Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Hajdu Gergely

Inverz kombinatorikus optimalizálási problémák

BSc Alkalmazott Matematikus Szakdolgozat

Témavezető:

Frank András, egyetemi tanár
Operációkutatási Tanszék

Budapest, 2020

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Frank Andrásnak, hogy elvállalta a közös munkát. Ötleteivel, kérdéseivel és tanácsaival végig segítette a szakdolgozatom elkészülését. Köszönöm a rengeteg időt és energiát, amit a konzultációk során abba fektetett, hogy minél jobb dolgozat születhessen.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Szakdolgozatomban inverz kombinatorikus optimalizálási problémák megoldását fogom bemutatni. Egy tipikus kombinatorikus optimalizálási problémában egy előre adott c költség-függvényhez keresünk legolcsóbb előírt tulajdonságú objektumot. Például egy gráfban kereshetünk legolcsóbb feszítő fát, vagy legolcsóbb st-utat, vagy egy páros gráfban minimális költségű teljes párosítást. A megfelelő inverz feladatban a c-költség-függvényen kívül adott egy konkrét z szóba jövő objektum is (pl. feszítő fa) és a feladat a c legkisebb mértékben történő megváltoztatása úgy, hogy a megadott z objektum a kapott c'-re nézve legolcsóbb legyen.

Az inverz kombinatorikus feladatokat a '90-es évek elején kezdték kutatni. Az inverz legolcsóbb útról először 1992-ben Toint és Burton [8] írtak, a problémát ők l_2 normában vizsgálták, azaz a változtatást négyzetösszeggel mérték. Mi most, a különböző feladatokat l_1 normában fogjuk vizsgálni, azaz a komponensenként vett változtatások abszolút értékeinek összegét szeretnénk minimalizálni. Mindenekelőtt nézzünk egy-két gyakorlati alkalmazást.

Az inverz optimalizálás egyik legfontosabb geofizikai alkalmazása a földrengések mozgásának előrejelzése. Egy adott földrajzi területet felbontanak kisebb cellákra, ezeket a cellákat modellezik pontokkal, a szomszédságot élekkel valamint egy ezeken értelmezett áthaladási időfüggvénnyel. Ezeket az időket nem tudják pontosan mérni, csak közelíteni tudják, viszont egy földrengés megvizsgálásával feltéve, hogy mindig a legolcsóbb úton halad, a közelítő értékeket tudják pontosítani [22]. Erről kimutatható (lásd 3.1.3. fejezet), hogy egy inverz legolcsóbb út keresés.

Egy másik alkalmazás, a fizetős utak terheltségének szabályozása. Egy úthálózatba bizonyos útszakaszokat az emberek előnyben részesítenek alternatív utakkal szemben, azt szeretnénk, elérni, hogy csökkentsük ezeken az utakon a forgalmat. Ehhez, egyik megoldás lenne az utak bővítése, azonban ez költséges, másik megoldás, hogy bizonyos utak használatának költségén módosítunk, arra azért figyelve, hogy ne legyen túl nagy a változtatás [24]. Ez egy inverz folyam feladat.

A dolgozat második fejezetében megnézzük hogyan írható le egy általános lineáris program inverze, majd megnézzük azt a speciális esetet, melynek segítségével egyszerűbb inverz kombinatorikus feladatok megoldhatók.

A harmadik fejezetben néhány inverz kombinatorikus optimalizálási feladat megoldását nézzük meg. Itt láthatunk különböző megközelítéseket a problémák leírására.

A negyedik fejezetben az inverz legolcsóbb feszítő fenyő problémát mutatom be. Az előzőekkel ellentétben, a szakirodalomban található megoldás helyett, egy új algoritmus kerül részletes bemutatásra. Kapcsolatot találunk az inverz feladat és egy speciális magrendszer legolcsóbb lefedése között. Ennek segítségével nem csak egy egyszerűen bizonyított algoritmust kapunk, hanem egy min-max tételt is az optimumra. Ilyen tétel korábbi cikkekben nem található.

2. Inverz lineáris program

Az általános inverz lineáris programot R. K. Ahuja és J. B. Orlin [5] írta le, nekünk az l_1 normában vizsgált megoldásra lesz szükségünk. Legyen $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $c \in \mathbf{R}^n$, $b \in \mathbf{R}^m$, $f < g \in \bar{\mathbf{R}}^n$, $I := \{1, \ldots, m\}$, $J := \{1, \ldots, n\}$. Vizsgáljuk a következő LP feladatot

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ Ax &\geq b, \\ f \leq x &\leq g. \end{aligned} \tag{1}$$

Társítsuk a $\pi \in \mathbf{R}^m$, $\varphi, \gamma \in \mathbf{R}^n$ duális változókat (1) megkötéseihez, így a következő duális feladathoz jutunk

$$\begin{aligned} \max \quad & \pi b + \varphi f - \gamma g \\ \pi A + \varphi - \gamma &= c, \\ \pi \geq 0, \ \varphi \geq 0, \ \gamma &\geq 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Legyen (1) megengedett megoldása x_0. Ekkor az x_0-hoz tartozó **inverz probléma**, hogy olyan c^*-t keresünk c helyére, amivel x_0 optimális megoldása lesz (1)-nek úgy, hogy c^* a lehető legkisebb mértékben térjen el c-től, azaz:

$$\begin{aligned} \min \quad & \|c - c^*\| \\ & c^* x_0 = min\{c^* x : Ax \geq b, f \leq x \leq g\}. \end{aligned} \tag{3}$$

Definiáljuk a következő halmazokat: $B := \{i \in I : \sum_{j \in J} a_{ij} x_{0j} = b_i\}$, $F := \{j \in J : x_{0j} = f_j\}$, $G := \{j \in J : x_{0j} = g_j\}$, $T := J \setminus (F \cup G) = \{j \in J : f_j < x_{0j} < g_j\}$. Ekkor B, F és G azok az indexhalmazok ahol (1) megszorításai egyenlőséggel teljesülnek $x = x_0$ esetén. Dualitás tétel következményeképp x_0 optimális megoldása (1)-nek, ha c-t c^*-re cseréljük akkor és csak akkor, ha léteznek π, φ, γ duális változók, melyekre

$$
\begin{aligned}
\sum_{i\in B} a_{ij}\pi_i + \varphi_j = c_j^* \quad & \text{ha } j \in F,\\
\sum_{i\in B} a_{ij}\pi_i - \gamma_j = c_j^* \quad & \text{ha } j \in G,\\
\sum_{i\in B} a_{ij}\pi_i = c_j^* \quad & \text{ha } j \in T,\\
\pi \geq 0,\ \varphi \geq 0,\ \gamma \geq 0. &
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Itt valójában a duál változóknak csak B-ben levő elemei szerepelnek. Ezzel az (1)-hez tartozó inverz problémát (3) a következő alakra hozhatjuk

$$
\min\{\|c - c^*\| : \text{Létezik } \pi \in \mathbf{R}^m,\ \varphi, \gamma \in \mathbf{R}^n \text{ ami kielégíti (4)-et.}\} \tag{5}
$$

Szimmetrikusan súlyozott l_1 normával a kapott (5) linearizálható. Vezessük be az $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^n_+$ változókat, hogy $c^* = c + \alpha - \beta$ (ekkor β_j elhagyható ha $j \in F$, mert ha szükséges φ_j növelhető, hasonlóan $\alpha_j = 0$ ha $j \in G$), így a következő alakhoz jutunk

$$
\begin{aligned}
\max \quad & -w\alpha - w\beta\\
\sum_{i\in B} a_{ij}\pi_i + \varphi_j - \alpha_j = c_j \quad & \text{ha } j \in F,\\
\sum_{i\in B} a_{ij}\pi_i - \gamma_j + \beta_j = c_j \quad & \text{ha } j \in G,\\
\sum_{i\in B} a_{ij}\pi_i - \alpha + \beta = c_j \quad & \text{ha } j \in T,\\
\pi \geq 0,\ \varphi \geq 0,\ \gamma \geq 0,\ \alpha \geq 0,\ \beta \geq 0. &
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Rendeljük az y'_j duál változót a j-edik feltételhez, majd lineárisan változtassunk rajta $y'_j = y_j - x_{0j}$ (ezzel a $\pi, \varphi, \gamma, \alpha, \beta$ nem változnak), ezzel felírható

(6) duálisa:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & cy \\
A_B y &\geq b_B, \\
f_j \leq y_j &\leq f_j + w_j && \text{minden } j\text{-re, ahol } f_j = x_{0j}, \\
g_j - w_j \leq y_j &\leq g_j && \text{minden } j\text{-re, ahol } x_{0j} = g_j, \\
x_{0j} - w_j \leq y_j &\leq x_{0j} + w_j && \text{minden } j\text{-re, ahol } f_j < x_{0j} < g_j, \\
y &\in \mathbf{R}^n,
\end{aligned}
\tag{7}
$$

ahol A_B és b_B az A és b B-ben levő sorait jelenti. Tehát (3) inverz probléma megoldásához (7) lineáris programot kell megoldanunk y változóra. Ez hasonlít az eredeti (1) problémához, az x_0-ra nézve inaktív egyenlőtlenségeket elhagytuk, illetve módosultak a felső és alsó korlátok.

1. Tétel (Ahuja és Orlin [5]). *Legyen x_0 (1) lineáris program megengedett megoldása , y a (7) optimális megoldása, π (7) $A_B y \geq b_B$ megkötéseihez tartozó duális változó és $c_j^\pi := c_j - \sum_{i \in B} a_{ij}\pi_i$. Ekkor (3) megoldása szimmetrikusan súlyozott l_1 normával:*

$$
c_j^* = \begin{cases} c_j - \left|c_j^\pi\right| & \textit{ha } c_j^\pi > 0 \textit{ és } x_{0j} > f_j, \\ c_j + \left|c_j^\pi\right| & \textit{ha } c_j^\pi < 0 \textit{ és } x_{0j} < g_j, \\ c_j & \textit{egyébként.} \end{cases} \tag{8}
$$

Itt az abszolút értékek csupán annak a jelölésére szolgálnak, hogy valójában növelünk vagy csökkentünk az eredeti költségen.

2.1. Egy speciális eset

Vizsgáljuk meg mit jelent (7) abban az esetben, ha az eredeti (1) egy kombinatorikus optimalizálási feladatot ír le, melyben A egy TU-mátrix, $f = 0$, $g = 1$, $b \in \mathbf{Z}$ és $x_0 \in \{0,1\}^m$. Ekkor, egységsúlyozott normában, azaz $w = 1$ esetén (7) a következő alakra egyszerűsödik:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & cy \\
A_B y &\geq b_B \\
0 \leq y &\leq 1,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

ami megegyezik (1) néhány sorának elhagyásával (azokat a sorokat hagyjuk el, ahol $Ax_0 > b$), továbbá ha $Ax_0 \geq b$ egyenlőséggel teljesül minden sorban, akkor pontosan az eredeti (1)-t kapjuk. Ekkor (9) tehát szintén egy kombinatorikus optimalizálási feladat, melynek létezik $0-1$ értékű x' optimális megoldása. Legyen π egy optimális duális megoldás. Megjegyezzük, hogy egész-értékű c esetén π is választható egész-értékűnek. Legyen c_j^π mint az 1. tételben, ekkor $c_j^\pi < 0$ akkor és csak akkor, ha $x'_j = 1$, és $c_j^\pi > 0$ akkor és csak akkor, ha $x'_j = 0$. Ezek felhasználásával az 1. tétel szerint az inverz probléma optimális megoldása:

$$
c_j^* = \begin{cases} c_j - \left|c_j^\pi\right| & \text{ha } x_{0j} = 1 \text{ és } x'_j = 0, \\ c_j + \left|c_j^\pi\right| & \text{ha } x_{0j} = 0 \text{ és } x'_j = 1, \\ c_j & \text{egyébként.} \end{cases}
\tag{10}
$$

Mivel π választható egész-értékűnek ha c egész-értékű, így c^* definíciójából következik, hogy szintén választható egész-értékűnek ebben az esetben.

Megjegyezzük, hogy ha w nem azonosan egység, akkor (7) a következő alakban írható fel:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & cy \\
A_B y &\geq b_B \\
x_0 - w \leq y &\leq x_0 + w.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

A következő fejezetben megnézzük, hogy (9) milyen feladatot ír le az inverz legolcsóbb út vagy az inverz maximális súlyú teljes párosítás feladat esetén, illetve ezekben az esetekben hogyan kapjuk meg az optimális megoldást (10) segítségével.

3. Kombinatorikus inverz feladatok

Ahogy azt az előző fejezetben láthattuk, speciális kombinatorikus lineáris programok inverze l_1 normában egy, az eredetihez nagyon hasonló, kombinatorikus optimalizálási probléma megoldását jelenti, így szebben kezelhető, mint egy általános lineáris program. Nézzük meg mit is jelent ez egyszerű példákon keresztül.

3.1. Inverz legolcsóbb út

Az inverz legolcsóbb út problémát széles körben vizsgálták, most a lehető legegyszerűbb változatát nézzük meg, melyet Ahuja és Orlin [5] írtak le. Adott egy $D = (V, A)$ irányított gráf, $s, t \in V$ két kitüntetett csúcs és az éleken c költségfüggvény. Feltesszük, hogy D nem tartalmaz c-re nézve negatív költségű irányított kört. A **legolcsóbb út keresés**, hogy megtaláljuk azt az s-ből induló t-ben végződő utat, melyben az élek összköltsége minimális. Az **inverz legolcsóbb út feladat**, hogy egy adott P_0 st-út esetén, megadjuk azt a c^* költségvektort, melyre nézve P_0 legolcsóbb st-út és c^* c-től a lehető legkisebb mértékben tér el.

