

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

FOURIER-ANALÍZIS ALKALMAZÁSA A
DIGITÁLIS JEL-ÉS
KÉPFELDOLGOZÁSBAN

SZAKDOLGOZAT



Lovranics Zsófia

Alkalmazott matematikus Bsc

Dr. Németh Zsolt

Témavezető

Budapest, 2020

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	5
1.1. Jelek	5
1.2. DSP rendszer	7
1.3. Képek reprezentálása	7
2. Fourier analízis	10
2.1. Előismeretek	10
2.2. Egydimenziós Diszkrét Fourier–transzformált	13
2.3. Kétdimenziós Diszkrét Fourier–transzformált	14
2.4. Fourier–transzformáció tulajdonságai	16
3. Fast Fourier Transform	20
3.1. Műveletigény	20
3.2. FFT algoritmus	21
4. Szűrés	24
4.1. Tulajdonságok a kép Fourier-transzformáltjából	24
4.2. Szűrés folyamata	26
4.3. Szűrők fajtái	28
4.4. Szűrők bemutatás példákön	33

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni Dr. Németh Zsolt témavezetőmnek a dolgozat elkészítése során nyújtott támogatást, és azt, hogy szükség esetén mindig tudott rám időt fordítani.

Köszönöm családomnak a támogatást, és a rengeteg türelmet a nehezebb időszakokban.

Ezenkívül hálával tartozom az egyetemnek a rengeteg lehetőségért, melyet a képzés során kaptam, és a barátokért akik a közös tanulásokkal részesei voltak annak, hogy ez a dolgozat létrejöhessen.

Előszó

Egész életünk során információkat gyűjtünk, fogadunk, adunk tovább, melyeket jelek segítségével közvetítünk. Ezekből tájékozódunk és ezekkel tájékozta-
tunk. A folyamat egyik legfontosabb része a jelfeldolgozás, ahol a jelek infor-
mációtartalmát határozzuk meg. Ez történhet analóg vagy digitálisan is, attól
függően, hogy használunk-e digitális technikát.

Mára a digitális jelfeldolgozás a mindennapjaink részévé vált, amikor hasz-
náljuk a mobiltelefonunkat, fényképet, videót készítünk a digitális kameránkkal
vagy hallgatjuk a rádiót. Ilyenkor általában egy input csatornán keresztül érke-
ző analóg jelet alakítunk elektromos jellé, amit majd digitalizálunk és tovább
dolgozunk vele. Ezenkívül számos más fontos területen használják. Például az
iparban, ahol az önvezető autók radar-és videójelek érzékelésével tájékozódnak,
az orvostudományban pedig a képdiagnosztika területén.

Szakdolgozatomban a jelfeldolgozás sokféle felhasználása közül a digitális
képfeldozás témakörét fogom érinteni a legnagyobb mértékben, ezen belül pe-
dig a Fourier–analízis alkalmazását.

Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768 – 1830) francia matematikus, fizikus
volt. Az ő nevéhez fűződik a Fourier– sor és a Fourier– transzformáció megal-
kotása. Ezek a fogalmak fontos szerepet töltenek majd be a további részekben.

Az első fejezetben bevezetek fontosabb alapfogalmakat a jelfeldolgozással
kapcsolatban, röviden bemutatom, hogyan is lesz digitális, számítógéppel fel-
dolgozható jel egy, a világunkban zajló jelenség megfigyeléséből, és hogy ho-
gyan jelennek meg a képek a digitális eszközök képernyőjén. Ezután következik
a dolgozat témájának matematikai háttere, majd egy algoritmus, ami segít a
diszkrét Fourier-transzformált meghatározásában. Ezek ismeretében már ké-
pesek leszünk értelmezni az utolsó fejezetben bemutatott szűrési folyamatot és
a különböző típusú szűrőket, melyek mind más-más problémát tudnak kezelni
egy kép feldolgozása során.

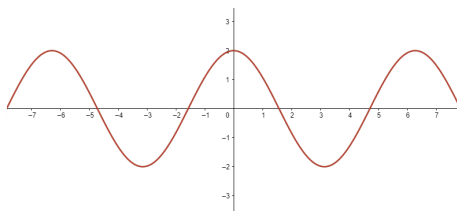
1. Bevezetés

1.1. Jelek

1.1.1. Definíció. Azokat a fizikai, kémiai mennyiségeket, amelyek egy rendszer állapotát írják le valamilyen mennyiség függvényeként, *jelnek* nevezzük.

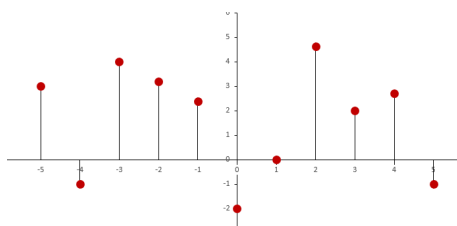
A jeleket többféle szempont alapján csoportosíthatjuk. Ezek közül az egyik a független változók alapján történő csoportosítás, attól függően, hogy milyen értékeket vehetnek fel.

1.1.2. Definíció. *Folytonos változójú jeleknek* nevezzük azokat a jeleket, melyek folytonos halmazból vehetnek fel értékeket.



Egydimenziós folytonos változójú jel

1.1.3. Definíció. *Diszkrét változójú jeleknek* nevezzük azokat a jeleket, melyek értelmezési tartománya megszámlálható.



Egydimenziós diszkrét változójú jel

Egy másik szempont lehet, amikor a jeleket értékészletük alapján csoportosítjuk.

1.1.4. Definíció. *Folytonos jeleknek* nevezzük azokat a jeleket, melyek értékészlete folytonos.

1.1.5. Definíció. *Szakaszos jeleknek* nevezzük azokat a jeleket, melyek értékeit csak egy előre meghatározott értékekből álló, megszámlálható elemet tartalmazó halmazból vehetik fel.

Ezeket összepárosítva megkapjuk a már korábban említett, számunkra legfontosabb két jeltípust.

1.1.6. Definíció. Azokat a jeleket, melyek értelmezési tartományukban és értékészletükben egyaránt folytonosak, *analóg jeleknek* nevezzük.

1.1.7. Definíció. Ha egy jel értelmezési tartománya és értékészlete is diszkrét, akkor *digitális jelnek* nevezzük.

1.1.1. Megjegyzés. Azokat a jeleket, melyek független változói csak diszkrét értéket vehetnek fel, viszont értékészletük folytonos, *diszkrét jeleknek* nevezzük.

Még két fontos fogalom, amit mindenképp meg kell ismernünk, amikor egy függvény ismétlődését figyeljük.

1.1.8. Definíció. Egy $f(x)$ függvény p -szerint periódikus, ha az értelmezési tartomány minden x elemére igaz, hogy $x + p \in D(f)$ és

$$f(x) = f(x + p),$$

ahol $p > 0$, ellenkező esetben a jel aperiodikus.

1.1.9. Definíció. Egy p periódussal rendelkező jel frekvenciáján az egységnyi idő alatt megtett periódusok számát értjük, azaz képlettel $1/p$.

1.2. DSP rendszer

A digitális jelfeldolgozó rendszer (Digital Signal Processing) feladata a különböző inputcsatornákon beérkező jeleken elvégezni valamilyen előírt műveletet.

Első lépésben érzékeljük a bejövő jeleket egy vagy több műszer segítségével, így nyomon tudjuk követni a megfigyelt paraméterek változását. Ezek (általában) analóg jelek, ami azt jelenti, hogy a független változók értékeiben és értékkészletükben is folytonosak.

Ahhoz, hogy ezeket a jeleket fel tudjuk dolgozni, előtte át kell alakítanunk, digitalizálni kell őket. Ezt a folyamatot két részre bonthatjuk. Az analóg jelet mintavételezéssel diszkrét független változójú jellé alakítjuk, azaz egyenlő időközönként kiolvassuk az jel értékeit.

Ezután a diszkrét változójú jelen kvantálást hajtunk végre, amivel a felvehető értékek számát véges sokra korlátozzuk. Így létrejön egy értékkészletében és értelmezési tartományában is diszkrét jel, melyet digitális jelnek hívunk.

A digitális jelen a processzor végrehajtja a feladatokat és kiolvassa belőle a szükséges adatokat. A feldolgozott jelet néhány esetben vissza kell alakítanunk analóggá és egy output csatornán keresztül közvetíteni. Ilyen például amikor egy hangfelvételtől kiszűrjük a háttérzajokat, hogy utána tisztábban hallhassuk a lényegét. Más esetekben pedig digitálisan közvetítjük tovább.

