Diszkrét Analízis és Generátorfüggvények

Szakdolgozat

Írta: Szabó Kristóf

Matematika BSc, Alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető:

Szőnyi Tamás, egyetemi tanár

Számítógéptudományi Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2020

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Szőnyi Tamásnak, hogy segített a témaválasztásban, és hogy tanácsadásával, útmutatásával hozzásegített a dolgozatom elkészítéséhez. Köszönöm családomnak a sok támogatást amit az évek során tőlük kaptam.

Előszó

A matematikai problémamegoldás során gyakran előfordulnak különböző összegzések, melyek egyszerűbb alakra hozása adhatja a megoldás kulcsát. A matematika történelme során több ilyen feladat vezetett hatékony módszerekhez általános összegek leegyszerűsítésére.

Szakdolgozatom célja ezen módszerek egy részének ismertetése, külön figyelemmel a számítógéppel, szimbolikus programcsomagokkal automatizálható módszerekre, ezek használatának bemutatására.

Tartalomjegyzék

Jelölések

A szakdolgozatban található kevésbé elterjedt jelölések gyűjteménye a könnyebb értelmezhetőség céljából, ahol lehet a *Konkrét Matematika* [GKP98] jelölésrendszerét követik.

Jelölés	*Leírás*
$x^{\overline{n}}$	növekvő faktoriális hatvány, $x!/(x-n)!$
$x^{\underline{n}}$	csökkenő faktoriális hatvány, $\Gamma(x-n)/\Gamma(x)$
$\sum f(x)\delta x$	határozatlan összeg
$\sum_b^a f(x)\delta x$	határozott összeg
$F\left(\begin{matrix} a,\, b,\, c \\ d,\, e \end{matrix}\middle\vert\, z\right)$	hipergeometrikus függvény
$[z^n]f(z)$	$f(z)$ z^n tagjának együtthatója
$[m=n]$	1, ha $m=n$, egyébként 0 *
$\left[\begin{matrix} n \\ m \end{matrix}\right]$	elsőfajú Stirling-szám
$\left\{\begin{matrix} n \\ m \end{matrix}\right\}$	másodfajú Stirling-szám
$\left\lfloor\begin{matrix} n \\ m \end{matrix}\right\rfloor$	Lah-szám
$\mathcal{H}_n$	Harmonikus szám, $\mathcal{H}_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$

*Általánosan bármilyen S logikai állításra $[S]$ kifejezés értéke 1, ha S igaz, 0 különben

1. Diszkrét Kalkulus

1.1. Alapfogalmak

A folytonos függvények vizsgálatánál megszokott fogalmak, mint a deriválás és az integrálás "természetes" megfelelői diszkrét függvények esetén is értelmezhetőek, és érdekes eredményekhez vezetnek. Ebben a fejezetben ezeket vizsgáljuk, Graham, Knuth és Patashnik *Konkrét Matematika [Concrete Mathematics]* [GKP98] könyvének 2.6 és 6.1 fejezetei alapján, azok bizonyításait néhol jobban részletezve, vagy más típusú bizonyítást adva az állításokra.

Az egyik ilyen analízisből megszokott fogalom a D deriválási operátor, amelyet

$$Df(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

definiál; a megfelelője pedig a

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$$

által bevezetett Δ *differencia*-operátor, ez a diszkrét kalkulus alapköve. D és Δ operátorok, vagyis függvényeket függvényekbe képeznek. Folytonos esetben valós változós f függvény esetén szükséges tárgyalni D operátor értelmezhetőségét, ezzel szemben Δ minden valós függvényre értelmezett.

A deriválás tárgyalásakor hamar figyelmet kapnak az $f(x) = x^m$ alakú egész kitevős hatványfüggvények, ugyanis D egyszerű módon hat rájuk: $D(x^m) = mx^{m-1}$. Sajnos ez a Δ operátorra nem igaz, ugyanis például:

$$\Delta(x^4) = (x+1)^4 - x^4 = 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1,$$

viszont létezik egy másfajta egyszerű függvény, amelyet Δ egyszerűen transzformál, ezt pedig az

$$x^{\underline{m}} = \overbrace{x(x-1)\ldots(x-m+1)}^{m \text{ tényező}}, \quad \text{ahol } m \geq 0 \text{ egész}$$

egyenlőség definiálja, és *csökkenő faktoriális hatványnak* nevezzük. Hasonlóan definiált az ún. *növekvő faktoriális hatvány*, az alábbi egyenlőséggel:

$$x^{\overline{m}} = \overbrace{x(x+1)\ldots(x+m-1)}^{m \text{ tényező}}, \quad \text{ahol } m \geq 0 \text{ egész.}$$

Az $m = 0$ esetben $x^{\overline{0}} = x^{\underline{0}} = 1$, mivel a 0 tényezős szorzat értéke 1.

1.1.1. Állítás. $\Delta(x^{\underline{m}}) = mx^{\underline{m-1}}$.

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}\Delta(x^{\underline{m}}) &= (x+1)^{\underline{m}} - x^{\underline{m}} \\ &= (x+1)x\ldots(x-m+2) - x\ldots(x-m+2)(x-m+1) \\ &= mx(x-1)\ldots(x-m+2) = mx^{\underline{m-1}}\end{aligned}$$

□

$\Delta(x^{\overline{m}}) = m(x+1)^{\overline{m-1}}$ hasonlóan belátható.

A folytonos kalkulus $\int$ integrál-operátorához mint a D operátor inverzéhez hasonlóan bevezethető Δ inverze, a Σ anti-differencia (vagy szumma-) operátor.

Az analízisből megszokott definíció:

$$\int g(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + C \overset{def}{\iff} g(x) = Df(x),$$

ehhez hasolóan pedig:

$$\Sigma g(x)\delta x = f(x) + C \overset{def}{\iff} g(x) = \Delta f(x),$$

ahol $\Sigma g(x)\delta x$ a $g(x)$ határozatlan összege, azaz azon függvények osztálya, melyek differenciája $g(x)$.

Ezek alapján $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a)$ összefüggéshez hasonlóan értelmezhető $g(x)$ határozott összege:

$$\textstyle\sum_a^b g(x)\delta x = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a).$$

Ez nagyon szép analógiát vezet be, kérdéses még, hogy hogyan függ össze a megszokott összegzéssel. Ehhez vizsgáljuk meg hogyan viselkedik speciális esetekben. Legyen $g(x) = \Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$. Ekkor $b = a$ esetén:

$$\textstyle\sum_a^a g(x)\delta x = f(a) - f(a) = 0.$$

Ha $b = a + 1$, akkor:

$$\textstyle\sum_a^{a+1} g(x)\delta x = f(a+1) - f(a) = g(x),$$

általánosan pedig, ha b 1-el nő:

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_a^{b+1} g(x)\delta x - \sum_a^b g(x)\delta x &= (f(b+1) - f(a)) - (f(b) - f(a)) \\ &= f(b+1) - f(b) = g(b).\end{aligned}$$

Mindezekből indukcióval következik, hogy:

$$\textstyle\sum_a^b g(x)\delta x = \displaystyle\sum_{k=a}^{b-1} g(k) = \sum_{a\le k<b} g(k), \qquad b \ge a \text{ egészek.}$$

A bevezetett fogalmak hasznosságának leellenőrzésére vezessünk le egy jól ismert összeget. Ehhez vegyük észre, hogy $k^2 = k^{\underline{2}} + k^{\underline{1}}$. Ezzel:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} k^2 &= \textstyle\sum_0^n k^{\underline{2}} + k^{\underline{1}} \delta k = \dfrac{n^{\underline{3}}}{3} + \dfrac{n^{\underline{2}}}{2} \\ &= \frac{2n(n-1)(n-2) + 3n(n-1)}{6} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.\end{aligned}$$

Ebbe n helyére $n+1$-et helyettesítve levezettük az első n négyzetszám összegére ismert képletet. A következő két részben felépítjük a leszálló és a szokásos hatványok közötti áttérés módját, és ezzel az itt kialakított elméletünk képes lesz bármilyen polinommal kifejezett összegzés egyszerűsítésére.

Ezzel az alapfogalmakat bevezettük, itt felsorolás szintjén következik néhány egyszerűbb összefüggés, amik hasznosak különböző összegek kezelésénél, ezek részletei [GKP98] 2.6. fejezetében vannak kifejtve.

$$x^{\underline{n}} = (-1)^n (-x)^{\overline{n}}$$

$$x^{\underline{-m}} = \frac{1}{(x+1)\dots(x+m)}$$

$$x^{\underline{m+n}} = x^{\underline{m}} (x-m)^{\underline{n}}$$

$$\textstyle\sum x^{\underline{-1}} \delta x = \mathcal{H}_x$$

$$\Delta 2^x = 2^x, \text{ és általánosan } \Delta c^x = (c-1)c^x$$

Továbbá az $Ef(x) = f(x+1)$ operátor bevezetésével

$$\Delta(uv) = u \Delta v + Ev \Delta u$$

$$\textstyle\sum u \Delta v = uv - \sum Ev \Delta u$$

1.2. Stirling-számok

A tetszőleges hatványok közötti áttéréshez be kell vezetnünk az első- és másodfajú Stirling-számok fogalmát, és megvizsgálni ezek néhány tulajdonságát.

Az elsőfajú Stirling-számokra a $\left[{n \atop k}\right]$ jelölést használjuk, és azt számolja, hogy n elemet hányféleképpen tudunk k diszjunkt ciklusba rendezni. A ciklusokra használjuk az $[abcd]$ jelölést, ekkor $[abcd] = [dabc] = [cdab] = [bcda]$. $\left[{n \atop n}\right]$ értéke nyilván 1, $\left[{n \atop 1}\right]$ értéke pedig $(n-1)!$, pozitív egész n-ekre.

A binomiális együtthatókhoz hasonlóan az elsőfajú Stirling-számokra is létezik rekurzív formula, ami a következő:

1.2.1. Állítás.

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}.$$

Bizonyítás. Ennek igazolásához meg kell gondolni, hogyan adhatjuk hozzá az n. elemet az előző elemekből álló ciklusokhoz hogy új ciklusokat kapjunk. Ezt két esetre bontjuk. Az az eset, amikor ez az elem önmagában alkot egy ciklust, $\left[{n-1 \atop k-1}\right]$-szer történik meg. Ha pedig a másik esetben egy már meglétező l hosszú ciklushoz akarjuk hozzátenni, úgy tűnhetne, hogy $l+1$ választásunk van, de valójában ha a legelső helyre tesszük ugyanazt a ciklust kapjuk, mint ha a legutolsóra tennénk. Például $l = 3$ esetben: $[\_a\_b\_c\_]$

$$[dabc] = [abcd],\ [adbc],\ [abdc]$$

Mivel az előző elemekből álló ciklusok összhossza $n-1$, így megkaptuk az $(n-1)\left[{n-1 \atop k}\right]$ tagot is. □

Ehhez hasonlóan, a másodfajú Stirling-számokat $\left\{{n \atop k}\right\}$ jelöli, jelentésük pedig azm hogy n elemet hányféleképpen tudunk k halmazba rendezni. (A jelölést könnyű összekapcsolni az értelmezéssel, ha meggondoljuk, hogy a halmazok jelölésére is kapcsos zárójeleket használunk.) Nyilvánvaló, hogy $\left\{{n \atop 1}\right\}$ és $\left\{{n \atop n}\right\}$ értéke is 1.

