NYILATKOZAT

Név: TEMESVÁRI CSANÁD

ELTE Természettudományi Kar, szak: MATEMATIKA

NEPTUN azonosító: YW2FID

Szakdolgozat címe: ITERÁCIÓS MÓDSZEREK KONVERGENCIAVIZSGÁLATA ELEKTROSZTATIKAI PARCIÁLIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEKBEN

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2020.05.07.

Temesvári Csanád

a hallgató aláírása

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Temesvári Csanád

Iterációs módszerek konvergenciavizsgálata elektrosztatikai parciális differenciálegyenletekben

Szakdolgozat
Matematika BSc, alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető:
Dr. Karátson János, egyetemi tanár
ELTE TTK Alkalmazott Analízis és Számításmatematika Tanszék

Budapest, 2020

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Dr. Karátson Jánosnak, amiért felkeltette az érdeklődésemet a téma iránt, türelemmel válaszolt bármilyen kérdésemre, és szakértelmével egyengette eme dolgozat létrejöttét.

1. Bevezetés

E szakdolgozat témája egy olyan egyenlet vizsgálata, amely többek között félvezetők működésének matematikai leírásásban tűnik fel (ld. [8], 197. oldal), természetesen az itt tárgyalt formájánál jóval komplikáltabb köntösben. A szakdolgozat célja a Hilbert-térbeli alapok áttekintése után a megoldás létezésének és egyértelműségének levezetése, majd a numerikus megoldás vizsgálata a megfelelő Szoboljevtérben. A gradiens- és Newton-típusú iteráció konvergenciájának igazolása mellett cél e két módszer összehasonlítása is.

A következőkben legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n = 1, 2, 3$ korlátos tartomány. A szakdolgozat során az alábbi egyenletről lesz szó:

$$-div(\mu_1 e_1(u_0, u_1) \cdot \nabla u_1) = k(u_1, u_2)(1 - e^{u_1+u_2}) \quad \text{, ahol}$$
$$e_1 = e_1(u_0, u_1) = e^{u_1-u_0}$$

Itt $u = (u_0, u_1, u_2)$ az ismeretlen, ahol u_0 az elektrosztatikus potenciál, u_1 és u_2 a lyukak valamint az elektronok elektrokémiai potenciáljai, $f \in L^\infty(\Omega)$ az ún. "szennyezések" sűrűségeloszlásának függvénye, k pedig egy pozitív folytonos függvény, amely az elektronok és a lyukak újragenerálásának mértékét fejezi ki, $\mu_1 \in L^\infty(\Omega)$ pedig a lyukmobilitás.

Az alábbi kikötéseket tesszük:

- k, μ_1, u_2 állandó, u_2 ismert, legyen $\gamma := e^{u_2}$
- $u_0 = u_1$

ekkor a következő alakot kapjuk:

$$-\Delta u_1 + \frac{k \cdot \gamma}{\mu_1} \cdot e^{u_1} = \frac{k}{\mu_1}$$

Tegyük fel, hogy $\frac{k \cdot \gamma}{\mu_1}$-nek olyan mértékegységet adunk, hogy 1 lesz az értéke, valamint $f := \frac{k}{\mu_1}$, innen u_1-re kapjuk, hogy

$$-\Delta u_1 + e^{u_1} = f.$$

2. Normált terek

A normált tér egy olyan speciális algebrai struktúra, ahol egy vektortér elemeihez rendelünk nemnegatív valós számokat. Ha ránézünk a fejezet első definíciójára, láthatjuk, hogy a függvény kísértetiesen hasonlít a valós számokon értelmezett abszolútérték-függvényhez, és nem is tévednénk nagyot, ugyanis a norma valahogy a vektorhossz általánosításának fogható fel. A normált terekre azért lesz szükségünk, hogy a kapott közelítő megoldás és az igazi megoldás közötti "távolság"-ot vizsgáljuk, ezzel mérve, hogy mennyire járunk közel a keresett függvényhez.

2.1. Definíció. Legyen X vektortér $\mathbb{K}$ felett, ahol $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ vagy $\mathbb{R}$. Egy $||\cdot|| \colon X \Rightarrow \mathbb{R}^+$ függvényt *normának* nevezünk, ha teljesíti az alábbi axiómákat:

(i) minden $x \in X$ esetén $||x|| \geq 0$, és $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(ii) minden $\lambda \in \mathbb{K}$ és $x \in X$ esetén $||\lambda x|| = |\lambda| \; ||x||$;

(iii) minden $x, y \in X$ esetén $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Ekkor az $(X, || \cdot ||)$ párt *normált térnek* nevezzük.