1.3. Képek reprezentálása

A szürkeárnyalatos képeket leírhatjuk úgy, mint egy $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kétváltozós függvényt, ahol $f(x, y)$ megadja a sík minden x, y pontjához tartozó világossági értéket vagy szürkeárnyalatát. A szürkeségi skála korlátos, hiszen színei a feketétől a fehérig terjedhetnek. A feketét szokás 0-val jelölni, a fehér, vagy az éppen aktuális képünk legvilágosabb részén felvett értéket pedig jelölje f_{max} . Az értelmezési tartomány is korlátos, hiszen ha a kép mérete $M_x \times M_y$, akkor a függvényt csak azon a tartományon értelmezzük. Ezek alapján teljesülnie kell

a következő feltételeknek:

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq M_x, \\ 0 &\leq y \leq M_y, \\ 0 &\leq f(x, y) \leq f_{max}. \end{aligned}$$

Ez a fajta modellezés kiterjeszthető a színes képekre is. Az emberi szem három alapszínre érzékeny, melyekből kikeverhető minden szín. Például ha az RGB rendszert használjuk, akkor mindegyik színhez tartozik egy, az előzőekben leírt függvény, mely az adott szín intenzitását jellemzi. Azaz a színes képeket 3 különböző $f_R(x, y)$, $f_G(x, y)$, $f_B(x, y)$ függvénnyel reprezentálhatjuk, melyek rendre a piros, zöld és kék színekhez tartoznak. A könnyebb felírás érdekében összevonhatjuk őket egy $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ függvénnyé. Ezt hívjuk a képek *folytonos reprezentációjának*.

Azonban a képek feldolgozása közben nem a folytonos reprezentációt használjuk, hanem digitalizálni kell őket. Egyenlő közönkénti mintavételezéssel a képet képpontokra, más néven pixelekre bontjuk, a szürkeségi skálát pedig kvantáljuk, azaz a jel értékeit helyettesítjük egy véges halmaz elemei közül a hozzájuk legközelebb állóval. Általában 256 árnyalaton kvantálják, vagyis a számítógép 1 pixel fényességi értékét 8 biten tudja ábrázolni. Ilyenkor az emberi szem már nem érzékeli, hogy a folyamatos szürke-skála helyett valójában csak véges számú árnyalatot lát. A digitális képünk értelmezési tartománya és értékkészlete is csak véges, diszkrét értékeket vesz fel.

Így a képeket reprezentálni tudjuk egy $M_x \times M_y$ -os mátrixszal, ahol M_x és M_y a kép mérete a pixelek számában mérve, $F_{i,j}$ pedig a kép fényességét jelöli a megfelelő képpontban:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F(0,0) & F(0,1) & \dots & F(0, M_y - 1) \\ F(1,0) & F(1,1) & \dots & F(1, M_y - 1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F(M_x - 1, 0) & F(M_x - 1, 1) & \dots & F(M_x - 1, M_y - 1) \end{bmatrix}$$

A továbbiakban a mátrixos reprezentációval és csak a szürkeárnyalatos képekkel foglalkozunk, hiszen amit végrehajtottunk egy ilyen képen, azt egy színes

képen is el tudjuk végezni külön-külön a koordinátafüggvényekre.

2. Fourier analízis

2.1. Előismeretek

Joseph Fourier (1768–1830) francia matematikusnak köszönhetjük a jelfeldolgozás egyik legfontosabb eszközét. Fourier szerint minden periódikus függvény felírható különböző frekvenciájú szinusz és koszinusz függvények súlyozott összegeként.

2.1.1. Definíció. Egy p -szerint periodikus $[0, p]$ intervallumon Lebesgue-integrálható $f(x)$ függvény Fourier-sorának n -edik részletösszege

$$S_n f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \left(\frac{2k\pi}{p} x \right) + b_k \sin \left(\frac{2k\pi}{p} x \right) \right),$$

ahol

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{p} \int_0^p f(x) dx, \\ a_k &= \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos \left(\frac{2k\pi}{p} x \right) dx, \\ b_k &= \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \sin \left(\frac{2k\pi}{p} x \right) dx. \end{aligned}$$

Az $a_0, a_k, b_k (k = 1, \dots)$ a Fourier-együtthatók, $n \rightarrow \infty$ esetén pedig egy végtelen sort kapunk, melyet az $f(x)$ függvény Fourier-sorának nevezünk:

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \left(\frac{2k\pi}{p} x \right) + b_k \sin \left(\frac{2k\pi}{p} x \right) \right).$$

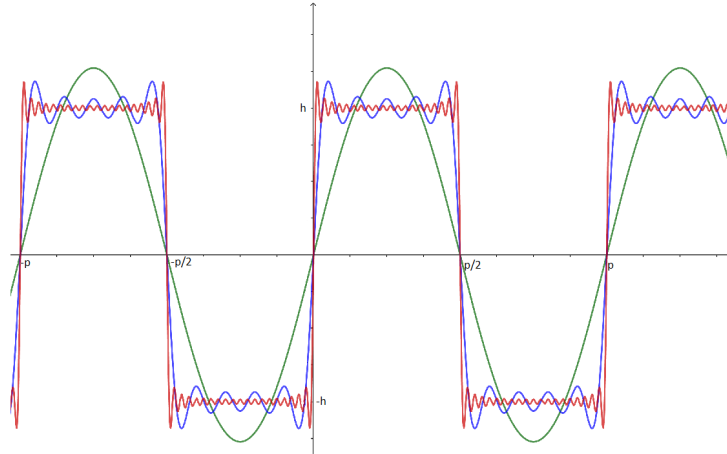
A következő példában egy p -szerint periódikus négyszögjel közelítését láthatjuk, melynek 0 -tól p -ig tartó periódusát a következő képlettel definiáljuk:

$$f(x) = \begin{cases} h, & \text{ha } 0 \leq x < \frac{p}{2} \\ -h, & \text{ha } \frac{p}{2} \leq x < p, \end{cases}$$

amely Fourier-sorának n -edik részletösszege:

$$(S_n f)(x) = \frac{4h}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin \left(\frac{(2k+1)2\pi x}{p} \right)}{(2k+1)}.$$

A képen láthatjuk a közelítést $n=1$, $n=5$ és $n=20$ értékekre, melyeket rendre zöld, kék és piros színekkel jelöltem.



Négyszögjel közelítése

A könnyebb felírás érdekében térjünk át a Fourier-sor komplex alakjára. Használatához bevezetjük az Euler-formulát.

2.1.1. Tétel. *Az Euler - formula azt állítja, hogy minden α valós számra*

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$$

ahol i az imaginárius egység.

2.1.1. Állítás. *Az $f(x)$ valós függvény Fourier-sorának n -edik részletösszege felírható komplex alakban, ahol*

$$S_n f(x) = \sum_{k=-n}^n c_k \cdot e^{\frac{2k\pi i}{p}x}$$

Bizonyítás. Az előző definícióból tudjuk, hogy

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$$

és

$$e^{-i\alpha} = \cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha) = \cos(\alpha) - i \sin(\alpha).$$

A két egyenletet összeadva, majd kivonva egymásból kifejezhetjük a $\sin(\alpha)$ és $\cos(\alpha)$ trigonometrikus függvényeket:

$$\frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} = \cos(\alpha),$$

$$\frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} = \sin(\alpha).$$

A Fourier-sor eredeti alakjában $\frac{2k\pi}{p}$ -t ω_k -val helyettesítve és felhasználva az egyenleteket:

$$S_n f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n \left(a_k \frac{e^{i\omega_k x} + e^{-i\omega_k x}}{2} + b_k \frac{e^{i\omega_k x} - e^{-i\omega_k x}}{2i} \right).$$

A második tagot $\frac{i}{i}$ -vel bővítve, és csoportosítva a tagokat, a következő alakhoz jutunk:

$$S_n f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k - ib_k}{2} e^{i\omega_k x} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-i\omega_k x} \right).$$

Vezessük be az új együtthatókat képező $c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$ komplex számsorozatot, ahol

$$c_0 := a_0, \text{ és } c_{-k} = \bar{c}_k = \frac{a_k + ib_k}{2}.$$

Ezzel felírható a komplex alak :

$$S_n f(x) = \sum_{k=-n}^n c_k \cdot e^{\frac{2k\pi i}{p} x},$$

ahol a komplex Fourier-együtthatók megadhatók a következő formában

$$c_k = \frac{1}{p} \int_0^p f(x) e^{-i\omega_k x} dx = \frac{1}{p} \int_0^p f(x) e^{\frac{-2k\pi i}{p} x} dx,$$

hasonlóan ahhoz, ahogy a 2.1.1 definícióban láttuk. \square

Azonban a való életben előforduló jelek általában nem ilyen szabályosak. A Fourier-sor kiterjesztésével, egy aperiodikus jelet végtelen periódussal rendelkező függvényként értelmezve bevezetünk egy új fogalmat, egy függvény Fourier-transzformáltját.