Ezekre is létezik rekurzív képlet, ami a következő:

1.2.2. Állítás.

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = k\begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix}.$$

Bizonyítás. Nézzük meg, hogy hogyan tudjuk hozzáadni az n. elemet az előzőekből összeállított halmazokhoz. Amikor ez az elem önálló halmazt alkot, kiad $\left\{{n-1 \atop k-1}\right\}$ esetet. Amikor egy másik halmazhoz tesszük hozzá, azt annyiféleképpen tehetjük, ahány halmazunk van, azaz k féleképpen. Mivel összesen $\left\{{n-1 \atop k}\right\}$-féle ilyen halmazunk van, ezzel megkaptuk az első tagot is. □

1.3. Áttérés a szokványos és a faktoriális hatványok között

Az előző részben vizsgált első- és másodfajú Stirling-számok megfelelő eszközöket adnak számunkra, hogy szokványos hatványokról áttérjünk faktoriális hatványokra, és hogy ezzel az első részben tárgyalt módszerekkel könnyedén összegezzünk polinomokból álló kifejezéseket.

A vizsgált (1.2.1) és (1.2.2) rekurziós formulák lehetőséget adnak a következő formulák indukciós bizonyítására. Ezek tárgyalása [GKP98] 6.1 fejezetében szerepel. Ehelyett itt kombinatorikus, bijektív bizonyítások következnek, Katona, Recski és Szabó *A számítástudomány alapjai* [KRS07] könyvének 7.2 fejezetében és Lovász *Kombinatorikai problémák és feladatok* [Lov08] 1. fejezetében tárgyaltakhoz hasonlóan. Ezzel belátjuk őket x minden pozitív egész értékére, és mivel mindkét oldalon polinomok szerepelnek, ezért ezek minden valós x értékre teljesülni fognak.

1.3.1. Állítás.

$$x^n = \sum_k \left\{ n \atop k \right\} x^{\underline{k}}, \quad n \geq 0 \textit{ egész.}$$

Bizonyítás. A bal oldalon x elem ismétléses permutációinak száma áll. A jobb oldali összegzésben $x^{\underline{k}}$ azt számolja, hogy x elemből k darabot hányféleképpen tudunk elrendezni, majd $\left\{ n \atop k \right\}$ megadja, hogy ebből az elrendezésből hogyan csinálunk n hosszú ismétléses permutációt. Az $\left\{ n \atop k \right\}$ által meghatározott halmazokat tekinthetjük a legkisebb elemük szerint rendezettnek, és ekkor az i. halmaz azt határozza meg, hogy az i. kiválasztott elemet mely helyekre írjuk be az n-ből. □

1.3.2. Állítás.

$$x^{\overline{n}} = \sum_k \left[n \atop k \right] x^k, \quad n \geq 0 \textit{ egész.}$$

Bizonyítás. A bal oldalon $x^{\overline{n}}$ azt jelöli, hogy hányféleképpen tudunk n elemet x darab listába rendezni, ahol a listák közti és a listákon belüli sorrend is számít, és lehetnek üres listák. Ez azért van, mert ha a j. elemet akarjuk elhelyezni, akkor pontosan $(x + j - 1)$ darab hely közül választhatunk.

A jobb oldalon egy tag azt jelöli, hogy pontosan k listába hányféleképpen tudjuk elrendezni az elemeket, úgy hogy egyik lista sem lehet üres. A k darab ciklust vehetjük a legkisebb elemük szerint rendezettnek, és ezeket x^k féleképpen oszthatjuk be az egyes listákhoz. A listákon belüli sorrendet pedig úgy kapjuk meg, hogy vesszük a ciklusfelbontásával kölcsönösen egyértelmű permutációt, és minden listában a hozzá beosztott ciklusok elemeit vesszük csak figyelembe. □

A fordított egyenlőségekhez írjunk x helyébe $-x$-et, és használjuk ezt a két összefüggést:

$$(-x)^{\underline{k}} = (-1)^k x^{\overline{k}}$$
$$(-x)^{\overline{k}} = (-1)^k x^{\underline{k}}.$$

Így megkapjuk az alábbi két azonosságot:

$$x^n = \sum_k (-1)^{n+k} \left\{ n \atop k \right\} x^{\overline{k}}$$
$$x^{\underline{n}} = \sum_k (-1)^{n+k} \left[x \atop k \right] x^k.$$

Ezekkel az összefüggésekkel szabadon járhatunk át x^n és $x^{\underline{n}}$ típusú kitevők között, és az x^n és $x^{\overline{n}}$ típusú kitevők között is. Ezt felhasználva át tudunk térni az $x^{\overline{n}}$ és $x^{\underline{n}}$ típusú kitevők között is, indirekt módon, x^n-en keresztül. Erre az átváltásra viszont létezik egy direkt módszer is, a *Lah-számok* segítségével. Ezek tárgyalása következik itt, Petkovšek és Pisanski „Combinatorial Interpretation Of Unsigned Stirling And Lah Numbers" [PP07] cikke nyomán.

1.3.3. Definíció. *Jelölje $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor$ azt, hogy n elemet hányféleképpen tudunk pontosan k darab nemüres listába rendezni, ahol a listákon belüli elemek rendezése számít, de a listák közötti nem. Ezeket hívjuk Lah-számoknak.*

A rekurzív kiszámításukat a következő összefüggésekkel kapjuk:

$$\left\lfloor {n \atop n} \right\rfloor = 1, \quad \left\lfloor {n \atop 1} \right\rfloor = n!,$$
$$\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor = \left\lfloor {n-1 \atop k-1} \right\rfloor + (n-1+k)\left\lfloor {n-1 \atop k} \right\rfloor.$$

Ennek belátására ismét az n. elem beszúrását vizsgáljuk, és ezt ismét két esetre bontjuk: Első esetben a $k-1$ listába rendezett $n-1$ elem mellett egy új listát indítunk, második esetben pedig a k listába rendezett $n-1$ elemhez illesztjük be bármelyik elem mögé ($n-1$ hely), vagy bármelyik lista elejére ($+k$ hely).

A kétfajta Stirling-számokkal ellentétben, ezeket ki tudjuk fejezni egyszerűen $\binom{n}{k}$ segítségével. Először rendezzük az n elemet egy listába, majd ezt osszuk fel k darabra a lehetséges $n-1$ vágás közül $k-1$-et kiválasztva. Így minden felosztást $k!$ alkalommal kaptunk meg. Összesítve tehát

$$\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor = \frac{n!}{k!}\binom{n-1}{k-1}.$$

1.3.4. Állítás. *Ezen számok segítségével az alábbi kifejezés igaz a növekvő és a csökkenő faktoriális hatványok között:*

$$x^{\overline{n}} = \sum_k \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor x^{\underline{k}}, \quad n \geq 0 \text{ egész.}$$

Bizonyítás. A korábbiakhoz hasonlóan, az egyenlőség bal oldala n elem legfeljebb x darab listába való rendezését számolja. A jobb oldalon pedig ugyanezt tesszük, szétválasztva az eseteket k, azaz a nemüres listák száma szerint.

Először ugyanis $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor$ féleképpen kiválasztjuk hogy az elemek hogyan fognak szerepelni a listákban, majd az x darab lista közül kiválasztunk mindegyiknek egy-egy helyet, amit $x^{\underline{k}}$ féleképpen tudunk megtenni. □

$$\begin{tikzcd}
 & x^n \arrow[dl, bend right, "(-1)^{n+k}{n \brace k}"'] \arrow[dr, "{n \brace k}"] & \\
x^{\overline{n}} \arrow[ur, "{n \brack k}"] \arrow[rr, "\genfrac{\lfloor}{\rfloor}{0pt}{}{n}{k}"] & & x^{\underline{n}} \arrow[ul, bend right, "(-1)^{n+k}{n \brack k}"'] \arrow[ll, bend left, "(-1)^{n+k}\genfrac{\lfloor}{\rfloor}{0pt}{}{n}{k}"]
\end{tikzcd}$$

1. ábra. Együtthatók a különböző hatványok közötti áttéréskor.

A korábbi behelyettesítést és átalakítást használva ennek az összefüggésnek is megkapjuk az inverzét:

$$x^{\underline{n}} = \sum_k (-1)^{n+k} \genfrac{\lfloor}{\rfloor}{0pt}{}{n}{k} x^{\overline{k}}.$$

Az áttéréseket az 1. ábra foglalja össze.

Érdekes összefüggést kapunk a Lah-számok és a Stirling-számok között, ha összevetjük a faktoriális hatványok közötti direkt átlépés formuláját a szokásos hatvány közbevevésével kapott formulával.

$$\begin{aligned}
x^{\overline{n}} = \sum_k \genfrac{\lfloor}{\rfloor}{0pt}{}{n}{k} x^{\underline{k}} &= \sum_k {n \brack k} x^k \\
&= \sum_k {n \brack k} \sum_j {k \brace j} x^{\underline{j}} \\
&= \sum_k \sum_j {n \brack k} {k \brace j} x^{\underline{j}} \\
&= \sum_j x^{\underline{j}} \sum_k {n \brack k} {k \brace j}.
\end{aligned}$$

Ebben a csökkenő faktoriális hatvány együtthatóit összevetve azt kapjuk, hogy

$$\genfrac{\lfloor}{\rfloor}{0pt}{}{n}{k} = \sum_j {n \brack j} {j \brace k}.$$

Ez az összefüggés kombinatorikusan is igazolható. Bal oldalt azt számoljuk, hogy hányféleképpen tudjuk k darab listába rendezni az n elemünket, jobb oldalt pedig előbb kiválasztunk egy j ciklusú permutációt belőlük, majd kiválasztjuk hogy melyik ciklusok kerüljenek egy listába, és tesszük ezt minden j-re.

2. Generátorfüggvények

Az előző részben leírt fogalmak összetettebb módszerek felépítését is támogatják, de ezek tárgyalása előtt ebben a részben a generátorfüggvényekkel foglalkozunk. A generátorfüggvényeket először Abraham de Moivre vezette be ([Knu97]), az általános lineáris rekurziók problémáinak megoldására. Később többek között James Stirling és Leonhard Euler talált számukra további érdekes felhasználási módokat.

Dolgozatom ezen részének célja a generátorfüggvények bemutatása Wilf *generatingfunctionology* [Wil06] könyve alapján, és különösen azon módszereik tárgyalása, melyek alkalmazásával összegek egyszerűsítésére kapunk eszközöket.

2.1. Definíciók, értelmezés, műveletek

2.1.1. Definíció. *Egy (a_n) sorozat (szokásos) generátorfüggvényének az alábbi formális hatványsort hívjuk:*

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Ez a definíció önmagában érdektelennek tűnik, azonban az ezen részben tárgyalt módszerek rávilágítanak a hasznosságára. Ennek titka abban rejlik, hogy lehetőséget ad arra, hogy a sorozat elemeit egyszerre manipuláljuk, Herbert Wilf analógiáját használva: "felfűzzük őket egy szárítókötélre". Ebben a hatványsor egyszerűbb függvényként való felírása segít minket, amelyen bizonyos műveleteket elvégezve átalakíthatjuk a sorozatunkat.