A példák felsorolása előtt bevezetjük a kompaktabb jelölés érdekében az ún. *multiindexeket*.

2.2. Definíció. Egy α *multiindexen* egy nemnegatív α_j számokból álló vektort értünk, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$, ahol N pozitív egész szám. A multiindex *abszolút értéke* vagy *rendje* $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_N$

2.3. Definíció. Legyen $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ multiindex. Ekkor $\partial^\alpha := \partial_1^{\alpha_1} \ \ldots \ \partial_N^{\alpha_N}$, azaz egy $f \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ elég sima függvényre $\partial^\alpha f := \partial_1^{\alpha_1} \ \ldots \ \partial_N^{\alpha_N} f$.

Néhány példa normált térre, mely a szakdolgozatban többször elő fog kerülni:

– Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n \quad (n \geq 1)$ tetszőleges korlátos nyílt halmaz, $k \geq 0$ egész szám. $C^k(\Omega)$ jelentse az Ω halmazon k-szor folytonosan differenciálható $f \colon \Omega \to \mathbb{K} \quad (\mathbb{K} = \mathbb{R}$, vagy $\mathbb{C})$ függvények összességét, vagyis minden olyan folytonos függvényt, melynek minden legfeljebb k-adrendű parciális deriváltja létezik és folytonos az Ω halmazon.
  Jelölje $C(\overline{\Omega})$ az $\overline{\Omega}$ halmazon értelmezett valós értékű folytonos függvények vektorterét. Ekkor $C^k(\overline{\Omega}) \quad (0 \leq k \leq \infty)$ azon $f \colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ függvények vektortere, melyre $f \in C^k(\Omega)$, továbbá minden $|\alpha| \leq k$ multiindex esetén

$\partial^\alpha f \in C(\overline{\Omega})$, pontosabban a $\partial^\alpha f$-nek létezik folytonos kiterjesztése $\overline{\Omega}$-ra. Ekkor az

$$||f|| := \sum_{0\leq|\alpha|\leq k} \max_{\overline{\Omega}} |\partial^\alpha f|$$

normát definiál.

– Az $L^P(\Omega)$-terek, ahol $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ adott Lebesgue-mérhető halmaz, $1 \leq p \leq \leq \infty$. Tekintsük azokat a $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mérhető függvényeket, melyekre $||f||_{L^p}$ véges, ahol

$$||f||_{L^p} := \begin{cases} \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{ha } 1 \leq p < +\infty \\ \inf\{\sup\limits_{\Omega\setminus N} |f| : N \subset \Omega \text{ nullmértékű}\} & \text{ha } p = +\infty \end{cases}$$

pontosabban:

2.4. Definíció. Az $L^p(\Omega)$ tér azon Lebesgue-mérhető függvényekből áll, melyekre $||f||_{L^p} < \infty$ beleértve, hogy két függvényt azonosnak tekintünk, ha majdnem mindenütt (azaz egy nullmértékű halmaz kivételével) egyenlők. (Így fog csak teljesülni az első normaaxióma, ui. a Lebesgue-integrál érzéketlen a nullmértékű halmazon való módosításra.)

A mértékelméletről és a Lebesgue-integrál elméletéről precíz és kielégítő leírást ad a [10] jegyzet.

– Az ún. Szoboljev-féle függvényterek: Legyen továbbra is $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, $k \geq 1$ egész szám, $1 \leq p < \infty$ és tekintsük azokat az $f \in C^k(\Omega)$ függvényeket, melyekre

$$\sum_{|\alpha|\leq k} \int_\Omega |\partial^\alpha f|^p < \infty$$

Ezek a függvények az

$$||f|| := (\sum_{|\alpha|\leq k} \int_\Omega |\partial^\alpha f|^p)^{\frac{1}{p}}$$

normával normált teret alkotnak, amelyet ha teljessé teszünk, kapjuk az $W^{k,p}(\Omega)$-val jelölt függvényteret. Itt ∂^α mindenhol ún. *disztribúció*-értelemben vett deriváltakat jelöl. (Bővebben ld. [2], 3. Fejezet)

2.5. Definíció. Ha egy normált térben minden Cauchy-sorozat konvergens, akkor a teret *teljes normált térnek* vagy *Banach-térnek* nevezzük.