2.1.2. Definíció. Egy folytonos $f(x)$ függvény $F(u)$ Fourier-transzformáltja

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi iux} dx.$$

2.1.2. Állítás. Az $F(u)$ transzformált ismeretében

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{2\pi iux} du$$

inverz Fourier-transzformációval visszakaphatjuk $f(x)$ függvényt.

Ezeket a képletek kiterjeszthetjük két dimenzióba is az $f(x, y)$ függvényre, így megkapva a kétdimenziós Fourier-transzformáltat

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)e^{-2\pi i(ux+vy)} dx dy,$$

és az inverz transzformációt

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v)e^{2\pi i(ux+vy)} dudv.$$

Arra, hogy pontosan mely függvénynek létezik Fourier-transzformáltja, vannak megkötések. Azonban mi most a diszkrét esetet vizsgáljuk, hiszen a képek reprezentálásánál láttuk, hogy a leíró függvény értelmezési tartományának méretét korlátozza a kép mérete, értékészletének méretét pedig a színskála felosztása. Feltehető, hogy minden diszkrét függvénynek létezik a diszkrét Fourier-transzformáltja, mely a mintavételi pontokat alappontoknak használó trapézformulás közelítése a folytonos Fourier-transzformálnak (lásd [1], Lesson 8). Továbbiakban ezzel az esettel foglalkozunk.

2.2. Egydimenziós Diszkrét Fourier–transzformált

2.2.1. Definíció. A diszkrét Fourier -transzformáltja egy $f(x)$,

$x = 0, 1, \dots, M - 1$ függvénynek

$$F(u) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x)e^{-2i\pi xu/M}, \quad u = 0, 1, \dots, M - 1.$$

Az eredeti függvényt visszakaphatjuk az inverz diszkrét Fourier–transzformációval

$$f(x) = \sum_{u=0}^{M-1} F(u)e^{2i\pi xu/M}, \quad x = 0, 1, \dots, M - 1.$$

A transzformált komplex mennyiségekből áll, ezáltal meg tudjuk határozni valós és képzetes részüket, melyeket jelöljünk rendre $R(u)$ -val és $I(u)$ -val ($u = 0, 1, \dots, M-1$). A kettő négyzetének összegéből gyököt vonva megkapjuk a spektrum vektort, amely képlettel a következő:

$$|F(u)| = [\sqrt{R^2(u) + I^2(u)}].$$

Két másik mennyiség amit a transzformáltból kaphatunk az a fázis vektor:

$$\phi(u) = \tan^{-1} \left[\frac{I(u)}{R(u)} \right],$$

és $u = 0, 1, \dots, M-1$ értékekre az energiaspektrum:

$$P(u) = |F(u)|^2 = R^2(u) + I^2(u).$$

Később látni fogjuk, hogy ezek mit jelentenek egy kép transzformációja során, hogyan érdemes ábrázolni és hogy hogyan használjuk fel őket.

2.3. Kétdimenziós Diszkrét Fourier–transzformált

A képeket reprezentáló függvények azonban \mathbb{R}^2 -ben vannak értelmezve. De ez nem probléma, hiszen a folytonos esethez hasonlóan a diszkrét Fourier–transzformáció is kiterjeszthető kétdimenziós esetre.

2.3.1. Definíció. A diszkrét Fourier–transzformáltja egy $f(x, y)$, $x = 0, 1, \dots, M-1$, $y = 0, 1, \dots, N-1$ függvénynek

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2i\pi(xu/M + yv/N)},$$

$$u = 0, 1, \dots, M-1, \quad v = 0, 1, \dots, N-1.$$

2.3.1. Állítás. $F(u, v)$ ismeretében visszakaphatjuk az eredeti függvényt a kétdimenziós inverz Fourier–transzformációval:

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{2\pi i(xu/M + yv/N)},$$

$$x = 0, 1, \dots, M-1, \quad y = 0, 1, \dots, N-1.$$

Ebben az esetben is ugyanúgy beszélhetünk spektrumról, fázisról és energiaspektrumról:

$$|F(u, v)| = [\sqrt{R^2(u, v) + I^2(u, v)}],$$

$$\phi(u, v) = \tan^{-1} \left[\frac{I(u, v)}{R(u, v)} \right],$$

$$P(u, v) = |F(u, v)|^2 = R^2(u, v) + I^2(u, v).$$

Elválaszthatóság

A kétdimenziós diszkrét Fourier-transzformált szétválasztható a következő módon:

$$F(u, v) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} e^{-2\pi i u x / M} \frac{1}{N} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2\pi i v y / N} =$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} F(x, v) e^{-2\pi i u x / M}$$

ahol

$$F(x, v) = \frac{1}{N} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2\pi i v y / N}.$$

$F(x, v), v = 0, 1, \dots, N - 1$ meghatározása megegyezik egy egydimenziós Fourier-transzformációval a mátrix egy során. Végighaladva x -szel 0-tól $M-1$ -ig, megkaphatjuk ezt minden sorra. Így eljutva egy mátrixhoz, ahol a k . oszlop $F(x, k - 1), x = 0, 1, \dots, M - 1$ értékeket tartalmazza. Minden oszlopra elvégezve az egydimenziós transzformációt az első változó szerint, megkaphatjuk a keresett $F(u, v), u = 0, 1, \dots, M - 1$ értékeket. Egy kétváltozós függvény diszkrét Fourier-transzformáltjának ez a fajta kiszámítása egy megoldás lehet. Ez azonban nagyon időigényes, hiszen ha a képünk $N \times N$ -es, akkor ez N^2 számú műveletet igényel. Erre megoldás lesz majd a következő fejezetben bemutatott Fast-Fourier-transzformáció.

2.4. Fourier–transzformáció tulajdonságai

A következő tulajdonságokat az egydimenziós esetre fogjuk igazolni, hiszen az előbb láthattuk, hogy ha a függvényünk kétdimenziós, akkor felbontható. Emiatt amiket itt igazolunk, azok igazak lesznek a nagyobb dimenziós esetekre is.

Tegyük fel, hogy a fejezet további részében $f(x), g(x)$ függvények minden esetben M ponton értelmezett digitális jelek, kétdimenzióban pedig $f(x, y), g(x, y)$ függvényeknél $x = 0, 1, \dots, M - 1$ és $y = 0, 1, \dots, N - 1$.

Linearitás

Diszkrét jelek esetén a jelek lineáris kombinációjának diszkrét Fourier-transzformáltja megegyezik a jelek Fourier-transzformáltjának lineáris kombinációjával, azaz minden $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ esetén

$$F(\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda F(f(x)) + \mu F(g(x))$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} F(\lambda f(x) + \mu g(x)) &= \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} (\lambda f(x) + \mu g(x)) e^{-2\pi i u x / M} = \\ &= \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} (\lambda f(x) e^{-2\pi i u x / M} + \mu g(x) e^{-2\pi i u x / M}) = \\ &= \lambda \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-2\pi i u x / M} + \mu \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} g(x) e^{-2\pi i u x / M} = \\ &= \lambda F(f(x)) + \mu F(g(x)). \square \end{aligned}$$

Periodikusság

Az M szerint periodikus $f(x)$ függvény Fourier-transzformáltjának értékei M periódushosszal ismétlődnek, azaz $\forall n \in \mathbb{Z} : F(u + n \cdot M) = F(u)$.

