ezért páronként p az egyetlen közös metszéspontjuk. Következésképp az egyes pontok fokszáma összesen eggyel csökkent, azaz minden lépés után legalább q, I_{q+1}-ben pedig pontosan q. Tehát $H(m) = I_{q^2+q+1-m}$ $(m = q^2, \ldots, q^2 + q)$ jó választás lesz, és ezzel a tételt beláttuk. $\square$

Megjegyzés. A fenti konstrukciót könnyen megfogalmazhatjuk szemléletesen, ha az l egyenesre úgy tekintünk, mint a megfelelő affin sík ideális egyenese. A p pont ekkor az affin sík egy párhuzamossági osztályának ideális pontja. A konstrukció első lépésében ezt a két ideális térelemet hagyjuk el, minden további lépésben pedig l maradék q pontja közül egyet-egyet, és a p által meghatározott párhuzamossági osztály q egyenese közül egyet-egyet.

Megjegyzés. A konstrukció révén kapott I_{q+1} gráf izomorf a 3.3.7. állítás bizonyításában konstruált gráffal. Felmerülhet a kérdés, hogy nyerhetünk-e ebből a gráfból újabb kritikus gráfokat, további csúcsok és élek elhagyásával. A válasz nemleges, mert I_{q+1} pontosztályaiből egy-egy csúcsot elhagyva már biztosan csökken a minimális fokszám, következésképp a komplementerben a maximális fokszám nem csökken I^c_{q+1}-hez képest, így lényegében ugyanarra a $b(n)$ Ramsey-számra kapunk alsó becslést, csak eggyel gyengébbet, mint I_{q+1}-ből. Megjegyezzük, hogy egy véges projektív sík I illeszkedési gráfját kibővítve sem kapunk jó alsó korlátokat, mert az új csúcsokat legfeljebb egy I-beli csúccsal köthetjük össze a párosság és C_4-mentesség megtartása mellett, ezért az új csúcsoknak túl kevés lesz a fokszáma.

Megjegyzés. A konstrukcióból alsó becsléseket kapunk Zarankiewicz-számokra, hiszen C_4-mentes páros gráfokat konstruálunk. A becslés a következő:

$$(iq - i + 1)q + (q^2 + q - iq)(q + 1) \leq z_{2,2}(q^2 + q + 1 - i, q^2 + q + 1 - i),$$

ahol $i = 1, \ldots, q + 1$, és q prímhatvány. A becslés [8] és [9] alapján az $i = 1, 2$ esetekben optimális.

Némiképp eltérő konstrukcióval újabb optimális alsó korlátot kapunk.

3.3.9. Lemma. ([15],[20]) *Ha q prímhatvány, akkor*

$$q^2 - 1 < b(q^2 - q).$$

BIZONYÍTÁS ([17] ALAPJÁN). Tekintsük a q-adrendű affin sík $I = (P, L, E(I))$ illeszkedési gráfját, ahol P a pontok, L az egyenesek csúcsosztályát jelöli. Itt tehát

$|P| = q^2$ és P-ben minden fokszám $q+1$, és $|L| = q^2+q$, L-ben minden fokszám q. Töröljünk I-ből egy tetszőleges $p_0 \in P$ csúcsot, a p_0-ra illeszkedő éleket, és p_0-nak a $q+1$ szomszédját. Ekkor $|L| = |P| = q^2 - 1$, L-ben minden csúcs foka q, mert a megmaradt csúcsokról nem hagytunk el élt, és P-ben is q minden csúcs foka, mert az affin sík axiómái miatt minden $p_0 \neq p$ ponthoz pontosan egy egyenes volt az affin síkon, amely p-re és p_0-ra egyaránt illeszkedett, így P minden csúcsáról pontosan egy élt hagytunk el. A konstruált gráfban tehát a legkisebb fokszám q, így a komplementerében $q^2 - q - 1$ a legnagyobb fokszám, tehát nincs benne K_{1,q^2-q}. Mivel a C_4-mentesség triviálisan teljesül, így a konstruált gráf kritikus $b(q^2 - q)$-ra. □

A 3.3.8. lemmából, a 3.3.9. lemmából és az általános felső becslésből (3.3.3. tétel) következik a következő tétel, amely a 3.3.7. állítás kiterjesztése.