Mivel a generátorfüggvény fenti alakja nem mindig vezet ilyen felíráshoz bizonyos sorozatok vizsgálata során, ezért többféle változata is használt. Ezek közül számunkra még az (a_n) sorozat exponenciális generátorfüggvénye érdekes, ami a következő:

$$EG(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n.$$

Ha a fenti definícióban G-re függvényként tekintünk, akkor felmerülhet a sor konvergenciájának kérdése. Erre könnyedén kitérő választ adunk: nem függvényként tekintünk rá! Ahogy a definícióban is szerepel, formális hatványsoroknak tekintjük őket, melyekben x nem azonosítandó semmilyen konkrét számmal. Ez mindaddig nem okoz semmilyen problémát, amíg nem kívánjuk a sorozatunk valamilyen aszimptotikus tulajdonságát tárgyalni, mely esetben ez külön vizsgálatot igényel analitikus eszközökkel.

Itt ezen gyakorlat helyességének belátása következik, a *generatingfunctionology* [Wil06] második fejezete alapján. A formális hatványsorok elméletébe Niven „Formal power series” [Niv69] cikke, és Hajnal *Összeszámlálási problémák* [Haj97] könyvének 1. fejezete ad mélyebb betekintést, itt csak a generátorfüggvények módszereihez kapcsolódó részeket tárgyaljuk.

Nyilván megengedett művelet a hatványsorok összeadása és kivonása:

$$\sum_n a_n x^n \pm \sum_n b_n x^n = \sum_n (a_n \pm b_n) x^n.$$

Továbbá összeszorozhatóak a Cauchy szorzat szabályai szerint:

$$\sum_n a_n x^n \sum_n b_n x^n = \sum_n \sum_k a_k b_{n-k} x^n. \tag{2.1.1}$$

Ez az összefüggés ad lehetőséget több kombinatorikai feladat megoldására, mivel gyakran ilyen szorzat formájában tudunk előállítani kombinatorikai objektumokat. A konkrét generátorfüggvény-típus választását az is motiválja, hogy ez a szabály milyen alakot ölt azt a típust vizsgálva. Ez exponenciális generátorfüggvények esetében a következőképpen módosul: amennyiben (a_n) generátorfüggvénye f, (b_n) sorozaté pedig g, akkor fg a következő sor generátorfüggvénye:

$$\left(\sum_r \binom{n}{r} a_r b_{n-r}\right).$$

Ennek levezetése (2.1.1) alapján a következő:

$$\begin{aligned} fg &= \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_r x^r}{r!}\right)\left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{b_s x^s}{s!}\right) \\ &= \sum_{r,s\geq 0} \frac{a_r b_s}{r!s!} x^{r+s} \\ &= \sum_{n\geq 0} x^n \left(\sum_{r+s=n} \frac{a_r b_s}{r!s!}\right) \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} \left(\sum_{r+s=n} \frac{n! a_r b_s}{r!s!}\right) \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} \left(\sum_r \binom{n}{r} a_r b_{n-r}\right). \end{aligned}$$

A (2.1.1) szabályt követve a következőt vesszük észre:

$$(1-x)(1+x+x^2+x^3+\cdots) = 1.$$

Ekkor azt mondhatjuk, hogy a két hatványsor egymás reciproka.

2.1.2. Állítás. *Egy formális hatványsornak ($f = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$) pontosan akkor van reciproka, ha $a_0 \neq 0$. Ekkor ez a reciprok egyértelmű.*

Bizonyítás. Keressük f reciprokát $1/f = \sum_{n\geq 0} b_n x^n$ alakban. Ekkor $f(1/f) = 1$ és (2.1.1) miatt $c_0 = 1 = a_0 b_0$, ami csak $a_0 \neq 0$ esetén teljesülhet. Továbbá szintén (2.1.1) miatt $c_n = 0 = \sum_k a_k b_{n-k}$, melyből a következő összefüggést nyerjük:

$$b_n = \left(\frac{-1}{a_0}\right) \sum_{k\geq 1} a_k b_{n-k} \quad (n \geq 1),$$

ami egyértelműen meghatározza $b_1, b_2, \ldots$ sorozatot. □

Az ezekkel a műveletekkel ellátott formális hatványsorok halmaza gyűrűt alkot, melyben az invertálható elemek pontosan a nemnulla konstansúak. Ezeken felül több műveletet is hozzájuk rendelünk, melyek a kalkulus műveleteit igyekeznek imitálni, limeszek használata nélkül.

Az egyik ilyen művelet az $f = \sum_n a_n x^n$ formális hatványsor deriváltja, ami az $f' = \sum_n n a_n x^{n-1}$ sor. Ez követi a kalkulus összegekre, szorzatokra és törtekre vonatkozó összefüggéseit.

Egy másik gyakran használt művelet a vizsgált sorunk indexének eltolására alkalmas. Legyen (a_n) generátorfüggvénye f, és ez alapján keressük (a_{n+1}) generátorfüggvényét. Ehhez tegyük a következőt:

$$\sum_{n\geq 0} a_{n+1} x^n = \frac{1}{x} \sum_{m\geq 1} a_m x^m = \frac{f(x) - f(0)}{x},$$

és így az (a_{n+1}) sorozatra kapott generátorfüggvényünk $(f - a_0)/x$. Ezeket a lépéseket többször megismételve (a_{n+k}) sorozatfüggvényére a következőt kapjuk:

$$G(x) = \frac{F(x) - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - \cdots - a_{k-1} x^{k-1}}{x^k}.$$

A következő részekben szereplő levezetések egyszerűsítése végett vezessünk be egy jelölést x^n együtthatójára $f(x)$-ben.

2.1.3. Definíció. *Ha* $f(x) = \sum_n a_n x^n$*, akkor*

$$[x^n] f(x) := a_n.$$

Ennek a jelölésnek egy fontos tulajdonsága, hogy

$$[x^n] x^m f(x) = \left[x^{n-m}\right] f(x).$$

2.2. Példák

Itt az ideje pár generátorfüggvény megkeresésének. Először vegyük észre, hogy az 1. részben már megtaláltunk két (egyszerű) generátorfüggvényt. Valóban, az 1. ábra x^n-be mutató nyilai a következő generátorfüggvényeket adják az elsőfajú Stirling-számok n.

sorára:

$$x^{\overline{n}} = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$$

$$x^{\underline{n}} = \sum_k (-1)^{n+k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k.$$

A mértani sor jól ismert formulájából megkapjuk egy újabb generátorfüggvény egyszerű alakját:

$$\frac{1}{1-ax} = \sum_{n \geq 0} a^n x^n.$$

Ez azért is hasznos, mert ha megkapjuk egy sorozat generátorfüggvényét, és az polinomok hányadosa, akkor annak parciális törtfelbontásával egzakt formulát kapunk a sorozat elemeire. Ezt a következő, a Fibonacci-számokon véghezvitt példa mutatja be.

Először is, meg kell határoznunk a számsor generátorfüggvényét. Ehhez vizsgáljuk az azt definiáló rekurziót:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad (n \geq 1, F_0 = 0, F_1 = 1).$$

Keressük a generátorfüggvényt $F(x) = \sum_{n \geq 0} F_n x^n$ alakban. Szorozzuk meg a rekurzió mindkét oldalát x^n-el, és összegezzük $n \geq 1$-re, ekkor baloldalt a következőt kapjuk:

$$F_2 x + F_3 x^2 + \cdots = \frac{F(x) - x}{x},$$

jobb oldalt pedig:

$$\big(F_1 x + F_2 x^2 + F_3 x^3 + \cdots\big) + \big(F_0 x + F_1 x^2 + F_2 x^3\big) = F(x) + xF(x).$$

Ezzel a következőt kaptuk:

$$\frac{F(x) - x}{x} = F(x) + xF(x).$$

A két oldalt átrendezve megkapjuk a keresett generátorfüggvényünket:

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

Legyen $r_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, ami a nevezőben szereplő másodfokú polinom két gyöke. Ekkor a nevezőre a következő gyöktényezős alakot kapjuk:

$$1 - x - x^2 = (1 - xr_+)(1 - xr_-).$$

Ezt felhasználva a parciális törtfelbontás a következő:

$$\begin{aligned} \frac{x}{1-x-x^2} &= \frac{x}{(1-xr_+)(1-xr_-)} \\ &= \frac{1}{r_+ - r_-}\left(\frac{1}{1-xr_+} - \frac{1}{1-xr_-}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n \geq 0} r_+^n x^n - \sum_{n \geq 0} r_-^n x^n\right). \end{aligned}$$

Ebből x^n együtthatója, azaz $[x^n]\left(\frac{x}{1-x-x^2}\right)$ kiolvasható, és azt kapjuk, hogy

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(r_+^n - r_-^n) \qquad n \in \mathbb{N}\text{-re}.$$

Újabb példának pedig keressük meg [Wil06, 18. oldal] alapján $\left\{ n \atop k \right\}$ azon generátorfüggvényét, amelyben k-t fix paraméternek tekintjük. Ezt a következő formában keressük:

$$B_k(x) = \sum_n \left\{ n \atop k \right\} x^n.$$

Ehhez (1.2.2) rekurziós formulájának mindkét oldalát szorozzuk meg x^n-el, és összegezzük n szerint. Ekkor:

$$\sum_n \left\{ n \atop k \right\} x^n = \sum_n k \left\{ n \atop k \right\} x^{n+1} + \sum_n \left\{ n \atop k-1 \right\} x^{n+1} \qquad (k \geq 1),$$

melyből a következőt kapjuk a keresett generátorfüggvényre az n-től független tagok kiemelésével:

$$B_k(x) = xB_{k-1}(x) + kxB_k(x) \qquad (k \geq 1, B_0(x) = 1).$$

Ezt átrendezve a következőt kapjuk:

$$B_k(x) = \frac{x}{1-kx} B_{k-1}(x) \qquad (k \geq 1, B_0(x) = 1),$$

amiből egyszerűen kiolvasható a következő eredmény:

$$B_k(x) = \sum_n \left\{ n \atop k \right\} x^n = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)(1-3x)\cdots(1-kx)}.$$

Ekkor ennek parciális törtfelbontását megtalálva egzakt formulát kaphatunk a másodfajú Stirling-számokra. Ezzel a keresett alak a következő:

$$\frac{x^k}{(1-x)(1-2x)(1-3x)\cdots(1-kx)} = \sum_{j=1}^{k} \frac{\alpha_j}{1-jx}.$$

Az α-k megtalálásához rögzítsünk egy r-et, $1 \leq r \leq k$, szorozzuk meg mindkét oldalt $1-rx$-el, és vegyük ezt $x = 1/r$-ben. Ekkor a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}\alpha_r &= \frac{1}{(1-1/r)(1-2/r)\cdots(1-(r-1)/r)(1-(r+1)/r)\cdots(1-k/r)} \\ &= (-1)^{k-r}\frac{r^{k-1}}{(r-1)!(k-r)!}\end{aligned}$$

Ezek alapján az alábbi azonosságot kapjuk:

$$\begin{aligned}
\left\{ {n \atop k} \right\} &= [x^n]\left\{ \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)} \right\} \\
&= \left[x^{n-k}\right]\left\{ \frac{1}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)} \right\} \\
&= \left[x^{n-k}\right]\sum_{r=1}^{k}\frac{\alpha_r}{1-rx} \\
&= \sum_{r=1}^{k}\alpha_r\left[x^{n-k}\right]\frac{1}{1-rx} \\
&= \sum_{r=1}^{k}\alpha_r r^{n-k} \\
&= \sum_{r=1}^{k}(-1)^{k-r}\frac{r^{k-1}}{(r-1)!(k-r)!}r^{n-k} \\
&= \sum_{r=1}^{k}(-1)^{k-r}\frac{r^n}{r!(k-r)!} \qquad (n,k\geq 0)
\end{aligned}$$

És mindezzel egzakt formulát kaptunk a másodfajú Stirling-számokra.