A legolcsóbb st-út kereső problémát felírhatjuk mint egy lineáris program:

$$\min \sum [c_{uv} x_{uv} : uv \in A]$$
$$\sum_v [x_{uv} : uv \in A] - \sum_v [x_{vu} : vu \in A] = \begin{cases} 1 & \text{ha } u = s, \\ -1 & \text{ha } u = t, \\ 0 & \text{ha } u \notin \{s, t\}, \end{cases} \tag{12}$$
$$0 \leq x_{uv} \leq 1 \text{ ha } uv \in A.$$

Ismert a következő tétel, amely a legrövidebb út duálisáról szól. Egy π potenciál **megengedett**, ha $\pi(v) - \pi(u) \leq c(uv)$, minden $uv \in A$ él esetén.

2. Tétel (Duffin). *Konzervatív c költségfüggvény esetén az s-ből t-be vezető utak költségének minimuma egyenlő a $\pi(t) - \pi(s)$ érték maximumával, ahol a* *maximum az összes megengedett π potenciálon veendő. Amennyiben c egészértékű, úgy az optimális π is választható annak.*

1. Állítás. *Legyen $\pi(v)$ az s-ből v-be vezető legolcsóbb út költsége minden $v \in V$ csúcsra. Ekkor π megengedett, sőt optimális duális megoldás.*

Megjegyezzük, hogy a legolcsóbb út keresés felírható, mint egy speciális folyam vagy feszítő fenyő feladat, így az azokra vonatkozó inverz feladatok megoldása speciálisan használható az inverz legolcsóbb út esetében, azonban lényegesen egyszerűbb megoldást kapunk, ha megvizsgáljuk ezt a speciális esetet.

3.1.1. Inverz legolcsóbb út l_1 normában

Mivel (12) olyan lineáris program, melyre a 2.1. fejezetben látott feltételek teljesülnek, így mivel minden változó egyenlőséggel teljesíti (12) megkötéseit, ezért a hozzá tartozó (9) megegyezik vele. Tehát, hogy megoldjuk az inverz legolcsóbb út feladatot l_1 normában, az eredeti gráfon kell megoldanunk egy legolcsóbb út keresést, illetve annak duálisát.

Jelölje P' egy legolcsóbb utat az eredeti gráfban. Legyen π az 1. állítás szerinti optimális duál megoldás, és az uv élekhez rendelt csökkentett költség $c^{\pi}_{uv} = c_{uv} - \pi_v + \pi_u$. Erre π megengedettségéből következik, hogy:

$$\begin{aligned} c^{\pi}_{uv} &= 0 \quad \text{ha } uv \in P', \\ c^{\pi}_{uv} &\geq 0 \quad \text{ha } uv \notin P'. \end{aligned} \tag{13}$$

Tehát az optimális c^* költségfüggvényt megkapjuk (10) szerint

$$c^*_{uv} = \begin{cases} c_{uv} - c^{\pi}_{uv} & \text{ha } uv \in P_0 \text{ és } uv \notin P^*, \\ c_{uv} & \text{különben.} \end{cases} \tag{14}$$

Vagyis ebben az esetben az előírt út mentén azokon az éleken kell csökkenteni, melyek nem részei egy eredetileg legolcsóbb útnak, a gráf többi élein a költség változatlan marad. Így azt érjük el, hogy az eredetileg legolcsóbb út az is marad, az általunk kijelölt pedig egy ugyanakkora költségű alternatív legolcsóbb út lesz. Megfigyelhetjük, hogy ekkor az optimális változtatás összesen éppen akkora, mint a kijelölt P_0 út és az eredetileg legolcsóbb P' út eredeti költségének különbsége. Ez a különbség egy könnyen látható alsó korlát a szükséges változtatás nagyságára, ami tehát az inverz legolcsóbb út esetén el is érhető. Ez általában nem igaz, később látjuk, hogy például az inverz legolcsóbb feszítő fenyő estében a triviális alsó becslésnél nagyobb változtatásra lesz szükség.

3.1.2. Inverz legolcsóbb út súlyozott l_1 normában

Ebben az esetben olyan c^* költségvektort keresünk, ami mellett P_0 minimális és $\sum(w_{uv}|c_{uv} - c^*_{uv}| : uv \in A)$ a lehető legkisebb. Ekkor (11) szerint a duál inverz probléma megegyezik az eredeti (12) problémával, annyi különbséggel, hogy $0 \leq x_{uv} \leq 1$ helyett $-w_{uv} \leq x_{uv} \leq w_{uv}$, ha $uv \in A - P_0$ és $1 - w_{uv} \leq x_{uv} \leq 1 + w_{uv}$, ha $uv \in P_0$ megkötéseket írunk. Az így kapott lineáris program már nem egy minimális költségű út keresést ír le, hanem egy minimális költségű folyam keresést. Illetve megkapjuk az optimális költségvektort (8) szerint, ha π az optimális duális megoldása a kapott folyam feladatnak.

3.1.3. Egy gyakorlati alkalmazás

A bevezetőben előrevetítettük, hogy a földrengések terjedésének vizsgálatakor felmerül egy inverz legolcsóbb út feladat, most ezt nézzük meg részletesebben.

Adott egy n cellára bontott földrajzi terület. Két cellát **szomszédosnak** nevezünk, ha fizikailag egymás mellett helyezkednek el. Különböző mérésekkel meg tudják becsülni két u és v szomszédos cella közötti c_{uv} terjedési időt (amennyi idő különbséggel észlelhető egy földrengés a két cella között). Feltehetjük, hogy egy földrengés két vizsgált s és t pont között mindig úgy terjed, hogy a legrövidebb idő alatt jusson el s-ből t-be. Ha pontosan ismernénk a terjedési időket, akkor egy s pontban észlelt földrengés alapján egy legolcsóbb út kereséssel meg tudnánk határozni, hogy mennyi idő múlva fog t pontba eljutni. Ezért célunk, hogy egy földrengés terjedésének megvizsgálásának segítségével c-nél jobb becslést adjunk a terjedési időkre. Tehát egy olyan c^* időt keresünk, ami csak kis mértékben tér el a becsült c-től, és erre nézve a vizsgált földrengés valóban a legrövidebb idő alatt jut s-ből t-be.

Legyen $D = (V, A)$ egy irányított gráf, ahol $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ a celláknak felel meg, $A = \{uv : u, v \in V$ és u szomszédos v-vel$\}$, továbbá c költségfüggvény (becsült terjedési idő). Egy adott földrengés terjedésének megfigyelésével megkapunk egy P_0 st-utat, ami mentén a földrengés halad. Keressük azt a c^* költségfüggvényt (terjedési időt), ami mellett ez a P_0 út a legrövidebb idejű st-út, és ami c-től a legkisebb mértékben tér el, azaz $\sum[c_{uv} - c^*_{uv} : uv \in A]$ a lehető legkisebb. Ez tehát éppen egy inverz legolcsóbb út feladat a D gráfon, c költség-függvény mellet, P_0 előírt úttal.

3.2. Inverz maximális súlyú teljes párosítás páros gráfban

Az páros gráfra felírható inverz párosítás feladatot szintén a lehető legegyszerűbb alakban vizsgáljuk, a leírásban itt is Ahuja és Orlin [5] megközelítésére támaszkodunk. Adott $G = (S, T, E)$ páros irányított gráf, ahol $|S| = |T|$ és $E \subseteq \{uv : u \in S, v \in T\}$, továbbá az éleken egy c súlyfüggvény. A maximális súlyú teljes párosítás keresését a következő lineáris program írja le:

$$\begin{aligned} \min \quad & -\sum [c_{uv} x_{uv} : uv \in E] \\ & \sum_v [x_{uv} : uv \in E] = 1 \qquad \text{ha } u \in S \\ & -\sum_u [x_{uv} : uv \in E] = -1 \qquad \text{ha } v \in T \\ & 0 \leq x_{uv} \leq 1 \quad \text{ha } uv \in E. \end{aligned} \tag{15}$$

Egy csúcsokon értelmezett π függvényt **súlyozott lefogásnak** nevezzük, ha $\pi(u) + \pi(v) \geq c(uv)$, minden $uv \in E$ él esetén. Egy $uv \in E$ élt **pontosnak** nevezünk π súlyozott lefogásra nézve, ha $\pi(u) + \pi(v) = c(uv)$. Egy π súlyozott lefogás **összértéke** $\sum[\pi(v) : v \in S \cup T]$. Ismeretes a duális megoldásról szóló tétel.

3. Tétel (Egerváry)**.** *A $G = (S, T, E)$ teljes párosítással rendelkező páros gráfban a $c : E \to \mathbf{R}_+$ súlyfüggvényre vonatkozó maximális súlyú teljes párosítás súlya egyenlő a súlyozott lefogások minimális összértékével. Amennyiben c egész-értékű, úgy az optimális π súlyozott lefogás is választható annak. Amennyiben G teljes páros gráf és c nemnegatív, úgy az optimális súlyozott lefogás választható nemnegatívnak is.*

1. Tulajdonság. *A tételből következik, hogy az optimális M' párosítás élei az optimális duális π-re nézve pontosak.*

Az **inverz maximális súlyú párosítás** feladatban adott továbbá egy M_0 párosítás, és egy olyan c^* súlyfüggvényt keresünk, amely mellett M_0 maximális súlyú teljes párosítás és $\|c - c^*\|$ a lehető legkisebb.

3.2.1. Inverz maximális súlyú teljes párosítás l_1 normában

Keressük most a minimumot l_1 normában, azaz $\|c - c^*\| = \sum(|c_e - c^*_e| : e \in E)$. Ekkor, (15) olyan mint a 2.1. fejezetben és minden megkötés egyenlőséggel teljesül, ezért a hozzá tartozó (9) éppen megegyezik az eredeti feladattal. Jelölje M' az eredeti gráfban levő optimális párosítást és legyen π a 3. tétel szerinti optimális duális megoldás. Jelölje $c^\pi_{uv} = c_{uv} - \pi_u - \pi_v$ az élek csökkentett súlyát, az 1. tulajdonságból következik, hogy $c^\pi_{uv} = 0$ ha $uv \in M'$, és $c^\pi_{uv} \le 0$ ha $uv \notin M'$. Ezért (10) szerint az optimális c^* a következő:

$$c^*_{uv} = \begin{cases} c_{uv} + |c^\pi_{uv}| & \text{ha } uv \in M_0 - M', \\ c_{uv} & \text{különben .} \end{cases} \tag{16}$$

Tehát az inverz maximális súlyú teljes párosítás megoldásához keresnünk kell egy maximális súlyú M' párosítást, illetve egy optimális duális π súlyozott lefogást. Majd az $uv \in M_0 - M'$ élek súlyát kell növelni $|c^\pi_{uv}|$ értékkel. Ezzel M_0 ugyanakkora súlyú teljes párosítássá válik mint M'. Itt is igaz az a tulajdonság, hogy az optimális változtatás nagysága éppen akkora, mint az eredeti maximális súlyú és a kijelölt teljes párosítás súlyának különbsége.

3.2.2. Inverz maximális súlyú teljes párosítás súlyozott l_1 normában

Ebben az esetben olyan c^* súlyvektort keresünk, ami mellett M_0 maximális és $\sum(w_{uv}|c_{uv} - c^*_{uv}| : uv \in E)$ a lehető legkisebb. Ekkor (11) megegyezik az eredeti (15) problémával, annyi különbséggel, hogy $0 \leq x_{uv} \leq 1$ helyett $-w_{uv} \leq x_{uv} \leq w_{uv}$ ha $uv \in E - M_0$, és $1 - w_{uv} \leq x_{uv} \leq 1 + w_{uv}$ ha $uv \in M_0$ megkötéseket írunk. Az így kapott lineáris program már nem egy maximális súlyú párosítást ír le, hanem egy folyam feladatot. Az inverz feladat megoldásához ekkor ennek a folyam feladatnak a megoldására lesz szükség.

3.3. Inverz minimális költségű folyam

Az inverz problémák megoldását leírhatjuk lineáris programok használata nélkül, tisztán kombinatorikus meggondolások útján is eljuthatunk az optimális megoldáshoz. Ebben az esetben, egyrészt mutatunk egy alsó korlátot a szükséges változtatás nagyságára, majd mutatunk egy olyan megoldást, ami éppen ezzel a mennyiséggel tér el az eredeti költségtől, és mellette a kijelölt objektum optimális. Erre példa Ahuja és Orlin későbbi cikkében [3] leírt inverz minimális költségű folyam feladat megoldása, ezt nézzük most meg.

Legyen $D = (V, A)$ irányított gráf, minden $uv \in A$ élhez tartozik egy c_{uv} költség és egy g_{uv} kapacitás, illetve minden v csúcshoz egy kereslet-kínálat $h(v)$ érték. Feltehetjük, hogy uv és vu közül legfeljebb az egyiket tartalmazhatja A. Ha $h(v) \geq 0$, akkor v **termelő**, különben **fogyasztó**. A **minimális költségű folyam probléma**, hogy elégítsük ki a fogyasztók szükségleteit a rendelkezésre álló termeléssel, úgy hogy a kapott folyam a kapacitásokra nézve megengedett és minimális költségű. Az **inverz minimális költségű folyam feladatban** adott egy x_0 megengedett folyam és egy olyan c^* költségfüggvényt keresünk, ami mellett x^0 optimális és $\|c - c^*\|$ minimális.

3.3.1. Inverz minimális költségű folyam l_1 normában

Keressük most c^* költséget úgy, hogy a c-től való eltérése l_1 normában legyen minimális, azaz $\|c - c^*\| = \sum(|c_a - c^*_a| : a \in A)$. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $x^0 = 0$. Ez elég, ugyanis ha $x^0 \neq 0$, akkor x folyamot felbonthatjuk $x = y + x^0$ alakban. Ekkor $y^0 = 0$ folyamot szeretnénk optimálissá tenni.