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} F(u+n \cdot M) &= \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-2\pi i(u+nM)x/M} = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-2\pi i u x/M} \cdot e^{-2\pi i n M x/M} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-2\pi i u x/M} \cdot e^{-2\pi i n x} = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-2\pi i u x/M} \cdot 1 = F(u). \square \end{aligned}$$

Ez a tulajdonság a kétdimenziós esetre felírva, ha az első koordinátában M , a második koordinátában N szerint periódikus a függvény:

$$F(u, v) = F(u + M, v) = F(u, v + N) = F(u + M, v + N).$$

Eltolás

2.4.1. Definíció. Jelölje $M_h(f(x))$ egy $f(x)$ jelen végrehajtott modulációt $h(x)$ függvénnyel, ekkor

$$M_h(f(x)) = f(x)h(x).$$

2.4.2. Definíció. Jelölje $T_h(f(x))$ egy $f(x)$ jelen végrehajtott translációt (eltolást) x_0 -val, ekkor

$$T_h(f(x)) = f(x - x_0).$$

A függvény eltoltjának a Fourier-transzformáltja az eredeti függvény transzformáltjának modulációja lesz. Legyen $g(x) = f(x - x_0)$, $G(u)$ pedig a $g(x)$ Fourier-transzformáltja, ebben az esetben igaz lesz, hogy

$$G(u) = F(u) e^{-2\pi i x_0 u/M}.$$

Bizonyítás.

$$G(u) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} g(x) e^{-2\pi i u x/M} = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x - x_0) e^{-2\pi i u x/M}$$

Helyettesítsük $(x - x_0)$ -t y -nal, ekkor

$$\frac{1}{M} \sum_{y=-x_0}^{M-1-x_0} f(y) e^{-2\pi i u (y+x_0)/M} =$$

$$= e^{-2\pi i u x_0/M} \frac{1}{M} \sum_{y=0}^{M-1} f(y) e^{-2\pi i u y/M} = e^{-2\pi i u x_0/M} F(u). \square$$

Ez a tulajdonság fordítva is igaz, hogy ha a Fourier transzformáltat eltoljuk, akkor az az eredeti függvény modulációjának a transzformáltja lesz. Legyen $g(x) = f(x)e^{2\pi i u_0 x/M}$, $G(u)$ pedig a $g(x)$ Fourier-transzformáltja, ekkor igaz lesz, hogy:

$$F(u - u_0) = G(u)$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} F(u - u_0) &= \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-2\pi i (u-u_0)x/M} = \\ &= \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{2\pi i u_0 x/M} e^{-2\pi i u x/M} = \\ &= \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} g(x) e^{-2\pi i u x/M} = G(u). \square \end{aligned}$$

Kétdimenziós esetben jelölje $f(x, y)$ transzformáltját $F(u, v)$. Ekkor

$$\begin{aligned} f(x, y) e^{2\pi i (u_0 x/M + v_0 y/N)} &\xrightarrow{F} F(u - u_0, v - v_0), \\ f(x - x_0, y - y_0) &\xrightarrow{F} F(u, v) e^{-2\pi i (u x_0/M + v y_0/N)}. \end{aligned}$$

Szimmetria

Ha $f(x)$ függvény valós, akkor:

$$\overline{F(-u)} = F(u),$$

ahol $\overline{F(u)}$ jelöli a komplex konjugáltat.

Bizonyítás.

Mivel a konjugálás összeg és szorzattartó, valós szám komplex konjugáltja pedig maga a szám, ezért valójában csak az $e^{-2\pi i (-u)x/M}$ kifejezést kell konjugálni.

$$\overline{F(-u)} = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) \overline{e^{2\pi i u x/M}} = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-2\pi i u x/M} = F(u). \square$$

Következmény. A konjugálás $|z| = |\bar{z}|$ tulajdonságából következik, hogy a spektrum szimmetrikus:

$$|F(u)| = |F(-u)|.$$

2.4.3. Definíció. Legyen f, g két diszkrét függvény. Ekkor a két függvény konvolúcióját a következő szabály alapján képezzük:

$$(f * g)(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)g(x - n).$$

A függvényeket az értelmezési tratományukon kívül azonosan nullának tekintjük.

2.4.1. Tétel. *Konvolúciós tétel: Legyen f, g két függvény, mely M helyen vesz fel értéket. Ekkor a két függvény konvolúciójának Fourier- transzformáltja a két függvény Fourier- transzformáltjának szorzata, vagyis legyen $h(x) = (f * g)(x)$ és jelölje h, f, g Fourier transzformáltját rendre H, F, G . Ekkor*

$$H(u) = MF(u)G(u)$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} H(u) &= \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} \left(\sum_{n=0}^{M-1} f(n)g(x - n) \right) e^{-2\pi i u x / M} = \\ &= \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} f(n) \sum_{x=0}^{M-1} g(x - n) e^{-2\pi i u x / M} = \\ &= \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} f(n) \sum_{x=0}^{M-1} g(x - n) e^{-2\pi i u (x-n) / M} e^{-2\pi i u n / M} = \\ &= \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} f(n) e^{-2\pi i u n / M} \sum_{x=0}^{M-1} g(x - n) e^{-2\pi i u (x-n) / M} = \\ &= MF(u)G(u). \square \end{aligned}$$

3. Fast Fourier Transform

3.1. Műveletigény

Legyen adott egy $f(x), x = 0, 1, \dots, M - 1$ függvény. Ennek diszkrét Fourier transzformáltja a 2.2.1 definícióban meghatározott

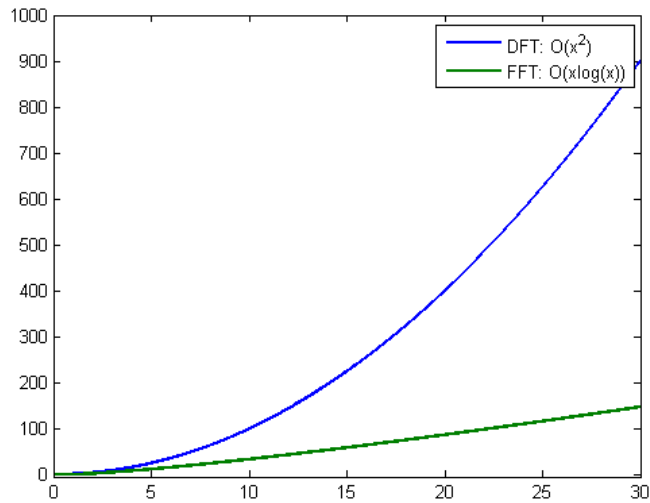
$$F(u) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-2i\pi xu/M}, \quad u = 0, 1, \dots, M - 1$$

képlettel számolható.

Egy tetszőleges $F(u)$ kiszámításához M darab komplex szorzást és $M - 1$ komplex összeadást kell elvégeznünk. Tudjuk, hogy két komplex szám összeadásánál a valós és képzetes részeket kell összeadni, így ez a művelet megoldható két darab valós összeadással. A szorzásnál azonban a két valós összeadás mellett szükségünk van négy darab valós szorzásra is. Vagyis $F(u)$ kiszámolásához összesen $2(M - 1) + 2M$ összeadás és $4M$ darab szorzás elvégzése szükséges. Így ha ki szeretnénk számolni egy $f(x), x = 0, 1, \dots, M - 1$ függvény diszkrét Fourier-transzformáltját leíró vektort, akkor ennek műveletigénye $\mathcal{O}(M^2)$, hiszen $2(M - 1)M + 2M^2$ valós összeadás és $4M^2$ valós szorzás kell hozzá.

Ez a módszer megoldást nyújt egy függvény transzformáltjának meghatározására, de sajnos nagyon időigényes. *James William Cooley* és *John Wilder Tukey* voltak azok akik 1965-ben publikáltak egy olyan algoritmust, melynek műveletigénye $\mathcal{O}(M \log_2 M)$. Ez hatalmas előrelépés volt a digitális jelfeldolgozás területén, hiszen ha például az $f(x)$ függvényünk $M = 2^{10}$ ponton van meghatározva akkor a transzformált előállításához szükséges műveletigényt 10^6 -ról 10^4 -re csökkenti, vagyis százszoros gyorsulást eredményez, és az értelmezési tartomány elemszámának növekedésével a gyorsulás mértéke is egyre jobban nő.

A következő ábrán látható, mennyivel hatékonyabb, ha a a Cooley és Tukey által felfedezett algoritmust használjuk.



FFT és DFT összehasonlítása

A módszert Gyors Fourier Transzformációnak (Fast Fourier Transform - FFT) hívják. Mára már több fajtája ismert, de a következő fejezetrészben a Cooley-Tukey féle algoritmust mutatom be.