Példák Banach-terekre Az összes fent említett normált tér Banach-tér a bevezetett normával.

2.6. Definíció. Legyenek X, Y vektorterek a $\mathbb{K}$ számtest felett. Az $A\colon X \to Y$ leképezést *lineárisnak* nevezzük, ha bármely $x, y \in X$ és $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ esetén $A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$. Jelölésben: $Ax := A(x)$.

2.7. Definíció. Egy $A\colon X \to Y$ leképezést *korlátosnak* nevezünk, ha létezik olyan $C \geq 0$ állandó, hogy

$$||Ax|| \leq C||x|| \quad (\forall x \in X).$$

2.8. Tétel. *Egy lineáris leképezés pontosan akkor folytonos, ha korlátos.*

2.9. Definíció. Jelölje $B(X, Y)$ az $A\colon X \to Y$ korlátos lineáris leképezések halmazát.

A $B(X, Y)$ halmaz természetes módon vektorteret alkot a leképezések pontonkénti összeadásával és számmal való szorzásával. Most normát is definiálunk ebben a térben.

2.10. Definíció. Ha $A \in B(X, Y)$, akkor legyen

$$||A|| := \{\sup ||Ax||\colon x \in X, ||x|| \leq 1\}$$

Ezt a menyiséget szokás *operátornormának* nevezni.

2.11. Állítás. *A fent definiált operátornorma normát definiál.*

Ha tehát X és Y normált terek, akkor $B(X, Y)$ is normált tér az operátornormával.

2.12. Tétel. *Legyen X normált tér, Y Banach-tér. Ekkor $B(X, Y)$ Banach-tér.*

A bizonyításhoz ld. [5], 1.46 Tétel.

2.13. Definíció. Egy számértékű lineáris leképezést, azaz egy $\varphi\colon X \to \mathbb{K}$ lineáris leképezést, ahol X vektortér és $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$ számtest, *lineáris funkcionálnak* nevezünk.

Legyen a továbbiakban X normált tér. A (2.8) tétel funkcionálokra is érvényes, így egy $\varphi\colon X \to \mathbb{K}$ lineáris funkcionál pontosan akkor folytonos ha korlátos, azaz létezik $M \geq 0$ állandó, hogy

$$|\varphi x| \leq M||x|| \quad (\forall x \in X).$$

A korlátos lineáris funckionálok tere $B(X, \mathbb{K})$.

2.14. Definíció. Legyen $(X, ||\cdot||)$ normált tér. A $B(X, \mathbb{K})$ teret az X *duális terének* nevezzük és X^*-gal jelöljük.

A (2.12) tétel szerint tetszőleges normált tér duálisa Banach-tér.

3. Hilbert-terek

A Hilbert-terek olyan speciális Banach-terek, amik valamilyen értelemben hasonlítanak az euklideszi terekhez, nevezetesen abban, hogy értelmezhető bennük skalárszorzat, ezáltal két elem merőlegessége és a vetítés fogalma.

3.1. Definíció. Legyen H vektortér $\mathbb{C}$ felett. Egy $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon H \times H \to \mathbb{C}$ leképezést *skalárszorzatnak* nevezünk, ha bármely $x, y \in H$ esetén

(i) az $x \mapsto \langle x, y\rangle$ leképezés lineáris

(ii) $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$

(iii) $\langle x, x\rangle > 0$, kivéve ha $x = 0$.

Norma értelmezése a skalárszorzattérben: ha $x \in H$, akkor legyen

$$||x|| := \sqrt{\langle x, x\rangle},$$

ezt nevezik a skalárszorzat által *indukált* normának. Ez az euklideszi hossz megfelelője. A normatulajdonságok igazolásánál csak a háromszög-egyenlőtlenség nem lesz triviális; ennek bizonyításához olyan segédállításra van szükségünk, amely önmagában is a Hilbert-terek egyik technikai alapeszköze.

3.2. Tétel (Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz-egyenlőtlenség)**.** *Minden $x, y \in H$ esetén*

$$|\langle x, y\rangle| \leq ||x||\ ||y||.$$

3.3. Állítás. *A $||x|| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ képlet valóban normát definiál H-n.*

3.4. Definíció. A $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ skalárszorzatteret *Hilbert-térnek* nevezzük, ha H az indukált normával teljes.

