Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Piaci egyensúlyok matematikai háttere

Szakdolgozat

Szabó Bence

Matematika BSc, alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető:

Király Tamás

ELTE Operációkutatás Tanszék

Budapest, 2018

Köszönetnyilvánítás

Itt szeretnék köszönetet mondani témavezető tanáromnak Király Tamásnak türelmét és megértését, illetve hogy egyéb elfoglaltságai mellett is tudott időt szánni rám. A téma megismertetése és az általa bemutatott szakirodalmak nagyban hozzájárultak a szakdolgozat elkészüléséhez.

Továbbá szeretnék köszönetet mondani barátaimnak és szaktársaimnak akik segítsége és bíztatása nélkül nem jutottam volna el eddig.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A piaci egyensúlyok elméletének kiindulópontjának egy XIX. századi francia közgazdászt, Léon Walrast mondják, aki 1874-ben felállította az általános modellt.Ő úgy szerette volna beárazni egy versenyzői piac termékeit, hogy, ha mindenki a lehető leggazdaságosabban vásárol be, akkor minden termék elfogyjon, azaz a kereslet és kínálat egyensúlyban van (általános egyensúlyelmélet). Bizonyítást bár nem tudott adni rá, kitalált egy módszert amiről remélte, hogy végül megadja egy piacon az egyensúlyi árakat.

1954-ben Kenneth Arrow és Gerard Debreu olyan feltételeket mutattak, melyek teljesülése mellett biztosan létezik olyan árazás ami mellett Walras egyensúlya teljesül. A cikkükben ezt ugyan sikeresen bebizonyították egy Banach-fixponttételen alapuló egzisztencia-bizonyítással, de csak a létezést tudták belátni, az ár konkrét kiszámítására nem adott megoldást. A kiszámításhoz először nézzünk egy másik modellt.

Walrastól függetlenül 1891-ben Irving Fisher a doktori disszertációjában felálított egy saját modellt, ami tekinthető a fenti egy aleseteként. Az előző elméletben az összes gazdasági szereplő lehetett mind vevő (fogyasztó), mind eladó (termelő) akár egyszerre is. Fisher piaci modellje egy résztvevőnek csak az egyiket engedi meg: mindenki vagy csak vásárló, vagy csak termelő. Ennek a modellnek a lineáris esete polinomiálisan visszavezethető az előző modell lineáris esetére, így sokan először ehhez a modellhez próbáltak algoritmust adni. Már Fisher is megadott egy hidraulikus elven működő ötletet) amit közlekedőedényekkel modellezett), amely képes lenne az egyensúlyi ár kiszámolására, de ő se tudott jó eredményt elérő matematikai módszerrel szolgálni.

Az egynsúlyi ár kiszámolására azóta többen is adtak polinomiális algoritmust (pl.: 1959 Eisenberg és Gale konvex programozási feladatként megoldották), de igazán lényeges ereményeket az előző évtizedben értek el ezen a területen. Az algoritmikus játékelmélet, numerikus analízis és egyéb más témakörök fejlődése több lehetőséget tárt fel a matematikusoknak és informatikusoknak, akik nagyban hozzájárultak mind a számítást végző gépek fejlesztéséhez, a piaci egyensúlyok hatékonyságához és az egyensúly gyorsabb kiszámításához is. Többen próbálták primál-duál problémaként, vagy szimplex módszerekkel megoldani az egyensúly problémáját.

Az első polinomiális futásidejű kombinarotikus algoritmus lineáris hasznosságokra Devanur, Papadimitrou, Saberi és Vazirani nevéhez fűződik (D-P-S-V) 2002-ben. Ezt azt algoritmust lényegesen Orlin javította tovább 2009-ben[1]

Az egyensúly kiszámításában legnagyobb szerepet talán a hasznossági függvények kapják. Valósághoz legközelebb álló modelleket ezek megfelelő választásával tudunk kapni. Leglelterjedtebb fajtájuk a később bemutatásra kerülő CES hasznossági függvények családja.

Szakdolgozatom a fent leírtak ismertetésével, matematikai leírásával, alapjaival, és játékelméleti megközelítéseikkel foglalkozik. Először ismerteti az alap-probléma matematikai leírását, a hasznossági függvényeket, majd ennek a problémának több irányú megközelítésére ad vázlatokat, amik közül egy gráfokra átírt modellen alapuló egzisztencia bizonyítást is ad. Végül pár elterjedtebb algoritmus alap ötletét mutatja be.

[1] Orlin munkájával a szakdolgozat részletesebben nem foglalkozik, részletsen Hujter Bálint munkájában[2].

1. fejezet

Egyensúlyok

1.1. Piacok matematikai modellezése

A modellben feltesszük, hogy a résztvevők között tökéletes verseny uralkodik, azaz versenyzői piac jön létre.

1.1.1. Definíció (Tökéletes piac). *Egy piac akkor tökéletes amikor:*

- *A javak homogének, nincs minőségbeli különbség azonos termékek közt.*
- *Tökéletes az információ, más szóval a piac teljesen átlátható mindenki számára, minden információval tisztában vannak.*
- *Az összes piaci szereplő racionális, azaz a rendelkezésükre álló információ alapján hasznosságukat maximalizálni igyekszenek, tetteikkel nem változtathatják meg a termékek árait, és ezzel tisztában is vannak.*
- *Minden piaci változást a résztvevők azonnali reakciója követ.*

1.1.2. Definíció (Versenyzői piac). *Tökéletes versenynek, vagy versenyzői piacnak nevezzük azt az állapotot amikor:*

- *A piac tökéletes.*
- *Az eladók közt verseny van, tehát nincs együttműködés az ár elfogadásán kívül.*

A modell:

Adott $m > 1$ darab gazdasági szereplőnk, hívjük őket kereskedőnek, és $n+1 > 1$ darab (tetszőlegesen osztható) termékünk[1]. A kereskedőket t_j-vel (traders) a termékeket g_i-vel (goods) fogjuk jelölni a továbbiakban.

Az $n + 1$-edik termék az ármércetermék, nyugodtan tekinthető a pénznek amihez a többi termék „ára" viszonyul. Az itt ismertetett modell, a pénz értékét 0-nak veszi, ha marad belőle az nem számít haszonnak, tehát mindenkinek célja elkölteni az összes pénzét. Emiatt ezentúl az ármérceterméket nem fogjuk a termékek köré sorolni, külön kezeljük, és amennyiben máshogy nem állítjuk kezdetben mindenkinek 0 van belőle. Minden jelölés és számolás így értendő.

A kereskedőket két részre oszthatjuk: termelőkre, és fogyasztókra. A bevezetőben olvasottak alapján tudhatjuk, hogy az általános modellben ez a felosztás nem diszjunkt. Adottak még továbbá:

- $x = (x_1, x_2, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n_+$ (:= eleme $\mathbb{R}^n$-nek, ahol a vektor minden komponense nemnegatív) egy csomagvektor, ami a g_i termékből x_i darabot vesz. Szokás a fogyasztó keresletének, igényének is nevezni.

- Minden $j = 1 \ldots m$ t_j-hez adott egy $w_j = (w_{1j}, \ldots w_{nj}) \in \mathbb{R}^n_+$, ami mindegyik t_j kereskedőre megadja, hogy a g_i termékből w_{ij} darabbal rendelkezik kezdetben.

$$\sum_{j=1}^{m} w_j = (\sum_{j=1}^{m} w_{1j}, ... \sum_{j=1}^{m} w_{nj}) := W$$

  $W \in \mathbb{R}^n_+$ a piacon kezdetben lévő termékmennyiség, a kínálat.

- Egy $p = (p_1, p_2, \ldots p_n) \in \mathbb{R}^n_+$ ár-vektor, ahol p_i a g_i egységárát jelöli.

- Minden $j = 1 \ldots m$ t_j-hez adott egy $u_j : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^+$ hasznossági függvény[2], ami megadja, hogy a t_j kereslедő által vásárolt x_j csomag haszna $u_j(x_j)$.

[1]Az $m, n + 1 > 1$ kikötésre azért van szükség, mert egy termék vagy egy vásárló esetén nem beszélhetnénk kereskedelemről, így nem jönne létre piac.

[2]Lineáris esetben megadható mátrixszal, amiből kiolvasható az u_{ij}, és kiszámolható minden csomagra az $u_j(x_j)$.

Ezután az összes résztvevő eladja minden termékét, majd megveszi a számára legkedvezőbb x_j csomagot, amire a következők igazak:

1) A megvett csomag annyiba kerül amennyi pénzt kapott a termékeiért.

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} p_i = \sum_{i=1}^{n} w_{ij} p_i$$

2) Minden egyéb x_k csomagra ami teljesíti 1)-t;

$$u_j(x_j) \geq u_j(x_k)$$

azaz bármelyik más csomagot választva nem érhet el nagyobb hasznot.