Egy sorozat generátorfüggvényének meghatározására számtalan (csak esetenként sikerre vezető) módszer van, ezekből több tárgyalása Wilf *generatingfunctionology* [Wil06] könyvében található meg. Továbbá a számokat alkotó kombinatorikus struktúrák elemzéséből is lehetséges a generátorfüggvények felépítése, erre alkalmas módszerek és alkalmazásaik Flajolet és Sedgewick *Analytic Combinatorics* [FS09] könyvében találhatóak.

2.3. Összegzések, Sárkányfű módszer ("Snake Oil method")

A generátorfüggvények jelenleg számunkra azért érdekesek, mert jól alkalmazhatóak bizonyos összegek leegyszerűsítésére. Két módszert tárgyalunk, melyek erre alkalmasak.

Az első módszer akkor használható, ha ismerjük (a_n) sorozat szokványos generátorfüggvényét $F(x)$-et, és meg szeretnénk kapni első n tagjának összegét. Ekkor (2.1.1) szerint, és felhasználva hogy $\frac{1}{1-x} = \sum_n x^n$, a következőt kapjuk:

$$\frac{F(x)}{1-x} = \sum_n \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right) x^n.$$

Ezzel különösebb fáradalom nélkül meghatároztuk az első n tag összegének generátorfüggvényét, innentől pedig ezt elemezve juthatunk hozzá a képletükhöz is.

Keressük most a Fibonacci-számsor első n tagjának összegét, és ezt jelölje $S_n = \sum_{k=1}^{n} F_k$ Ekkor az (S_n) sorozat generátorfüggvénye

$$G(x) = \frac{x}{(1-x-x^2)(1-x)}.$$

Ezt parciális törtfelbontással (amit elvégezhetünk kézzel, vagy a 4.1 részben tárgyalt számítógépes módszerekkel) a következő alakra tudjuk hozni:

$$G(x) = \frac{x}{1-x-x^2} + \frac{1}{1-x-x^2} - \frac{1}{1-x}.$$

melyben az első két tört $[x^n]G(x)$-ben egy $F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$ tagot ad, a harmadik pedig egy -1 tagot. Így azt kaptuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1.$$

Hasonlóan, kereshetjük a harmonikus számok, azaz $\mathcal{H}_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ generátorfüggvényét. Ehhez szükségünk van az $(1/n)_1^{\infty}$ reciprokok sorozatának generátorfüggvényére. Ennek deriváltja a korábbi formális definíciót alkalmazva $1/(1-x)$, így ez nem lehet más mint $-\log(1-x)$. Ezzel a harmonikus számok generátorfüggvénye:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n x^n = \frac{1}{1-x} \log\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

Ennek segítségével kereshetünk az első n harmonikus szám összegére is egy képletet. Jelölje ezt S_n. Most a generátorfüggvény nem írható fel parciális tört alakban, de egy kis trükkel mégiscsak sikerre jutunk. A vizsgálandó összegünk generátorfüggvénye:

$$S(x) = \sum_{n\geq 1} S_n x^n = \frac{1}{(1-x)^2} \log\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

Ebben ha az $\frac{1}{(1-x)^2}$ és a $-\log(1-x)$ tagokat vizsgáljuk mint generátorfüggvények, akkor az utóbbi tagjait épp korábban határoztuk meg, az előbbi pedig épp $1/(1-x)$ deriváltja, és így

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n\geq 0} (n+1)x^n.$$

Ekkor (2.1.1)-et alkalmazva a következőt kapjuk:

$$S(x) = \sum_{n\geq 1} \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}(n+1-k)x^n = \sum_{n\geq 0} ((n+1)\mathcal{H}_n - n)x^n,$$

melyből $S_n = [x^n]S(x) = (n+1)\mathcal{H}_n - n = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{H}_k$.

A másik, generátorfüggvények által támogatott módszer összegek kezelésére a Herbert Wilf által "Snake Oil" módszernek nevezett eljárás [Wil06, 124. oldal]. Erre a dolgozat további részében a Sárkányfű módszer elnevezést használom[2].

A szokásos módszerekkel ellentétben, melyekben az összegeken belüli átalakításokat végzünk ismert identitások alapján, a Sárkányfű módszer alkalmazása során alig szükséges az összeg belsejére koncentrálnunk. Azokkal szemben itt csak egy szabad változó meghatározása idejéig kell a belső résszel foglalkoznunk, majd az összeget átalakítva abban generátorfüggvényeket keresnünk.

A pontos lépések a következők:

A Sárkányfű módszer ("Snake oil method") lépései

1. A szabad változónk megkeresése, azaz azé a változóé, amitől az összegünk függ. Nevezzük a keresett összegünket $f(n)$-nek.

2. Legyen $F(x)$ a szokványos generátorfüggvény, melyre $[x^n]F(x) = f(n)$.

3. A keresett $f(n)$ összeget szorozzuk be x^n-el, és összegezzük n szerint. Ekkor kifejeztük $F(x)$-et egy kettős összeggel n és az $f(n)$ kifejezésében használt összegzési paraméter felett.

4. A két változó szerinti összegzés felcserélése, és az így kapott belső összeg egyszerűsítése. Ehhez hasznos ismert generátorfüggvények egy gyűjteménye, melyek közül néhány megtalálható [Wil06] 2.5 fejezetében.

5. A kapott generátorfüggvény együtthatóinak kifejezése, hiszen ez adja meg a keresett összegünket.

A módszer sikeressége a 4. és 5. lépések elvégezhetőségétől függ. Ami meglepő az az, hogy ezek igen gyakran sikerrel végezhetőek el.

Itt megemlítjük a gyakorlati alkalmazásban a két leghasznosabb generátorfüggvény zárt alakját:

$$\sum_{r\geq 0} \binom{r}{k} x^r = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} \qquad (k \geq 0). \tag{2.3.1}$$

$$\sum_{r} \binom{n}{r} x^r = (1+x)^n. \tag{2.3.2}$$

Ezek közül az utóbbi nyilván a binomiális tétel egy alakja.

[2] A módszer eredeti neve és a fordítása is állítólagos csodaszerekre utalnak, melyek az eladóik szerint bármit meggyógyítanak, vagy éppen megvédenek a sárkányoktól. A fordítás eredetéért lásd [Csu80].

A módszer megértéséhez a következő két példa ad segítséget. Ezek közül az első egy példa végigkövetése [Wil06] 4.3. fejezetéből, a második pedig az ugyanitt található 11d) feladat egyéni megoldása.

Először keressük a következő összeget:

$$\sum_{k\geq 0}\binom{k}{n-k} \qquad (n=0,1,2,\dots).$$

Ebben a szabad változó n, így

$$f(n)=\sum_{k\geq 0}\binom{k}{n-k}.$$

Ezt x^n-el megszorozva és n szerint összegezve a következőt kapjuk:

$$F(x)=\sum_{n}x^n\sum_{k\geq 0}\binom{k}{n-k}.$$

Az összegeket felcserélve pedig:

$$F(x)=\sum_{k\geq 0}\sum_{n}\binom{k}{n-k}x^n.$$

Ezt kiértékelendő, emeljünk ki egy x^k tagot a belső összegből a külsőbe. Ezzel a belső összegben összeegyeztettük a binomiális együttható alsó tagjával x kitevőjét, és így ezt egy új paraméterrel jelölve a következőt kapjuk:

$$F(x)=\sum_{k\geq 0}x^k\sum_{n}\binom{k}{n-k}x^{n-k}=\sum_{k\geq 0}x^k\sum_{n}\binom{k}{r}x^r,$$

így a belső összeget (2.3.2) szerint ki tudjuk fejezni, és az alábbi eredményre jutunk

$$F(x)=\sum_{k\geq 0}x^k(1+x)^k=\sum_{k\geq 0}(x+x^2)^k=\frac{1}{1-x-x^2},$$

ami pedig a korábbi levezetés alapján éppen F_{n+1} generátorfüggvénye, tehát a következő eredményt kaptuk:

$$\sum_{k\geq 0}\binom{k}{n-k}=F_{n+1} \qquad (n=0,1,2\dots).$$

A második példában a következő zárt alakot akarjuk belátni:

$$\sum_{k}\binom{2n+1}{2k}\binom{m+k}{2n}=\binom{2m+1}{2n}. \tag{2.3.3}$$

Jelölje a bal oldali összeget $f(m)$. Ezzel m-et választottuk a szabad paraméternek, ezen választás oka hogy csak egy helyen szerepel az összegben, n-el ellentétben. Mivel tudjuk, hogy a kívánt végeredményben $2m+1$ szerepel, ezért x^m helyett x^{2m+1}-el szorozva egyszerűbb levezetéshez jutunk.

Így a Sárkányfű módszer 4. lépéséhez érve a következő alakot kapjuk:

$$\sum_{m\geq 0} x^{2m+1} = \sum_k \binom{2n+1}{2k} x^{-2k+1} \sum_{m\geq 0} \binom{m+k}{2n} x^{2m+2k}$$
$$= \sum_k \binom{2n+1}{2k} x^{-2k+1} \sum_{m\geq 0} \binom{r}{2n} (x^2)^r.$$

Ezzel (2.3.1) szerint átírva a belső összeget, és kiemelve a k-tól nem függő tagokat ezt kapjuk:

$$F(x) = \frac{x^{4n+1}}{(1-x^2)^{2n+1}} \sum_k \binom{2n+1}{2k} x^{-2k},$$

amiben a jobb oldali összeget átalakítjuk (2.3.2) szerint:

$$= \frac{x^{4n+1}}{(1-x^2)^{2n+1}} (1+x^{-1})^{2n+1},$$

ezt tovább egyszerűsítve pedig az alábbi alakot kapjuk

$$= \frac{x^{2n}}{(1-x)^{2n+1}},$$

melyben (2.3.2) szerint $[x^m]F(x) = \binom{2m+1}{2n}$, amit bizonyítani akartunk.

A módszer sikere attól függ, hogy tudunk-e találni egy szabad változót, ami az összegzésben csak egyszer szerepel. Ha igen, akkor az összegek felcserélése után egy egyszerű hatványsort kapunk, melynek generátorfüggvényének beazonosítására van reményünk.

Bizonyos esetekben akkor sincs gond, ha elsőre nem találunk ilyen változót. Ez azért van, mert gyakran a vizsgált egyenlőség egy általánosabb összefüggés speciális alakja. Példaképpen, ha a fenti (2.3.3) egyenlőségben n helyére $n+m$-et írunk, az alábbi alakot kapjuk:

$$\sum_k \binom{2n+2m+1}{2k} \binom{m+k}{2n+2m} = \binom{2m+1}{2n+2m},$$

melyre ilyen formában nem alkalmazható a Sárkányfű módszer.