Készítsünk az adott x^0-hoz egy $D(x^0)$ segédgráfot. Megvizsgálunk minden $uv \in A$ élt, és a következők szerint húzunk éleket $D(x^0)$-ba: ha $x^0_{uv} < g_{uv}$, akkor beveszünk egy uv élt c_{uv} költséggel $A(x^0)$-ba, ha $x^0_{uv} > 0$, akkor beveszünk egy uv élt $-c_{uv}$ költséggel, ha $0 < x^0_{uv} < g_{uv}$, akkor mindkét élt bevesszük. Ekkor az alábbi tulajdonság teljesül.

2. Tulajdonság. *Az x^0 folyam optimális megoldása a minimális költségű folyam problémának, akkor és csak akkor, ha a $D(x^0)$ segédgráf nem tartalmaz negatív költségű irányított kört.*

Könnyen látható, ha $x^0 = 0$, akkor $D(x^0) = D$, így $D(x^0)$ helyett írhatunk egyszerűen D-t. A 2. Tulajdonság szerint x^0 akkor és csak akkor optimális folyam D-ben, ha D nem tartalmaz negatív költségű kört. Legyen π egy n dimenziós vektor, c^π_{uv} jelölje a csökkentett költséget, azaz legyen $c^\pi_{uv} = c_{uv} - \pi_u + \pi_v$. Ez alapján a definíció alapján a következő tulajdonság igaz.

3. Tulajdonság. *D gráfban bármely W irányított körre*

$$\sum_{uv \in W} c^\pi_{uv} = \sum_{uv \in W} c_{uv}.$$

Következésképp, ha $c^\pi_{uv} \geq 0$ minden $uv \in A$ élre, akkor D nem tartalmaz negatív költségű kört.

4. Tétel. *[3] Legyen μ a D-ben levő diszjunkt körök összköltségének minimuma. Ekkor $-\mu$ az optimális célfüggvény érték az inverz minimális költségű folyam problémára.*

Bizonyítás. A bizonyítás két részből áll, első körben megmutatjuk, hogy $-\mu$ alsó korlátja a szükséges változtatásnak, majd megmutatjuk, hogy ez az alsó korlát elérhető.

A 2. tulajdonság következtében, ha található egy negatív kör, akkor az optimális c^* költségvektorhoz biztosan növelni kell a kör mentén legalább annyival, mint amennyi a kör költségének abszolút értéke. Ha több éldiszjunkt negatív költségű kör van, akkor legalább ezek abszolút költségének összegével kell növelni. Ez épp azt jelenti, hogy legalább $-\mu$ változtatásra szükség van.

Ahhoz, hogy elérhető ez a korlát, vegyük észre hogy a minimális költségű diszjunkt körök egy áramot definiálnak. Ahol a körök élein az áram 1, minden további élen 0. Tehát ha a segédgráfban 1 kapacitással keresünk minimális költségű áramot, az épp a minimális összköltségű diszjunkt köröket találja meg. Ennek a feladatnak a dualitás tétel értelmében létezik egy optimális duális π megoldása és így egy olyan $c^\pi_{uv} = c_{uv} - \pi_u + \pi_v$, melyre $c^\pi_{uv} \leq 0$, ha uv egy körhöz tartozik és $c^\pi_{uv} \geq 0$, ha nem. Legyen $c^*_{uv} = c_{uv} - c^\pi_{uv}$, ha uv egy körnek éle, különben legyen $c^*_{uv} = c_{uv}$. Könnyen ellenőrizhető, hogy c^* π melletti csökkentett költsége nemnegatív, így 3. tulajdonság értelmében x^0 valóban megengedett megoldás és $\sum(|c_a - c^*_a| : a \in A) = -\mu$. □

Megjegyezzük, hogy ha c egész-értékű, akkor μ is egész, továbbá ekkor a bizonyításban szereplő π is választható egész-értékűnek, így az optimális c^* is. Feltettük, hogy uv és vu egyszerre nincs A-ban. Azonban, ahhoz hogy feltehessük, hogy $x^0 = 0$ a szükséges transzformációk elvégzése után keletkezhetnek olyan u, v párok melyekre mindkét él megjelenik. Ebben az esetben biztosítani kell hogy $c^*_{uv} = -c^*_{vu}$, mivel ekkor ugyanazt az élt reprezentálják az eredeti D-ben. Megfigyelhetjük, hogy az algoritmus csak azokon az éleken módosít, ahol $c^\pi_{uv} < 0$, továbbá ha $c^\pi_{uv} < 0$, akkor $c^\pi_{vu} > 0$, tehát az élpár közül mindig csak az egyiket módosítjuk, és csak ezt vesszük figyelembe a célfüggvénynél. De ha c_{uv}-t megváltoztatjuk, szükségképp változtatni kell c_{vu}-t is ugyanakkora mértékben ellenkező irányban. Ha egy él c_{uv} költségét megváltoztatjuk, annak csökkentett költsége 0-vá válik, és így a vu csökkentett költsége is, és folytathatjuk az optimális feltételek kielégítését.

Összegezve a kapott eredményt, visszavezettük az inverz minimális költségű folyam feladatot egy minimális költségű áram problémára egységkapacitású gráfon. Ennek megoldása általában egyszerűbb mint egy általános folyam feladat megoldása. Egymást követő legolcsóbb utak módszerével ez megoldható $\mathcal{O}(m(m + n \log n))$ időben (Ahuja, Magnanti, Orlin [2]).

3.4. Inverz minimális vágás

A inverz folyamhoz hasonlóan, az inverz minimális vágás esetében is, egyszerű a változtatás nagyságára alsó korlátot adni, illetve tudunk mutatni olyan megoldást, amely ezt eléri. Ismét, Ahuja és Orlin [3] leírására támaszkodva nézzük ezt a problémát.

Adott egy $D = (V, A)$ irányított gráf, az élein g kapacitással, két kitüntetett csúccsal egy s forrással illetve egy t nyelővel. D gráfban egy **vágás** az élek egy olyan halmaza, melyek törlésével a gráf kettő vagy több komponensre esik szét, de ez a tulajdonság semelyik részhalmazára sem igaz. Egy **st -vágás** egy olyan vágás, amelyik a D csúcsait pontosan két részre osztja, az egyik S tartalmazza s csúcsot, a másik $\bar{S} = V - S$ tartalmazza t csúcsot. Ez alapján egy st-vágást jelölhetünk a keletkezett csúcshalmazokkal: $[S, \bar{S}]$. Jelölje $(S, \bar{S})$ a vágásban az **előre éleket**, azaz $(S, \bar{S}) = \{uv \in A : u \in S, v \in \bar{S}\}$, és jelölje $(\bar{S}, S)$ a **vissza éleket**, azaz $(\bar{S}, S) = \{uv \in A : u \in \bar{S}, v \in S\}$. Definiáljuk az **st-vágás kapacitását** $g[S, \bar{S}]$ az előre élek kapacitásainak összegével, vagyis $g[S, \bar{S}] = \sum[g_{uv} : uv \in (S, \bar{S})]$. A **minimális vágás feladat**, hogy találjunk egy minimális kapacitású st-vágást. Az **inverz minimális vágás feladat**, hogy módosítsuk a kapacitás vektort g^*-ra úgy, hogy egy előírt $[S_0, \bar{S_0}]$ vágás minimális vágássá váljon, és a változtatás $\|g^* - g\|$ mértéke a lehető legkisebb legyen.

3.4.1. Inverz minimális vágás l_1 normában

Nezzük meg az l_1 normával vett esetet, azaz most $\|g^* - g\|_1 = \sum(|g^*_{uv} - g_{uv}| : uv \in A)$, ezt szeretnénk minimalizálni. Több kapacitás vektort használunk, ezért jelölje $D(z)$ a z kapacitással ellátott D gráfot. A maximális folyam - minimális vágás tételnek vegyük a következő alakját mint egy tulajdonságot:

4. Tulajdonság. *Egy* $[S_0, \bar{S}_0]$ *st-vágás minimális* $D(g)$*-ben akkor és csak akkor, ha létezik egy megengedett* x *folyam* $D(g)$ *gráfban* s*-ből* t*-be, amely telíti az* $[S_0, \bar{S}_0]$ *vágást, azaz* $x_{uv} = g_{uv}$ *minden* $uv \in (S_0, \bar{S}_0)$ *esetén, és* $x_{uv} = 0$*, ha* $uv \in (\bar{S}_0, S_0)$*.*

Legyen $D' = (V', A')$ az a gráf, amit úgy kapunk $D = (V, A)$ gráfból, hogy töröljük az $[S_0, \bar{S}_0]$ vágás vissza éleit, vagyis $A' = A - (\bar{S}_0, S_0)$. Legyen g' kapacitás vektor A'-n, ahol $g'_{uv} = g_{uv}$, ha $uv \in A'$.

1. Lemma. $[S_0, \bar{S}_0]$ *minimális vágás* $D(g)$ *gráfon akkor és csak akkor, ha* $[S_0, \bar{S}_0]$ *minimális vágás* $D'(g')$ *gráfon, ahol* $g'_{uv} = g_{uv}$ *minden* $uv \in A'$ *esetén.*

Bizonyítás. Tegyük fel hogy x telíti $[S_0, \bar{S}_0]$ vágást $D(g)$-ben, tehát $[S_0, \bar{S}_0]$ minimális vágás. Legyen x' megengedett folyam $D'(g')$-ben olyan, hogy $x'_{uv} = x_{uv}$ minden $A - (\bar{S}_0, S_0)$ élre. Ekkor ez az x' telíti az $[S_0, \bar{S}_0]$ vágást, ezért $[S_0, \bar{S}_0]$ minimális vágás $D'(g')$-ben. A fordított irányhoz tegyük fel, hogy $[S_0, \bar{S}_0]$ minimális vágás $D'(g')$-ben, amit az x' folyam telít. Legyen x folyam $D(g)$-ben olyan, hogy $x_{uv} = x'uv$ ha $uv \in A - (\bar{S}_0, S_0)$ és $x_{uv} = 0$ ha $uv \in (\bar{S}_0, S_0)$. Ekkor látható, hogy x telíti $[S_0, \bar{S}_0]$ vágást $D(g)$-ben, tehát $[S_0, \bar{S}_0]$ minimális vágás $D(g)$-ben. □

5. Tétel. *[3] Ha* $\hat{g}$ *egy optimális kapacitásvektor az inverz problémára* D'*-ben, akkor* g^* *egy optimális megoldás az inverz problémára* D*-ben, ahol* $g^*_{uv} = \hat{g}_{uv}$ *minden* $uv \in A - (\bar{S}_0, S_0)$ *élre és* $g^*_{uv} = g_{uv}$*, ha* $uv \in (\bar{S}_0, S_0)$*.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\hat{g}$ optimális megoldás az inverz problémára D'-ben. Legyen $g^*_{uv} = \hat{g}_{uv}$ ha $uv \in A - (\bar{S}_0, S_0)$ és $g^*_{uv} = g_{uv}$ ha $uv \in (\bar{S}_0, S_0)$. Ekkor $\|g^* - g\|_1 = \|\hat{g} - g\|_1$, ezért D-ben az optimális célérték legfeljebb akkora mint az optimális célérték D'-ben. Most tegyük fel hogy g^* az optimális vektor D-ben. Legyen $\hat{g}_{uv} = g^*_{uv}$ ha $uv \in A - (\bar{S}_0, S_0)$. Ekkor 1. lemma szerint $\hat{g}$ inverz megengedett D'-ben, továbbá $\|\hat{g} - g\|_1 \leq \|g^* - g\|_1$ és így az optimális célérték az inverz problémára D-ben legalább annyi mint az optimális célérték D'-ben. □

Tehát az 5. tétel szerint a D gráfhoz tartozó inverz probléma megoldásához elég megoldani az inverz problémát D'-ben. Legyen $Excess(S, h)$ a D'-ben $[S, \bar{S}]$ vágás kapacitása h kapacitásvektor mellett mínusz a maximális st-folyam értéke D'-ben h kapacitásvektor mellett. Ekkor h inverz megengedett D'-ben akkor és csak akkor, ha $Excess(S_0, h) = 0$.

2. Lemma. *Az optimális célérték az inverz minimális vágás problémára $D'(g')$-ben legalább $Excess(S_0, g')$*

Bizonyítás. Legyen $[S', \bar{S}']$ a minimális vágás $D'(g')$-ben. Ekkor $Excess(S_0, g')$ az $[S_0, \bar{S}_0]$ vágás kapacitása mínusz az $[S', \bar{S}']$ vágás kapacitása, vagyis:

$$\sum_{uv \in (S_0, \bar{S}_0) - (S', \bar{S}')} g'_{uv} - \sum_{uv \in (S', \bar{S}') - (S_0, \bar{S}_0)} g'_{uv} = Excess(S_0, g')$$

Legyen $\hat{g}$ egy optimális megoldás D'-ben, ekkor $[S_0, \bar{S}_0]$ minimális vágás $D'(\hat{g})$-ben, következésképp:

$$\sum_{uv \in (S', \bar{S}') - (S_0, \bar{S}_0)} \hat{g}_{uv} - \sum_{uv \in (S_0, \bar{S}_0) - (S', \bar{S}')} \hat{g}_{uv} \geq 0$$

A két egyenlőtlenség összegéből $\|g' - \hat{g}\|_1 \geq Excess(S_0, g')$ következik, amit be akartunk látni. $\square$

6. Tétel. *[3] Az optimális érték az inverz minimális vágás problémára D'-ben $Excess(S_0, g')$.*

Bizonyítás. Legyen x' egy maximális st-folyam $D'(g')$-ben. Legyen $\hat{g}_{uv} = x'_{uv}$ ha $uv \in [S_0, \bar{S}_0]$, és $\hat{g}_{uv} = g'_{uv}$ ha $uv \in [S_0, \bar{S}_0]$. Ekkor x' telíti az $[S_0, \bar{S}_0]$ vágást $D'(\hat{g})$-ben, ezért $\hat{g}$ inverz megengedett. Továbbá észrevehetjük, hogy $\|\hat{g} - g'\|_1 = Excess(S_0, g')$, amiből 2. lemma szerint következik, hogy $\hat{g}$ az optimális megoldás az inverz minimális vágás problémára. $\square$

Ha van egy $\hat{g}$ optimális megoldás D'-ben, akkor az 5. tétel alapján megkapjuk g^* optimális megoldást D-ben. Ha g kapacitásvektor egész-értékű, akkor az előző tételben szereplő folyam is választható egész-értékűnek, így az optimális g^* is. Megmutattuk, hogy az inverz minimális vágás probléma visszavezethető egy maximális folyam keresésére. Egy maximális folyam keresésére a leggyorsabb erősen polinomiális algoritmus $\mathcal{O}(nm \log(n^2/m))$ idejű Goldberg and Tarjan [17].