3.2. FFT algoritmus

Az algoritmus bemutatása előtt tegyük fel, hogy a bemeneti vektorunk hossza kettő hatványa, azaz az eddigi jelöléseket használva:

$$M = 2^n, \text{ ahol } n \in \mathbb{Z}.$$

Ebből az következik, hogy $M = 2K$, $K \in \mathbb{Z}$ alakban is felírható. Legyen

$$W_M = e^{-2\pi i/M}.$$

Alkalmazva ezt a helyettesítést a diszkrét Fourier-transzformált egy új alakjához jutunk

$$F(u) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) W_M^{xu},$$

majd felhasználva $M = 2K$ formáját, tovább bonthatjuk az egyenletet páros és páratlan indexű tagokra.

$$F(u) = \frac{1}{2K} \sum_{x=0}^{2K-1} f(x) W_{2K}^{xu} =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{K} \sum_{x=0}^{K-1} f(2x) W_{2K}^{(2x)u} + \frac{1}{K} \sum_{x=0}^{K-1} f(2x+1) W_{2K}^{(2x+1)u} \right].$$

A W_M jelölés jelentéséből adódik, hogy $W_{2K}^{2xu} = e^{-2\pi i 2ux/2K} = e^{-2\pi i ux/K} = W_K^{xu}$, így

$$F(u) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{K} \sum_{x=0}^{K-1} f(2x) W_K^{xu} + \frac{1}{K} \sum_{x=0}^{K-1} f(2x+1) W_K^{xu} W_{2K}^u \right].$$

Definiáljuk F_{ps} és F_{ptl} K hosszú vektortokat úgy, mint F páros és páratlan értékeihez tartozó transzformáltakat, vagyis

$$F_{ps}(u) = \frac{1}{K} \sum_{x=0}^{K-1} f(2x) W_K^{xu}, u = 0, 1, \dots, K-1$$

$$F_{ptl}(u) = \frac{1}{K} \sum_{x=0}^{K-1} f(2x+1) W_K^{xu}, u = 0, 1, \dots, K-1.$$

Így megkapjuk, hogy

$$F(u) = \frac{1}{2} [F_{ps}(u) + F_{ptl}(u) W_{2K}^u], u = 0, 1, \dots, K-1.$$

Ezzel azonban csak az első K elemét tudjuk meghatározni $F(u)$ -nak. A transzformált periódikusságát kihasználva azonban könnyen eljuthatunk a második feléhez is. Ha $u = K, K+1, \dots, 2K-1$, akkor

$$F(u) = \frac{1}{2} [F_{ps}(u-K) + F_{ptl}(u-K) W_{2K}^u].$$

Legyen $u - K = n$, így $n = 0, 1, \dots, K-1$, és

$$F(n+K) = \frac{1}{2} [F_{ps}(n) + F_{ptl}(n) W_{2K}^{n+K}].$$

Kihasználva, hogy

$$W_{2K}^{u+K} = e^{-2\pi i(u+K)/2K} = e^{-2\pi iu/2K} \cdot e^{-\pi i} = -W_{2K}^u$$

eljutunk a végső megoldáshoz:

$$F(u) = \frac{1}{2}(F_{ps}(u) + F_{ptl}(u)W_{2K}^u),$$

$$F(u + K) = \frac{1}{2}(F_{ps}(u) - F_{ptl}(u)W_{2K}^u),$$

$$u = 0, 1, \dots, K - 1.$$

4. Szűrés

4.1. Tulajdonságok a kép Fourier-transzformáltjából

Mielőtt megismerkednénk a frekvenciatérben elvégzett szűrések folyamatával, nézzük meg, hogy milyen tulajdonságokat árul el a Fourier-transzformált az eredeti képről.

Legyen $f: \{0, 1, \dots, M-1\} \times \{0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow \{0, 1, \dots, L-1\}$ az 1.3 részben bemutatott mátrixos reprezentációja egy képnek, ahol M, N jelöli a kép méretét, L pedig a szürkeárnyalatok számát. Ennek Fourier-transzformáltja legyen $F(u, v)$ $u = 0, 1, \dots, M-1$, $v = 0, 1, \dots, N-1$ mátrix. Ahhoz, hogy vizuálisan is kapcsolatot tudjunk teremteni az eredeti és a transzformált kép között két dolgot kell megtennünk. Az $F(u, v)$ mátrix $u = 0, v = 0$ pontjához tartozik a kép fényességének átlag értéke. A periodikus tulajdonság miatt ez az érték áll az $F(0, N), F(M, 0), F(M, N)$ helyeken is, és a transzformáltat szokás úgy ábrázolni, hogy ez az érték a kép középpontjában legyen. Vagyis ehhez a transzformált eltolja kellene, még hozzá u irányában $-M/2$ -vel, v irányában pedig $-N/2$ -vel. A transzformált tulajdonságainál igazoltuk, hogy ez az eltolt transzformált kép, az eredeti kép modulációjának a transzformálta lesz, azaz $F(u - \frac{M}{2}, v - \frac{N}{2})$ tartozik az

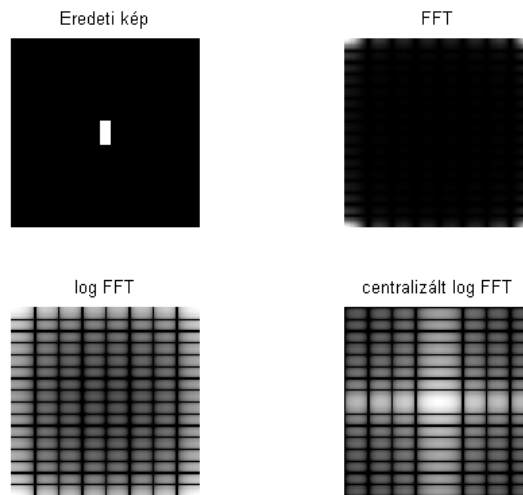
$$f(x, y)e^{-2i\pi(\frac{x-\frac{M}{2}}{M} + \frac{y-\frac{N}{2}}{N})} = f(x, y)e^{-i\pi(x+y)}$$

képhez, ahol alkalmazva az Euler-formulát, megkapjuk, hogy az eltolás után valójában az eredeti kép $(-1)^{(x+y)}$ -szorosának transzformáltját kapjuk.

Másodjára pedig, a transzformált komplex számokból áll, melyet nehéz lenne ábrázolni, ezért külön ábrázoljuk a spektrumát és a fázisát, pontosabban a spektrumnak a $\log(1 + |F(u, v)|)$ alakját.

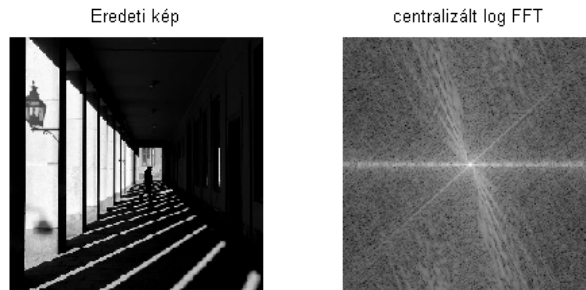
Ezek után nézzünk pár példát képekre, és azok Fourier-transzformáltjára. Az első képen fekete háttéren egy 8×16 pixelből álló fehér téglalap látható. A transzformáltat ábrázoló képen szabályosság és szimmetria figyelhető meg, még hozzá a téglalap méreteivel megegyező rácsmintázat, melyen láthatjuk, hogy a fekete rácsvonalak mentén előforduló frekvenciájú összetevők nem

szerepelnek az eredeti képben.



Szabályosságot megjelenítő kép

A következő képen is egy érdekes tulajdonságot figyelhetünk meg. Egy oszlopokkal szegélyezett folyosó, melyen láthatóak az árnyékok és az elemek egyenes határoló vonalai. A transzformálton jól kivehető három fő iránya a vonalaknak, melyek merőlegesek az eredeti képen megjelenő élekre.



Szabályosságot megjelenítő kép

4.2. Szűrés folyamata

Szűréskor figyelembe kell vennünk, hogy a transzformált origóhoz közeli pontjai jelzik az alacsony frekvenciájú összetevők együtthatóit, melyek a lassú intenzitásváltozásokért felelősek, míg a távolabbiak a magas frekvenciás komponensekhez tartoznak, amik a gyors intenzitásváltozású éleket, sarkokat határozzák meg.

A frekvenciatérben való szűréskor a következő lépéseket kell elvégeznünk. Használjuk az eddigi jelöléseket és legyen $f(x, y)$ a kezdeti függvényünk, ami egy $M \times N$ -es képet reprezentál.