1.1.3. Megjegyzés. *Lineáris esetben látható, hogy a második feltétel csak úgy állhat fent, ha* $\forall$ g_i *termékre, ami* x_j*-ben pozitív mennyiséggel szerepel* $\frac{u_{ij}}{p_i}$ *maximális.*

1.2. Az egyensúlyi ár

Egyensúlyról akkor beszélünk, ha egy olyan p egyensúlyi árvektor van megadva, amikor minden kereskedő képes megvenni a számára legkedvezőbb csomagot és ezzel minden termék el is fogy. Szóval az alábbi egyenlőség teljesül:

$$\sum_{j=1}^{m} x_j = W$$

Ismertessük egy egyszerű lineáris példán:

Legyen két kereskedőnk Anett (t_1) és Benedek (t_2), akik almával (g_1) és dióval (g_2) akarnak kereskedni. Adott továbbá egy U hasznossági mátrix:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Ekkor $u_1 = 3g_1 + g_2$ és $u_2 = 2g_1 + 2g_2$. Kezdetben Anettnál van 1 alma és 4 dió ($w_1 = (1, 4)$), Benedeknél 2 alma és 1 dió ($w_2 = (2, 1)$).

Azt állítom, hogy ilyenkor a $p = (40, 20)$ árvektor egy egyensúlyi ár:

- Anett eladja a termékeit $1 \cdot 40 + 4 \cdot 20 = 120$ forintért, amiből 3 almát szeretne venni, mert bár az alma kétszer annyiba kerül, de háromszor annyi hasznot hoz neki: $x_1 = (3, 0)$
- Benedek termékei $2 \cdot 40 + 1 \cdot 20 = 100$ forintét kelnek el. Mivel mind a két termék ugyanakkora hasznot hoz neki, ezért ő az olcsóbbat választja, a diót, amiből ötöt tud venni, $x_2 = (0, 5)$

Ekkor a kereskedők összesen 3 almával és 5 dióval érkeztek, és ugyanennyivel távoztak:

$$\sum_{j=1}^{2} x_{ij} = (3, 5) = \sum_{j=1}^{2} w_{ij} = W$$

Tehát ez egy piaci egyensúly $\Rightarrow p$ egy egyensúlyi ár.

1.2.1. Megjegyzés. *Könnyű belátni, hogy ha p egy egyensúlyi ár, akkor cp ($c \in \mathbb{R}_+$ konstans) is az lesz.*

1.2.2. Definíció (Összkereslet). *Egy tárgy összkeresletének az összes fogyasztó által igényelt mennyiség összegét értjük. Jele X_i*

$$X_i = \sum_{j=1}^{m} x_{ij}$$

1.2.3. Definíció (Túlkereslet). *Egy tárgy túligényének a kereslet és kínálat különbségét értjük. Jele: Z_i*

$$Z_i = X_i - \sum_{j=1}^{m} w_{ij}$$

1.2.4. Megjegyzés. *A túlkereslet -1 szeresét túlkínálatnak hívjuk. A fogalmakat úgy szoktuk használni, hogy csak a pozitív összetevőiket nézzük.*

1.2.5. Megjegyzés. *Egy termék keresletei függenek az ártól, és nem csak egyensúlyi áraknál értelmezhetőek. Ezért a továbbiakban előfordulhat az $x_i(p)$ és $X_i(p)$ $Z_i(p)$ jelölés.*

1.2.6. Definíció (Piaci kereslet, Piaci túlkereslet). *Egy árvektorhoz tartozó piaci igényt, és piaci többletigényt a következőképp definiáljuk:*

$$X(p) = (X_1(p), X_2(p), ...X_n(p))$$

$$Z(p) = (Z_1(p), Z_2(p), ...Z_n(p))$$

1.2.7. Tétel (Walras törvény). *Walras törvénye (Walras's Law) az általános egyensúlyelmélet egyik alaptétele a következőt állítja:*

Ha egy piacon tökéletes verseny uralkodik, akkor az árakkal súlyozott túlkereslet összege 0, azaz: $pZ(p) = 0$.

Bizonyítás: *Tudjuk, hogy vásárláskor az összes fogyasztó elkölti minden pénzét:*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij}p_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} w_{ij}p_i$$

Ez azt jelenti, hogy az árakkal súlyozott összkereslet értéke megegyezik az alapkészlet árakkal súlyozott értékével. A túlkereslet definíciójából adodóan, mivel ez a kettő egyenlő, ezért a túlkereslet árakkal súlyozott összege 0.

$\square$

1.2.8. Definíció (Bruttó helyettesíthetőség (GS/WGS)). *Egy piac akkor tesz eleget a bruttó helyettesíthetőségnek, vagy angolul gross substitutability(GS)-nek, ha bármely* p_1 *és* p_2 *különböző árazásra:*

$$\text{ha } \forall k : 0 < p_k^1 \leq p_k^2 \text{ és } \exists l \in (1, 2, ...n) : p_l^1 < p_l^2$$
$$\Longrightarrow$$
$$\text{ha } p_i^1 = p_i^2 \Rightarrow Z_i(p^1) < Z_i(p^2).$$

Ha csak a $Z_i(p^1) \leq Z_i(p^2)$*-t tudjuk biztosítani, akkor beszélünk gyenge bruttó helyettesíthetőségről(WGS).*

1.2.9. Megjegyzés. *Ez azt jelenti, hogyha egy termék árát felvisszük, akkor azoknak a termékek amiknek nem változtattunk az árán, fel fog menni a kereslete, vagy WGS-nél: nem fog csökkeni a kereslete.*

1.2.1. Approximációs egyensúly

Mivel nincs kizárva, hogy egy adott piacban az egyensúlyi ár irracionális és ezért ezeket pontosan nem mindig tudjuk megadni, meg kell engednünk egy bizonyos fokú eltérést a tényleges egyensúlytól, ami már megadható. Ezt a következőképpen tesszük meg:

1.2.10. Definíció (μ-approximáció). *Azt mondjuk, hogy egy $x_j \in \mathbb{R}_+^n$ csomag μ-közelítő, vagy μ-approximációs igénye t_j kereskedőnek p árnál, ha $\mu \geq 1$-re $u_j(x_j) \leq \frac{1}{\mu}u_j^*$ és $p \cdot x_j \geq \mu p \cdot w_j$, ahol u_j^* a kereskedő optimális haszna egy adott készletnél.*

Egy p ár-vektor és x_j csomag erős μ-approximációs egyensúlyt alkotnak, ha:

- *x_j a t_j által akart csomag p árazásnál.*
- *$\forall g_i$ termékre: $\sum_{i=1}^n x_{ij} \geq \mu \sum_{i=1}^n w_{ij}$*

Egy p ár-vektor és x_j csomag gyenge μ-approximációs egyensúlyt alkotnak, ha:

- *x_j a t_j által akart μ-approximációs csomag p árazásnál.*
- *$\forall g_i$ termékre: $\sum_{i=1}^n x_{ij} \geq \mu \sum_{i=1}^n w_{ij}$*

Egy algoritmust akkor fogunk polinomiális idejűnek hívni, ha egy $(1+\epsilon)$-approximációs egyensúlyt, minden $\epsilon > 0$-ra kiszámol az input és $log(\frac{1}{\epsilon})$ méretében polinomiálisan. Ha polinomiális idejű $\frac{1}{\epsilon}$-ban, azt polinomiális idejű approximációs sémának hívjuk.

1.3. A hasznossági függvény

A fenti példában jól látszik, hogy a hasznossági függvény formája nagyban befolyásolja a kiszámíthatóság nehézségét, hiszen ezeknek keressük a maximumát az adott feltételek mellett. Az előbb látott lineáris hasznossági függvény az úgynevezett CES (constant elasticity of substitution), azaz a konstans helyettesítési rugalmasságú függvények osztályába tartozik. A CES függvények a legelterjedtebben használt hasznossági függvények, így mi is ezekkel foglalkozunk.

1.3.1. CES függvények

A CES függvények általános alakja:

$$u_j(x_j) = (\sum_{i=1}^{n}(a_{ij}x_{ij})^\rho)^{1/\rho}$$

Ahol $a_{ij} \in \mathbb{R}_+^n$ konstansok, és $0 \neq \rho < 1$.

A függvény vizsgálatához szükségünk van a helyettesítési rugalmasság fogalmára:

1.3.1. Definíció (Helyettesítési rugalmasság). *Egy függvény helyettesítési rugalmassága azt mutatja meg, hogy a függvényérték változatlansága mellett mennyivel kell változtatnunk a két változó értékének arányán, hogy a függvény adott ponton áthaladó szintvonalának meredeksége (abszolútértékben) 1%-kal emelkedjen. Jele: σ, kiszámolása:*

$$\sigma = \frac{\partial(\frac{x_2}{x_1})}{\partial|\frac{x_2}{\partial x_1}|} \cdot \frac{|\frac{\partial x_2}{\partial x_1}|}{\frac{x_2}{x_1}}$$

Ahol $\frac{\partial x_2}{\partial x_1}$ a szintvonal meredeksége.