A következő fejezetben tárgyalt módszerek számítógéppel is könnyen implementálható eljárásokat adnak az úgynevezett hipergeometrikus tagok összegének megkeresésére, azaz

$$\sum_k t_k$$

meghatározására, melyben t_{k+1}/t_k két k-beli racionális együtthatós polinom hányadosa.

Ez nem jelenti azt, hogy a Sárkányfű módszer hirtelen hasztalanná válna ettől. Ennek leírásában sehol nem volt szükségünk ilyen kitételre, így ez olyan esetekben is reményt ad zárt alak találására, amelyben az összegzendő tagok nem hipergeometrikusak, de generátorfüggvényük meghatározható. Erre egy példát [Wil06, 129. oldal] ad.

3. Hipergeometrikus függvények

Ebben a részben a korábban bevezetett fogalmakra építve bizonyos értelemben teljes választ adunk arra, hogy egy függvényt mikor tudunk határozatlanul összegezni. Ehhez a hipergeometrikus függvények osztályát kell vizsgálnunk, ami a gyakorlatban alkalmazott függvények nagy részét lefedi. Ezeken belül egy algoritmussal megmondjuk, hogy van-e zárt alakban antidifferenciája, vagy bizonyítjuk hogy nincs; továbbá igenlő válasz esetén meg is adja ezt az alakot. Az algoritmus leírása Petkovšek, Wilf és Zeilberger $A = B$ [PWZ96] könyvének 5. fejezetét követi, saját példák kidolgozásával.

3.1. Definíció

Vezessük be a hipergeometrikus függvényeket, [GKP98] mintájára.

3.1.1. Definíció. *Az általános hipergeometrikus sorok az alábbiak:*

$$F\left(\begin{matrix} a_1, & \ldots, & a_m \\ b_1, & \ldots, & b_n \end{matrix} \middle| z \right) = \sum_{k \geq 0} \frac{a_1^{\overline{k}} \ldots a_m^{\overline{k}}}{b_1^{\overline{k}} \ldots b_n^{\overline{k}}} \frac{z^k}{k!}.$$

Ez z-beni hatványsor, a_i és b_j összesen $n+m$ paraméterekkel, annyi megkötéssel hogy a nullával való osztás elkerülése végett egyik b_j sem lehet nulla vagy negatív egész.

A számlálóban található a-kat *felső paramétereknek*, a nevezőben előforduló b-ket *alsó paramétereknek*, a z-t pedig argumentumnak nevezzük. Ezen fogalom fontosságát az adja, hogy számos fontos függvény adódik ki a speciális eseteiből. Például:

$$F\left(\begin{matrix} 1 \\ \end{matrix} \middle| z \right) = \sum_{k \geq 0} z^k = \frac{1}{1-z}.$$

A fenti példában furcsának tűnhet hogy nincs alsó paraméter, de ezt könnyen elkerülhetjük hogyha felülre és alulra is írunk egy-egy 1-est: $F\left(\begin{smallmatrix} 1,\, 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \middle| z \right) = \frac{1}{1-z}$. Általánosan nem változtatunk a függvényen ha bármilyen az alsó paraméterekre adott kikötésnek megfelelő számot alulra és felülre is beírunk.

Egy másik speciális esete:

$$F\left(\begin{matrix} a \\ \end{matrix} \middle| z \right) = \sum_{k \geq 0} \frac{a^{\overline{k}}}{k!} z^k = \sum_{k} \binom{a+k-1}{k} z^k = \frac{1}{(1-z)^a}.$$

Fontos még többek között a 0 paraméteres eset, ami pedig:

$$F\left(\middle| z \right) = \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

A generátorfüggvényekhez hasonlóan itt is felmerülhet a konvergencia kérdése, és hasonlóan a formális hatványsorok elméletét ([Niv69]) követve kikerülhetjük. Ezt részleteiben akkor szükséges vizsgálni, ha z helyére egy konkrét értéket akarunk írni.

A $k = 0$ tagot vizsgálva megfigyelhetjük, hogy mind a felszálló faktoriális hatvány paraméterek, mind a $0!$, és a z^0 tag is egyet ad, így elvárás minden hipergeometrikus függvénnyel szemben, hogy a konstans tagja 1 legyen, vagyis $z = 0$-ban az 1 értéket vegye fel.

Kérdéses, hogy milyen egyéb feltételeknek kell teljesülni a hipergeometrikus reprezentáció létezéséhez, és hogy milyen módon kaphatunk ilyet ha létezik egy tetszőleges függvényből. Ehhez a hipergeometrikus tagok arányát szükséges vizsgálni.

$$F\left(\begin{matrix} a_1, \ \ldots, \ a_m \\ b_1, \ \ldots, \ b_n \end{matrix} \middle| z\right) = \sum_{k \geq 0} t_k, \quad t_k = \frac{a_1^{\overline{k}} \ldots a_m^{\overline{k}}}{b_1^{\overline{k}} \ldots b_n^{\overline{k}}} \frac{z^k}{k!}.$$

Ebben t_k-t hívjuk a hipergeometrikus tagnak, melyből $t_0 = 1$, a többi hányadosa pedig:

$$\begin{aligned} \frac{t_{k+1}}{t_k} &= \frac{a_1^{\overline{k+1}} \ldots a_m^{\overline{k+1}}}{b_1^{\overline{k+1}} \ldots b_n^{\overline{k+1}}} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} \frac{b_1^{\overline{k}} \ldots b_n^{\overline{k}}}{a_1^{\overline{k}} \ldots a_m^{\overline{k}}} \frac{k!}{z^k} \\ &= \frac{(k+a_1) \ldots (k+a_m)}{(k+b_1) \ldots (k+b_n)(k+1)} z. \end{aligned}$$

Ez k-ban egy racionális függvény, azaz k polinomjainak hányadosa (z-t paraméternek tekintve). Az algebra alaptétele alapján a komplex számtest felett minden racionális függvény faktorizálható és ilyen alakba vihető.

Például vizsgáljuk a $\sin z$ függvényt, melynek ismert a $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots$ felírása. Ezt átírva:

$$\sin z = z \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+1)!},$$

melyből

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = (-1) \frac{z^{2(k+1)}}{(2k+3)!} \frac{(2k+1)!}{z^{2k}} = \frac{1}{(k+1)(k+\frac{3}{2})} \frac{-z^2}{4}.$$

Így $\sin z$ hipergeometrikus függvénnyel való kifejezése:

$$\sin z = zF\left(\begin{matrix} 1 \\ 1, \ -\frac{3}{2} \end{matrix} \middle| -\frac{z^2}{4}\right).$$

Eszerint a hipergeometrikus alakban való felírás lépései a következőek: Az adott f függvényt olyan végtelen sorként írjuk fel, amelynek konstans tagja nem nulla, majd felírjuk a tagok hányadosát. Ha ez k-ban nem egy racionális függvény, akkor a függvény nem hipergeometrikus. Ha igen, akkor faktorizálással és a szorzók kiemelésével megfelelő alakra hozva megkapjuk a keresett paramétereket és az argumentumot.

3.2. Gosper algoritmusa

Most a hipergeometrikus tagok antidifferenciájának kérdésére adunk teljes választ, vagyis a következő egyenlőségben keressük s_n-t:

$$s_n = \sum_a^b t_k \delta k = \sum_{a=0}^{b-1} t_k.$$

ahol t_k egy n-től független hipergeometrikus tag, azaz

$$r(k) = \frac{t_{k+1}}{t_k}$$

racionális függvény k-ban. A keresett s_n-t zárt alakban szeretnénk megkapni, ami jelenleg azt jelenti, hogy szumma jel nélkül, hipergeometrikus függvények segítségével.

A keresett s_n megegyezik t_n egy antidifferenciájával, hiszen

$$s_{n+1} - s_n = t_n. \tag{3.2.1}$$

Érdemes s_n-t szintén hipergeometrikus alakban keresnünk. A korábbi feladatot eszerint átfogalmazva, a következő egyenletet vizsgáljuk:

$$\sum F\left(\begin{matrix} a_1, & \ldots, & a_m \\ b_1, & \ldots, & b_n \end{matrix}\middle| z\right) = cF\left(\begin{matrix} A_1, & \ldots, & A_m \\ B_1, & \ldots, & B_n \end{matrix}\middle| Z\right) + C,$$

ahol $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$, és z adottak, c, $A_1, \ldots, A_m$, $B_1, \ldots, B_n$, és Z pedig keresendőek.

Gosper algoritmusa [Gos78] megtalálja ezeket az ismeretleneket, vagy bizonyítja hogy nem léteznek. Most ennek a tárgyalása és levezetése következik.

Amennyiben s_n egy hipergeometrikus tag mely teljesíti a (3.2.1) összefüggést, akkor

$$\frac{s_n}{t_n} = \frac{s_n}{s_{n+1} - s_n} = \frac{1}{\frac{z_{n+1}}{z_n} - 1} \tag{3.2.2}$$

egy racionális függvény n-ben. Tehát kereshetjük $s_n = y(n)t_n$ alakban, ahol $y(n)$ egy megkeresendő racionális függvény. Ezt behelyettesítve (3.2.1)-be a következőt kapjuk:

$$r(n)y(n+1) - y(n) = 1. \tag{3.2.3}$$

Ezzel visszavezettük a problémát egy elsőrendű lineáris rekurzióra, racionális együtthatókkal és konstans jobb oldallal. Így a feladat leegyszerűsödött (3.2.1) hipergeometrikus megoldásainak kereséséről (3.2.3) racionális megoldásainak keresésére.

Az általánosabb, tetszőleges rendű, racionális együtthatós, konstans jobboldalú rekurziók megoldására Marko Petkovšek fejlesztett ki egy algoritmust [Pet92]. Ebben az egyszerűbb esetben viszont Gosper további egyszerűsítésre talált lehetőséget, mellyel elég csak polinomiális megoldást keresnünk egy másik elsőrendő rekurzióra.

Keressünk $r(n)$-re egy következő formájú felírást:

$$r(n) = \frac{a(n)}{b(n)} \frac{c(n+1)}{c(n)}, \tag{3.2.4}$$

ahol $a(n), b(n), c(n)$ n polinomjai, melyekre teljesül, hogy

$$\mathrm{lnko}(a(n), b(n+h)) = 1, \quad \forall h \in \mathbb{N}\text{-re}. \tag{3.2.5}$$

Az algoritmus első lépése egy ilyen alak megtalálása, ennek tárgyalása később következik, előbb ez alapján a megoldás megkeresését tárgyaljuk. Gosper észrevette, hogy emellett a felbontás mellett érdemes az (3.2.3) megoldását ebben az alakban keresni:

$$y(n) = \frac{b(n-1)x(n)}{c(n)}, \tag{3.2.6}$$

ahol $x(n)$ egy ismeretlen racionális függvény. Behelyettesítve (3.2.4)-t és (3.2.6)-t (3.2.3)-ba $x(n)$-re a következő összefüggést kapjuk:

$$a(n)x(n+1) - b(n-1)x(n) = c(n). \tag{3.2.7}$$

3.2.1. Tétel ([Gos78]). *Legyenek $a(n)$, $b(n)$ és $c(n)$ polinomok melyekre* (3.2.4) *teljesül. Ekkor ha $x(n)$ egy racionális függvény n-ben, melyre teljesül* (3.2.7)*, akkor $x(n)$ n-ben polinomiális.*

Bizonyítás. Legyen $x(n) = f(n)/g(n)$, ahol $f(n)$ és $g(n)$ relatív prím polinomok n-ben. Ekkor (3.2.7) átírható a következő alakba:

$$a(n)f(n+1)g(n) - b(n-1)f(n)g(n+1) = c(n)g(n)g(n+1). \tag{3.2.8}$$

Indirekt bizonyítunk. Tegyük fel, hogy $x(n)$ nem polinom, és ebből következően $g(n)$ egy nem konstans polinom. Ekkor legyen N a legnagyobb olyan pozitív egész, melyre $\mathrm{lnko}(g(n), g(n+N))$ egy nem konstans polinom (azaz $g(n)$-nek és $g(n+N)$-nek létezik közös gyöke). Nyilvánvalóan $N \geq 0$.