3.5. Inverz minimális költségű feszítőfa

Sokkalingam, Ahuja és Orlin [25] visszavezették az inverz minimális költségű feszítőfa problémát egy párosítás feladatra, később Ahuja és Orlin [4] mutattak egy hatékonyabb algoritmust a kapott párosítás megoldására, most ez utóbbi cikk alapján nézzük meg, hogyan kapjuk meg ezt a párosítás feladatot az inverz feszítőfa problémából.

Adott $G = (V, E)$ gráf, az éleken c költséggel. Legyen $n = |V|$ és $m = |E|$. Adott továbbá egy $T_0 = \{e_1, \dots, e_{n-1}\} \subset E$ feszítőfa, feladatunk egy olyan c^* költségfüggvény találása, amely mellett T_0 minimális költségű feszítőfa és melyre $\sum(|c_e - c_e^*| : e \in E)$ minimális.

Bármely két csúcs között létezik pontosan egy út T_0 fában. Jelölje egy e_j nem fa él két végpontja közötti ilyen utat $P[e_j]$. Ekkor T_0 pontosan akkor minimális feszítőfa ha teljesül a következő optimalitási feltétel,

$$c_i^* \leq c_j^* \text{ ha } e_i \in P[e_j],\ j = n, n+1, \dots, m.$$

Ebből látható, hogy ha T_0 fa élein növelünk, vagy ha $E - T_0$ élein csökkentünk, azzal nem jutunk közelebb ahhoz, hogy T_0 kielégítse ezt a feltételt. Tehát létezik egy olyan c^* optimális költségvektor amire $c^* = c + \alpha$, ahol $\alpha_i \leq 0$, ha $i = 1, 2, \dots, (n-1)$, és $\alpha_j \geq 0$, ha $j = n, n+1, \dots, m$. Ezt felhasználva az inverz probléma felírható

$$\begin{aligned} &\min \sum_{j=n}^{m} \alpha_j - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \\ c_i + \alpha_i \leq c_j + \alpha_j \quad &\text{ha } e_i \in P[e_j],\ j = n, n+1, \dots, m, \\ \alpha_i \leq 0 \quad &\text{ha } i = 1, 2, \dots, (n-1), \\ \alpha_j \geq 0 \quad &\text{ha } j = n, n+1, \dots, m. \end{aligned} \tag{17}$$

Vagy ezzel ekvivalensen

$$\begin{aligned} \max \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i - \sum_{j=n}^{m} \alpha_j & \\ \alpha_i - \alpha_j \leq c_j - c_i \quad & \text{ha } ij \in E', \\ \alpha_i \leq 0 \quad & \text{ha } i \in V_1', \\ \alpha_j \geq 0 \quad & \text{ha } j \in V_2'. \end{aligned} \tag{18}$$

ahol $G' = (V', E') = (V_1' \cup V_2', E')$ egy páros gráf, melyet T_0 mellett a következőképp készítünk el. A csúcsok $V' = V_1' \cup V_2'$, ahol $V_1' = \{1, 2, \ldots, n-1\}$ és $V_2' = \{n, n+1, \ldots, m\}$, illetve az éleket E' úgy kapjuk, hogy megvizsgálunk minden $e_j \in E - T_0$ élt, és behúzunk egy ij élt akkor, ha $e_i \in \mathbf{P}[e_j]$, azaz $E' = \{ij : e_i \in P[e_j], 1 \leq i \leq n-1, n \leq j \leq m\}$. Ezt a G' gráfot nevezzük **útgráfnak**, ekkor ez egy m csúcsú és $(m-n+1)(n-1) = \mathcal{O}(nm)$ élű gráf. Vegyük (19) mint egy lineáris programozási feladat duálisát. Rendeljük az ij élhez az x_{ij} duális változót, így kapjuk:

$$\begin{aligned} \min \sum_{(i,j)\in E'} (c_j - c_i) x_{ij} = \sum_{j \in N_2'} c_j \Big(\sum_{\{i:(i,j)\in E'\}} x_{ij} \Big) - \sum_{i \in N_1'} c_i \Big(\sum_{\{j:(i,j)\in E'\}} x_{ij} \Big) & \\ \sum_{\{j:(i,j)\in E'\}} x_{ij} \leq 1 \quad & \text{ha } i \in V_1', \\ \sum_{\{i:(i,j)\in E'\}} x_{ij} \leq 1 \quad & \text{ha } j \in V_2', \\ x_{ij} \geq 0 \quad & \text{ha } ij \in E'. \end{aligned} \tag{19}$$

Ez éppen egy páros gráfban felírható párosítási feladat, ahol az $i \in V_1'$ csúcsokra $-c_i$ súlyokat helyezünk, illetve a $j \in V_2'$ csúcsokra c_j súlyokat. Minden G'-ben levő M párosítást leír az x vektor, melyben $x_{ij} = 1$ minden $ij \in M$ élre, és $x_{ij} = 0$ minden $ij \notin M$ élre. Ez a párosítási feladat, és így az inverz feszítő fa probléma megoldható $\mathcal{O}(n^2 \log n)$ lépésben [4].

3.6. Inverz matroid metszet

Az előző fejezetben látott inverz feszítőfa probléma és annak megoldása könnyen kiterjeszthető egyetlen matroid inverz bázis problémájára, a megoldáshoz itt is egy páros gráf párosítására van szükség. Ennek részletes bemutatása helyett a jóval komplexebb inverz matroid metszet problémát tárgyaljuk két matroid esetén [10].

Adott E alaphalmazon két matroid $M_1 = (E, \mathcal{F}_2)$ és $M_2 = (E, \mathcal{F}_2)$, továbbá az alaphalmazon értelmezett w súlyfüggvény. A **matroid metszet feladat**, hogy egy rögzített k pozitív egészhez keressük meg a maximális súlyú k elemű közös független B halmazt. Az inverz matroid metszet feladatban adott továbbá egy k elemű közös független B_0 halmaz, az E alaphalmazon értelmezett $c \geq 0$ költségfüggvény és $g \geq 0$ korlát. Az **inverz matroid metszet feladat**, hogy keresünk egy olyan w^* súlyfüggvényt, amire teljesül a következő három tulajdonság:

1. B_0 maximális súlyú k elemű közös független halmaz w^* mellett,
2. $\sum[c(e)|w(e) - w^*(e)| : e \in E]$ a lehető legkisebb,
3. $|w(e) - w^*(e)| \leq g(e)$ minden $e \in E$ elemre.

Látható, hogy nem segít ha B-n kívül növelünk, vagy B-n csökkentünk,így w^* a következő alakban írható fel:

$$w^*(e) = \begin{cases} w(e) + \delta(e) & \text{ha } e \in B, \\ w(e) - \delta(e) & \text{ha } e \in E - B, \end{cases} \tag{20}$$
$$0 \leq \delta(e) \leq g(e) \quad \text{ha } e \in E.$$

Célunk az inverz matroid metszet feladat felírása lineáris programként, ehhez először két lemmára lesz szükségünk.

3. Lemma. *[15] Adott $M = (E, \mathcal{F})$ matroid, legyen $\mathcal{F}^k = X : X \in \mathcal{F}, |X| = k$. Ekkor $I \in \mathcal{F}^k$ maximális súlyú w súlyfüggvény mellett akkor és csak akkor, ha*

1. $x \notin I,\ I + x \notin \mathcal{F}$ *esetén* $w(x) \leq w(y)$ *ha* $y \in C(I, x)$ *és*

2. $x \notin I,\ I + x \in \mathcal{F}$ *esetén* $w(x) \leq w(y)$ *ha* $y \in I$,

ahol $C(I, x)$ *jelöli az egyetlen kört* $I + x$*-ben.*

4. Lemma. *[15]* $I \in \mathcal{F}_1^k \cap \mathcal{F}_2^k$ *maximális súlyú* w*-re nézve, akkor és csak akkor, ha léteznek* w_1 *és* w_2 *súlyok úgy, hogy* I *maximális súlyú* w_i*-re* $\mathcal{F}_i^k$*-ben* $(i = 1, 2)$.

A lemmák felhasználásával tehát tudjuk, hogy a keresett optimális w^* megoldás felbomlik olyan w_1, w_2 súlyokra, melyekre teljesülnek a következők:

$$\begin{aligned} &w_i(f) - w_i(e) \leq 0,\ \forall f \notin B_0,\ f + B_0 \in \mathcal{F}_i,\ e \in B_0, \\ &w_i(f) - w_i(e) \leq 0,\ \forall f \notin B_0,\ f + B_0 \notin \mathcal{F}_i,\ e \in C_i(B_0, f), \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i = 1, 2, \\ &\qquad\qquad w^* = w_1 + w_2. \end{aligned} \tag{21}$$

Tehát w^*-ra felírtunk egyenlőtlenségeket, amelyek egyrészt (20) azt mutatták meg, hogy w költséghez képest milyen változtatással kaphatjuk meg w^* optimális költséget, illetve másrészt (21) ad egy szükséges és elégséges feltételt arra, hogy w^*-ra nézve B_0 valóban maximális költségű közös független k elemű halmaz legyen. Tehát az változtatások összköltségének minimalizálása ($\sum[c(e)\delta(e) : e \in S]$), ezen egyenlőtlenségek fennállása mellett, egy olyan kombinatorikus lineáris program amelyik éppen az inverz matroid metszet problémát írja le, így mutatja hogy ez erősen polinomiális algoritmussal megoldható. Megmutatható, hogy ennek a lineáris programnak a duálisa épp egy minimális költségű áram feladatot ír le [10], erre az eredményre jut a cikk egyik szerzője egy későbbi cikkben is [9], ez a cikk más lemmákból indul ki, a matroid feladat duálisát használja a megengedett megoldások felírására, ez a fajta megközelítés igen hasznos tud lenni, de ebben az esetben átláthatóbb, könnyebben érthető leírást eredményez az előbbi megfontolás.

Sok kombinatorikus probléma felírható mint matroid metszet, így az itt kapott eredmények használhatók, ugyanakkor érdemes mégis külön vizsgálni ezeket, hiszen általában a hozzájuk kapcsolódó inverz probléma egyszerűbb kombinatorikus feladatra vezethető vissza, mint az általánosabb inverz matroid metszet probléma.

3.7. Inverz maximális súlyú teljes párosítás

Nézzünk most példát egy olyan inverz problémára, amely megoldására eddig nem találtak hatékony algoritmust. Az általános gráfban felírható inverz maximális súlyú teljes párosítás problémát Liu és Zhang [21] ellipszoid módszerrel oldja meg, ez alapján nézzük meg hogyan írható fel ez a feladat.

Adott $G = (V, E)$ gráf, az élein w súllyal és egy $M_0 \in E$ teljes párosítás. Keressünk olyan w^* súlyvektort, ami mellett M_0 maximális súlyú teljes párosítás úgy, hogy w^* a lehető legkisebb mértékben térjen el w-től.

1. Definíció. *Legyen M_0 egy teljes párosítása G gráfnak. Egy C kört alternáló körnek hívunk M_0-ra nézve, ha az élei váltakozva tartoznak M_0-ba illetve $E - M_0$-ba. A C alternáló kör súlya definíció szerint $\tilde{w}(C - M_0) - \tilde{w}(C \cap M_0)$, ahol $w(Z) = \sum[w_a : a \in Z]$.*

Jelöljük egy M_0-hoz tartozó alternáló körök halmazát $F(M_0)$-val.

7. Tétel (Berge, 1957)**.** *Legyen M_0 egy teljes párosítása a w élsúlyozású $G = (V, E)$ gráfnak, ekkor M_0 maximális súlyú akkor és csak akkor, ha $\tilde{w}(C - M_0) - \tilde{w}(C \cap M_0) \leq 0$ minden $C \in F(M_0)$-ra, vagyis ha nincs M_0-ra nézve pozitív súlyú alternáló kör.*

Könnyű belátni hogy az optimális w^*-ra teljesül, hogy $w^*_e \geq w_e$ ha $e \in M_0$ és $w^*_e \leq w_e$ ha $e \in E - M_0$. Így feltehetjük, hogy az optimális w^* felírható a következő alakban:

$$w^*_e = \begin{cases} w_e + \alpha_e & \text{ha } e \in M_0, \\ w_e - \alpha_e & \text{ha } e \in E - M_0, \end{cases} \qquad (22)$$
$$\alpha_e \geq 0.$$

Ezzel az inverz teljes párosítást 7. tétel alapján a következő alakban írhatjuk fel:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \|\alpha\| \\
\sum_{e \in C \cap M^0} (w_e + \alpha_e) \geq \sum_{e \in C - M_0} (w_e - \alpha_e) \quad & \text{ha } C \in F(M_0) \\
\alpha_e \geq 0, \quad & \text{ha } e \in E.
\end{aligned} \tag{23}
$$

3.7.1. Inverz maximális súlyú teljes párosítás l_1 normában

l_1 normában (23) a következő alakban írható fel, α helyett most használjunk x-et:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{e \in E} x_e \\
\sum_{e \in C \cap M^0} (w_e + x_e) \geq \sum_{e \in C - M_0} (w_e - x_e) \quad & \text{ha } C \in F(M^0), \\
x_e \geq 0 \quad & \text{ha } e \in E.
\end{aligned} \tag{24}
$$

Ez egy lineáris program, ami mégsem oldható meg szimplex módszerrel, mert túl sok az olyan megkötés, ami nem írható fel explicit alakban. Azonban megoldható ellipszoid módszerrel. Az ellipszoid módszer megoldja az inverz maximális súlyú teljes párosítás problémát polinomiális időben, de nem erősen polinomiális módszer. Nagy méretű problémákra az algoritmus nem hatékony. További cél egy erősen polinomiális algoritmus találása, amely megoldja az inverz párosítás problémát l_1 normában.