1.3.2. Megjegyzés. *A helyettesítési rugalmasság tehát a függvény szintvonalainak „görbültségét” leíró mutatószám. Minél nagyobb egy pontban egy függvény helyettesítési rugalmassága, az adott ponthoz tartozó szintvonal annál inkább „hozzásimul” az egyeneshez, és ennek megfelelően annál nagyobb az 1%-os meredekségnöveléshez szükséges arányváltozás mértéke.*

A hasznossági függvények esetében, σ felírható ρ függvényeként:

$$\sigma = \frac{1}{1-\rho}$$

Látható, hogy σ értéke a ρ kikötései miatt 0 és $+\infty$ között bárhol lehet. Vizsgáljuk az alábbi függvényeket:

Lineáris eset:

$\sigma \to +\infty$, ha $\rho \to 1$ a *lineris* a függvény:

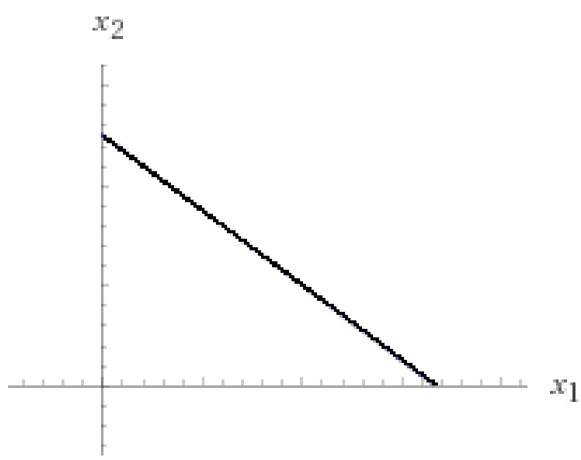
$$u(x_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_{ij}$$

Példa $i = 2$ esetén:

A hasznosság:

$$u_j = a_{1j} x_{1j} + a_{2j} x_{2j}$$

Ezt függvényt a következő egyenes írja le:



Látható, hogy egy adott u_j értéket akár csak az egyik, vagy csak a másik termék is képes előállítani (mindkettő értéke lehet 0). Ez azt jelenti, hogy az egyik termék elő tudja állítani a másik termék hasznát, ennél fogva helyettesítheti azt.

Több terméknél egyetlen pozitív árazású termék képes az összes többi pozitív árazású termék hasznának helyettesítésére. Ezért szokás ezt az esetet *tökéletes helyettesítésnek* nevezni. Emiatt a termékek változatossága egyáltalán nem számít.

Cobb-Douglas függvény:

$\sigma \to 1$, ha $\rho \to 0$. Ekkor kapjuk a *Cobb-Douglas* hasznossági függvényt:

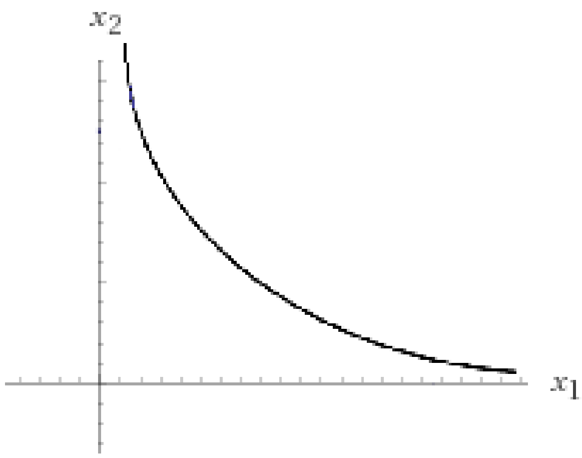
$$u(x_j) = \prod_{i=1}^{n} x_{ij}^{a_i j}$$

Példa $i = 2$ esetén:

A hasznosság:

$$u_j = x_{1j}^{a_{1j}} \cdot x_{2j}^{a_{2j}}$$

Ezt függvényt a következő hiperbola mutatja:



A képletből és az ábrából is látszik, hogy egy adott $u_j > 0$ hasznot, csak úgy érhetünk el, ha mindegyik $a_{ij} \neq 0$ termékből szigorúan pozitív mennyiséget rendelünk. Szokás jól viselkedő függvénynek nevezni, mert azon tulajdonságai (folytonos, minden változójában parciálisan differenciálható, monoton növekvő, konkáv) megkönnyítik az optimumok keresését és kezelését.

Leontief függvény:

$\sigma \to 0$, ha $\rho \to -\infty$, a *Leontief* függvény:

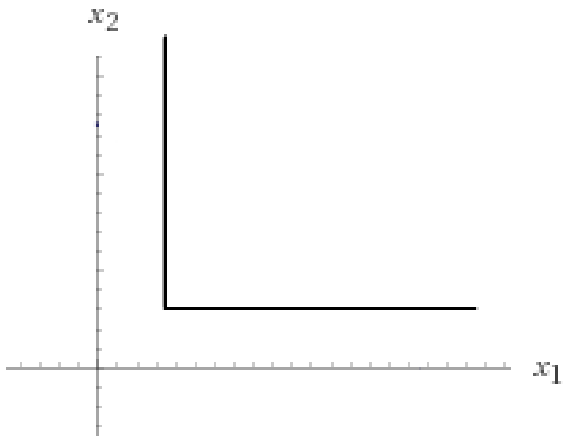
$$u(x_j) = min_i\{a_{ij}x_{ij}\}$$

Példa $i = 2$ esetén:

Ekkor a hasznosság:

$$u_j = min\{a_{1j}x_{1j}; a_{2j}x_{2j}\}$$

Ezt függvényt az alábbi képen láthatjuk:



Itt a Cobb-Douglas függvényhez hasonlóan, minden termékből kell rendelnünk poztív mennyiséget pozitív hasznosság eléréséhez. A lineáris esettel ellentétesen itt egyik teremék másikkal való helyettesíthetősége teljesen megszűnik (ezt jelenti a $\sigma = 0$). Ezért ezt az esetet a tökéletes kiegészítésnek hívjuk.

A CES függvények sikerességüket annak köszönhetik, hogy matematikailag nagyon jól lekövethető a velük való számolás és nagy a kifejező erejük. Ezek a tulajdonságok lehetővé teszik a valósághoz közel álló piacok széleskörű modellezését különböző jellemzőkhöz való preferenciák alapján. A ρ és a_{ij} paraméterek változtatásával változtatható, hogy egy adott piacban a modellező éppen a változatosságot, helyettesíthetőséget, komplementaritást, az áregyensúlyok sokféleségét, etc..., tartja fontosnak.

1.4. Játékelmélet

A játékelméletből ismert játékosok nagyon hasonlóan viselkednek a piaci modellben lévő kereskedőkhöz. Mind a kettőnek vannak preferenciái, amit hasznossági függvényekkel jellemzünk.A racionális gondolkozásukkal próbálják maximalizálni a hasznukat. A különbség viszont annyi, hogy amíg a piacnál a kereskedőknek nincs szükségük arra, hogy figyelemmel legyenek a többi kereskedőre (nincsenek egymásra hatással), úgy a játékelméletben a játékosoknak számolni kell a többiek lépéseivel. Egy piaci egyensúly keresését leginkább a Nash-egyensúly megtalálásával lehet összehasonlítani.

Vegyük a következő játékelméleti alapfogalmakat, n darab játékos esetére:

1.4.1. Definíció. *Adott S_i stratégiahalmaz (lehetséges stratégiák halmaza). $\forall$ i játékoshoz $s_i \in S_i$ egy lehetséges stratégia.*

$S = S_1 \times ... \times S_n$ stratégiavektorok halmaza. $s \in S$ stratégiavektor.

1.4.2. Definíció. *Ha $s \in S, s_i \in S_i$, ekkor $s_{-i} \in S_{-1}$ az i-n kívüli komponenseket (játékosok stratégiáit) jelöli, ahol:*

$$S_{-i} = S_1 \times ... \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times ... \times S_n$$

1.4.3. Megjegyzés. *Jelölés: $s = (s_i, s_{-i}) \in S$*

1.4.4. Definíció. *Az $u_i : S \to \mathbb{R}$-et hasznossági függvénynek nevezzük. Azt fejezi ki, hogy melyik stratégiával mennyi hasznot ér el a játékos.*

1.4.5. Definíció. *$s \in S$ domináns stratégia, ha $\forall$ i és $\forall$ $s' \in S$-re:*

$$u_i(s_i, s'_{-i}) \geq u_i(s')$$

$s \in S$ szigorúan domináns, ha domináns, és ha $s_i \neq s'_i \Rightarrow u_i(s_i, s'_{-i}) > u_i(s')$

1.4.6. Megjegyzés. *Egy domináns stratégia pont azt jelenti, hogy a többiek válaszától függetlenül, a játékos minden esetben jobban jár, ha ezt a stratégiát alkalmazza.*

1.4.7. Definíció. *$s_i \in S_i$ legjobb válasz $s_{-i} \in S_{-i}$-re, ha $\forall$ $s'_i \in S_i$-re:*

$$u_i(s) = u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i})$$

1.4.8. Definíció. *Egy $s \in S$ tiszta Nash-egyensúly, ha $\forall\ s'_i \in S_i$-re:*

$$u_i(s) \geq u_i(s'_i, s_{-i})$$

Azaz s_i legjobb válasz s_{-i}-re $\forall\ i$ esetén.