1. A Fourier transzformált számolásánál a képet úgy tekintjük mint egy periodikus függvényt, ezért amikor a kép széléhez érünk, akkor az átellenes értékek is belekerülnek a számolásba. Ez sokszor gondot okozhat, hiszen lehet, hogy a kép peremei egyáltalán nem kapcsolódnak egymáshoz, és így többszöri szűrés esetén a hiba még jobban fokozódna. Ezért szokták alkalmazni a "Zero padding" szabályt, ami egyszerűen annyit tesz, hogy

a kép szélét kiegészíti 0-kal.

$$f(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{ha } (x, y) \in \{0, 1, \dots, M-1\} \times \{0, 1, \dots, N-1\} \\ 0, & \text{ha } M \leq x \leq (2M-1) \text{ vagy } N \leq y \leq (2N-1) \end{cases}$$

2. Ezek után a transzformált centralizálásához alkalmazzuk az előzőekben említett módszert és legyen

$$f(x, y)_c = (-1)^{(x+y)} f(x, y).$$

3. Kiszámoljuk a centralizált kép $F_c(u, v)$ Fourier-transzformáltját.
4. Kiválasztunk egy számunkra megfelelő H szimmetrikus szűrőt, és elvégezzük a frekvencia térben a szűrést, azaz a 2 mátrixot elemenként szorozzuk, így megkapva

$$G_c(u, v) = F_c(u, v)H(u, v)$$

új mátrixot, mely a szűrt képünk Fourier transzformáltja lesz.

5. G_c -re alkalmazva a kétdimenziós diszkrét inverz Fourier-transzformációt megkapjuk $g_c(x, y)$ függvényt.
6. Számolási pontatlanságok miatt előfordulhat, hogy $g_c(x, y)$ tartalmaz komplex értékeket, ilyenkor ezeknek vegyük csak a valós részét.
7. Utolsó lépésben pedig decentralizálni kell a kapott képet, vagyis

$$g(x, y) = (-1)^{(x+y)} g_c(x, y),$$

lesz a visszatranszformált, feldolgozott képünk, melyet még méretre kell vágni a zero padding miatt.

4.3. Szűrők fajtái

A továbbiakban megismerkedünk olyan alapvető szűrőtípusokkal, melyek teljes sávokat vagy esetleg kisebb részeket távolítanak el a képek frekvenciatérbeli alakjából. Ezek a frekvenciatartományban vannak definiálva, és azonosak a feldolgozandó kép méretével. A szűrőket a jellemgörbékük meredeksége fogja megkülönböztetni, melyet a kép frekvenciasíkjának középpontjától, vagyis $(u, v) = (M/2, N/2)$ -től való Euklideszi távolság alapján fogjuk meghatározni. Jelölje ezt D , azaz kép tetszőleges (u, v) pontjára:

$$D(u, v) = \sqrt{(u - M/2)^2 + (v - N/2)^2}.$$

Notch szűrő

Ez a fajta szűrő eltér a többitől, amiket később meg fogunk ismerni. A képek transzformáltjában megjelenhetnek éles maximumok, melyek azt jelzik, hogy azok a komponensek nagy súllyal jelen vannak. Ez valamilyen periodikusságra, legtöbbször ismétlődő zajra utal. Ha ezeket a frekvenciákat kiszűrjük, akkor a képen megszűnik a periódikus zaj. Ha egy u_0, v_0 középpontú, D_0 sugarú körben szeretnénk kiszűrni a frekvenciákat, akkor a szűrőnk a következőképpen adható meg:

$$H(u, v) = \begin{cases} 1, & \text{ha } D_1(u, v) \leq D_0 \text{ vagy } D_2(u, v) \leq D_0 \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$$

ahol

$$D(u, v)_1 = \sqrt{(u - M/2 - u_0)^2 + (v - N/2 - v_0)^2},$$

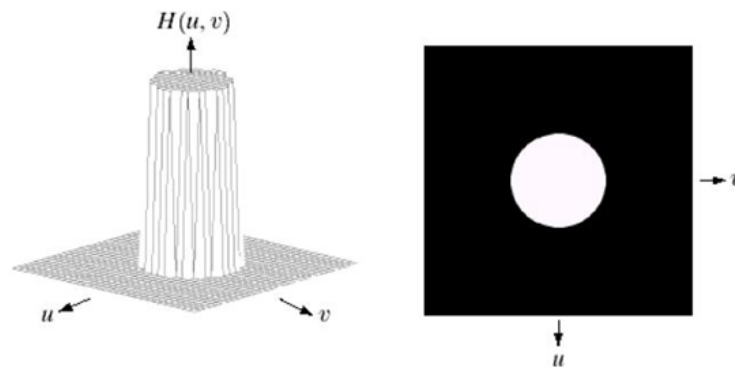
$$D(u, v)_2 = \sqrt{(u - M/2 + u_0)^2 + (v - N/2 + v_0)^2}.$$

Aluláteresztő szűrők

Mint ahogy azt már korábban is említettük, a transzformálnál az origóhoz közelebbi együtthatók tartoznak az alacsony frekvenciás összetevőkhöz, melyek

a kép nagyobb, egybefüggő felületeiért felelőssek, míg a kép széléhez közeledve a fényesség hirtelen változásait kifejező, magas frekvenciás térharmónikusok együttthatói szerepelnek. Egy aluláteresztő, vagy más néven simító szűrő a névéhez igazodva, az alacsony frekvenciás térharmónikusokat áteresztí vagy megerősíti, míg a magasak amplitúdóját kicsinyíti vagy teljesen kinullázza. Ezt a fajta szűrést alkalmazva egy képnél a magas frekvenciás összetevők csökkenése miatt az eredmény egy lágyabb, zajtalanabb, viszont életlenebb kép lesz.

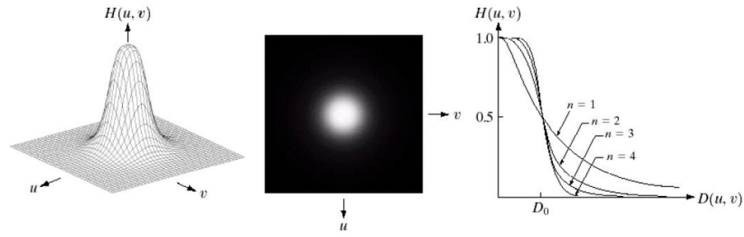
Az első ilyen szűrő, melynek jellengörbéje a legmeredekebb az *ideális aluláteresztő szűrő* (ILPF).



$$H(u, v) = \begin{cases} 1, & \text{ha } D(u, v) \leq D_0 \\ 0, & \text{ha } D(u, v) > D_0, \end{cases}$$

ahol $D(u, v)$ jelöli a középponttól való távolságot, D_0 pedig a vágási frekvenciát. Értelmezve a képletet láthatjuk, hogy ha H -t alkalmazzuk a képünkre, akkor a vágási frekvencia alatti komponenseket megtarja, a nála magasabb frekvenciájúakat kinullázza.

Ennél egy kicsit lágyabb az n -edrendű aluláteresztő Butterworth szűrő (BLPF), ahol a meredeksége csakis n -től függ, amit a szűrő rendjének nevezünk.

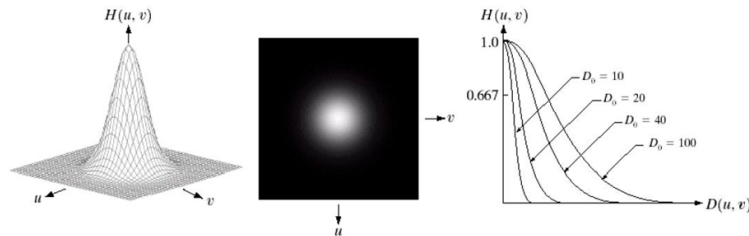


$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v)/D_0]^{2n}}$$

A rend növelésével a jellemzőre meredeksége nő és ha $n \rightarrow \infty$, akkor a Butterworth szűrő jellemzőre tart az ideális aluláteresztő szűrő jellemzőre. Ez a szűrő már nem csak érintetlenül hagy vagy kinulláz frekvenciákat, hanem van, hogy az eredeti érték törtrészét engedti át. A vágási frekvenciával megegyező komponensek értéke mindig a felére csökken, hiszen ha $D(u, v) = D_0$, akkor

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D_0/D_0]^{2n}} = \frac{1}{2}.$$

A legsimább eredményt megvalósító szűrő a *Gauss aluláteresztő szűrő* (GLPF).



$$H(u, v) = e^{-\frac{D(u, v)^2}{2D_0^2}}$$

A képen láthatjuk, hogy meredeksége D_0 növelésével egyre jobban csökken. Ennek hatására a szűrt képünkön kisebb mértékben történik lágyítás, mint a többi szűrőnél.