4. Inverz legolcsóbb feszítő fenyő

Ez a fejezet Frank Andrással közösen végzett vizsgálatok eredményeit ismerteti, melyekről hamarosan angol nyelvű leírás is készül [13].

Legyen $D = (V, A)$ hurokél mentes digráf n csúccsal és m éllel, és legyen r_0 egy kitüntetett csúcs. A **fenyő** egy olyan irányított fa, melyben egy csúcs kivételével minden csúcs be-foka 1. A kivételes csúcs a **gyökér**, ennek 0 a be-foka. Legyen $c : A \to \mathbf{Z}_+$ az élhalmazon értelmezett költségfüggvény. Chu és Liu [11] 1965-ben kifejlesztett egy egyszerű erősen polinomiális algoritmust a legolcsóbb r_0 gyökerű feszítő fenyő megtalálására.

Az **inverz legolcsóbb feszítő fenyő problémában**, adott egy F_0 r_0 gyökerű feszítő fenyő, és célunk a c költséget úgy módosítani c'-re, hogy az adott F_0 legolcsóbb fenyővé váljon, és a változtatás mértéke a lehető legkisebb legyen. Azaz olyan c' költség-függvényt keresünk, melyre l_1 norma esetén a **változtatás** $dev_c(c') = \sum(|c'(a) - c(a)| : a \in A)$ a lehető legkisebb.

Az inverz probléma megoldására Hu és Liu [19] 1998-ban írt le egy erősen polinomiális algoritmust. Az algoritmus leírása és annak helyességének bizonyítása is elég összetett. Ahogyan 3.6. fejezetben láttuk, Cai és Li [10, 9] megmutatták, hogy az inverz matroid metszet probléma visszavezethető egy minimális költségű áram feladatra, és így erősen polinomiális algoritmussal megoldható. Mivel a feszítő fenyők két speciális matroid közös bázisai, így ez az algoritmus is használható. Célunk egy koncepcionálisan sokkal egyszerűbb megközelítés bemutatása, ami a legolcsóbb feszítő fenyő probléma általánosításán alapszik [14]. Ezzel a megközelítéssel nem csupán az algoritmus lesz egyszerű, hanem annak helyességének bizonyítása is. Továbbá kapunk egy min-max tételt a μ^* minimális változtatás nagyságára.

4.1. Jelölések és elnevezések

Ha $a = uv$ egy irányított él, azt mondjuk u az a él **töve**, illetve v az a él **hegye**. Azt mondjuk, hogy uv **belép** (**kilép**) egy Z halmazba, ha $u \notin Z$ és $v \in Z$ ($u \in Z$ és $v \notin Z$). Egy $D = (V, A)$ digráfban Z halmazba belépő élek számát jelölje $\rho_D(Z) = \rho_A(Z)$, és a Z halmazból kilépő élek számát jelölje $\delta_D(Z) = \delta_A(Z)$. Egy L élhalmazra azt mondjuk hogy **belép** (**fedi**) Z csúcshalmazba, ha L tartalmaz Z-be belépő élt, vagyis ha $\rho_L(Z) \geq 1$. Ha $\mathcal{F}$ egy halmazrendszer a csúcsok halmazán, akkor az mondjuk, hogy L **belép** $\mathcal{F}$-be (**lefedi** $\mathcal{F}$-et), ha L $\mathcal{F}$ minden tagjába belép. Ha s és t két elem, akkor egy Z halmaz $s\bar{t}$-halmaz, ha $s \in Z$, és $t \notin Z$.

Egy D digráf **gyökeresen összefüggő** r_0 gyökérrel, ha $\rho_D(Z) \geq 1$ fennáll minden nem-üres $Z \subseteq V - r_0$ halmazra. Világos, hogy a gyökeresen összefüggőség ekvivalens azzal, hogy minden csúcs elérhető irányított úton r_0-ból. Egy egyszerű tulajdonság, hogy a tartalmazásra nézve minimális gyökeresen összefüggő részgráf fenyő D-ben. A következőkben egy r_0-fenyő vagy egy feszítőfenyő mindig r_0 gyökerű feszítő fenyőt jelent.

Egy $x : S \to \mathbf{R}$ függvény kiterjeszthető halmazfüggvénnyé $\tilde{x}(Z) := \sum[x(s) : s \in Z]$ módon. Hasonlóképp, ha y halmazfüggvény S-en és $\mathcal{F}$ egy halmazrendszer, akkor legyen $\tilde{y}(\mathcal{F}) := \sum[y(Z) : Z \in \mathcal{F}]$.

Két halmazt, X és Y, **metszőnek** nevezünk, ha $X \cap Y \neq \emptyset$. Ha teljesül továbbá, hogy $X - Y \neq \emptyset$ és $Y - X \neq \emptyset$, akkor a két halmaz **átmetsző**. Egy $\mathcal{F}$ halmazrendszer **lamináris**, ha nincs két átmetsző tagja. Az mondjuk hogy $\mathcal{F}$ **metsző** halmazrendszer, ha $X \cap Y$ és $X \cup Y$ tagja, minden metsző X és Y tag esetén. Adott $D = (V, A)$ digráf esetén azt mondjuk, hogy a csúcshalmazon egy $\mathcal{F}$ metsző halmazrendszer **magrendszer** [14], ha $\rho_D(Z) > 0$, minden $Z \in \mathcal{F}$ esetén.

4.2. Fenyők és magrendszerek

4.2.1. Legolcsóbb fenyők

Legyen $D = (V, A)$ egy gyökeresen összefüggő digráf r_0 gyökérponttal, és legyen $c : A \to \mathbf{R}_+$ nem-negatív költség-függvény az élhalmazon. A primál feladat meghatározni a legolcsóbb r_0-fenyőt. Azt mondjuk, hogy egy $y : \mathcal{F} \to \mathbf{R}$, $\mathcal{F} \subseteq 2^V$-n értelmezett halmazfüggvény **c-megengedett**, ha $y \geq 0$ és $\sum[y(Z) : a \text{ belép } Z\text{-be}] \leq c(a)$, minden $a \in A$ él esetén. Ha $\mathcal{F} := \{X :$

$\emptyset \subset X \subseteq V - r_0\}$, egy c-megengedett y-t a legolcsóbb fenyő probléma **duális megoldásának** nevezzük. Egy a élt D-ben **c-pontosnak**, vagy röviden csak **pontosnak** nevezünk y-ra nézve, ha $\sum[y(Z) : a \text{ belép } Z\text{-be}] = c(a)$. Bock [6] és Fulkerson [16] bizonyította a következő min-max tételt:

8. Tétel (Bock, Fulkerson). *Legyen c egy nem-negatív költségfüggvény a $D = (V, A)$ digráf élhalmazán. A legolcsóbb feszítő fenyő költsége egyenlő*

$$\max\left\{\sum[y(Z) : Z \subseteq V - r_0] : y \text{ } c\text{-megengedett}\right\}$$

értékkel. Van olyan optimális duális y megoldás, amire $\{Z : y(Z) > 0\}$ laminá-ris. Ha c egész-értékű, akkor az optimális y is választható egész-értékűnek.

Fulkerson [16] kifejlesztett egy egyszerű mohó algoritmust a tételben szereplő y megtalálására. A tételből kiolvashatók a következő optimalitási kritériumok. Későbbi illeszkedés érdekében, c^*-ot használunk c helyett:

1. Köveztkezmény. *Legyen y^* egy c^*-megengedett függvény $V - r_0$ nem-üres részhalmazain, és legyen F_0 egy r_0 gyökerű feszítő fenyő, amire teljesülnek a következő feltételek:*
(A) F_0 pontos élekből áll, és
(B) ha $y^*(Z) > 0$, akkor $\rho_{F_0}(Z) = 1$.

Akkor F_0 egy legolcsóbb feszítő fenyő c^* költség mellett, továbbá $\tilde{c}^*(F_0) = \sum[y^*(Z) : Z \subseteq V - r_0]$.

Fenyőkkel kapcsolatos további háttéranyag, algoritmusok, min-max tételek megtalálhatók [23] könyvben.

4.2.2. Ismert min-max tétel magrendszerekre

Frank András [14] kiterjesztette a legolcsóbb fenyő keresését magrendszerekre, ekkor tehát egy olyan legolcsóbb $L \subseteq A$ élhalmazt keresünk, ami lefedi $\mathcal{F}$ metsző halmazrendszert. Ennek speciális esete, amikor $\mathcal{F}$ éppen a $V - r_0$ nem-üres részhalmazaiból áll, ekkor a tartalmazásra nézve minimális $\mathcal{F}$-et fedő halmazok éppen az r_0 gyökerű feszítő fenyők.

Egy másik speciális eset, ha $\mathcal{F}$ az összes $t\bar{s}$-halmazból áll, ekkor a tartalmazásra nézve minimális fedő élhalmazok éppen az irányított st-utak. Nekünk egy harmadik speciális esetre lesz szükségünk, amikor $\mathcal{F}$ azokból a $Z \subseteq V - r_0$ halmazokból áll, amibe egy adott F_0 fenyő pontosan egy éllel lép be, azaz amikre $\rho_{F_0}(Z) = 1$.

A primál feladat megtalálni az $\mathcal{F}$-et lefedő legolcsóbb élhalmazt. A duális feladat egy olyan c-megengedett $y : \mathcal{F} \to \mathbf{R}$ keresése, amire $\tilde{y}(\mathcal{F}) = \sum[y(Z) : Z \in \mathcal{F}]$ a lehető legnagyobb. Fulkerson [16] legolcsóbb feszítő fenyők duálisának megkeresésére adott algoritmusa természetes módon kiterjeszthető általános magrendszerekre [14]. Továbbá [14] leír egy második fázist, ami szintén mohó módon megad egy legolcsóbb $\mathcal{F}$-et fedő L élhalmazt.

A kétfázisú algoritmus bizonyítja a 8. tétel magrendszerekre vonatkozó következő általánosítását:

9. Tétel. *[14] Legyen $\mathcal{F}$ metsző halmazrendszer a $D = (V, A)$ digráf csúhalmazán olyan, hogy A belép $\mathcal{F}$-be. Ekkor*

$$\min\{\tilde{c}(L) : L \subseteq A, L \text{ lefedi } \mathcal{F}\text{-et}\} = \max\{\tilde{y}(\mathcal{F}) : y \text{ } c\text{-megengedett}\}.$$

Ha c egész-értékű, akkor az optimális y duális megoldás szintén választható egész-értékűnek. Továbbá, van olyan optimális y, amire $\{Z : y(Z) > 0\}$ halmazrendszer lamináris.

A tétel triviális max $\leq$ min irányából következik, hogy ha egy duális y megoldásra és egy L $\mathcal{F}$-et fedő élhalmazra fennállnak a következő **optimalitási kritériumok**:

(A) minden él pontos L-ben (y-ra nézve),

(B) ha $y(Z) > 0$, akkor $\rho_L(Z) = 1$,

akkor y optimális duális megoldás, és L legolcsóbb $\mathcal{F}$-et fedő élhalmaz c költség mellett. A nem triviális max $\geq$ min irány azzal a megfigyeléssel ekvivalens, hogy létezik olyan y^* és $L^* \subseteq A$ $\mathcal{F}$-et fedő élhalmaz, melyekre az optimalitási feltételek teljesülnek.

A speciális esetben, amikor $\mathcal{F} := \{Z : \emptyset \neq Z \subseteq V - r_0\}$, az $\mathcal{F}$-et fedő élhalmazok éppen a gyökeresen összefüggő részgráfok D-ben. Mivel a tartalmazásra nézve minimális gyökeresen összefüggő részhalmazok éppen az r_0 gyökerű feszítő fenyők D-ben, ezért a legolcsóbb $\mathcal{F}$-et fedő élhalmazok éppen a legolcsóbb feszítő fenyők, és így az általános 9. tétel 8. tételre egyszerűsödik.

4.2.3. Ismert algoritmus magrendszerekre

A 9. tétel bizonyítása [14] cikkben egy kétfázisú algoritmus segítségével történik. Az első fázis kiszámol egy y^* c-megengedett megoldást, ez éppen a feszítő fenyő duálisát kiszámító Fulkerson [16] algoritmus kiterjesztése. Mivel ez az első fázis szükséges az általunk javasolt algoritmushoz, így ezt részletezzük. A teljesség érdekében röviden összefoglaljuk a második fázist is, de ezt nem fogjuk használni.

Egy adott $c' : A \to \mathbf{R}_+$ költség-függvény esetén, egy $Z \subset V$ halmazt **c′-pozitívnak** nevezünk, ha minden Z-be belépő él pozitív.

Első fázis: Ha $\mathcal{F}$ nem tartalmaz c-pozitív tagot, akkor $y^* \equiv 0$ egy optimális duális megoldás (és ekkor a 0 költségű élekből álló halmaz a $\mathcal{F}$-et legolcsóbban fedő), ebben az esetben az algoritmus leáll. Ezért feltehetjük, hogy $\mathcal{F}$ tartalmaz c-pozitív tagot.