1.4.9. Megjegyzés. *Egy játékban ha Nash-egyensúly alakul ki, akkor az pont az a helyzet amikor egyik játékosnak sem éri meg változtatni a stratégiáján.*

*Ez úgymond egy „*jóslatként*" is funkcionál, hiszen mivel a játékosok optimalizálni szeretnék a nyereségüket, látható hogy végül egy ilyen helyzet fog kialakulni.*

Illusztráljuk a Nash-egyensúlyt egy elterjedt példán, a fogolydilemmán. Vegyünk egy konkrét példát: A tanulók dolgozatot írtak, és a tanár behív két tanulót (A-t és B-t) külön-külön a szobájába, hogy puskázáson kapta a másikat. Ekkor az illető dönthet, hogy beköpi-e a másikat, tudván, hogy ő is beköpheti utána őt. Ilyenkor a következő táblázatból olvashatjuk ki a játékot:

A | B	Köp	Nem köp
Köp	2 | 2	4 | 1
Nem köp	1 | 4	3 | 3

Ahol a számok A és B érdemjegyét jelentik a dolgozatra.

Könnyű belátni, hogy a köpés a domináns stratégia, hiszen ha a másik játékos köp, akkor te egyes helyett kettest kapsz, ha te is köpsz. Ha a másik játékos nem köp, akkor hármas helyett négyest kaphatsz, ha te viszont köpsz. Ekkor ha mind a két játékos ezt a stratégiát használja kapunk egy Nash-egyensúlyt is a következő állítás miatt.

1.4.10. Állítás. *Ha s domináns stratégia, akkor s Nash-egyensúly. Ha s szigorúan domináns stratégia, akkor s az egyetlen Nash-egyensúly.*

Bizonyítás: Indirekt tegyük fel, hogy s domináns stratégia, de nem Nash-egyensúly. Ha s nem Nash egyensúly akkor:

$$\exists s' \in S, \exists i : u_i(s) < u_i(s'_i, s_{-i})$$

de ez pont azt jelenti hogy s nem domináns stratégia.

Szintén indirekt tegyük fel, hogy s szigorúan domináns stratégia, és s' egy s-től különböző Nash-egyensúly. Vegyünk egy i-t amire $s_i \neq s'_i$. Ekkor:

$$u_i(s_i, s'_{-i}) > u_i(s') = u_i(s', s'_{-i}) \geq u_i(s_i, s'_{-i})$$

Ez pedig ellentmondás.

□

1.4.11. Megjegyzés. *Látható, hogy ez nem optimális, ha egyikük se köpne, mind a ketten jobban járnának mint az egyensúlyi stratégiájukkal.*

A fenti állítás fordítva nem igaz. Vegyük a következő játékot:

A és B azt a játékot játszák, hogy egyikük (A) a háta mögött egy gólyót helyez az egyik kezébe, majd a másik játékosnak (B) el kell találnia melyik kezébe rejtette a golyót. Ha eltalálja nyer egy pontot a másik játékostól, ha nem, a másik játékos kap tőle egyet. A játék táblázata a következő:

A | B	Jobb	Bal
Jobb	-1 | 1	1 | -1
Bal	1 | -1	-1 | 1

Itt nem létezik domináns stratégia: Egy játékos haszna függ a másik játékos döntésétől, akármelyik stratégiát választják az lehet mind veszteséges mind nyereséges. Ugyanezzel a logikával tiszta Nash-egyensúly sem létezik, hiszen bármi a játék kimenetele a vesztes félnek mindig megéri változtatni a stratégiáján.

1.4.12. Definíció. *m_i kevert stratégia, ha m_i egy valószínűségi eloszlás S_i-n. M_i a kevert stratégiák halmaza.*

$$M = M_1 \times ... \times M_n$$

kevert stratégiavektorok halmaza. $m \in M$ kevert stratégiavektor

Ahogy a tisztával, úgy a kevert stratégiával is léteznek a fent definiált tulajdonásgok és kevert Nash-egyensúly is.

1.4.13. Állítás. *A fenti játékban, ha a játékosok az $m = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ stratégiát választva, azaz 50% -50% eséllyel választják a jobb vagy bal kezet, kevert Nash-egyensúlyt hoznak létre.*

Bizonyítás: 50% - 50% választással egy játékos a másik játékos stratégiájától függetlenül $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ eséllyel nyer vagy veszít:

A másik játékos válasszon $0 \leq p \leq 1$ valószínűséggel jobbat, ekkor balt $1 - p$ valószínűséggel választ. Ekkor az első játékos esélye a nyerésre: $\frac{1}{2} \cdot p + \frac{1}{2} \cdot (1 - p) = \frac{1}{2}$ lesz. Így a játékos várható nyereménye $\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (-1) = 0$.

Ha a stratégiáján módosítana, akkor a második játékosnak létezni fog olyan stratégiája amikor ennél alacsonyabb lesz a várható nyereménye:

Ha azt a kezet amit kisebb ($\frac{1}{2} - q$, ahol $0 \leq q \leq \frac{1}{2}$) valószínűséggel választ, azt a másik játékos $p = 1$ eséllyel választja, akkor a várható nyereménye $\frac{1}{2} - q \cdot (-1) < 0$ lenne.

Így nem éri meg változtatni a stratégiáján, tehát ez egy kevert Nash-egyensúly.

$\square$

2. fejezet

Egyensúly létezése

A fő kérdésünk továbbra is az, hogy egy adott piaci modellben, adott hasznossági függvényekkel képesek vagyunk-e polinomális idő alatt megtalálni az egyensúlyt. Mielőtt nekiállnánk kiszámolni a tényleges egyensúlyt, először el kell tudnunk dönteni, hogy valóban létezik-e az általunk kiszemelt eredmény. Itt a CES függvényekhez fogjuk megmutatni, hogy ez a probléma megoldható polinomiális időben.

2.1. CES-függvények

Elemezzük egy CES hasznossági függvénnyel rendelkező vásárló $x_j \in \mathbb{R}_+^n$ keresletét.

Legyen a fogyasztónk j, aki kezdetben $w_j = (w_{j1}, w_{j2}, ...w_{jn}) \in \mathbb{R}_+^n$ termékkel rendelkezik, és $u_j(x_{j1}, ...x_{jn}) = (\sum_{i=1}^n (a_{ij}x_{ij})^{\rho_j})^{\frac{1}{\rho_j}}$ alakú a hasznossági függvénye, ahol $a_{ij} \geq 0$, és $-\infty < \rho_j < 1$, de $\rho_j \neq 0$.

Feltehetjük, hogy legalább egyféle terméke van, és legalább egy terméket szeretne, különben nem lenne értelme piacra jönnie: $\exists$ i: $w_{ij} > 0$, és $\exists$ k: $a_{kj} > 0$. Azokra az i-kre, amire $a_{ij} > 0$ azt monjduk, hogy a j vásárló akarja az i terméket. Ha nem akarna egy l terméket, akkor könnyű látni, hogy az általa vásárolt x_j csomag független x_{lj}-től. Elfogadjuk azt a megállapodást, miszerint, ha egy terméket egy vásárló nem akar, akkor azon 0 a haszna, akár vesz belőle, akár nem: $\forall x_{ij}$: $a_{ij} = 0 \Rightarrow u_j(x_{ij}) = 0$.

Nézzük azt az esetet, amikor $\rho_j > 0$. Vegyünk egy x kezdőcsomagot és adjunk hozzá egy tetszőlegesen kis mennyiséget abból a i termékből, amit a vásárlónk szerene. Ekkor egy olyan csomagot kapunk, amiből nagyobb a hasznunk. Ebből látható a következő:

2.1.1. Állítás. *x_j jól definiált egy adott árvektornál, akkor és csak akkor, ha $\forall$ i: $a_{ij} > 0 \Rightarrow p_i > 0$,azaz minden terméknek amit a fogyasztónk szeretne szigorúan pozitív ára van.*

Most legyen $\rho_j < 0$. A képletből kiolvasható ez az állítás:

2.1.2. Állítás. *Egy adott x_j csomagra:*

$$u_j(x_j) > 0 \Leftrightarrow (\forall\ i\colon a_{ij} > 0 \Rightarrow x_{ij} > 0)$$

Tehát akkor és csak akkor lesz pozitív haszna, ha minden termékből amit szeretne, abból vásárol is.