Felüláteresztő szűrők

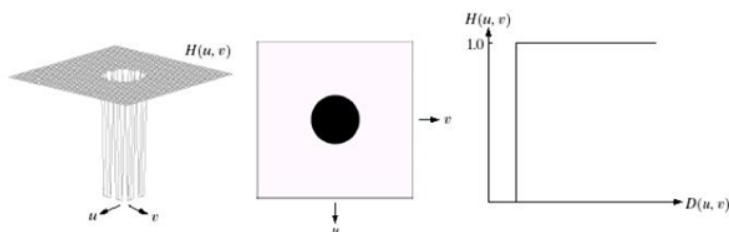
Mivel a gyors intenzitásváltozásokért a magas frekvenciás komponensek felelősek, ezért adódik, hogy ha élesíteni szeretnénk a képet, akkor ezeket kell kiemelni. Erre valók a felüláteresztő szűrők, melyek levágják, vagy csökkentik az alacsony frekvenciás komponenseket, míg a magasakat előnyben részesítik. Ezek használatakor a részletek, élek megmaradnak, azonban a kép egyre nehezebben felismerhető, hiszen a lassú változások törlésével az alapszín mindenhol ugyanaz lesz. Az ilyen típusú szűrők képletét egyszerűen megkaphatjuk úgy, hogy 1-ből kivonjuk az azonos levágási frekvenciával elkészített aluláteresztő párjukat:

$$H_{HPF} = 1 - H_{LPF},$$

ahol H_{HPF} jelöli az felüláteresztő, H_{LPF} pedig az aluláteresztő szűrőt. Ennek példájára nézzük meg az előbb megismert szűrőtípusok felüláteresztő párjait.

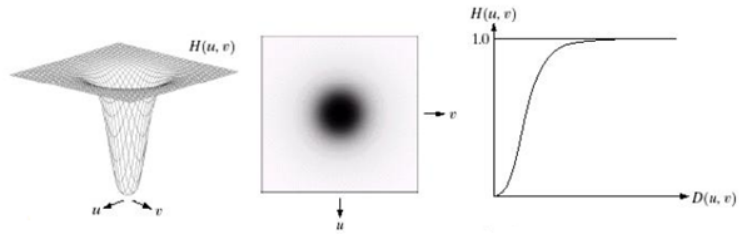
Ideális felüláteresztő szűrő

$$H(u, v) = \begin{cases} 0, & \text{ha } D(u, v) \leq D_0 \\ 1, & \text{ha } D(u, v) > D_0, \end{cases}$$



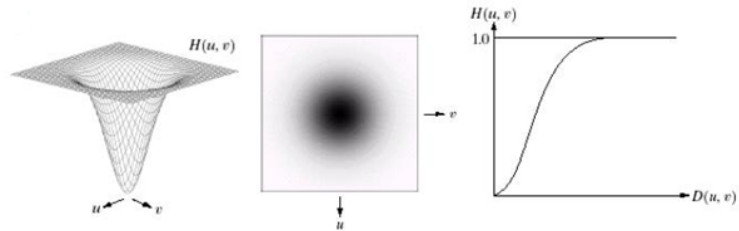
Butterworth felüláteresztő szűrő

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D_0/D(u, v)]^{2n}}$$



Gauss felüláteresztő szűrő

$$H(u, v) = 1 - e^{-\frac{D(u, v)^2}{2D_0^2}}$$



Hasonlóan az aluláteresztő szűrőkhöz, az itt említettek közül a Gauss szűrő fogja a legjobb eredményt adni, aminek köszönhetően a kép élei tisztán megmutatkoznak.

Sáváteresztő szűrők

Az alul-és felüláteresztő szűrőkből létrehozhatunk olyan újabb fajta szűrőket, melyek nem egy bizonyos határfrekvencia alatti és feletti komponenseket kezelnek hasonlóan, hanem tartozik hozzájuk egy másik W paraméter is, mely megmondja, hogy D_0 -tól milyen távol lévő pontok azok, amelyekre nekünk szükségünk van vagy éppen nincs. Ezeket hívjuk sáváteresztő és sávzáró szűrőknek, melyeknél előbbi a D_0, W által képzett gyűrűn belüli frekvenciákat átengedi, utóbbi pedig kiszűri.

Ennél a típusnál is folytassuk a korábban megismert három fajta szűrő sávzáró alakjával:

Ideális sávzáró szűrő

$$H(u, v) = \begin{cases} 1, & \text{ha } D(u, v) < D_0 - W/2 \\ 0, & \text{ha } D_0 - W/2 \leq D(u, v) \leq D_0 + W/2 \\ 1, & \text{ha } D(u, v) > D_0 + W/2, \end{cases}$$

Butterworth sávzáró szűrő

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D(u, v)W}{D^2(u, v) - D_0^2} \right]^{2n}}$$

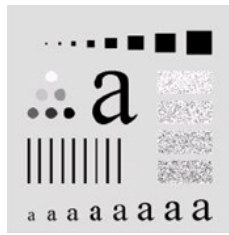
Gauss sávzáró szűrő

$$H(u, v) = 1 - e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{D(u, v)^2 - D_0^2}{D(u, v)W} \right]^2}$$

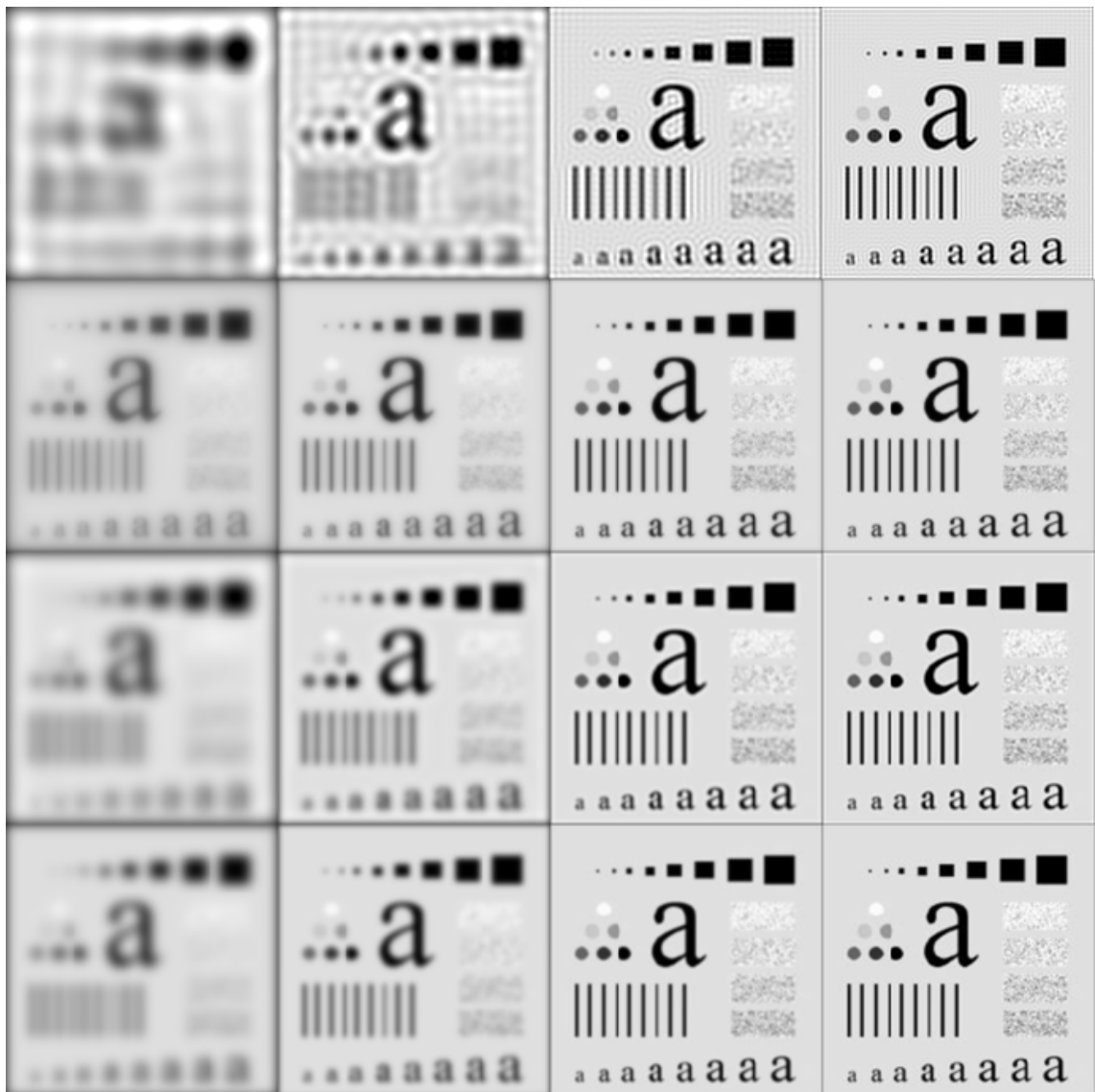
A sáváteresztő szűrőket pedig megkaphatjuk úgy, hogy ezeknek a szűrőknek a leíró függvényét 1-ből kivonjuk.