Példák Hilbert-terekre

– $\mathbb{R}^n$ $\mathbb{R}$ feletti valós Hilbert-tér a szokásos

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i$$

skalárszorzattal. Az indukált norma éppen az eulideszi norma, amivel $\mathbb{R}$ valóban teljes.

– $\mathbb{C}^n$ $\mathbb{C}$ feletti komplex Hilbert-tér a

$$\langle z, w\rangle = \sum_{i=0}^{n} z_i \cdot \overline{w_i}$$

skalárszorzattal, ennek teljessége ekvivalens $\mathbb{R}^{2n}$ teljességével.

– $L^2(\Omega) = \{f\colon \Omega \to \mathbb{C}\text{ Lebesgue-mérhető}\colon \int_\Omega |f|^2\,d\lambda < \infty\}$, azaz egy $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartományon négyzetesen Lebesgue-integrálható függvények tere Hilbert-tér a

$$\langle f, g\rangle_{L^2} = \int_\Omega f\bar{g}\,d\lambda$$

skalárszorzattal. A teljességhez ld. ([5], 1.3.1 Szakasz)

– A $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega)\colon \partial^\alpha f \in L^2(\Omega)$ disztribúció értelemben $(\forall|\alpha| \le k)\}$ tér az

$$\langle f, g\rangle_{H^k} = \sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega (\partial^\alpha f)\cdot(\overline{\partial^\alpha g})$$

skalárszorzattal. A teljességhez ld. ([2], 4.1. Szakasz).

– Legyen $H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega)\colon u|_{\partial\Omega} = 0$ nyom-értelemben$\}$, és legyen

$$\langle u, v\rangle_{H_0^1} := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\overline{v}$$

Belátható, hogy ez zárt lineáris altere $H^1(\Omega)$-nak, így maga is Hilbert-tér.

3.5. Állítás. *Ha $A \in B(H)$ önadjungált, akkor*

$$||A|| = \sup\{|\langle Ax, x\rangle|\colon ||x|| = 1\}.$$

3.6. Tétel (Riesz reprezentációs tétele)**.** *Legyen H Hilbert-tér. Ekkor minden $\phi\colon H \to \mathbb{C}$ folytonos lineáris funkcionálhoz egyértelműen létezik olyan $y \in H$, hogy*

$$\phi x = \langle x, y\rangle \qquad (\forall x \in H).$$

3.7. Definíció. Legyen X normált tér. Egy $(x_n) \subset X$ sorozat *gyengén* tart egy $x \in X$ vektorhoz, ha minden $\varphi \in X^*$ esetén $\varphi x_n \to \varphi x$. (Jelölésben: $x_n \rightharpoonup x$)

Ha $x_n \to x$ erős értelemben, azaz normában, akkor a folytonosság miatt $\varphi x_n \to \varphi x$ minden $\varphi \in X^*$ esetén, azaz az erős konvergenciából következik a gyenge (ezért is nevezzük így), fordítva viszont általában nem teljesül, pl. egy H Hilbert-térbeli teljes ortonormált rendszer nem is Cauchy-sorozat, tehát nem is konvergálhat. Igaz azonban a következő tétel.

3.8. Tétel. *Reflexív Banach-térben minden korlátos sorozatnak van gyengén konvergens részsorozata.*

4. Nemlineáris operátorok

A nemlineáris operátorok fontos szerepet játszanak mindennapjaink fizikai problémáit leíró nemlineáris parciális differenciálegyenlet(rendszer)ekben. Álljon itt néhány híresebb példa a teljesség igénye nélkül:

1. Burgers-egyenlet:
$$\frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ ,$$
ahol $u(t, x)$ folyadék, hang, gáz, de akár közúti forgalom terjedését írja le, ν pedig az ún. diffúziós együttható.

2. Korteweg-de Vries (KdV) egyenlet:
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 6u\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$
ahol $u(t, x)$ sekély hullámok terjedését írja le.

3. Navier-Stokes egyenlet (egyszerűsített alak):
$$\rho\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u} - \mu\Delta\mathbf{u} = -\nabla p + \mathbf{F},$$
$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$
Itt $\mathbf{u}$ a folyadék sebessége, ρ a sűrűsége, p a nyomás, $\mathbf{F}$ pedig a folyadékra ható külső erő.

4. Az ún. p-Laplace-egyenlet:
$$\nabla \cdot \left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) = 0,$$
amelyet például nemlineáris rugalmasságtanban használnak.