Az algoritmus meghatározza nem-negatív költség-függvények egy $c_1 = c, c_2, c_3, \ldots$ sorozatát, és $\mathcal{F}$ tagjainak egy $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ sorozatát, egy hozzájuk rendelt pozitív $y^*(Z_i)$ duális értékkel, melyek egészek, ha c egész-értékű.

Az $i = 1$ lépésben, Z_1 egy tartalmazásra nézve legkisebb c_1-pozitív halmaza $\mathcal{F}$-ben. Legyen

$$y^*(Z_1) := \min\{c_1(f) : f \in A, f \text{ belép } Z_1\text{-be}\}$$

és definiáljuk c_2-t a következőképp:

$$c_2(f) := \begin{cases} c_1(f) & \text{ha } f \text{ nem lép be } Z_1\text{-be,} \\ c_1(f) - y^*(Z) & \text{ha } f \text{ belép } Z_1\text{-be.} \end{cases}$$

Egy általános $i \geq 2$ esetben feltehetjük, hogy c_i-t már kiszámoltuk. Ha minden $\mathcal{F}$-beli halmazba lép be 0 c_i-költségű él, akkor az első fázis leáll. Különben, legyen Z_i a tartalmazásra nézve minimális c_i-pozitív $\mathcal{F}$-beli halmaz.

Legyen

$$y^*(Z_i) := \min\{c_i(f) : f \in A, f \text{ belép } Z_i\text{-be}\}$$

és definiáljuk c_{i+1}-t a következőképp:

$$c_{i+1}(f) := \begin{cases} c_i(f) & \text{ha } f \text{ nem lép be } Z_i\text{-be,} \\ c_i(f) - y^*(Z) & \text{ha } f \text{ belép } Z_i\text{-be.} \end{cases}$$

Az algoritmus mohó abban az értelemben, hogy ha meghatároz egy $y^*(Z_i)$ duál változót, akkor azt egyetlen későbbi lépésben sem változtatja meg. Megjegyezzük, hogy az algoritmushoz szükség van egy **(A)** szubrutinra, amely egy adott c' esetén eldönti, hogy $\mathcal{F}$-nek van-e c'-pozitív tagja vagy sem, és ha igen, akkor megtalálja a tartalmazásra nézve legszűkebb ilyet.

Könnyen bizonyítható következmény [14], hogy ezzel a mohó algoritmussal kapott y^* duál megoldásra igaz a következő tulajdonság.

2. Állítás. *Az algoritmussal kapott y^* optimális duális megoldásra igaz, hogy a kapott $\mathcal{F}^* := \{Z : y^*(Z) > 0\}$ halmazrendszer lamináris.*

Az algoritmus második fázisa meghatározza az $\mathcal{F}$-et lefedő legolcsóbb élhalmazt [14].

Második fázis: Legyen az első fázis végén kapott költség-függvény c', és legyen $A_0 := \{a \in A : c'(a) = 0\}$. Az első fázis leállási szabályából következik, hogy A_0 lefedi $\mathcal{F}$-et. Vegyük észre, hogy A_0 élei c-pontosak, az y^* első fázisban kapott duális megoldásra nézve.

Ahhoz, hogy megadjuk a legolcsóbb $\mathcal{F}$-et fedő L élhalmazt, A_0-ból egyenként választunk éleket bele. Indulásképp, legyen L üres. Egy általános lépésben, ellenőrizzük, hogy L már lefedi $\mathcal{F}$-et, vagy sem. Ha fedi, akkor a második fázis (és így az egész algoritmus) leáll. Ha L nem fedi $\mathcal{F} - et$, veszünk egy legbővebb $\mathcal{F}$-beli Z halmazt, melyet L még nem fed le, és kiválasztjuk azt az $a \in A_0$ élt, amelyik belép Z-be, és az ilyen élek közül is azt, amelyik az első fázisban a legkorábban vált 0 költségűvé. Jelölje L^* azt az $\mathcal{F}$-et fedő élhalmazt, melyet így kapunk. A következő lemmából [14], a 9. tétel már következik. A bizonyítást nem ismertetjük, de az 2. állításból, és a legkorábban 0 költségűvé váló élek választásából következik.

5. Lemma. *[14] Az első fázisban kapott y^* duális megoldásra és a második fázisban kapott L^* $\mathcal{F}$-et fedő élhalmazra teljesülnek az optimalitási feltételek.*

4.3. Az inverz legolcsóbb feszítő fenyő feladat

Térjünk rá az inverz legolcsóbb feszítő fenyő problémára, feladatunk egy adott F_0 (input) fenyő esetén, meghatározni azt a módosított költség-függvényt, ami mellett F_0 legolcsóbb feszítő fenyő, és az eredeti c költségtől a legkisebb mértékben tér el. Azaz, egy olyan $c' \geq 0$ költség-függvényt keresünk, melyre nézve F_0 legolcsóbb feszítő fenyő, és a c-től való eltérése $dev_c(c') = \sum(|c'(a) - c(a)| : a \in A)$ a lehető legkisebb, jelölje ezt a minimumot μ^*.

Egy természetes megfigyelés, hogy azon $c' \geq 0$ költség-függvények halmaza, melyekre F_0 legolcsóbb fenyő, egy poliédert alkot. Ebből persze következik, hogy a keresett minimális eltérés létezik. Továbbá az is következik, hogy ezek felül azok a költség-függvények, melyek c-től való eltérése minimális (éppen μ^*), szintén egy poliédert alkotnak.

A mi megközelítésünk kulcs ötlete, hogy alkalmazzuk a 4.2.2. fejezetben leírt 9. tételben felírt min-max formulát egy speciális, F_0-hoz kapcsolódó magrendszerre. Nevezetesen, jelölje $\mathcal{F}_0$ azon $Z \subseteq V - r_0$ részhalmazok családját, melyre $\rho_{F_0}(Z) = 1$, vagyis

$$\mathcal{F}_0 := \{Z \subseteq V - r_0 : \rho_{F_0}(Z) = 1\}. \tag{25}$$

3. Állítás. *Ez az $\mathcal{F}_0$ metsző halmazrendszer.*

Bizonyítás. Legyen X és Y két $\mathcal{F}_0$-beli metsző halmaz. Ekkor mivel F_0 feszítő fenyő, így $\rho_{F_0}(X \cap Y) \geq 0$ és $\rho_{F_0}(X \cup Y) \geq 0$, és így

$$1 + 1 = \rho_{F_0}(X) + \rho_{F_0}(Y) \geq \rho_{F_0}(X \cap Y) + \rho_{F_0}(X \cup Y) \geq 1 + 1,$$

amiből következik, hogy $\rho_{F_0}(X \cap Y) = 1$ és $\rho_{F_0}(X \cup Y) = 1$, ami épp azt jelenti, hogy $\rho_{F_0}(X \cap Y)$ és $\rho_{F_0}(X \cup Y)$ is $\mathcal{F}_0$ tagja. □

A 3. állítás szerint, a 9. tétel valóban használható. A 4.4. fejezetben megmutatjuk, hogy $\mathcal{F}_0$ esetén, az **(A)** szubrutin hogyan realizálható.

4.3.1. Nem kell F_0-on kívül változtatni

A következő lemma már Hu és Liu [19] cikkében is megjelent, mint algoritmusuk és annak elég összetett bizonyításának következménye. A szerzők meg is jegyzik, hogy nem tudnak egyszerű bizonyítást adni a lemmára, első célunk egy ilyen bizonyítás leírása. Ezzel a lemma nem következménye, hanem kiindulópontja lesz az algoritmusunknak.

6. Lemma. *(Hu és Liu) Legyen c nem-negatív költségfüggvény A-n. A inverz legolcsóbb feszítő fenyő feladatnak van olyan optimális c^* megoldása, amire $c^*(a) = c(a)$, minden $a \in A - F_0$ élre.*

Bizonyítás. Mivel az inverz fenyő probléma optimális megoldásai poliédert alkotnak, létezik olyan c^* optimális megoldás, amire $\tilde{c}^*(F_0)$ minimális. Azt állítjuk, hogy ez a c^* olyan, mint amit a lemma állít.

Indirekt tegyük fel, hogy van egy olyan $e \in A - F_0$ él, amire $c^*(e) > c(e)$. Legyen y^* egy optimális duális megoldása a legolcsóbb fenyő problémának c^* költség-függvény mellett. Mivel c^* egy optimális megoldása az inverz problémának, ha $c^*(e)$ költségét csökkentenénk bármilyen kicsi pozitív ϵ értékkel, akkor F_0 már nem lenne továbbra is legolcsóbb fenyő. Ez azt jelenti, hogy e benne van egy legolcsóbb r_0 gyökerű F' fenyőben. De ekkor e pontos y^*-ra nézve, amiből következik, hogy belép egy olyan $Z \subseteq V - r_0$ halmazba, amire $y^*(Z) > 0$. Mivel F_0 legolcsóbb feszítő fenyő c^*-ra nézve, így van pontosan egy olyan f éle, amely belép Z-be.

Mivel f és e él is pontos, így $c^*(f) > 0$ és $c^*(e) > 0$. Legyen $\alpha = \min\{y^*(Z), c^*(e) - c(e)\}$. Világos, hogy $0 < \alpha \leq \min c^*(e), c^*(f)$. Csökkentsük $c^*(e)$, $c^*(f)$ és $y^*(Z)$ értékét is α-val. Az így kapott c' költségre $\sum(|c'(a)-c(a)| : a \in A) = \sum(|c^*(a)-c(a)| : a \in A)$ teljesül. Továbbá, az így kapott y' c'-megengedett, és F_0-ra teljesülnek az optimalitási feltételek y'-re nézve. Tehát c' egy másik optimális megoldása az inverz fenyő problémának, amire $\tilde{c}'(F_0) = \tilde{c}^*(F_0) - \alpha$, ami ellentmond c^* minimális választásának. □

Megjegyezzük, hogy az inverz fenyő probléma irányítatlan megfelelőjében, azaz az inverz fa probléma esetén, a 6. lemma nem teljesül. Legyen G egy háromszög $\{f, g, h\}$ élhalmazzal, költségeik rendre $1, 1, 0$, és legyen $F_0 = \{f, g\}$ feszítő fa. Ha F_0 fán kívül nem módosíthatjuk a költségeket, akkor f és g költségét is 0-ra kell csökkenteni, hogy F_0 legolcsóbb fává váljon, így tehát ekkor 2 nagyságú változtatásra van szükség. Ellenben, ha megengedett az F_0-on kívüli változtatás, akkor a h élen elég 1-gyel növelni, hogy F_0 minimálissá váljon. Ez a példa mutatja, hogy a lemma nem igaz az inverz matroid bázis feladat esetén sem, ahol egy B_0 bázist szeretnénk legolcsóbbá tenni.

4.3.2. Min-max tételek

A 6. lemma alapján, elegendő olyan költség-vektorok közt keresni az optimális megoldást, melyekben a költségeket F_0 élein csökkenthettük, azon kívül megegyeznek az eredeti c költséggel. Azt mondjuk, hogy egy nem-negatív $c' : A \to \mathbf{R}_+$ költség-függvény **c-adekvát**, vagy röviden csak **adekvát**, ha $0 \leq c' \leq c$, $c'(a) = c(a)$, ha $a \in A - F_0$ és F_0 legolcsóbb feszítő fenyő c' mellett.

Így az inverz feszítő fenyő feladat megfogalmazható úgy, hogy egy olyan c' adekvát költség-függvényt keresünk, melynek c-től való eltérése a lehető legkisebb. Ez ugyanaz a probléma, mintha azt a c' adekvát költséget keresnénk, melyre $\tilde{c}'(F_0)$ a lehető legnagyobb. Erre a maximális értékre írható fel a következő min-max tétel.

10. Tétel. *Legyen $c \geq 0$ költségfüggvény a $D = (V, A)$ digráf élhalmazán, és legyen F_0 egy r_0 gyökerű feszítő fenyő D-ben. Legyen $\mathcal{F}_l$ (25) szerint definiált magrendszer. Ekkor*

$$\begin{aligned} M_0 &:= \max\{\tilde{c}'(F_0) : c' \ c\text{-adekvát}\} = \\ \mu_0 &:= \min\{\tilde{c}(L) : L \subseteq A, L \text{ fedi } \mathcal{F}_0\text{-t}\}. \end{aligned} \tag{26}$$

Ha c egész-értékű, akkor az optimális c-adekvát c' költségfüggvény is választható egész-értékűnek.

Bizonyítás. A max $\leq$ min irányhoz, legyen $L \subseteq A$ egy F_0-t fedő élhalmaz, és legyen c' egy c-adekvát költség-függvény. Be akarjuk látni, hogy $\tilde{c}'(F_0) \leq \tilde{c}(L)$.

Helyettesítsük azokat az L-beli f éleket, amik F_0-nak is elemei, egy velük párhuzamos f' éllel, az L-ből így kapott élhalmaz legyen L'. Továbbá minden új f' él költsége legyen $c'(f') := c(f)$. Világos, hogy $c'(f') \geq c'(f)$. Vegyük észre, hogy L' és F_0 diszjunktak, $|L'| = |L|$ és $\tilde{c}'(L') = \tilde{c}(L)$.

Belátjuk, hogy a $D'(V, F_0 \cup L')$ egy gyökeresen 2-él-összefüggő digráf, azaz $\rho_{F_0}(Z) + \rho_{L'}(Z) \geq 2$ fennáll minden nem-üres $Z \subseteq V - r_0$ részhalmazra. Valóban, hiszen F_0 feszítő fenyő, így $\rho_{F_0}(Z) \geq 1$. Ha itt $\rho_{F_0}(Z) \geq 2$ fennáll minden Z részhalmazra, akkor $\rho_{F_0}(Z) + \rho_{L'}(Z) \geq 2$ teljesül. Ha $\rho_{F_0}(Z) = 1$, akkor $Z \in \mathcal{F}_0$, amiből L' definíciójából következik, hogy $\rho_{L'}(Z) \geq 1$, ezzel tehát $\rho_{F_0}(Z) + \rho_{L'}(Z) \geq 2$ fennáll ebben az esetben is.