2.1.3. Megjegyzés. *Mivel $\rho_j < 0$ esetén a képletben szereplő $a_{ij}x_{ij}^{\rho_j}$ $x_{ij} = 0$ esetén csak akkor értelmezhető, ha $\frac{1}{0^{-\rho_j}}$-t egyenlővé tesszük ∞-vel, ebből a fenti állítás jól látszik.*

A fentihez hasonlóan itt is igaz az, hogy ha egy kezdeti x pozitív hasznosságú csomaghoz hozzáadunk tetszőlegesen keveset egy olyan termékből amit szeretne, akkor nagyobb hasznot érünk el. Legyen p egy olyan árazás, amire a kereskedő bevétele pozitív, azaz $p \cdot w_j > 0$. Ekkor mivel a kereskedő megengedhet magának egy pozitív hasznosságú csomagot, itt is levonhatjuk következésképpen a 2.1.1 állítást. Ha p-t úgy válasszuk, hogy $p \cdot w_j = 0$, ekkor a 2.1.1 állítás annyival változik, hogy elég legalább egy terméknek pozitív árazásúnak lennie a jól definiáltsághoz.

2.1.4. Megjegyzés. *A jól definiáltság ahhoz kell ennél a függvénynél, hogy ne kelljen $\frac{1}{0}$ alakú számokkal számolni. Ha van is ilyen a számítások között az meg van szorozva 0-val.*

Függetlenül attól, hogy ρ_j pozitív, vagy negatív, a pozitív bevételű kereskedők minden termékből amit szeretnének egy pozitív mennyiséget igényelnek. Továbbá a CES hasznossági függvénnyel rendelkező kereskedők nem kielégíthetőek minden általuk akart terméken, ami annyit tesz, hogy az igények nem jól definiáltak a nulla árú, általuk akart termékeken.

Szintén függetlenül ρ_j előjelétől, x jól definiált, ha $p \in \mathbb{R}^n_{++}$, azaz szigorúan pozitív az árazás. Ekkor a csomagokhoz a következő egyedülálló kifejezést kaphatjuk:

$$x_{ij}(p) = \frac{a_{ij}^{1/1-\rho_j}}{p_i^{1/1-\rho_j}} \times \frac{\sum_{k=1}^n p_k w_{jk}}{\sum_{k=1}^n a_k^{1/1-\rho_j} p_k^{-\rho_j/1-\rho_j}}$$

A formula a Kuhn-Tucker optimalizálási feltételekből van származtatva.

2.2. Egyensúly léte

Arrow és Debreu munkája bár általánosságban bebizonyította az egyensúly létét, a fentieknél sokkal gyengébb feltételekkel, de ahogyan ők is mondták, a modelljük nyilvánvalóan nem realisztikus. Így második munkájukban ezeket a feltételek próbálták a valósághoz közelebb hozni. Végül az új modellel belátták, hogy általánosságban eldönteni egy piacról hogy létezik-e benne egyensúly egy NP-nehéz probléma. Ezért van szükségünk a fenti függvényekre, és feltételekre.

Régebben felmerült a kérdés, hogy létezik-e egyáltalán olyan piac, amiben nincs egyensúly? Erre a kérdésre 1976-ben Gale mutatott egy egyszerű példát lineáris hasznosságfüggvényekre, de a példája minden $\rho > 0$ CES függvényre megállja a helyét.

Nézzük a konkrét példát:

Van két kereskedőnk, A(t_1) és B(t_2), akik almával(g_1) és naranccsal(g_2) kereskednek.A példában konkrét számokra nincs szükségünk. A-nál kezdetben van alma és narancs is, de csak almát szeretne venni, míg B-nél csak narancsok vannak, de almát és narancsot is szeretne venni.

Gale azt állította, hogy ebben a piacban nem létezik egyensúly, a következők miatt:

- Ha a narancsok ára 0, akkor B igénye nem jól-definiált, hiszen nincsen semmi bevétele.
- Ha a narancsnak pozitív ára van, akkor A megpróbálja eladni minden narancsát, hogy mégtöbb almát vegyen, annak ellenére, hogy már nála van az összes ami a piaci készleten van.

2.2.1. Megjegyzés. *Ez a példa $\rho < 0$ esetre nem működik, hiszen $p(g_1) > 0$ $p(g_2) = 0$ egy egyensúly.*

Térjünk vissza az egyensúly létezésének kérdésére CES hasznossági függvények esetén. Feltesszük, hogy minden kereskedő akar venni valamit. A továbbiakban feltesszük, hogy minden kereskedőnél pontosan egy fajta áru van kezdetben. Ezt azért tehetjük meg az általánosság korlátozása nélkül, mert ha lenne olyan kereskedőnk, akinél k féle termék is van, akkor azt a kereskedőt helyettesíthetnénk k darab kereskedővel, azonos hasznossági függvénnyekkel, és mindnél csak egyféle termék lenne a megfelelő darabszámmal. A termékek homogenitása miatt ez a transzformáció megőrzi az egyensúly létet.

Ezt transzformációra azért volt szükségünk, hogy a piacot a következőképpen ábrázolhassuk:

2.2.2. Definíció (Gazdasági gráf). *A gazdasági gráf egy olyan irányított gráf, aminek a v_j csúcsa a j-edik kereskedőt jelöli, és egy $v_j \longrightarrow v_k$ él azt jelenti, hogy a j-edik kereskedő olyan terméket birtokol, amit a k akar.*

2.2.3. Definíció (Erősen összfüggő komponens). *Egy $G_1 = (V_1, E_1)$ (irányítot) gráf erősen összeüggő részgráfján azt az $G_2 = (V_2, E_2)$ gráfot érjük, ahol $V_2 \subset V_1$, tehát G_1 csúcsainak egy részhalmaza, és E_2 E_1 összes olyan élét tartalmazza, aminek mind a két végpontja V_2-ben van ($G_2 \subset G_1$). És ezen részgráfon belül bármelyik csúcs bármelyik másik csúcsból elérhető a gráfban lévő (irányított) élek mentén, azaz bármelyik két csúcs között létezik mindkét irányban út.*

Az erősen összefüggő részgráfok ekvivalenciaosztályai által meghatározott feszített részgráfokat hívjuk erősen összefüggű komponensnek (tehát azok az erősen összefüggő részgráfok amik azon tulajdonság szerint maximálisak, hogy G_1 bármelyik további csúcsának hozzáadásával megszűnne az erős összefüggőség).

2.2.4. Tétel. *Ha a gazdasági gráf erősen összefüggő, akkor létezik egyensúly. Továbbá, a létező egyensúlyban minden termék pozitívan van árazva.*

Bizonyítás:

E tétel bizonyítására szakdolgozatom nem tér ki, de a továbbiakban számolunk vele. Ez a tétel Maxfield második tételének egy következménye. A bizonyításról több Maxfield[8] művében olvasható.

2.2.5. Definíció (On / Off). *Azt mondjuk hogy egy erősen összefüggő komponense a gazdasági gráfnak* on*, ha az összes csúcsnak (kereskedőnek) pozitív bevétele van a komponensen belül. Ha egyik kereskedőnek sincs pozitív bevétele az erősen összefüggő komponensen belül, arra mondjuk azt, hogy* off.

2.2.6. Tétel. *Egyensúlynál minden erősen összefüggű komponens vagy* on *vagy* off.

Bizonyítás:

Indirekt tegyük fel, hogy nem igaz. Vegyünk egy p egyensúlyi árat, amiben létezik olyan erősen összefüggő komponens, ami se nem on, se nem off. Ebben az esetben, kell lennie egy v_j csúcsnak, aminek pozitív a bevétele és egy olyan kereskedőtől kell neki akinek nulla a bevétele.

Mivel egy pozitív bevételű kereskedő nem kielégíthető egy null árú terméken, ezért az igénye nem jól definiált arra termékre. Emiatt p nem lehet egyensúly. Ezzel ellentmondásba ütköztünk.

$\square$

Legyen C a gazdasági gráfnak egy olyan erősen összefüggő komponense, amibe nem vezet él C-n kívülről. Az erősen összefüggőség miatt egy $v_j \in C$ által kínált tárgyat egy $v_k \in C$ kereskedő akarni fogja. Ha C egy v_j csúcsból áll, akkor mivel nincsenek kívülről érkező élek $j = k$, tehát a saját termékét akarja. Minden tárgy amit valamelyik C-ben lévő kereskedő birtokol semmilyen C-n kívüli kereskedő nem birtokolhat, hiszen akkor C-nek lenne be-éle az előbbiek miatt.