3.3.10. Tétel. *Ha q prímhatvány és $0 \leq t \leq q$, akkor*

$$b(q^2 - q + t) = q^2 + t.$$

Bizonyítás. A felső korlátból következik, hogy $b(q^2 - q + t) \leq q^2 - q + t + \left\lceil \sqrt{q^2 - q + t} \right\rceil = q^2 + t$, a másik irány pedig a lemmákból. □

Fontos észrevétel, hogy minden n-re, amelyekre az eddigiek alapján ki tudjuk számolni $b(n)$-et, a $b(n) \leq n + \lceil \sqrt{n} \rceil$ felső korlát pontos. Ez alapján [5]-ben a következő sejtést fogalmazták meg.

3.3.11. Sejtés. ([5], Conjecture 16.) *Minden $2 \leq n$-re*

$$b(n) = n + \lceil \sqrt{n} \rceil.$$

Ez a sejtés azonban hamis. Az alábbi lemma igazolja, hogy van olyan eset, amikor az általános felső becslés nem optimális.

3.3.12. Lemma. *Ha nem létezik* q*-adrendű projektív sík, akkor* $n = q^2 + 1$*-re*

$$b(n) \leq n + \lceil \sqrt{n} \rceil - 1.$$

BIZONYÍTÁS. Be kell látnunk, hogy $b(q^2+1) \leq q^2+q+1$. Ehhez tegyük fel indirekt, hogy $b(q^2+1) > q^2+q+1$. Azaz van olyan $H \subset K_{q^2+q+1,q^2+q+1}$, amelyre $C_4 \not\subset H$ és $K_{1,q^2+1} \not\subset H^c$. Következésképp H^c-ben a maximális fokszám q^2, tehát H-ban minden fokszám legalább $q+1$. Mivel a

$$(q^2+q+1)\binom{q+1}{2} \leq \binom{q^2+q+1}{2}$$

$$(q^2+q+1)\frac{(q+1)q}{2} \leq \frac{(q^2+q+1)(q^2+q)}{2}$$

$$(q+1)q \leq (q^2+q)$$

egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül, így ha H-ban lenne $q+1$-nél nagyobb fokszám, akkor lenne két cseresznye, amelyeknek a végpontjai megegyeznek, ami ellentmond a C_4-mentességnek. Következésképp H-ban minden fokszámnak $q+1$-nek kell lennie, és az egyenlőség miatt bármely két cseresznyének van közös végpontja, amelyeknek a csúcsa azonos pontosztályban van. Tekintsük most azt a $\mathcal{G}$ struktúrát, amit H, mint illeszkedési gráf, határoz meg. $\mathcal{G}$-nek q^2+q+1 pontja és ugyanennyi egyenese van, minden pontra $q+1$ egyenes illeszkedik, minden egyenesnek $q+1$ pontja van, továbbá bármely két pontot pontosan egy egyenes tartalmaz, és bármely két egyenesnek pontosan egy metszéspontja van. Következik, hogy $\mathcal{G}$ q-adrendű projektív sík, amiről feltettük, hogy nem létezik. Tehát ellentmondásra jutottunk, így igazoltuk a $b(q^2+1) \leq q^2+q+1$ feltevést. Következik, hogy $b(q^2+1) \leq q^2+1+\left\lceil \sqrt{q^2+1} \right\rceil - 1$. □

3.3.13. Lemma. *Ha létezik* q*-adrendű projektív sík, akkor*

$$q^2 - q < b((q-1)^2+1).$$

BIZONYÍTÁS. A 3.3.7. állítás bizonyításában affin sík illeszkedési gráfjából egy párhuzamossági osztály egyeneseit elhagyva kontsruáltunk olyan C_4 mentes H_1

páros gráfot, amelynek mindkét csúcsosztályában q^2 csúcs van és minden csúcs fokszáma q. Tekintsük most az a H_2 gráfot, amelyet H_1-ből kapunk egy újabb párhuzamossági osztály q egyenesét és az egyik ilyen egyenes q pontját elhagyva. Ekkor H_2-nek mindkét csúcsosztályában $q^2 - q$ csúcs van, és könnyen látszik, hogy minden csúcs foka legalább $q - 1$. Semelyik pontról nem hagyhattunk el két egyenest, mert párhuzamos egyeneseket hagytunk el, és semelyik megmaradt egyenesről nem hagyhattunk el egynél több pontot, mert két különböző egyenesnek legfeljebb egy közös pontja lehet. Következik, hogy H_2^c-ben a legnagyobb fokszám $q^2 - 2q + 1$, így nincs benne K_{1,q^2-2q+2} tehát H_2 kritikus gráf $b((q-1)^2+1)$-re. $\square$

Megjegyezve, hogy $(q-1)^2+1+\left\lceil\sqrt{(q-1)^2+1}\right\rceil-1 = q^2-q+1$, az alábbi tétel a 3.3.12. lemma 3.3.13. lemma egyenes következménye.