4.4. Szűrők bemutatás példákön

A következőekben láthatjuk, hogy milyen hatása van az aluláteresztő szűrőknek. Ahogy azt elvárjuk, el fogja mosni a képeket és az élek kevésbé lesznek kivehetőek. A képeken sorban láthatjuk az ideális, az elsőrendű Butterworth, a másodrendű Butterworth és a Gauss szűrőket azonos levágási frekvenciával, amely először a kép eredeti méretének 10 százaléka, majd 20,50 és 70. Láthatjuk, hogy az Gauss és Butterworth szűrőknél már a méret 50 százalékaival megegyező levágási frekvenciánál is a feldolgozott kép szinte megegyezik az eredetivel.

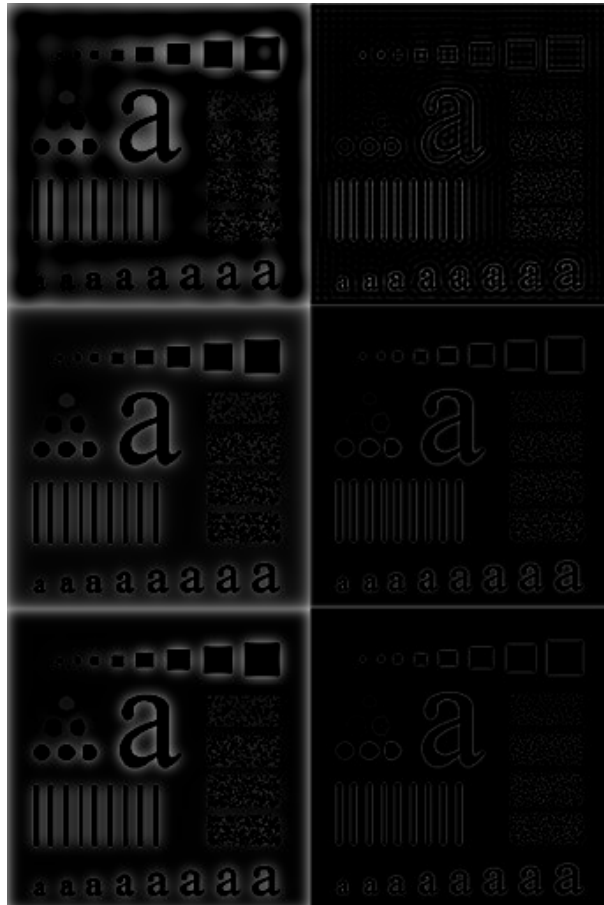


Eredeti kép



Aluláteresztő szűrők hatása

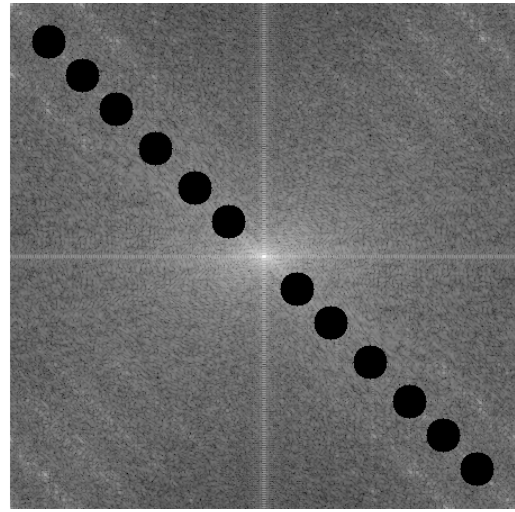
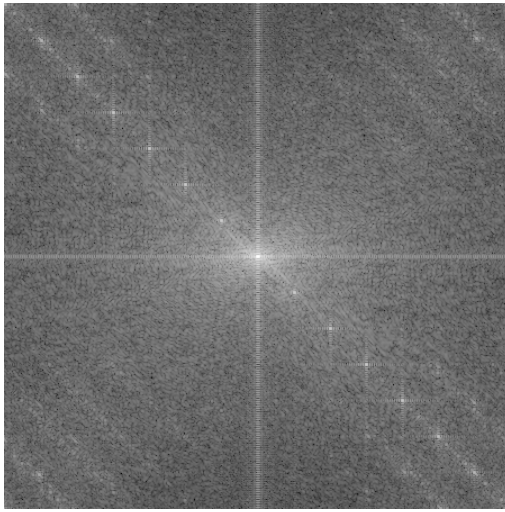
Felüláteresztő szűrőknél láthatjuk az élek kiemelkedését, melyek egyre tisztábban megmutatkoznak a levágási frekvencia növekedésével. A képeken 10 és 50 százalékos levágási frekvenciával láthatjuk sorban az ideális, az elsőrendű Butterworth és a Gauss szűrő hatását.



Felüláteresztő szűrők hatása

Végül a legelsőként ismertetett notch szűrő hatását mutatom be egy olyan képen, melyen periodikus zaj látható. A transzformált képen láthatjuk a kiemelkedő maximumokat, melyek jelzik, hogy mely frekvenciájú komponensek ismétlődnek sokszor. Ezeket kiszűrve megszüntethetjük a zajt.

Az első képen láthatjuk az eredeti kép transzformáltját, és hogy milyen szűrőt alkalmaztunk rá, a másodikon pedig az eredeti képet és a szűrés után kapott végeredményt.



Az eredeti kép transzformáltja és a felhasznált notch szűrő



Az eredeti és a szűrt kép

Összefoglalás

Dolgozatom célja az volt, hogy megmutassam az olvasónak a képfeldolgozást egy olyan szemszögből, melyet kevesen ismernek. Amikor a kép egy teljesen új formát ölt, és ebben a formában kerül feldolgozásra, majd visszakapja eredeti alakját.

Az ehhez használt eszköz a Fourier–transzformáció volt. Segítségével megismerhettük a képet alkotó különböző frekvenciájú komponensek együtthatóit, láthattuk, hogy melyek azok a térharmónikusok, amik dominánsabbak. Az így keletkezett képen a frekvenciaszűrők segítségével többféle problémát is tudunk kezelni. Képesek vagyunk szűrni a periodikus zajokat, vagy akár kiemelni az éleket, ha arra van szükség. Ezeken kívül több más olyan művelet van, melyet kényelmesebb elvégezni a frekvenciatérben mint a képtérben, például a textúra analízis vagy az alakfelismerés.

A dolgozat rávilágít arra, hogy a problémákat több irányból megközelítve eljuthatunk egy olyan megoldáshoz, ami az elején nehezebbnek tűnhet, de a végére egy egyszerűbben elérhető, akár jobb végeredményt nyújthat.

Hivatkozások

- [1] Claude Gasquet, Patrick Witomski: *Fourier Analysis and Applications*, 1999.
- [2] Rafael C. Gonzalez, Richard E. Woods: *Digital Image Processing, Second edition*, 1992.
- [3] Dr. Fodor Dénes: *Digitális Jelfeldolgozás*, 2014.
- [4] Elias M. Stein, Rami Shakarchi: *Fourier Analysis–An Introduction*, 2003.
- [5] Dr. Fridli Sándor: *Jel-és Képfeldolgozás kurzus(IPM–08MODDJKEG–13)*, 2018/19/1.
- [6] Arthur L. Schoenstadt: *An Introduction to Fourier Analysis*, 1992.