2.2.7. Lemma. *Egyensúlynál az erősen összefüggő komponensei a gazdasági gráfnak* on-*ok, akkor és csak akkor ha nincsenek bejövő éleik.*

Bizonyítás:

$\Leftarrow$ irány:

Tegyük fel, hogy létezik p egyensúlyi ár, továbbá, hogy az erősen összefüggő C_1 komponens on. Most mutassuk meg, hogy C_1-nek nincsenek bejövő élei. Indirekt tegyük fel, hogy C_1-nek mégis van befelé jövő éle. Az azt jelenti, hogy egy v_j kereskedő egy másik, C_2 komponensbből szeretne terméket vásárolni. Ezt meg is teheti, mivel van bevétele. Ha C_2 off, akkor v_j végtelen sok terméket igényelne, ami ellentmond az egyensúly feltevésének, szóval C_2 on kell hogy legyen. Ezt a gondolatmenetet felhasználva, ha C_2-nek van bejövő éle, akkor annak egy on komponenstől kell jönnie. Ebből következik, hogy ezt a láncot követve végül egy olyan komponenshez érünk, aminek nincs bejövő éle. Emiatt feltehetjük, hogy C_2-nek nincs bejövő éle.

v_j ekkor C_2-ből fogja megvenni a pozitívra értékelt termékek egy bizonyos hányadát. Ez azért fog megtörténni, mert ezt a terméket amit ő akar, csak C_2-ből tudja beszerezni, mert ha máshonnan is be tudná szerzni, akkor C_2-nek lenne bejövő éle attól a kereskedőtől aki szintén birtokolja ezt a tárgyat C_2-n kívülről. De ekkor C_2-nek nincs lehetősége, hogy ezt az értéket C_1-től visszaszerezze. Ez azért áll fent, mert C_2 vásárlói csak olyan termékekre vágynak, és ezért vásárolnak, amik csak C_2-ben fordulnak elő.

Ebből következik, hogy a C_2-ben lévő kereskedők, akik maximalizálni igyekeznek a hasznukat, nem tudják elkölteni minden pénzüket, hiszen a készletnek egy része már hiányzik onnan. Ez ellentmondt annak a feltevésnek, hogy egyensúly van, tehát nem lehet C_1-nek befejlé jövő éle.

$\Rightarrow$ irány:

Most tegyük fel, hogy az eddigi p egyensúlyi ár mellett, nincs C_1-nek befelé jövő éle. Megmutatjuk, hogy ekkor C_1 on.

Indirekt tegyük fel, hogy C_1 off (a 2.2.4-es tétel miatt csak az egyik vagy másik lehet). Ekkor mivel C_1-en belüli kereskedők csak C_1-en belüli termékeket szeretnének venni, és mindegyik termék ingyenes, ezért mindenki az általa akart termékből végtelen sokat tud venni, bár egyiküknek sincsen semmi pénze. Ez azt jelenti, hogy p nem egyensúlyi ár (hiszen a kereslet túllépi a kínálatot). Itt is ellentmondásba ütköztünk.

Mivel a lemma $\Leftarrow$ és $\Rightarrow$ irányát is beláttuk, ezzel bebizonyítottuk azt.

$\square$

A legfontosabb különbségek a $\rho > 0$ és $\rho < 0$ CES függvények között a következők:

- Kereskedők akiknél $\rho > 0$ pozitív hasznosságot érnek el már akkor is, ha csak egy olyan terméket szereznek, amit akarnak. Ezzel ellentétben a $\rho < 0$ -s kereskedők csak úgy érhetnek el valamilyen hasznot, ha minden általuk vágyott termékből pozitív mennyiséget szereznek be.

- 0 bevétel esetén akik $\rho > 0$ CES függvénnyel rendelkeznek, ha csak egy olyan terméket akarnak, aminek az ára 0, akkor x(az igényelt csomag) nem definiálható. Ellenben $\rho < 0$ esetén, csak akkor definiálatlan x, ha az összes általuk akart termék ára 0.

2.2.8. Megjegyzés. *Az első eset elég kézenfekvő, hiszen ha bevásárolni megyünk egy boltba, akkor már ha egy dolgot is tudunk venni, annak örülni tudunk, hiszen van hasznunk. A második esetet sokaknak először hirtelen nehezükre esik elképzelni, de vegyük azt az esetet amikor a célunk egy konkrét recept elkészítése. Ilyenkor ha a receptből csak egy összetevő/hozzávaló is hiányzik, nem tudjuk elkészíteni azt, így végül a hasznunk 0 lesz.*

Ezzel a különbséggel a fejezet fő tétele is foglalkozik:

2.2.9. Tétel. *Egy egyensúly akkor, és csak is akkor létezik egy gazdasági gráffal szemléltetett piacon, ha $\forall$ v csúcsra egy erősen összefüggő komponensben, amibe vezetnek be élek a következők közül az egyik igaz:*

1) v $\rho > 0$ CES hasznossági függvénnyel rendelkezik, és a bejövő élek olyan csúcsokból jönnek, amik bejövö él nélküli erősen összefüggő komponensben vannak.

2) v $\rho < 0$ CES hasznossági függvénnyel rendelkezik, és legalább egy olyan bejövő éle van, ami bejövö él nélküli erősen összefüggő komponensből jön.

Bizonyítás:

Tegyük fel, hogy létezik ilyen egyensúly p egyensúlyi árral. Ekkor 2.2.7-es lemmából tudjuk, hogy egy erősen összefüggő komponens akkor és csak akkor on, ha nincsen bejövő éle és csak azoknak a termékeknek van pozitív ára, amik ilyen komponensekben találhatóak. Legyen C_1 egy erősen összefüggő komponens bejövő élekkel (ha egy ilyen se létezik, a tétel ezen része triviálisan igaz).

$\Rightarrow_1$ Tegyük fel, hogy $\exists$ $v_j \in C_1$ ahol a hasznossági függvény $\rho > 0$ CES és van be-éle, ami egy erősen összefüggő komponensből jön, aminek van bejövő éle. Mivel C_2-nek vannak bejövő élei, ezért az ott lévő termékek árai mind nullák. Tehát v_i egy ilyen 0 árú terméket akar, amire $\rho > 0$ miatt x nem definiálható, ami ellentmond annak a feltevésnek, hogy p egyensúlyi ár.

$\Rightarrow_2$ Most tegyük fel, hogy $\exists$ $v_j \in C_1$ ahol a hasznossági függvény $\rho < 0$ CES és egyik bejövő éle sem jön olyan erősen összefüggő komponensből, aminek nincs bejövő éle. Ez az előző alapján $\rho < 0$ tulajdonságait használva pont azt jelenti, hogy az összes termék amit szeretne, annak az ára 0. Ez szintén ellentmond az egyensúly létének.

A $\Leftarrow$ irányok belátásához tegyük fel, hogy $\forall$ v_j csúcshoz, ami egy olyan erősen összefüggő komponensben van aminek vannak bejövő élei, tartozik egy olyan bejövő él, ami egy olyan erősen összfüggő komponensből jön, aminek nincsen bejövő éle. Akkor a 2.2.4-es tétel értelmében, az összes ilyen erősen összefüggő komponenst tekinthetünk egy külön gazdaságnak, amikben létezik pozitívan árazott egyensúly. Hívjuk ezeken részgazdaságnak. Mivel nincs bejövő élük, az azt jelenti, hogy egyik részgazdaságon belüli terméket se árulják azon kívül, szóval az ár jól definiált.

Minden terméknek amit a bejövő élekkel rendelkező komponensben találhatunk 0 árat adunk meg (megtehetjünk, hiszen egyik ilyen termék se található meg olyan helyen, ahol már beláttuk, hogy létezik poiztív árazású egyensúly). Ekkor azt állítjuk, hogy 2.2.4 tétel alapján létező p_i árazások a részgazdaságokban, a 0 árú termékekkel együtt, egy $p = (p_{1i}, ...p_{ni}, 0, ...0)$ egyensúlyi árat alkotnak a gazdaság egészére.

A részgazdaságban, azaz a be-élek nélküli komponensekben lévő kereskedők minden terméket a saját gazdaságukból akarnak, így belátható, hogy számukra az a csomag amit a részgazdaság egyensúlyába rendelnének, ugyanúgy megfelelő az eredeti gazdaságban is. A részgazdaságból kimenő élek (tehát a kívülről érkező vásárlási igények) nem zavarnak bele ebbe az egyensúlyba a következők miatt:

Vizsgáljunk meg egy kereskedőt a bejövő éllel rendelkező komponensből. Tudjuk, hogy mivel az általa árult termék ára 0, ezért a bevétele is 0 lesz. Azt állítjuk, hogy az igénye jól definiált, és $x = (0, ..0)$ csomag egy érvényes választás.

1) $\rho > 0$ CES esetén mivel az van állítva, hogy minden v_j-nek a bejövő élei csak erősen összefüggő bejövő él nélküli komponensből jöhet, ez azt jelenti, hogy minden termék amit akar, az pozitívan van árazva.

2) $\rho < 0$ CES esetén esetén az állításból az következik, hogy legalább egy pozitív árú terméket szeretne.

Mindkettőből következik, hogy az itt lévő kereskedők maximum haszna 0 (első példánál nyilvánvaló, másodiknál pedig korábban meg lett mutatva, hogy $\rho < 0$ esetén csak akkor ér el a kereskedő pozitív hasznot, ha minden általa akart termékből pozitív mennyiséget tud szerezni).