Legyen $u(n)$ egy nem konstans irreducibilis közös osztója $g(n)$-nek és $g(n+N)$-nek. Mivel $u(n-N)$ osztja $g(n)$-t, ezért (3.2.8)-ből következik hogy

$$u(n-N) \mid b(n-1)f(n)g(n+1).$$

E közül a három tag közül $u(n-N)$ nem osztja $f(n)$-t, mivel $g(n)$-t osztja és ezek relatív prímek. Szintén nem oszthatja $g(n+1)$-et, mivel ekkor $u(n)$ közös osztója lenne $g(n)$-nek és $g(n+N+1)$-nek is, ellentmondva N maximalitásának. Kizárásos alapon $u(n-N) \mid b(n-1)$ és így $u(n+1) \mid b(n+N)$.

Szintén (3.2.8)-ből következik, mivel $u(n+1) \mid g(n+1)$, hogy

$$u(n+1) \mid a(n)f(n+1)g(n)$$

Az előzőekhez hasonlóan, $u(n+1)$ nem osztója $f(n+1)$-nek mivel az relatív prím $g(n+1)$-hez. Szinten nem osztója $g(n)$-nek, mert ekkor nem konstans közös osztója lenne $g(n-1)$-nek és $g(n+N)$-nek, ellentmondva N választásának. Így $u(n+1) \mid a(n)$.

Ekkor viszont $u(n+1)$ egy nem konstans osztója $a(n)$-nek és $b(n+N)$-nek, ellentmondva (3.2.4) feltételének. Ezzel beláttuk, hogy $g(n)$ konstans, és így $x(n)$ n-ben polinomiális □

Így az eredeti problémánk, hipergeometrikus megoldás keresése (3.2.1)-ben ekvivalens az (3.2.7) polinomiális megoldásának keresésével. Ha $x(n)$ egy ilyen nemnulla polinomiális megoldás, akkor

$$z_n = \frac{b(n-1)x(n)}{c(n)} t_n$$

egy hipergeometrikus megoldása (3.2.1)-nek és fordítva.

Összefoglalva, a Gosper algoritmus egy hipergeometrikus tagot vár bemenetként, és megadja annak antidifferenciáját hipergeometrikus tagokkal kifejezve, amennyiben ez lehetséges, vagy belátja hogy nem lehetséges. A két fő lépése (3.2.4) alakjának meghatározása, és az ez alapján kapott (3.2.7) rekurzió megoldása. Ezen két lépés tárgyalása következik.

Először vizsgáljuk meg (3.2.7) megoldásának módját. Ha ismernénk $x(n)$ polinom fokát (ezt jelölje d), vagy legalább egy felső korlátját, akkor (3.2.7)-ból felírhatnánk a polinom együtthatóira egy lineáris egyenletrendszert. Valóban tudunk ilyen tippet mondani d-re, sőt, legfeljebb két lehetséges értékre tudjuk leszűkíteni az értékét. Két esetet különböztetünk meg.

1. eset: $\deg a(n) \neq \deg b(n)$ vagy $a(n)$ és $b(n)$ főegyütthatója különböző

Ekkor (3.2.7) bal oldalán a főtagok nem ejtik ki egymást. Így a bal oldal foka $d + \max\{\deg a(n), \deg b(n)\}$, a jobb oldalé pedig $\deg c(n)$, és így

$$d = \deg c(n) - \max\{\deg a(n), \deg b(n)\}$$

lesz egy nemnulla $x(n)$ egyetlen lehetséges foka.

2. eset: $\deg a(n) = \deg b(n)$ és $a(n)$ és $b(n)$ főegyütthatója λ

Ekkor (3.2.7) bal oldalán a főtagok kiejtik egymást, és két alesethez jutunk.

(2a) A főtagok utáni legnagyobb kitevőjű tagok nem ejtik ki egymást. Ekkor

$$d = \deg c(n) - \deg a(n) + 1.$$

(2b) Ha ezek a tagok kiejtik egymást. Jelölje

$$\begin{aligned} a(n) &= \lambda n^k + A n^{k-1} + \dots \\ b(n-1) &= \lambda n^k + B n^{k-1} + \dots \\ x(n) &= C_0 n^d + C_1 n^{d-1} + \dots \end{aligned}$$

ahol $C_0 \neq 0$. Ekkor az (3.2.7) bal oldalának tagjait kifejtve a következőket kapjuk:

$$
\begin{aligned}
x(n+1) &= C_0 n^d + (C_0 d + C_1)n^{d-1} + \ldots \\
a(n)x(n+1) &= C_0 \lambda n^d + (\lambda(C_0 d + C_1) + AC_0)n^{d-1} + \ldots \\
b(n-1)x(n) &= C_0 n^d + (C_0 d + C_1)n^{d-1} + \ldots \\
a(n)x(n+1) - b(n-1)x(n) &= C_0(\lambda d + A - B)n^{k+d-1} + ... \qquad (3.2.9)
\end{aligned}
$$

Mivel ebben az alesetben feltételeztük hogy n^{k+d-1} együtthatója (3.2.9)-ban eltűnik, ezért

$$
d = \frac{B-A}{\lambda}
$$

Így a 2. esetben a keresett polinomunk két lehetséges foka $\deg c(n) - \deg a(n) + 1$ és $(B-A)/\lambda$. Nyilvánvalóan csak a nemnegatív egész eseteket szükséges vizsgálnunk. Amikor mindkét eset lehetséges, a nagyobbikat választhatjuk felső korlátnak $x(n)$ fokára.

Hátra van még az első lépés tárgyalása, azaz (3.2.4) alak megtalálásának algoritmusa. Legyen $r(n) = f(n)/g(n)$, ahol a számláló és a nevező egymáshoz relatív prím polinomok. Ha $f(n)$ és $g(n)$ már teljesítik a feltételt, azaz $\mathrm{lnko}(f(n), g(n+h)) = 1$ minden nemnegatív egész h-ra, akkor $a(n) = f(n), b(n) = g(n), c(n) = 1$ választással meg is van a keresett alak.

Különben, legyen $u(n)$ egy nemkonstans közös osztója $f(n)$-nek és $g(n+h)$-nak, valamilyen nemnegatív egész h-ra. A célunk az ilyen tagok kiemelése $c(n)$-be. Legyen $f(n) = \bar{f}(n)u(n)$ és $g(n) = \bar{g}(n)u(n-h)$. Ekkor

$$
r(n) = \frac{f(n)}{g(n)} = \frac{\bar{f}(n)}{\bar{g}(n)} \frac{u(n)}{u(n-h)},
$$

melyből az $u(n)/u(n-h)$ tagot szeretnénk kifejezni $c(n+1)/c(n)$ alakban. Ehhez megszorozzuk a számlálót és a nevezőt is egy $u(n-1)u(n-2)\cdots(n-h+1)$ taggal:

$$
\frac{u(n)}{u(n-h)} = \frac{u(n)u(n-1)u(n-2)\cdots u(n-h+1)}{u(n-1)u(n-2)\cdots u(n-h+1)u(n-h)}. \qquad (3.2.10)
$$

Eszerint vesszük f és g helyett $\bar{f}$-et és $\bar{g}$-t, $c(n)$-t pedig megszorozzuk (3.2.10) nevezőjével, és ezt a lépést addig ismételjük, amíg meg nem kapjuk a kívánt (3.2.4)-nak eleget tevő felbontást. Mivel a polinomoknak véges sok gyöke van, ezért ez az eljárás véges sok lépés alatt leáll.

Kérdéses még hogy hogyan tudjuk ellenőrizni (3.2.5) teljesülését, illetve hogy hogyan tudjuk megtalálni az azt sértő h értékeket. Legyen $f(n)$ és $g(n+h)$, mint n-beli polinomok rezultánsa $R(h)$, amely h-ban polinom. Ekkor $R(\alpha) = 0$ pontosan akkor, ha $\mathrm{lnko}(f(n), g(n+\alpha))$ nem konstans polinom. Így a (3.2.5)-et sértő h értékek pontosan $R(h)$ nemnegatív egész gyökei.

Ezek lehetséges értékeit végessé szűkíthetjük, ha felszorozzuk $R(h)$-t együtthatóinak nevezőjével, mellyel a gyökök nem változnak, és ezen polinom konstans tagjának osztóit vizsgáljuk. Ez a tag nem lehet nulla, mivel kikötöttük hogy f és g relatív prím polinomok. A racionális gyökteszt alapján pedig csak ezek lehetnek a lehetséges pozitív egész gyökök.

A módszer megértéséhez elkerülhetetlen egy példán való szemléltetése, itt ez [GKP98] 5.33 feladatának megoldásán keresztül történik. A következő hipergeometrikus tagot keressük:

$$s_k = \sum \frac{1}{k^2-1}\delta k.$$

amelyben $t_k = \frac{1}{k^2-1}$. Ebből $\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{(k+1)(k-1)}{k(k+2)}$. Mivel ez már gyöktényezős alakban van, elkerülhetjük a rezultánsszámítást. A tagokat összehasonlítva $h = 1$ esetén találunk problémát, a számlálóban levő $(k+1)$ és a nevezőben levő k tag miatt.