További példák találhatók [11]-ben, [3]-ben, [4]-ben, illetve az abban hivatkozott művekben. A következőkben nemlineáris operátorok tulajdonságait ismertetjük, valamint a velük megadott egyenletek megoldhatóságáról szólunk.

4.1. Gâteaux-derivált

4.1. Definíció. Legyenek X, Y normált terek. Egy $F\colon\ X \to Y$ (nemlineáris) operátor *Gâteaux-deriválható* az $u \in X$ pontban, ha

(i) bármely $v \in X$ esetén létezik

$$\partial_v F(u) := \lim_{t \to 0} \frac{F(u+tv) - F(u)}{t};$$

(ii) a $v \mapsto \partial_v F(u)$ hozzárendelés folytonos lineáris operátor X-ből Y-ba.

A második tulajdonság szerinti operátort $F'(u)$-val jelölve

$$F'(u)v = \partial_v F(u) \quad \text{és} \quad F'(u) \in B(X, Y).$$

Jelölés: ha $Y = \mathbb{R}$, azaz $B(X, Y) = X^*$, akkor $\langle \Phi, v \rangle := \Phi v$.

4.2. Definíció. Legyen X normált tér, $u, v \in X$. Ekkor

(i) $[u, v] = \{u + t(u - v) : t \in [0, 1]\}$ az u-t és a v-t összekötő szakasz;

(ii) ha $\Phi : X \to \mathbb{R}$, akkor $\phi_{u,v} : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $\phi_{u,v}(t) := \Phi(u + t(v - u))$.

4.3. Definíció. Legyenek X, Y és Z normált terek, $A : X \to B(Y, Z)$ leképezés. Azt mondjuk, hogy

(i) *A hemifolytonos*, ha minden $u, v \in X$ és minden $w \in Y$ esetén a $t \mapsto A(u + tv)w$ leképezés folytonos $\mathbb{R}$-ból Z-be.

(ii) *A bihemifolytonos*, ha minden $u, v, w \in X$, $z \in Y$ esetén az $(s, t) \mapsto A(u + tv + sw)z$ leképezés folytonos $\mathbb{R}^2$-ből Z-be.

4.4. Tétel (Lagrange-féle középértéktétel)**.** *Legyen* $\Phi : X \to \mathbb{R}$ *Gâteaux-deriválható,* $u, v \in X$. *Ekkor létezik olyan* $\zeta \in [u, v]$, *hogy* $\Phi(u) - \Phi(v) = \langle \Phi'(\zeta), v - u \rangle$

Bizonyítás Legyen $\phi = \phi_{u,v}$, ekkor $\phi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ differenciálható, és

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= \lim_{h \to 0} \frac{\phi(t+h) - \phi(t)}{h} = \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\Phi(u + t(v-u) + h(v-u)) - \Phi(u + t(v-u))}{h} = \\ &= \partial_{v-u} \Phi(u + t(v-u)) = \langle \Phi'(u + t(v-u)), v - u \rangle \end{aligned}$$

A valós függvényekre vonatkozó Lagrange-középértéktétel szerint létezik olyan $\eta \in [0, 1]$, hogy $\phi(1) - \phi(0) = \phi'(\eta)$. A $\zeta := u + \eta(v - u)$ választással a kívánt állítást kapjuk. ■

4.5. Tétel (Másodrendű Taylor-formula)**.** *Legyen* $\Phi\colon X \to \mathbb{R}$ *kétszer Gâteaux-deriválható,* $u, v \in X$. *Ekkor létezik olyan* $\zeta \in [u, v]$, *hogy*

$$\Phi(u) - \Phi(v) = \langle \Phi'(\zeta), v - u\rangle + \frac{1}{2}\langle \Phi''(\zeta)(v-u), v-u\rangle.$$

Bizonyítás Az előzőekhez hasonlóan belátható, hogy $\phi = \phi_{u,v}$ kétszer differenciálható és $\phi''(t) = \langle \Phi''(u+t(v-u))(v-u), v-u\rangle$. A másodrendű valós Taylor-formulát ϕ-re felírva kapjuk, hogy $\phi(1) - \phi(0) = \phi'(0) + \frac{1}{2}\phi''(\eta)$, ahonnan a $\zeta := u + \eta(v-u)$ választással adódik az állítás. ■