Már csak azt kell belátni, hogy a 2) esetben a kereslet nem lépi túl a készletet (ez az 1) esetben triviálisan fennál a részgazdaságok egyensúlya, és amiatt, hogy a 0 bevételű kereskedők csak pozitívan árazott termékeket szeretnének). Mivel azok akiknek van bevételük nem akarnak semmi ingyenes terméket, és tőlük null bevételű kereskedők nem tudnak vásárolni, ezért a részgazdaságokban ez nem probléma. Ezen felül mivel megadtuk, hogy minden más kereskedőnek $x = (0, ..0)$ az igénye, ez a feltétel minden máshol fennáll.

□

2.2.10. Megjegyzés. *A tétel $\rho < 0$ esete kiterjeszthető a Cobb-Douglas esetre, mivel minden érdemleges tulajdonságában a két eset megegyezik.*

Mivel az összes feltett állítás polinomiális időben ellenőrizhető, ezzel megadtunk egy polinomiális idejű algoritmust annak eldöntésére, hogy egy megfelelő hasznossági függvénnyel rendelkező piacban létezik-e egyensúly.

3. fejezet

A kiszámolás

Miután eldöntöttük, hogy meg tudjuk-e határozni hogy egy adott piacban létezik-e egyensúly, a kedvező esetekben rátérhetünk a konkrét kiszámolásra. Ebben a fejezetben különböző algoritmusok bemutatásáról és összehasonlításukról lesz szó.

3.1. Fisher-piac

Ahogy a bevezetésben is olvasható, a Fisher piac tekinthető Walras modelljének egy speciális esetének, aminek most a lineáris esetét fogjuk vázolni:

A lineáris modellben adottak:

- $G = \{1, 2, ...n\}$: n darab eladásra kínált termék. Itt feltesszük, hogy minden termékből egységnyi darab van a piacon, ami tetszőlegesen osztható. Ezt megtehetjünk, mert ha termékszámot elosztjuk egy λ számmal, és λ-szorosára növeljük az árat, ugyanazt a piaci helyzetet kapjuk.
- $T = \{1, 2, ...m\}$: m darab vásárló.
- $\forall\ t_j \in T$ vásárlóhoz adott egy m_j kezdeti pénzmennyiség.
- $\forall\ t_j \in T$, $g_j \in G$ párra adott egy u_{ij}: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ lineáris hasznossági függvény.
- Egy $p = (p_1, p_2, ...p_n)$ ár vektor.

Itt a kereskedők két típusa diszjunkt.

3.2. Algoritmusok

Ebben a szakaszban különböző kiszámítási módok kerülnek bemutatásra, melyek egy alap képet adnak a különböző piaci egyensúlyok kiszámításának összetettségéről. Majd ezek után egy új eredményre való felhívás, és egy játékelméleti megközelítés található.

3.2.1. Tatonnement

Ennek az algoritmusnak alap ötlete Walrastól[1] származik, aki a következőt gondolta:

Tekintsünk a modellre, mint egy árverésre. Az árverésen az árverésvezető fog kikiáltani egy p^0 ár-vektort az ott lévő termékekre.

Az ár kikiálltása után minden kereskedő kiszámolja az általa megvenni kívánt csomagot, majd ezt közli az árverésvezetővel. Ezután a vezető kiszámolja a piaci túlkeresetet (Z-t) a kapott információk alapján, majd a következőképp módosítja az árakat:

- Ha egy tárgyból a jelenlévőknek több az összekerslete mint a piac kínálata, akkor annak a tárgynak az árát növelni fogja.
- Ha egy tárgyból nem kérik az összes kínálaton lévőt, annak csökkenteni fogja az árát.

Az így kapott új p^1 ár-vektort majd ismét nyilvánosságra hozza. Ez addig ismétlődik amíg $Z(p^n) \leq 0$, azaz amíg egyensúlyi árhoz nem jutunk. Formálisan:

$$p^k + 1 = p^k + f(Z(p^k))$$

ahol f egy úgynevezett előjel-megőrző (sign preserving) függvény.

Walras csak remélte, hogy az ötlete hosszútávon egy tényleges egyensúly megtalálásához vezet, biztonyítani nem tudta. Később rengetegen foglalkoztak az algoritmussal, és végül belátták, hogy ez a módszer csak akkor vezet eredményre, ha a piac kielégíti a WGS-t.

[1] A tâtonnement Francia szó, jelentése kitapogatózás. Eléggé beszédes név, hiszen az algoritmusban az egyensúlyi árat lépésenként közelítjük meg, mondhatni kitapogatózzuk.

3.2.2. D-P-S-V algoritmus

A D-P-S-V (Devanur, Papadimitrou, Saberi, Vazirani) algoritmus volt az első polinomiális futásidejű algoritmus ami a lineáris Fisher piacon megadott egy egyensúlyt. Ez az algoritmus csak egész m_j-re és $u_j(x_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_{ij}$, $a_{ij} \in Z$ azaz lineáris hasznossági függvényekre fogja megadni az egyensúlyt, ahol $a_{ij} \in Z$.

A modell felépítése:

Legyen $N(p)$ hálózat a következő:

- Csúcshalmaza: $G \cup T \cup (s, t)$
- Élek: s-ből $\forall$ g_i-be megy egy irányított p_i kapacitású él és $\forall$ t_j-ből t-be megy egy irányított m_j kapacitású él.
- G és T halmaz közt pedig $G \rightarrow T$ irányított pontos élek haladnak azokra a g_i, t_j párokra, amikre $\frac{u_{ij}}{p_i} = \alpha_i = max_k \frac{u_{ik}}{p_k}$. Kapacitásuk végtelen.

Az algoritmus: Az így felépített struktúrában, ha egy adott p ár-vektorra az $N(p)$ hálózatban $\exists$ f folyam, ami telíti az s-ből kimenő és t-be bemenő éleket, akkor p egy egyensúlyi ár. Egy vevőhöz tartozó x_j csomagot a pontos élekről tudjuk leolvasni.

3.2.3. PATH solver

A PATH solver egy népszerű módszer a számítástechnikában a piaci egyensúlyok kiszámítására úgy, hogy azt egyre jobban közelítjük. Alapja a numerikus analízis talán leghíresebb nem-lináris egyenletmegoldás kereső eszköze, a Newton módszer. Először ismertessük a módszer ötletét:

Egy függvénynek keressük a gyökeit. Induljunk ki egy tetszőleges x_0 kezdőpontból, amin a következő iterációs lépést hajtuk végre:

$$x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Ezt az iterációt ismételve egyre jobban megközelíthetjük, ráadásul nagyon gyorsan konvergálhatunk az eredményhez, de csak akkor ha sikerült az x_0 kezdőpontot „elég” közel megadni a kívánt eredményhez. Az hogy mennyire kell közel lennie és mekkora a konvergenciasebesség a függvénytől függ.

A módszer használható min / max értékek keresésére is, hiszen ha a függvényünk deriválható, a deriváltjának gyökei szélsőértékhelyeket adnak meg. Ezt a tulajdonságát használja ki a PATH solver.

Hogy ne forduljon elő velünk, úgymond *fölöslegesen* számolunk az eredménytől való túl távoli kezdés miatt, a solver minden egyes iterációs lépés után végez egy ellenőrzést, hogy valamiféle haladást tettünk akkor is, ha távoli még az egyensúly.

3.2.4. Konvex programozás

Ez a megoldás amit Eisenberg és Gale mutatott be 1959-ben szinten a lineáris Fisher modellre ad eredményt, azzal hogy az egyensúly megtalálásának problémáját egy konvex programozási feladatként írták fel. A program nem egy árat ad vissza, hanem az x_j csomagok egyensúlyi elosztását. Az ár kiszámítható a hasznossági függvények és az igényelt termékek ismeretében.

Ekkor a programnak, aminek a megoldása egy ilyen egyensúlyi elosztást, a piaci egyensúlynak megfelelő korlátozásokat kell adnunk (mint pl.: kereslet / kínálat viszonya). Továbbá a célfüggvénynek, ami a hasznosság maximalizására törekszik teljesítenie kell al alábbi tulajdonságokat:

- Ha vevő hasznosságai konstansszorosra nőnek, az optimális elosztás nem változik.
- Ha egy t_j vevő kezdeti pénzét szétosztjuk két, vagy több új vevő közt $(t_1^{'}, t_2^{'}...t_m^{'})$, akiknek ugyanaz a hasznossági függvényük mint t_j-nek, akkor

  $$\sum_{j=1}^{m} x(t_j^{'}) = x(t_j)$$

  Azaz az új vevők optimális elosztásának az összege megegyezik az eredeti vevő optimális elosztásával.