Edmonds [12] diszjunkt fenyőkről szóló tétele szerint D' tartalmaz két diszjunkt F_1 és F_2 feszítő fenyőt. Mivel F_0 legolcsóbb fenyő D'-ben is, így $\tilde{c}'(F_0) + \tilde{c}'(L') = \tilde{c}'(F_0 \cup L') \geq \tilde{c}'(F_1 \cup F_2) \geq 2\tilde{c}'(F_0)$, amiből $\tilde{c}'(F_0) \leq \tilde{c}'(L') = \tilde{c}(L)$, amit be akartunk látni.

A fordított $\max \geq \min$ irányhoz megmutatjuk, hogy van olyan c-adekvát c^*, amire $\tilde{c}^*(F_0) = \mu_0$, és c^* választható egész-értékűnek, ha c egész-értékű. Ehhez, alkalmazzuk a 9. tételt az $\mathcal{F}_0$ magrendszerre, és legyen y_0^* az optimális duális megoldás. A tétel szerint, $\dagger_0^*(\mathcal{F}_0) = \mu_0$. Definiáljuk c^*-ot a következőképp:

$$c^*(a) := \begin{cases} c(a) & \text{ha } a \in A - F_0, \\ \sum[y_0^*(Z) : a \text{ belép } Z\text{-be}] & \text{ha } a \in F_0. \end{cases} \tag{27}$$

Ekkor y_0^* c^*-megengedett, és F_0 pontos élekből áll c^* költségfüggvény mellett. Így 1. következmény szerint, F_0 minimális költségű c^* mellett. Tehát c^* c-adekvát, melyre (9. tétel szerint) $\tilde{c}^*(F_0) = \mu_0$ fennáll. Amikor c egész-értékű, akkor a 9 tétel szerint az optimális duális y_0^* választható egész-értékűnek, és így c^* (27) szerinti definíciójából következik, hogy egész-értékű. $\square$

2. Köveztkezmény. *Legyen y_0^* egy optimális duális megoldása annak a primál problémának, melyben az $\mathcal{F}_0$ magrendszert lefedő legolcsóbb élhalmazt keressük. Ekkor a (27) által definiált c^* az inverz legolcsóbb feszítő fenyő probléma megoldása.*

Megjegyezzük, hogy a 10. tétel bizonyításának max $\leq$ min irányához nincsen szükség Edmonds tételére, csak rövidebb leírást biztosít. Azonban, helyettesíthetjük az r_0 gyökerű feszítőfenyők konvex burkának poliéderes leírásával: $\{x : x \geq 0, \rho_x(Z) \geq 1$, minden nem-üres $Z \subseteq V - r_0$ részhalmaz esetén, és $\rho_x(v) = 1$, minden $v \in V - r_0$ csúcs esetén$\}$.

Megmutattuk, hogy a $D' = (V, A')$ digráf $(A' = F_0 \cup L')$ gyökeresen 2-él-összefüggő. Egy ismert tulajdonság, hogy ekkor D' tartalmaz egy olyan $D'' = (V, A'')$ részgráfot, melyben minden $v \in V - r_0$ csúcs be-foka 2. Legyen $z'' := \chi(A'')/2$ vektor az A'' élein azonosan $1/2$. Az r_0 gyökerű feszítő fenyők poliéderes leírását használva kapjuk, hogy z'' felírható feszítő fenyők konvex kombinációjaként: $z'' = \sum[\lambda_i \chi(F_i) : i = 1, \ldots, q]$, ahol $\lambda_i > 0$, minden i esetén, és $\sum \lambda_i = 1$. Ekkor a $z' := \chi(A')$ azonosan 1 vektorra $\tilde{c}'(F_0) + \tilde{c}'(L') = \tilde{c}'(A') = c'z' \geq \sum[2\lambda_i \tilde{c}'(F_i) : i = 1, \ldots, q] \geq \sum[2\lambda_i \tilde{c}'(F_0) : i = 1, \ldots, q] = 2\tilde{c}'(F_0)$, amiből $\tilde{c}'(F_0) \leq \tilde{c}'(L') = \tilde{c}(L)$, ami a max $\leq$ min irány bizonyításához kellett.

Ez a bizonyítás technikailag nehezebb, mint az Edmonds tételét használó. Azért említjük meg mégis, mert ez a fajta bizonyítás használható azoknál az inverz feladatoknál is, ahol az Edmonds tételével analóg állítás nem igaz, viszont a feladatban szereplő objektumok poliéderes leírása rendelkezésre áll.

Az M_0 10. tételbeli definíciójából és a 6. lemmából következik, hogy a μ^* c-től való eltérése az optimális költségvektornak, melyre nézve F_0 legolcsóbb fenyő, éppen $\tilde{c}(F_0) - M_0$. Így μ^*-ra a következő min $-$ max tételt írhatjuk fel:

11. Tétel. *Legyen c, D, F_0 és $\mathcal{F}_\prime$, mint a 10. tételben. Ekkor*

$$\mu^* := \min\{dev_c(c') : c' \geq 0 \textit{ költség, melyre } F_0 \textit{ legolcsóbb fenyő}\} =$$
$$= \max\{\tilde{c}(F_0) - \tilde{c}(L) : L \subseteq A, L \textit{ fedi } \mathcal{F}_0\text{-}t\}$$

Ha c egész-értékű, a minimalizáló c' szintén választható egész-értékűnek.

4.4. Algoritmus az inverz legolcsóbb fenyő probléma megoldására

A 2. következmény alapján, az inverz legolcsóbb fenyő feladat optimális c^* megoldás meghatározásához, elegendő az ott említett optimális duális y_0^*-ot kiszámítani.

4.4.1. Egyszerű megközelítés

Az optimális y_0^* kiszámítására a 4.2.3. fejezetben leírt általános magrendszerekre vonatkozó algoritmus első fázisát fogjuk alkalmazni, egy speciális (25)-ben definiált $\mathcal{F}_0$ magrendszerre. Ehhez szükségünk van, az általános algoritmus (**A**) szubrutinjának $\mathcal{F}_0$ melletti megvalósítására. Emlékeztetőül, az (**A**) szubrutin eldönti, hogy egy adott c' költség mellett van-e $\mathcal{F}_0$-nak c'-pozitív tagja, illetve ha van, akkor megtalálja a tartalmazásra nézve legszűkebb ilyet.

A szubrutin felírásához, először egy $(\mathbf{A})_f$ szubrutint vezetünk be, amely bármely F_0 inputfenyőhöz tartozó élre eldönti, hogy van-e $\mathcal{F}_0$-nak olyan c'-pozitív tagja, amelyikbe f az egyetlen F_0-beli belépő él, és ha van ilyen, akkor meghatározza a legszűkebb ilyet.

Jelölje c'_f azt a költség-függvényt, amelyet c'-ből úgy kapunk, hogy minden $F_0 - f$ él költségét 0-ra csökkentjük, azaz

$$c'_f(e) := \begin{cases} c'(e) & \text{ha } e = f, \\ 0 & \text{ha } e \in F_0 - f, \\ c'(e) & \text{ha } e \in A - F_0. \end{cases}$$

Legyen $A_f := \{a \in A : c'_f(a) = 0\}$ és legyen $D_f = (V, A_f)$. Az $(\mathbf{A})_f$ szubrutin meghatározza a csúcsoknak egy S_f halmazát, melyekből v elérhető D_f-ben. (Ez például szélességi kereső algoritmussal lineáris időben megtehető.) Ha r_0 benne van S_f-ben, akkor a szubrutin leáll, azzal a válasszal, hogy $\mathcal{F}_0$-ban nincs olyan c'-pozitív halmaz, melybe f az egyedüli belépő F_0-beli él. Ha r_0 nincs S_f-ben, akkor a szubrutin S_f-et adja vissza, mint a keresett legszűkebb $\mathcal{F}_0$-beli halmazt. A szubrutin helyessége a következő állításból következik.

4. Állítás. *Ha $f \in F_0$ hegye v elérhető r_0-ból (D_f-ben), akkor $\mathcal{F}_0$ nem tartalmaz olyan c'-pozitív halmazt, melybe f felép. Ha v nem érhető el r_0-ból, akkor S_f a legszűkebb $\mathcal{F}_0$-beli halmaz, melybe f belép.*

Bizonyítás. Ha v elérhető r_0-ból, akkor D_f minden csúcsa elérhető, hiszen ekkor minden $F_0 - f$ élen a c'_f költség 0. De ez azt is jelenti, hogy minden $Z \subseteq V - r_0$ részhalmazba lép be 0 c'_f-költségű él. Ha v nem érhető el r_0-ból, akkor u-ból sem, így f biztosan belép S_f-be. Mivel F_0 minden más elemének c'_f költsége 0, és S_f c'-pozitív, így biztosan f az egyetlen F_0-beli él amely belép S_f-be, tehát $S_f \in \mathcal{F}_0$. Továbbá, mivel minden S_f-beli csúcsból vezet 0 c' költségű út v-be, így S_f egyik részhalmaza sem lehet c'-pozitív. $\square$

Az $(\mathbf{A})_\mathbf{f}$ szubrutint alkalmazva minden F_0-beli f élre, megkapjuk a keresett $(\mathbf{A})$ szubrutint.

Ez az algoritmus erősen polinomiális és koncepcionálisan egyszerű. Azonban, láthatóan nem túl hatékony, hiszen minden soron következő pozitív $y^*(Z)$ tag kiszámításához, az $(\mathbf{A})_f$ szubrutint futtatni kell minden F_0-beli f élre. A következő algoritmusban, ezt küszöböljük ki.

4.4.2. Hatékonyabb algoritmus

Tekintsük az F_0 éleit egy speciális $f_1, \ldots, f_{n-1}$ sorba rendezését, melyre a következő $(\mathbf{O})$ tulajdonság teljesül: egy $e \in F_0$ él megelőz egy $f \in F_0$ él a rendezésben, ha F_0 tartalmaz irányított utat e hegyéből f tövébe. Megjegyezzük, hogy egy ilyen rendezés lineáris időben megtalálható, építsük fel F_0 fenyőt, r_0-ból indulva az élek egyenkénti hozzávételével úgy, hogy olyan élt választunk, melynek a töve már elérhető az addig felépített rész-fenyőben. Ennek a élsorozatnak a fordítottja legyen a keresett $f_1, \ldots, f_{n-1}$, az építési szabályból következik, hogy ez rendelkezik az $(\mathbf{O})$ tulajdonsággal. Megjegyezzük, hogy ezt a tulajdonságot csak a 7. lemma bizonyításában fogjuk kihasználni.

Az algoritmus sorra veszi F_0 éleit az adott sorrendben. Ez alapján az algoritmus $n-1$ szegmensre bonthatjuk, ahol a j-edik szegmensben az f_j

éllel foglalkozunk. Egy ilyen szegmensben, meghatározzuk az f_j élhez tartozó olyan halmazok bővülő láncot alkotó sorozatát (lehet, hogy egyetlen ilyen halmaz sincs), melyekbe f_j az egyetlen F_0-beli belépő él, és melyekhez pozitív duál változót rendelünk. Az általános algoritmus első fázisában látott szabály szerint, amikor meghatározunk egy ilyen duál változót, akkor az aktuális költséget csökkentjük, jelöljük mindig az aktuális költséget c'-vel. Megjegyezzük, hogy egy adott szegmensen belül előfordulhat, hogy egyetlen új halmazhoz sem rendelünk pozitív duál változót, de az is lehet, hogy több új halmazhoz is.

Nézzük a f_j éllel foglalkozó j-edik szegmenst. Az aktuális költség kezdetben $c' := c$. A korábban leírt $(\mathbf{A})_{f_j}$ szubrutin segítségével eldöntjük, hogy van-e olyan c'-pozitív halmaz, melybe f_j az egyetlen belépő F_0-beli él. Ha nincs ilyen, akkor a j-edik szegmens végére értünk. Ebben az esetben, ha $j = n - 1$, akkor a teljes algoritmus befejeződik, ha $j < n - 1$, akkor lépünk tovább az f_{j+1} élt vizsgáló $j + 1$-edik szegmensre.

Tegyük fel most, hogy van c'-pozitív halmaz, melyet $(\mathbf{A})_{f_j}$ szubrutin megtalált, legyen ez Z'. Az általános magrendszerekre vonatkozó algoritmusban látottak szerint, legyen

$$y^*(Z') := \min\{c'(f) : f \in A,\ f \text{ belép } Z'\text{-be}\},$$

és módosítsuk c' aktuális költséget a következőképp:

$$c'(f) := \begin{cases} c'(f) & \text{ha } f \text{ nem lép be } Z'\text{-be}, \\ c'(f) - y^*(Z') & \text{ha } f \text{ belép } Z'\text{-be}. \end{cases} \tag{28}$$

(Ez valójában az általános algoritmusban látottaktól csak a jelölésekben tér el, itt Z'-t használtunk Z_i helyett, és c'-t a c_i és c_{i+1} helyett.)

Ha $c'(f_j) = 0$ teljesül a (28) által definiált c'-re, akkor a j-edik szegmens befejeződik. Ebben az esetben, ha $j = n - 1$ a teljes algoritmus befejeződik, míg $j < n - 1$ esetén, továbblépünk az f_{j+1} élt vizsgáló $j + 1$-edik szegmensre. Ha $c'(f_j) > 0$, akkor maradunk a j-edik szegmensben, tehát még mindig az f_j élt vizsgáljuk, csak a (28) szerint definiált c'-vel.