4.6. Tétel. *[Newton-Leibniz] Legyen* $\Phi\colon X \to \mathbb{R}$, $u, v \in X$.

(1) Ha Φ *Gâteaux-deriválható és* Φ' *hemifolytonos, akkor*

$$\Phi(v) - \Phi(u) = \int_0^1 \langle \Phi'(u + t(v-u)), v - u\rangle \, dt.$$

(2) Ha Φ *kétszer Gâteaux-deriválható és* Φ'' *hemifolytonos, akkor*

$$\Phi'(v) - \Phi'(u) = \int_0^1 \Phi''(u + t(v-u))\,(v-u)\,dt$$

amin azt értjük ,hogy minden $z \in X$ *esetén*

$$\langle \Phi(v) - \Phi(u), z\rangle = \int_0^1 \langle \Phi'(u + t(v-u))(v-u), z\rangle \, dt.$$

Bizonyítás

(1) Legyen $\phi = \phi_{u,v}$, azaz $\phi(t) = \Phi(u + t(v-u))$, akkor a (4.4) tétel bizonyítása alapján $\phi'(t) = \langle \Phi'(u + t(v-u)), v - u\rangle$. Itt Φ' hemifolytonossága miatt ϕ' folytonos, emiatt érvényes a közönséges Newton - Leibniz szabály. Azaz $\phi(1) - \phi(0) = \int_0^1 \phi'(t)dt$, ami éppen a kívánt egyenlőtlenség.

(2) Legyen $z \in X$ is rögzített és $\psi_{u,v,z}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $\psi(t) := \langle \Phi'(u + t(v-u)), z\rangle$. Ekkor a fentihez hasonlóan $\psi'(t) = \langle \Phi''(u+t(v-u))\,(v-u), z\rangle$. Itt $t \mapsto \Phi''(u+$ $+\, t(v-u))\,(v-u)$ folytonos, mert Φ'' hemifolytonos, ezért ψ' is folytonos. Így a fentihez hasonlóan $\psi(1) - \psi(0) = \int_0^1 \psi'(t)dt$, vagyis

$$\langle \Phi(u) - \Phi(v), z\rangle = \langle \Phi(u), z\rangle - \langle \Phi(v), z\rangle =$$
$$= \int_0^1 \langle \Phi'(u + t(v-u))(v-u), z\rangle \, dt. \quad ■$$

4.2. Konvex funkcionálok és monoton operátorok

4.7. Definíció. A $\Phi\colon X \to \mathbb{R}$ funkcionál

(i) *konvex*, ha $\phi_{u,v}$ konvex minden $u, v \in X$ esetén;

(ii) *szigorúan konvex*, ha $\phi_{u,v}$ szigorúan konvex minden $u, v \in X$ esetén;

4.8. Állítás. *Ha $\Phi\colon X \to \mathbb{R}$ konvex és Gâteaux-deriválható, akkor minden $u, v \in X$ esetén $\Phi(v) - \Phi(u) \geq \langle \Phi'(u), v - u \rangle$.*

Bizonyítás Legyen $\phi = \phi_{u,v}$. Mivel ϕ konvex, ezért $\phi(1) - \phi(0) \geq \phi'(0)$, ami a kívánt egyenlőtlenséget adja. ■

4.9. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $F\colon X \to X^*$

(i) *monoton* operátor, ha

$$\langle F(u) - F(v), u - v \rangle \geq 0 \quad (\forall u, v \in X)$$

(ii) *szigorúan monoton* operátor, ha

$$\langle F(u) - F(v), u - v \rangle > 0 \quad (\forall u \neq v \in X)$$

(iii) *egyenletesen monoton* operátor, ha létezik olyan $m > 0$ állandó, hogy

$$\langle F(u) - F(v), u - v \rangle \geq m||u - v||^2 \quad (\forall u, v \in X).$$

Ez utóbbit motiválja a valós függvények monotonitása:

$$\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ monoton növekedő} \iff (\varphi(x) - \varphi(y))(x - y) \geq 0 \quad (\forall x, y \in \mathbb{R})$$

4.10. Állítás. *Legyen Φ kétszer Gâteaux-deriválható. Ekkor az alábbi három állítás ekvivalens:*

(i) *Φ konvex;*

(ii) *$\Phi'\colon X \to X^*$ monoton operátor;*

(iii) *$\Phi''(u) \geq 0$ minden $u \in X$-re, azaz $\langle \Phi''(u)h, h \rangle \geq 0$ minden $h \in X$-re.*