3.3.14. Tétel. *Ha létezik q-adrendű projektív sík, és nem létezik $(q-1)$-edrendű, akkor*

$$b((q-1)^2+1) = q^2 - q + 1.$$

A legkisebb esetek, amelyekre alkalmazható a tétel a $b(37) = 43$ és a $b(101) = 111$, mivel tudjuk, hogy $q = 7, 11$ esetén létezik, $q = 6, 10$ esetén pedig nem létezik q-adrendű projektív sík. Különösen érdekes a $b(145)$ esete, mivel tudjuk, hogy létezik 13-adrendű projektív sík, de 12-edrendűről nem tudjuk, hogy létezik-e vagy sem. Azonban ha létezik, akkor a 3.3.6. állítás alapján $b(145) = 158$, ha nem létezik, akkor a 3.3.14. tétel alapján $b(145) = 157$. Ez az érvelés fordítva is igaz, és minden ilyen esetben érvényes, tehát megfogalmazhatjuk a következő tételt.

3.3.15. Tétel. *Ha létezik q-adrendű projektív sík, akkor pontosan akkor létezik $(q-1)$-edrendű, ha $n = (q-1)^2 + 1$-re*

$$b(n) = n + \lceil\sqrt{n}\rceil,$$

és pontosan akkor nem létezik, ha

$$b(n) = n + \lceil \sqrt{n} \rceil - 1.$$

A [5] cikkben megfogalmaztak továbbá egy a 3.3.11. sejtésnél gyengébb sejtést is, amelyet ha sikerülne belátni, az nagy lépést jelentene újabb $b(n)$ értékek meghatározásához.

3.3.16. Sejtés. ([5], Conjecture 17.) *Minden $2 \leq n$-re*

$$b(n) < b(n+1).$$

A [5] cikk szerzői ezután a sejtés után megjegyzik, hogy ha a sejtés igaz, akkor ebből következik, hogy $b(n) = n + \lceil \sqrt{n} \rceil$ minden $q^2 + 1 \leq n \leq (q+1)^2$-re, ahol q és $q+1$ egyaránt prímhatványok. Ennél azonban több is igaz: nem kell megkövetelni, hogy $q+1$ is prímhatvány legyen, elég, ha q az!

3.3.17. Állítás. *A 3.3.16. sejtés teljesülése esetén, ha q prímhatvány és $q^2 + 1 \leq n \leq (q+1)^2$, akkor*

$$b(n) = n + \lceil \sqrt{n} \rceil.$$

BIZONYÍTÁS. A 3.3.6. állítás alapján tudjuk, hogy ha q prímhatvány, akkor $b(q^2+1) = q^2 + q + 2$, továbbá a felső korlátból következik, hogy $b\big((q+1)^2\big) \leq q^2 + 2q + 1 + \left\lceil \sqrt{(q+1)^2} \right\rceil = q^2 + 3q + 2$. Mivel $(q+1)^2 - (q^2+1) = 2q = q^2 + 3q + 2 - (q^2 + q + 2)$, ezért az állítás következik, ha $b(n) < b(n+1)$ minden $n \geq 2$-re. $\square$

Hivatkozások

[1] N. ALON: *Paul Erdős and probabilistic reasoning*. Erdős Centennial, Bolyai Soc. Math. Stud., **25**, Springer-Verlag, New York (2013), 11-33.

[2] R.H. BRUCK; H.J. RYSER: *The nonexistence of certain finite projective planes*. Canadian Journal of Mathematics, **1**, (1949), 88-93.

[3] A. BRUNCZEL, G. ELEKES: *Véges matematika*. Egyetemi jegyzet, ELTE (2002)

[4] S.A. BURR, P. ERDŐS, R.J. FAUDREE, C.C. ROUSSEAU, R.H. SCHELP: *Some complete bipartite graph-tree Ramsey numbers*. Ann. Discrete Math., **41** (1989), 79–89.

[5] W.A. CARNIELLI, E.L. MONTE CARMELO: $K_{2,2} - K_{1,n}$ *and* $K_{2,n} - K_{2,n}$ *bipartite Ramsey numbers*. Discrete Math., **223** (2000), 83–92.

[6] G. CHEN: *A result on* C_4*-star Ramsey numbers*. Discrete Math., **163** (1997), 243–246.