Végül belátjuk, hogy az algoritmus helyes, azaz bizonyítjuk, hogy így optimális duál megoldást kaptunk. A 4.2.3. fejezetben látott, általános magrendszerre, optimális duál megoldást kiszámító algoritmus generikus volt abban az értelemben, hogy a Z_i halmaz választásánál, csak az kellett, hogy $\mathcal{F}$-beli c_i-pozitív tag legyen, több ilyen tag esetén, közülük tetszőleges volt, hogy melyiket válasszuk.

A helyesség bizonyításához tehát, azt kell megmutatnunk, hogy a speciális $\mathcal{F}_0$ magrendszer esetén, az általunk talált Z' éppen egy speciálisan választott Z_i halmaznak felel meg az általános algoritmusban. Erről szól a következő lemma, ami az általános magrendszerről szóló algoritmus helyességével együtt, bizonyítja jelen algoritmusunk helyességét.

7. Lemma. *Abban a pillanatban, amikor az algoritmusunk talál egy legszűkebb c'-pozitív Z' halmazt, amibe f_j az egyetlen F_0-beli Z'-be belépő él, akkor Z' a tartalmazásra nézve legszűkebb $\mathcal{F}_0$-beli c'-pozitív halmaz.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy abban a pillanatban, amikor megtaláljuk Z'-t, $\mathcal{F}_0$-nak van egy olyan Z'' tagja, melyre $Z'' \subset Z'$. Legyen f_h az egyetlen F_0-beli Z''-be belépő él. Mivel Z'-t a legszűkebb olyannak választottuk, melybe f_j belép, így $h \neq j$, amiből következik, hogy f_h teljesen Z'-ben van. Továbbá, ekkor F_0 fenyőben, r_0-ból f_h-ig vezető egyetlen út, biztosan áthalad f_j élen, így az (**O**) tulajdonságból következik, hogy $h < j$, ami azt jelenti, hogy a h szegmens megelőzi a j szegmenst. A h szegmens befejezésekor, a leállási szabálya szerint, volt egy olyan $a \in A$ él, melynek aktuális költsége, abban a pillanatban 0 volt. De ekkor $c'(a) = 0$ ellentmondásban áll azzal a feltevéssel, hogy Z'' c'-pozitív volt, abban a pillanatban, amikor Z'-t definiáltuk. $\square$

Megmutatjuk, hogy az itt bemutatott algoritmus lépésszáma $\mathcal{O}(mn)$, ahol m és n jelöli az élek és csúcsok számát D-ben. Az algoritmus $|F_0| = n - 1$ szegmensből épül fel. Minden szegmens elején, meghatározzuk az S_{f_j} csúcshalmazt, ami azokat a csúcsokat tartalmazza, melyekből f_j hegye elérhető D_{f_j}-ben. Szélességi kereséssel, ez $\mathcal{O}(m)$ lépésben megtehető, így ezeket a halmazokat megtaláljük összesen $\mathcal{O}(mn)$ lépésben.

Egy szegmensen belül, ezek után meghatározunk pozitív duál változókat. Ahelyett, hogy szegmensenként néznénk hányszor kell ezt megtenni, azt mondhatjuk, hogy a pozitív duál változójú halmazok száma összesen legfeljebb $\mathcal{O}(n)$. Hiszen, a 9. tétel második felében láttuk, hogy a pozitív duál változójú halmazok lamináris halmazrendszert alkotnak, márpedig egy ilyen számossága legfeljebb $2n$. Összegezve tehát, az algoritmus lépésszáma $\mathcal{O}(nm)$.

4.4.3. A nem-negatív c^* feltételről

Ha c egész-értékű, akkor a 10. tétel állítása szerint, az inverz fenyő problémának van egész-értékű optimális c^* megoldása. Ebből következik, hogy az optimális változtatás nagysága nem csökkenthető azzal, ha tört megoldásokat is megengedünk. Felmerülhet a kérdés, hogy a nem-negatív c^* feltétel elhagyásával, tudunk-e csökkenteni az optimális eltérés nagyságán. Az 6. állítással megmutatjuk, hogy a válasz nemleges. Szükségünk lesz a következő megfigyelésre.

5. Állítás. *A 2. következményben megjelenő c^* legkisebb komponense legalább akkora, mint c legkisebb komponense γ.*

Bizonyítás. Ha $\gamma = 0$, akkor mivel $c^* \geq 0$ kész vagyunk, tegyük fel hogy $\gamma > 0$. Vegyük a j-edik szegmens kezdetét, amikor az $f_j = uv$ F_0-beli élt vizsgáljuk. Ebben a pillanatban, $c'(a) = c(a)$ teljesül minden v-be mutató D-beli a élre. Ehhez, indirekt tegyük fel, hogy $c(a)$ értékét csökkentettük egy előző szegmensben, ahol az $f_h \in F_0(h < j)$ élt vizsgáltuk, ekkor az F_0-ban levő egyetlen r_0v-útnak át kell mennie f_h-n, ez azonban ellentmond az (**O**) tulajdonságnak.

Így tehát, a j-edik szegmens elején, minden v-be futó él c' költsége legalább γ, ami pozitív. Így a j-edik szegmens, az egy csúcsból álló $Z' := v$ halmazt találja legszűkebb c'-pozitív halmaznak, melybe f_j belép, amiből következik, hogy $c^*(f_j) \geq y^*(Z') = \min\{c'a(a) : a \text{ belép } Z'\text{-be}\} = \min\{c(a) : a \text{ belép } v\text{-be}\} \geq \gamma$. $\square$

6. Állítás. *Legyen $D = (V, A)$, r_0, F_0 és c ugyanazok, mint 10. tételben, és jelölje μ^* az inverz fenyő probléma optimális megoldásának c-től való eltérését. Legyen $c^- : A \to \mathbf{R}$ egy olyan A-n értelmezett (negatív költségeket is tartalmazható) költségfüggvény, melyre F_0 legolcsóbb feszítő fenyő. Ekkor $dev_c(c^-) \geq \mu^*$.*

Bizonyítás. Ha $c^- \geq 0$, akkor kész vagyunk, így tegyük fel, hogy $c^- \ngeq 0$ és β jelölje a c^- legkisebb komponensének abszolút értékét. Vegyük a c költségfüggvény eltolásával keletkező $c_\beta := c + \beta\chi(A)$ költség-függvényt (azaz $c_\beta(a) := c(a) + \beta$, minden $a \in A$ esetén). Alkalmazzuk a 2. következményt c_β-ra c helyett, és legyen a következmény szerinti optimális megoldás c^*_β.

A 5. állítást alkalmazzuk c és c^* helyett c_β és c^*_β költség-függvényekre, amiből kapjuk, hogy c^*_β egy olyan költségfüggvény, amire F_0 legolcsóbb fenyő, $dev_{c_\beta}(c^*_\beta)$ minimális, és c^*_β legkisebb komponense legalább β. De ekkor $c^{**} := c^*_\beta - \beta\chi(A)$ egy olyan nem-negatív költség-függvény, melyre F_0 legolcsóbb fenyő, és így $\mu^* \leq dev_c(c^{**})$. Továbbá

$$dev_c(c^-) = dev_{c_\beta}(c^-_\beta) \geq dev_{c_\beta}(c^*_\beta) = dev_c(c^{**}) \geq \mu^*,$$

amit be akartunk látni. □

5. Összegzés

Szakdolgozatom első felében összegyűjtöttem több kombinatorikus optimalizálási feladat inverzének leírását. Láthattuk, hogyan írható fel egy általános lineáris program inverze. Kiderült, hogy speciális esetekben az inverz feladat megoldásához elegendő az eredeti primál és duál problémát megoldani, például az inverz legolcsóbb út vagy a maximális súlyú párosítás esetében. Másik módszer szerint egy alsó korlátot kerestünk az optimális változtatás nagyságára, majd megmutattuk, hogy ez elérhető, erre volt példa az inverz vágás vagy a folyam. További feladatok esetében megfigyeltük, hogyan változtathatjuk az eredeti költséget, majd egy szükséges és elégséges feltételt kerestünk arra, hogy a kijelölt objektum optimális legyen az új költségfüggvény mellett, ezzel az inverz problémát egy kombinatorikus optimalizálási feladatra vezettük vissza.

A dolgozat másik felében részletesen bemutatásra került az inverz legolcsóbb feszítő fenyő feladat megoldására alkalmas új algoritmus, melynek alapja a legolcsóbb fenyőt kereső, duál változókat használó, kétfázisú algoritmus kiterjesztése általános magrendszerekre. Megmutattuk, hogy ennek az algoritmusnak egy speciális magrendszerre felírt esete hogyan kapcsolódik az inverz problémához. Ennek segítségével nem csupán egy erősen polinomiális algoritmust kapunk az inverz fenyő feladatra, hanem egy min-max tételt is az optimális megoldásra.

A szakdolgozat folytatásaként érdemesnek tartom, a leírt gondolatmenet alapján, további inverz kombinatorikus feladatok megoldására erősen polinomiális algoritmust keresni. Kifejezetten azon feladatokra gondolva, melyek megoldására még nem találtak erősen polinomiális algoritmust, mint például az inverz maximális súlyú párosítás általános gráfban.

További kutatási lehetőségeket nyújt, az inverz kombinatorikus optimalizálási problémák vizsgálata különböző normák esetén. A dolgozatomban csupán az l_1 normában felírt esetet vizsgáltuk, széleskörűen vizsgálták ezen felül a feladatokat l_2, l_∞ normák estén.

Hivatkozások

[1] S. Ahmadian, U. Bhaskar, L. Sanit'a and C. Swarmy, Algorithms for inverse optimization problems, Proceedings of the 26th Annual European Symposium on Algorithms, (2018), 910–921.

[2] R.K. Ahuja, T.L. Magnanti, and J. B. Orlin, Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications, Prentice Hall, NJ (1993)

[3] R.K. Ahuja, J.B. Orlin, Combinatorial algorithms for inverse network flow problems, Networks 40 (2002), no.4, 181-187.

[4] R.K. Ahuja, J.B. Orlin, A faster algorithm for the inverse spanning tree problem, J. Algorithms 34 (2000), 177-193.

[5] R.K. Ahuja, J.B. Orlin, Inverse optimization, Oper. Res. 49 (2001), 771-783.

[6] F. Bock, An algorithm to construct a minimum directed spanning tree in a directed network, in: Developments of Operations Research, Vol. 1 (Proceedings of the Third Annual Israel Conference on Operations Research, Tel Aviv, 1969, B. Avi-Itzhak, ed.) Gordon and Breach, New York, 1971, 29–24.

[7] D. Burton, On the inverse shortest path problem, Doctoral dissertation, Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix de Namur, Département de Mathématique, Namur, Belgium, 1993.

[8] D. Burton, Ph. L. Toint, On an instance of the inverse shortest paths problem, Math. Programming 53 (1992), 45-61.

[9] M.-C. Cai, Inverse problems of matroid intersections, J. Combinatorial Optimization, Vol 3. No. 4, (1999) pp. 465–474.

[10] M.-C. Cai and Y.-J. Li, Inverse matroid intersection problem, Mathematical Methods of Operations Research, Vol 45. No. 2, (1997), pp. 235–243.

[11] Y.-J. Chu and T.-H. Liu, On the shortest arborescence of a directed graph, Scientia Sinica (Peking) Vol. 14 (1965) pp. 1397–1400.

[12] J. Edmonds, Edge-disjoint branchings, in: Combinatorial Algorithms (B. Rustin, ed.), Acad. Press, New York, (1973), 91–96.

[13] A.Frank, G. Hajdu, A simple algorithm for the inverse arborescence problem, előkészületben

[14] A. Frank, Kernel systems of directed graphs, Acta Scientiarum Mathematicarum, (Szeged), 41, 1-2 (1979) 63–76.

[15] A. Frank, A weighted matroid intersection algorithm, J. Algorithms 2 (1981), 328-336.

[16] D.R. Fulkerson, Packing rooted directed cuts in a weighted directed graph, Math. Programming 6 (1974) 1–13.

[17] A.V. Goldberg, and R.E. Tarjan, A new approach to the maximum flow problem, Proceedings of the 18^{th} ACM Symposium on the theory of Computing, pp. 136-146. Full paper in Journal of ACM 35 (1990), 873-886.

[18] C. Heuberger, Inverse combinatorial optimization a survey on problems, methods, and results, J. Comb. Optim. 8 (2004), 329–361.

[19] Z. Hu, Z. Liu, A strongly polynomial algorithm for the inverse shortest arborescence problem, Discrete Appl. Math. 82 (1998), 135-154.

[20] S. Li, Z. Zhang, and H.-J. Lai, Algorithm for constraint partial inverse matroid problem with weight increase forbidden. Theoretical Computer Science 640 (2016), 119-124.

[21] Z. Liu, J. Zhang, On inverse problems of optimum perfect matching, J. Comb. Optim. 7 (2003), no. 3, 215-228.

[22] T.J. Moser, Shortest paths calculation of seismic rays, Geophysics 56 (1991), 59-67.

[23] A. Schrijver, Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency, Springer, 2003. Vol 24. of the series Algorithms and Combinatorics.

[24] Y. Sheffi, Urban Transportation Networks. MIT Press, Cambridge, MA. (1985).

[25] P.T. Sokkalingam, R.K. Ahuja, and J.B. Orlin. Solving inverse spanning tree problems through network flow techniques. Operations Research 47, (1999) 291-298.

[26] C. Xu, and X. Xu, Some inverse optimization problems on network, Journal of Systems Science and complexity 26.3 (2013), 350-364.

[27] Z. Zhang, S. Li, H.-J. Lai, and D.-Z. Du, Algorithms for the partial inverse matroid problem in which weights can only be increased. Journal of Global Optimization 65.4 (2016), 801-811.

[28] J. Zhang and Z. Liu, Calculating some inverse linear programming problems, J. Comput. Appl. Math. 72 (1996), 261-273.

[29] J. Zhou, F. Yang, and K. Wang, An inverse shortest path problem on an uncertain graph, Journal of Networks 9.9 (2014), 2353.