Bizonyítás (i) $\Longrightarrow$ (ii): Legyen $u, v \in X$ rögzített és $\phi = \phi_{u,v}$, ami a feltétel szerint konvex, így ϕ' monoton növő. Ebből $\phi'(1) - \phi'(0) \geq 0$, ami azt jeleti, hogy $\langle \Phi(v) - \Phi(u), v - u\rangle \geq 0$.
(ii) $\Longrightarrow$ (iii) A definíciókból, $v := u + th$ mellett

$$\begin{aligned}\langle \Phi''(u)h, h\rangle = \langle \partial_h \Phi'(u), h\rangle &= \lim_{t\to 0}\langle \frac{\Phi'(u+th) - \Phi'(u)}{t}, h\rangle = \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\langle \Phi'(u+th) - \Phi'(u), h\rangle = \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t^2}\langle \Phi'(u+th) - \Phi'(u), (u+th) - h\rangle \geq 0\end{aligned}$$

(iii) $\Longrightarrow$ (i) Legyen $u, v \in X$ tetszőleges, és legyen $\phi = \phi_{u,v}$, ekkor létezik ϕ'' és

$$\phi''(t) = \langle \Phi(u + t(v-u))\,(v-u), v-u\rangle \geq 0$$

a feltétel szerint. Így ϕ'' konvex, amiből következik, hogy Φ is konvex. $\blacksquare$

4.11. Megjegyzés. A fenti tételhez hasonlóan igazolhatók a következő állítások is:

– Φ pontosan akkor szigorúan konvex, ha $\Phi' \colon X \to X^*$ szigorúan monoton operátor

– $\Phi' \colon X \to X^*$ pontosan akkor egyenletesen monoton operátor, ha Φ'' egyenletesen pozitív, azaz létezik $m > 0$, hogy $\langle \Phi''(u)h, h\rangle \geq m||h||^2 \quad (u, h \in X)$. Ilyenkor Φ -t egyenletesen konvexnek nevezzük.

Az (i) és (ii) tulajdonságok ekvivalenciájához elég, ha Φ egyszer Gâteaux-deriválható.

4.3. Potenciáloperátorok

4.12. Definíció. Legyen X Banach-tér. Egy $A \colon X \to X^*$ (nemlineáris) operátort *potenciáloperátornak* nevezünk, ha létezik olyan $J \colon X \to \mathbb{R}$ Gâteaux-deriválható funkcionál, melyre $J' = A$, azaz minden $u \in X$ esetén $J'(u) = A(u)$ teljesül. Ekkor a J funkcionált A *potenciáljának* nevezzük

4.13. Megjegyzés. Példa potenciáloperátorra: ha $f \in X^*$ tetszőleges elem, akkor az $A(u) \equiv f$ leképezésnek a $J(u) = \langle f, u\rangle \quad (\forall u \in X)$ (azaz $J \equiv$ f) lineáris funkcionál potenciálja.
Valóban,

$$\langle J'(u), h\rangle = \partial_h J(u) = \lim_{t\to 0} \frac{J(u+th) - J(u)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\langle f, u+th\rangle - \langle f, u\rangle}{t} = \langle f, h\rangle.$$

4.14. Tétel. *Legyen $A\colon X \to X^*$ Gâteaux-deriválható és A' bihemifolytonos. Ekkor A pontosan akkor potenciáloperátor, ha A' szimmetrikus, azaz*

$$\langle A'(u)v, h\rangle = \langle A'(u)h, v\rangle \quad (\forall u, v, h \in X).$$

Bizonyítás

(i) Tegyük fel, higy A potenciáloperátor, legyen J egy potenciálja. Legyenek $u, v, h \in X$ adott vektorok és vezessük be a

$$G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad G(s,t) := J(u + sh + tv)$$

függvényt. Ekkor J kétszer Gateaux-deriválható, hiszen a $J' = A$ operátor Gateaux-deriválható, emellett $J'' = A'$ bihemifolytonos. Így G második parcilis deriváltjai is léteznek, speciálisan

$$\partial_t\partial_s G(s,t) = \langle J''(u + sh + tv)h, v\rangle = \langle A'(u + sh + tv)h, v\rangle$$

és ugyanígy $\quad \partial_s\partial_t G(s,t) = \langle A'(u + sh + tv)v, h\rangle$, valamint G második parciális deriváltjai folytonosak is, ezért igaz a Young-tétel, vagyis

$$\langle A'(u)h, v\rangle = \partial_t\partial_s G(0,0) = \partial_s\partial_t G(0,0) = \langle A'(u)v, h\rangle.$$