Ezeket kiemelve a következő felbontást kapjuk:

$$\begin{aligned} a(k) &= (k+1), \\ b(k) &= (k+2), \\ c(k) &= k. \end{aligned}$$

Ez pedig $x(k)$-ra a következő összefüggést adja:

$$(k-1)x(k+1) - (k+1)x(k) = c(k).$$

Ebben a főegyütthatók megegyeznek, így a 2. eset szerint kell vizsgálnunk. A 2a esetben $d = 1$-hez jutunk, a 2b esetben pedig $d = \frac{1-(-1)}{1} = 2$. Így $x(k)$-t egy általános másodfokú polinomként felírva a következő összefüggést kapjuk rá:

$$(k-1)(a_2(k+1)^2 + a_1(k+1) + a0) - (k+1)(a_2k^2 + a_1k + a_0) = k.$$

Ezt felbontva az

$$(-a_1 - a_2)k - 2a_0 - a_1 - a_2 = k$$

összefüggést kapjuk. Ebből az együtthatókra a következő egyenletrendszert adódik:

$$\begin{aligned} -a_1 - a_2 &= 1 \\ -2a_0 - a_1 - a_2 &= 0. \end{aligned}$$

Ebből a_2-t nullának választhatjuk, és a megoldásunk $a_1 = -1, a_0 = 1/2$, a kapott antidifferencia pedig:

$$s_k = \frac{(k+1)(-k+\frac{1}{2})}{k}\frac{1}{k^2-1} = \frac{\frac{1}{2}-k}{k(k-1)}.$$

3.3. WZ párok és bizonyítékok

Ebben a részben egy meglepően rövid módszert tárgyalunk kombinatorikus egyenlőségek helyességének igazolására, Petkovšek, Wilf és Zeilberger $A = B$ [PWZ96] 7. fejezete alapján. Ezt a módszert alkalmazva egy egyenlőség bizonyítéka pusztán egyetlen egy racionális függvény lesz. Ez az eljárás az előzőekben tárgyalt Gosper algoritmusra épül, ám azzal ellentétben nem alkalmas egy kívánt összeg meghatározására, viszont az alkalmazása során az ölünkbe hull pár, az eredetileg vizsgálttal összekapcsolódó egyenlőség.

Tekintsük a következő egyenlőség bizonyításának problémáját: $\sum_k F(n,k) = r(n)$. Ekkor ha a jobb oldali $r(n)$ nemnulla, akkor leoszthatunk vele, hogy a következő alakot kelljen bizonyítanunk:

$$\sum_k \left\{ \frac{F(n,k)}{r(n)} \right\} = 1.$$

Ezután tekinthetjük úgy, hogy ez az $F(n,k)/r(n)$ tag volt az eredeti összegzendő tagunk. Ekkor pedig az eredeti összegünk bizonyítása a következő alak bizonyítására módosul:

$$\sum_k F(n,k) = konstans.$$

Ebben nevezzük a bal oldalt $f(n)$-nek, és így azt szeretnénk bizonyítani, hogy $f(n) =$ *konst.* minden n értékre. Ennek egy módja az lenne, ha be tudnánk látni, hogy $f(n+1) - f(n) = 0$ minden n-re.

Ehhez pedig elég lenne hogyha találnánk egy következőt teljesítő $G(n,k)$ függvényt:

$$F(n+1,k) - F(n,k) = G(n,k+1) - G(n,k), \tag{3.3.1}$$

Ekkor ha $G(n,k)$ tart nullához ahogy k tart $\pm\infty$-hez, akkor belátható hogy ebből következik hogy $f(n+1) - f(n) = 0$. Ennek részletes tárgyalása később következik, előbb vizsgáljuk meg hogy hogyan tudunk ilyen $G(n,k)$-t találni.

Jelölje $D = F(n+1,k) - F(n,k)$ a differenciánkat. Ez n-től és k-tól is függ, és ha $F(n,k)$-ban szerepelt valamilyen paraméter, akkor természetesen attól is. Jelenleg tekintsük n-et az egyik ilyen paraméternek, és úgy gondoljunk D-re mint k-beli függvény, azaz jelölje $D(k)$.

Adjuk meg ezt a $D(k)$ függvényt az előző részben tárgyalt Gosper algoritmusnak. Ekkor ha lehetséges, ez visszaad eredményül egy $g(k)$ függvényt, melyre $D(k) = g(k+1) - g(k)$. Ekkor természetesen $g(k)$-ban n szerepelni fog, mint paraméter, és így átnevezhetjük $g(k)$-t $G(n,k)$-ra. Ekkor ez a $G(n,k)$ teljesíti az (3.3.1) egyenletet, éppen amit elvártunk tőle.

Ekkor azt mondjuk, hogy (F, G) egy WZ-párt alkot. Továbbá mivel $R = G/F$ egy racionális függvény (3.2.2) miatt, és azt mondjuk, hogy az R függvény F WZ-tanúsítványa.

Ez általában egyszerűbb alakban leírható, mint G és F, és így elég ezt megadnunk bizonyítéknak a vizsgált egyenlőségünk helyességére.

Fontos megjegyezni, hogy teljesen lehetséges hogy Gosper algoritmusa nem ad pozitív eredményt $D(k)$-ra. Ez annak ellenére is lehetséges, hogy $\sum_k F(n,k) = konst.$ teljesül. Petkovšek, Wilf és Zeilberger [PWZ96, 133. oldal] megfigyelései viszont arra engednek következtetni, hogy a gyakorlati esetek túlnyomó többségében nem ütközünk ebbe a problémába, és a Gosper algoritmus sikeresen, $G(n,k)$ kapott formulával tér vissza.

Következzen a módszer helyességének tárgyalása.

3.3.1. Tétel. *Tegyük fel a következőket*

- *(F1) Minden $k \in \mathbb{Z}$-re*
$$f_k = \lim_{n\to\infty} F(n,k)$$
létezik és véges.
- *(G1) Minden $n \in \mathbb{N}$-re*
$$\lim_{k\to\infty} G(n,k) = 0.$$
- *(G2)* $\lim_{L\to\infty} \sum_{n\geq 0} G(n,-L) = 0$.

Ekkor ha (F,G) eleget tesznek (3.3.1)*-nek, a következők igazak:*

$$\sum_k F(n,k) = konst. \qquad (n = 0,1,2,\dots) \tag{3.3.2}$$

$$\sum_{n\geq 0} G(n,k) = \sum_{j\leq k-1} (f_j - F(0,j)). \tag{3.3.3}$$

A tétellel nem csak a bizonyíték használhatóságát igazoljuk, hanem (3.3.3) formájában kapunk egy új ajándék azonosságot minden bizonyíték mellé. Ennek a háttérben levő oka, hogy F és G nagyban szimmetrikus szerepet tölt be (3.3.1)-ben, és ezért várható, hogy F-hez hasonlóan G-hez is tartozik egy azonosság.

Bizonyítás. A Δ differencia operátorunkhoz írjunk hozzá egy változót, jelölendő hogy mi szerinti differenciát vesszük éppen. Összegezzük (3.3.1) mindkét oldalát $-L$-től K-ig. Ekkor:

$$\begin{aligned}\Delta_n \left\{ \sum_{k=-L}^{K} F(n,k) \right\} &= \sum_{k=-L}^{K} \{\Delta_k G(n,k)\} \\ &= G(n,K+1) - G(n,-L).\end{aligned}$$

Vizsgáljuk ahogy $K, L \to \infty$. Ekkor (G1) miatt azt kapjuk, hogy $\Delta_n \sum_k F(n,k) = 0$, azaz hogy $\sum_k F(n,k)$ független n-től, amiből következik (3.3.2)

Ha (3.3.1)-et összegezzük $n = 0$-tól N-ig, azt kapjuk hogy

$$F(N+1,k) - F(0,k) = \Delta_k \left\{ \sum_{n=0}^{N} G(n,k) \right\}.$$

Ebbe k helyére k'-t írva, összegezve $k' = -L$-től $k' = k-1$-ig, és $L \to \infty$-t nézve (G2) alapján megkapjuk (3.3.3)-at, ezzel befejezve a bizonyítást. $\square$

Mivel a módszer példákon való bemutatása nem mutatna túl sok különbséget a Gosper algoritmus példáitól (hiszen lényegében az a fő lépése), ezért a kézzel való levezetések helyett ezeket a 4.3 részre hagyjuk, ahol egy szimbolikus programcsomag segítségével kerülnek bemutatásra.

4. A módszerek számítógépes használata

A korábbi módszerek tárgyalása nem lenne teljes a számítógépes használatuk bemutatása nélkül, hiszen a szépségük többek között ebben az automatizálhatóságban rejlik. A korábban hivatkozott [PWZ96] és [Wil06] könyvek tartalmaznak rövid ismertetőt a bennük leírtak alkalmazására *Mathematica* és *Maple* szoftverek használatával.

Itt a *SymPy* [Sym] eszközeinek tárgyalása következik. Ez egy tisztán Python alapú szimbolikus programcsomag, melynek célja hogy teljesértékű komputeralgebra rendszert nyújtson egyszerű és könnyen kiterjeszthető nyílt forrású kódbázissal.

A kód bemutatására *Jupyter Notebook* rendszert használok, ez lehetővé teszi kódblokkok és kimenetük egyszerű prezentációját. A következőkben bekeretezett részekben kódrészletek, majd alattuk azok kimenete van feltüntetve, közbeszúrt magyarázatokkal. Ezek egy eredeti notebook fájlból gépi segítséggel lettek átalakítva LaTeX formátumba.

A használt szoftverek verziói:

- Python 3.8.2
- SymPy 1.5.1
- jupyter core 4.6.1
- jupyter-notebook 6.0.2

Egyes példák mellet kommentben feltüntetve azok forrása is szerepel.

4.1. *SymPy* használata generátorfüggvények kezelésére

Ebben a blokkban a későbbiekben bemutatott függvények és a használt változók névtérbe való felvétele történik, hogy használhassuk őket.

```
from sympy import sequence
from sympy import simplify, apart
from sympy.abc import n, x
```

Sorozat megadására a `sequence` függvény nyújt lehetőséget, ami egy formulát vagy egy számsort vár el bemenetként. A `find_linear_recurrence(n)` metódusa megkeresi a legegyszerűbb lineáris rekurzív képletet, amit az első n elem teljesít, és ha megadunk neki egy változót akkor a sorozat generátorfüggvényét is visszaadja.

```
res = sequence(1).find_linear_recurrence(3,gfvar=x)
print(res)
display(res[1])
```

```
([1], -1/(x - 1))
```

$$-\frac{1}{x-1}$$

Miután megtaláltuk egy sorozat generátorfüggvényét, és az polinomok hányadosa, megkapható egy egzakt formula is a sorozat elemeire, a generátorfüggvény parciális törtfelbontása segítségével. Ehhez az `apart` függvény ad segítségét, melynek alkalmazása után már leolvashatóak az együtthatók.