A fenti tulajdonságokat kielégíti az árakkal súlyozott számtani közepe a vevők hasznosságainak:

$$max_i(\prod_{j=1}^{m} u_{ij}^{m_j})^{1/\sum_{j=1}^{m} m_j}$$

Ennek az ekvivalens $max_i \prod_j u_{ij}^{m_j}$ alakjának logaritmusát használják fel a programban:

Maximalizáljuk i-re

$$\sum_{j=1}^{m} m_j \cdot log(u_{ij})$$

A következő feltételekkel:

$$\forall\ t_j\text{-re: } u_j = \sum_{i=1}^{n} u_{ij}x_{ij}$$
$$\forall\ g_i\text{-re: } \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq 1$$
$$\forall\ t_j \text{ és } \forall\ g_i\text{-re: } x_{ij} \geq 0;$$

Továbbá, egy ilyen x_{ij} optimális elosztásra, és a hozzá tartozo p egyensúlyi árra, a Karush-Kuhn-Tucker feltételek szerint, teljesülnek a következők:

1) $\forall\ g_i$-re: $p_j \geq 0$. Egy termék ára nem lehet negatív.

2) $\forall\ g_i$-re: ha $p_j > 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1$. Ha egy termék ára pozitív, akkor abból mindet megveszik.

3) $\forall\ t_j$-re és $\forall\ g_i$-re: $\frac{u_{ij}}{p_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} u_{ij}x_{ij}}{m_j}$. Egy csomag ár-érték aránya nem lehet kisebb mint bármelyik terméké.

4) $\forall\ t_j$-re és $\forall\ g_i$-re: $x_{ij} > 0 \Rightarrow \frac{u_{ij}}{p_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} u_{ij}x_{ij}}{m_j}$. Egy csomagban ha egy termékből pozitív mennyiséget rendelnek, annak a terméknek az ár-értéke aránya megegyezik az csomagéval.

3.2.1. Megjegyzés. *A 3) és 4)-esből az látszik, hogy csak maximális ár-érték arányú termékek szerepelnek az egyensúlyi elosztásban.*

Ezekből a feltételekből már egyértelműen látszik, hogy a program által adott x elosztás kielégíti a piaci egyensúly követelményeit.

3.2.5. Egy erősen polinomiális algoritmus

3.2.2. Definíció (Erősen polinomiális futásidő). *Egy erősen polinomális algoritmusban az alapműveletek, úgy mint összadás, kivonás, szorzás, osztás és az elemek osszehasonlítása mind egységnyi idő alatt végződnek el. Egy algortimusnak erősen polinomiális a futásideje, ha:*

1) A műveletek száma felülről korlátos polinomiálisan az input egészeinek számában.

2) Az algoritmus által elfoglalt tárhely felülről korlátos polinomiálisan az input méretével.

Az algrotimus egy lineáris Arrow-Debreu piacon számolja ki az egyensúlyi árat erősen polinomiális időben. A modell felteszi a Fisher modellhez hasonlóan, hogy minden termékből egységnyi áll rendelkezésünre, továbbá azt is, hogy egy adott termék teljes egészében egy vásárolónál van (nincs két olyan vásárló aki azonos terméket hozna).

A modell alapja megegyezik a D-P-S-V algoritmusnál használt gráfos megoldással, úgy alakítva, hogy itt a kereskedők két típusa nem diszjunkt. Továbbá itt minden t_j és g_i között fut él, amire $u_{ij} > 0$. Az algoritmus ezeket az éleket vizsgálja, és szépen lassan „felfedi" őket, miközben az árakat változtatja. A felfedett éleknek maximális az ár-érték arányuk.

Az algoritmus több másik al-algoritmuson keresztül, poliéderek transzformációján át, szerteágazó matematikai módszerekkel jut el végül egy olyan árhoz, és felfedett élhalmazhoz, amiből kiolvasható az egyensúly. Az algortimusről bővebben [10]-ben lehet olvasni.

3.2.6. A Fisher játék

Módosítsuk Fisher modelljét úgy, hogy a kereskedők számára a pénz is értékkel bír, szóval nem célük elkölteni minden vagyonukat. Ekkor mivel a hasznuk függ egy saját magunknál lévő „terméktől", így a vásárlás utáni hasznukat számukra kedvező irányba tudják módosítani azzal, ha úgy döntenek, hogy a kezdeti m_j pénzösszegük egy bizonyos részét megtartják, így az általuk vásárolt x_j csomagban a termékek mennyisége változik. Mivel megváltoztatják ezzel a piac összkeresetét, ezért a termékek árai abban az irányban módosulnak, hogy ezt a túlkeresetet vagy hiányt pótolni tudják így a hasznuk is módosul. Ezzel egy stratégiai játék alakul ki, hiszen az egyensúlyi ár, és ezzel együtt minden kereskedőnek az egyéni haszna függeni fog minden más kereskedő döntésétől. A piaci egyensúly megadása ekkor megtehető az így kialakult játék Nash-egyensúlyának megtalálásával.

Az előzően leírtak miatt nyilván az így megtalált egyensúly közel sem biztos, hogy optimális lesz, mégis olyan helyzetet fogunk találni, amiben senkinek sem éri meg más stratégiát használni, mert ezzel a saját hasznát fogja csökkenteni (kooperáció továbbra sincs a felek közt, annak léte teljesen megváltoztatná a feladatot). Éppen ezért szokás ezt *tökéletlen versenynek* nevezni.

3.2.3. Definíció (A tökéletlen verseny ára (PoIC)). *A fogalom angol szakirodalomban* Price of Imperfect Competition*-ként lelhető fel, innen a rövidítés. A PoIC azt a lehető lekisebb Nash-egyensúlyi haszon / Walrasi egyensúlyi haszon arányt adja meg. Tehát ez az arányszám azt mondja meg, hogy legrosszabb esetben is, legalább az optimális haszon hányad részét kaphatjuk meg, ha a fenti modell szerint számolunk.*

3.2.4. Megjegyzés. *Belátható, hogy $PoIC \geq \frac{1}{2}$, ha a hasznossági függvény $0 \geq \rho \geq 1$ CES függvény. Tovbábbá az is, hogy a keresett Nash-egyensúly létezik, ha a Cobb-Douglas függvényt használunk, ellenben a lineáris függvénnyel, ahol nem mindig van ilyen egyensúlyi helyzet.*

A játékban a vevők (játékosok) stratégiáinak halmaza: $S_j = \{s_j \geq 0 \mid s \leq m_j\}$. Ahol s_j azt jelöli, hogy mennyi pént tervez elkölteni. A játékban a hasznukat nevezzük totális haszonnak:

$$U_i(s) = u_j(x_j(s)) + (m_j - s_j)$$

ahol $s = (s_1, ...s_m)$, az elköltésre szánt pénzből álló vektor. A Nash-egyensúly egy olyan s vektor lesz, amire $U_j(s) \geq U_j(s_j^{'}, s_{-j})$; $\forall\ s_j^{'} \in S_j$ stratégiára és $\forall\ t_j$; $j = 1, 2, ...m$ játékosra.

Irodalomjegyzék

[1] CSEKŐ IMRE, *Rövid bevezetés az általános egyensúly elméletébe*, 2016

[2] HUJTER BÁLINT, *Piaci egyensúlyok keresése kombinatorikus algoritmusokkal*, ELTE 2010

[3] TARDOS ZSÓFIA, *Arrow-Debreu piacmodell és megoldása*, ELTE 2010

[4] BENTON JOHN MCCUNE, *Algorithmic game theory and the computation of market equilibria*, University of Iowa 2009

[5] SUNGPACK HONG, NICOLE C. RODIA, KUNLE OLUKOTUN, *On Fast Parallel Detection of Strongly Connected Components in Small-World Graphs*, 2013

[6] JUGAL GARG, LÁSZLÓ A. VÉGH, *A Strongly Polynomial Algorithm for Linear Exchange Markets*, 2018

[7] PAPP OLGA, KIRÁLY TAMÁS, *Jegyzet az Operációkutatás II című tárgyhoz*, 2015

[8] K. ARROW, G. DEBREU, *Existence of an equilibrium for a competitive economy*, Econometrica vol 22:265-290, 1954

[9] ROBERT R. MAXFIELD, *General equilibrium and the theory of directed graphs*, Journal of Mathematical Economics, Vol 27:23–51 page, 1997

[10] RUTA MEHTA, NITHUM THAIN, LÁSZLÓ A. VÉGH, ADRIAN VETTA, *To Save Or Not To Save: The Fisher Game*

[11] JUGAL GARG, LÁSZLÓ A. VÉGH, *A strongly polynomial algorithm for linear exchange matkets*, 2018

[12] EDMUND EISENBERG, DAVID GALE, *Consensus of subjective probabilities: The parimutuel method*, The Annals of Mathematical Statistics, vol 30, 1959

[13] KARÁTSON JÁNOS, *Numerikus Funkcionálanalízis*, Typotex, 2014

[14] DR. NAGY TAMÁS *Közgazdasági Modellek 1.*, 2012