[7] D. CONLON: *A new upper bound for diagonal Ramsey numbers*. Ann. of Math. (2), **170**, (2009), 941–960.

[8] G. DAMÁSDI, T. HÉGER, T. SZŐNYI: *The Zarankiewicz Problem, Cages, and Geometries*. Annales Universitatis Scientiarum Budapesti- nensis de Rolando Eötvös Nominatae, Sectio Mathematica, **56** (2013), 3–37.

[9] J. DYBIZBANSKI, T. DZIDO, S. RADZISZOWSKI: *On Some Zarankiewicz Numbers and Bipartite Ramsey Numbers for Quadrilateral*. Ars Combinatoria, **119** (2015), 275-287.

[10] P. ERDŐS, G. SZEKERES: *A Combinatorial Problem in Geometry*. Compositio Math, **2** (1935), 463-470.

[11] P. ERDŐS: *Some remarks on the theory of graphs*. Bull. Amer. Math. Soc., **53** (1947), 292-294.

[12] P. ERDŐS, A. RÉNYI, V. T. SÓS: *On a problem of graph theory*. Studia Sci. Math. Hungar., **1**, (1966), 215-235.

[13] Z. FÜREDI: *On the Number of Edges of Quadrilateral-Free Graphs*. J. Combin. Theory Ser. B, **68**, (1996), 1-6.

[14] Z. FÜREDI, M. SIMONOVITS: *The History of Degenerate (Bipartite) Extremal Graph Problems*. Erdős Centennial, Bolyai Soc. Math. Stud., **25**, Springer-Verlag, New York (2013), 169-264.

[15] A. GONÇALVES, E.L. MONTE CARMELO: *Some geometric structures and bounds for Ramsey numbers*. Discrete Math., **280** (2004), 29–38.

[16] R. K. GUY: *The many faceted problem of Zarankiewicz in: "The Many Facets of Graphs Theory"*. Lecture Notes in Maths, **110**, Springer (1969), 129-148.

[17] T. HÉGER: *Szakdolgozati konzultáció*. (2019)

[18] G. KATONA, A. RECSKI, C. SZABÓ: *A számítástudomány alapjai*. Typotex, Budapest (2006)

[19] T. KŐVÁRI, V.T. SÓS, P. TURÁN: *On a Problem of K. Zarankiewicz*. Colloquium Mathematicum, **3**, (1954), 50-57.

[20] E.L. MONTE CARMELO: *Configurations in projective planes and quadrilateral-star Ramsey numbers*. Discrete Math., **308** (2008), 3986–3991.

[21] S. RADZISZOWSKI: *Small Ramsey numbers*. Electronic J. Combin., DS1: Mar 3, 2017.
https://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/DS1

[22] F.P. RAMSEY: *On a Problem of Formal Logic*. Proceedings of the London Mathematical Society, **30** (1930), 264-286.

[23] I. REIMAN: *Über ein Problem von K. Zarankiewicz*. Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae, **9**, (1958), 269-273.

[24] J. SPENCER: *Ramsey's theorem – A new lower bound*. J. Combinatorial Theory Ser. A, **18**, (1975), 108–115.

[25] T. SZŐNYI: *Szimmetrikus struktúrák*. Egyetemi jegyzet, ELTE (2013)

[26] T.D. PARSONS: *Ramsey graphs and block designs I*. Trans. Amer. Math. Soc., **209** (1975), 33–44.

[27] T.D. PARSONS: *Graphs from projective planes*. Aequaciones Math., **14** (1976), 167–189.

[28] T.D. PARSONS: *Ramsey graph theory, in: L.W. Beineke, R.J. Wilson (Eds.), Selected Topics in graph theory*. Academic Press, (1978), 361-384.

[29] K. ZARANKIEWICZ: *Problem P101*. Colloquium Mathematicum, **2**, (1951), 301.

[30] Y.B. ZHANG, H. BROERSMA, Y.J. CHEN: *A remark on star-C_4 and wheel-C_4 Ramsey numbers*. Electron. J. Graph Theory Appl., **2** (2014), 110–114.

[31] X. M. ZHANG, Y. J. CHEN, T. C. E. CHENG: *Polarity graphs and Ramsey numbers for C_4 versus stars*. Discrete Math., **340** (2017), 655–660.

[32] X. M. ZHANG, Y. J. CHEN, T. C. E. CHENG: *Some values of Ramsey numbers for C_4 versus stars*. Finite Fields Appl., **45** (2017), 73–85.