Bizonyos esetekben fontos lehet a `full=True` paraméter és a `.doit()` használata, melyek nélkül csak racionális gyökök esetén kapunk eredményt, viszont jelentősen gyorsabb a futásidő a háttérben futó szétválasztási algoritmus leegyszerűsödése miatt.

```
F = sequence((0,1,1,2,3)).find_linear_recurrence(5,gfvar=x)[1]
display(F)
H = apart(F,full=True).doit()
display(H)
```

$$-\frac{x}{x^2+x-1}$$

$$-\frac{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{10}}{x-\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}}-\frac{\frac{\sqrt{5}}{10}+\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}$$

Szerencsére még a kiolvasással sem kell fáradnunk, a beépített `rational_algorithm` függvény ezt is megteszi helyettünk, kezelve az összetettebb eseteket is. Észrevehető, hogy ez nem egyezik meg a Fibonacci-sor szokványos formulájával, ennek oka az `apart` függvény eltérő eredménye a szokásos felbontástól. Mindenesetre az eredmény helyes.

```
from sympy.series.formal import rational_algorithm as ra
formula = ra(F,x,n,full=True)[0]
display(formula)
print([simplify(formula.subs(n,k)) for k in range(10)])
```

$$\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{-n-1}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{10}\right)+\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}\right)^{-n-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{10}+\frac{1}{2}\right)$$

```
[0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34]
```

A programcsomagba be van építve egy eljárás, amely megpróbálja megtippelni egy sorozat generátorfüggvényét az első néhány tagja alapján. Ennek előnye hogy több típusú generátorfüggvény megtalálására is alkalmas.

```
from sympy.concrete.guess import guess,guess_generating_function as
    ↪ ggf
display(ggf([1, 1, 2, 3, 5, 8])["ogf"])
```

$$\frac{1}{-x^2-x+1}$$

```
display(ggf([5, 8, 13, 21, 34, 55])["ogf"])
```

$$\frac{3x+5}{-x^2-x+1}$$

```
display(ggf([1, 1, 3, 11, 53])["egf"]) # Exponencialis
    ↪ generatorfuggveny OEIS A000255
```

$$\frac{e^{-x}}{(x-1)^2}$$

```
display(ggf([1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]))
```

```
{'ogf': 1/(x**2 - 2*x + 1),
 'lgf': 1/(x + 1),
 'hlgf': 1/(1 - x),
 'lgdogf': 2/(1 - x),
 'lgdegf': (x + 2)/(x + 1),
 'egf': (x + 1)*exp(x)}
```

Ez a többféle támogatott generátorfüggvény-típus. Ezek közül az érdekesebbek az ‘ogf’ szokványos generátorfüggvény, az ‘egf’ exponenciális generátorfüggvény és az lgf’ logaritmikus generátorfüggvény. A többi függvénytípusról és az implementáció részleteiről `ggf??` használatával kaphatunk több információt.

4.2. *SymPy* használata hipergeometrikus függvények kezelésére

Itt is a bemutatott függvények és a használt változók deklarálásával kezdjük.

```
from sympy.concrete.gosper import gosper_sum, hypersimp
from sympy import hyper, hyperexpand
from sympy.abc import n, k, m, r, a, b, z
from sympy import simplify, binomial, factorial, combsimp
```

A hipergeometrikus függvények ábrázolására a `hyper` python-függvény alkalmas, mely két listában várja az felső majd az alsó paramétereket, majd az argumentumot. A `hyperexpand` függvény pedig megpróbálja szebb alakra hozni a megadott függvényt, és még a bonyolultabb esetekben is gyakran sikeres.

```
f = hyper((1,1),(1,),z)
display(f)
display(hyperexpand(f))
```

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}1,1\\1\end{matrix}\middle|z\right)$$

$$\frac{1}{1-z}$$

```
# ConcMath 5.78
f = hyper((1,),(b,1),z)
display(f, hyperexpand(f))
```

$${}_1F_2\left(\begin{matrix}1\\b,1\end{matrix}\middle|z\right)$$

$$z^{\frac{1}{2}-\frac{b}{2}}I_{b-1}\left(2\sqrt{z}\right)\Gamma(b)$$

A `hyperexpand` konkrét szám argumentumok esetén is működik:

```
# ConcMath 5.82
f = hyper((1,-n),(-n-r,),1)
display(f)
display(simplify(hyperexpand(f)))
```

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}1,-n\\-n-r\end{matrix}\middle|1\right)$$

$$\frac{n+r+1}{r+1}$$

A programcsomagban Gosper algoritmusa a `gosper_sum` függvénnyel érhető el. Bemenetként az összegzendő tagot kéri és azt, hogy mi szerint és mettől meddig összegezzen. Ha másodiknak csak egy szimbolikus változót adunk meg, akkor a határozatlan problémát oldja meg (antidifferenciát keres), az alsó és felső korlátok megadásával pedig a határozott feladatra ad választ.

Amennyiben az algoritmus futása során azt kapja, hogy nem lehet összegezni a tagot, `None` értékkel tér vissza.

Az alábbi példa a Konkrét Matematika korábban kézzel is megoldott feladatának ellenőrzése. A kapott válasz eltér a könyvben megadott megoldástól, de kis vizsgálattal ellenőrizhető hogy csak egy konstans tagban térnek el, ami az antidifferencia keresésénél nyilván megengedett. Ennek az eltérésnek az az oka, hogy a programcsomag az együtthatókra kapott egyenletrendszer megoldása során másik változót választott nullának.

```
# ConcMath 5. fejezet 33. feladat
term = 1/(k**2-1)
display(term)
t = gosper_sum(term, k)
display(t)
display(simplify(t.subs(k, k+1)-t))
r = (1-2*k)/(2*k*(k-1)) # A megadott megoldas
display(r)
display(simplify(r.subs(k, k+1)-r))
display(simplify(t-r))
```

$$\frac{1}{k^2-1}$$
$$-\frac{2k^2-1}{2k(k-1)}$$
$$\frac{1}{k^2-1}$$
$$\frac{1-2k}{2k(k-1)}$$
$$\frac{1}{k^2-1}$$
$$-1$$

Az alábbiakban két példa következik a határozott esetre az „A=B" könyvből. Ezek eredményei kis átalakítás után könnyen összehozhatóak a megadott megoldásokkal.

A második példa rámutat a programcsomag egyszerűsítési eljárásának kis hiányosságára, mivel nem kezeli az abban szereplő exponenciális tag egyszerűsítését. A `.rewrite(factorial)` metódus használata ahhoz szükséges, hogy a Gamma-függvény helyett faktoriális segítségével írja ki a kapott eredményt

```
# AeqB 5.7 2a
term = n**2*a**n
display(term)
t=gosper_sum(term, (n,0,m))
display(simplify(t))
```

$$a^n n^2$$
$$\frac{a(-a + a^m m^2 + 2a^m m + a^m - 2a^{m+1}m^2 - 2a^{m+1}m + a^{m+1} + a^{m+2}m^2 - 1)}{(a-1)^3}$$

```
# AeqB 5.7 2d
term = n*(n+a+b)*a**n*b**n/(factorial(n+a)*factorial(n+b))
display(term)
t=gosper_sum(term, (n,0,m))
display(simplify(t).rewrite(factorial))
```

$$\frac{a^n b^n n(a+b+n)}{(a+n)!(b+n)!}$$
$$-\frac{e^{m\log(a)+m\log(b)}a!b!}{(a-1)!(a+m)!(b-1)!(b+m)!}+\frac{1}{(a-1)!(b-1)!}$$

4.3. WZ-bizonyíték gyártása

A programcsomag dokumentációja alapján nem tartalmaz beépített eljárást WZ-tanúsítványok gyártására, ám ez az alábbi rövid programmal könnyedén orvosolható. A `gosper_sum` függvény hívásánál fontos a `combsimp` függvény használatával való egyszerűbb alakra hozás, enélkül nem képes minden esetben hipergeometrikus tagként felismerni a neki megadott differenciát.

Az eljárás bemenetként egy függvényt és a két változóját várja. Az eljárás kimenete az r WZ-bizonyíték egyszerűsített alakban.

```
from sympy import symbols, combsimp

def forward_diff(f, n):
    return f.subs(n, n+1) - f

def WZ_certificate(f, n, k):
    k1 = symbols("k1")
    df = forward_diff(f, n)
    t = gosper_sum(combsimp(df), (k, 0, k1))
    if t:
        r = (t.subs(k1, k-1)/f)
        g = (r*f)
        return combsimp(r).rewrite(factorial)
    else:
        return None
```

Az alábbi példák az „A=B” könyvből származnak.

Az elsőben sikeresen egyszerű eredményhez jutunk.

```
# AeqB 7.5.2
x = symbols("x")
f = k*binomial(n+1,k)*binomial(x,k)/((n+1)*binomial(x+n, n+1))
display(f)
r = WZ_certificate(f, n, k)
display(r)
```

$$\frac{k\binom{x}{k}\binom{n+1}{k}}{(n+1)\binom{n+x}{n+1}}$$

$$\frac{k(k-1)}{(k-n-2)(n+x+1)}$$

A második és harmadik példában a kapott bizonyíték sajnos nem egyezik meg a könyvben adott megoldással, ami szintén pár egyszerűsítési hiányosságnak róható fel. Szerencsére a differenciák ellenőrzésével megbizonyosodhatunk az eredmény helyességéről.

```
# AeqB 7.5.1
f = (2**(k+1)*(k+1)*factorial(2*n-k-2)*factorial(n))\
    /(factorial(n-k-1)*factorial(2*n))
display(f)
r = WZ_certificate(f, n, k)
display(simplify(r))
g = r*f
display(simplify(forward_diff(f,n)/forward_diff(g,k)))
```

$$\frac{2^{k+1}(k+1)n!(-k+2n-2)!}{(2n)!(-k+n-1)!}$$
$$-\frac{k(k-2n+1)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{4(k-n)\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}$$
$$1$$

```
# AeqB 7.5.3
f = factorial(n)**4/(factorial(k)**2*factorial(n-k)**2*factorial(2*
  ↪ n))
display(f)
r = WZ_certificate(f, n, k)
display(simplify(r))
display(simplify(forward_diff(f,n)/forward_diff(r*f,k)))
```

$$\frac{n!^4}{k!^2(2n)!(-k+n)!^2}$$
$$\frac{k^2(2k-3n-3)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{4(k-n-1)^2\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}$$
$$1$$

Irodalomjegyzék

[FS09] P. Flajolet és R. Sedgewick. *Analytic Combinatorics.* 1. kiadás. USA: Cambridge University Press, 2009.

[Gos78] R. W. Gosper. „Decision Procedure for Indefinite Hypergeometric Summation". *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 75.1 (1978), 40–42. oldal.

[GKP98] R. L. Graham, D. E. Knuth és O. Patashnik. *Konkrét Matematika [Concrete Mathematics].* Fordította F. Sándor és mások. Budapest: Műszaki Könyvkiadó, 1998.

[Haj97] P. Hajnal. *Összeszámlálási problémák.* Polygon Jegyzettár, 1997.

[KRS07] G. Y. Katona, A. Recski és C. Szabó. *A számítástudomány alapjai.* Budapest: Typotex Kiadó, 2007.

[Knu97] D. E. Knuth. *The art of computer programming. Vol. 1.* Fundamental algorithms, Third edition [of MR0286317]. Addison-Wesley, Reading, MA, 1997.

[Lov08] L. Lovász. *Kombinatorikai problémák és feladatok.* Budapest: Typotex Kiadó, 2008.

[Niv69] I. Niven. „Formal power series". *Amer. Math. Monthly* 76 (1969), 871–889. oldal.

[Pet92] M. Petkovšek. „Hypergeometric solutions of linear recurrences with polynomial coefficients". *J. Symbolic Comput.* 14.2-3 (1992), 243–264. oldal.

[PP07] M. Petkovšek és T. Pisanski. „Combinatorial Interpretation Of Unsigned Stirling And Lah Numbers". *Pi Mu Epsilon Journal* 12.7 (2007), 417–424. oldal.

[PWZ96] M. Petkovšek, H. S. Wilf és D. Zeilberger. $A = B$. Wellesley, MA: A K Peters, Ltd., 1996.

[Sym] SymPy. URL: `https://www.sympy.org` (elérés dátuma 2020. 05. 13.).

[Wil06] H. S. Wilf. *generatingfunctionology.* Third. Wellesley, MA: A K Peters, Ltd., 2006.

[Csu80] I. Csukás. *Süsü, a sárkány.* Budapest: RTV-Minerva Kiadó, 1980.