(ii) Legyen A' szimmetrikus, meg kell mutatnunk, hogy A potenciáloperátor. Erre van képletünk (a Newton-Leibniz formula), ugyanis ha J potenciál, akkor

$$J(u) = J(0)+\int_0^1 \langle J'(0+t(u-0)), u-0\rangle\, dt = J(0)+\int_0^1 \langle A(tu), u\rangle\, dt \quad (u \in X).$$

Itt $J(0)$ nullának választható. Legyen tehát

$$J(u) := \int_0^1 \langle A(tu), u\rangle\, dt \quad (u \in X) \tag{1}$$

és igazolnunk kell, hogy J potenciálja A-nak, azaz $\langle J'(u), v\rangle = \langle A(u), v\rangle$ $(\forall u, v \in X)$.

Legyenek $u, v \in X$ adott vektorok, és vezessük be a

$$K\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad K(s,t) := J(su + tv)$$

függvényt. Ha $J' = A$, amit szeretnénk, akkor

$$\begin{aligned} K'(s,t) &= (\partial_s K(s,t), \partial_t K(s,t)) = (\langle J'(su + tv), u\rangle, \langle J'(su + tv), v\rangle) = \\ &= (\langle A(su + tv), u\rangle, \langle A(su + tv), v\rangle) =: k(s,t) \quad (s, t \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Megfordítva, ha $K' = k$, akkor speciálisan

$$\partial_t K(1,0) = k_2(1,0), \text{ azaz } \langle J'(u), v\rangle = \langle A(u), v\rangle$$

Így $J' = A$ pontosan akkor, ha $K' = k$ minden u, v esetén. Megmutatjuk, hogy az utóbbi igaz. Itt k-nak van primitív függvénye, mivel a feltevésből

$$\begin{aligned}\partial_2 k_1(s,t) = \partial_t k_1(s,t) = \langle A(su+tv)v, u\rangle = \\ = \langle A(su+tv)u, v\rangle = \partial_s k_2(s,t) = \partial_1 k_2(s,t)\end{aligned}$$

($\forall s, t \in \mathbb{R}$). Sőt, ekkor a primitív függvények megadhatók k-nak (egy rögzített pontból a változó pontba haladó görbe menti) vonalintegráljaként, ahol a görbe tetszőleges lehet. Ha (s,t) adott pont, akkor tehát egy primitív függvény előáll a $(0,0)$ pontból (s,t)-be húzott szakaszon vett vonalintegrálként, melynek értéke

$$\int_0^1 k(rs, rt)\cdot(s,t)dr = \int_0^1 (\langle A(r(su+tv)), u\rangle, \langle A(r(su+tv)), v\rangle)\cdot(s,t)dr =$$
$$= \int_0^1 \langle A(r(su+tv)), su+tv\rangle dr = J(su+tv) = K(s,t),$$

azaz K valóban primitív függvénye k-nak. Tehát, mint láttuk, a (1)-ben definiált J potenciálja A-nak. ■

4.15. Állítás. *Legyen X reflexív Banach-tér és tegyük fel, hogy $\Phi\colon X \to \mathbb{R}$ Gâteaux-deriválható, konvex és $\lim_{||u||\to\infty} \Phi(u) = \infty$. Ekkor Φ-nek létezik minimuma.*

Bizonyítás Legyen $\alpha = \inf_X \Phi \geq -\infty$. Ekkor van olyan $(u_n) \subset X$ sorozat, hogy $\Phi(u_n) \to \alpha$. Emiatt a $(\Phi(u_n))$ sorozat felülről korlátos, amiből következik, hogy (u_n) korlátos sorozat. Ugyanis ha nem lenne az, akkor $||u_n||$ sem lenne az, azaz lenne egy végtelenhez tartó részsorozata; erre a részsorozatra $\Phi(u_n) \to \alpha$ teljesülne, ellentmondva a $\lim_{||u||\to\infty} \Phi(u) = \infty$ feltételnek.
A 3.8 Tétel miatt kiválasztható gyengén konvergens részsorozat, azaz létezik $(u_{n_k}) \subset$ $\subset (u_n)$ részsorozat és $u^* \in X$, hogy $\langle \psi, u_{n_k}\rangle \to \langle \psi, u^*\rangle$ minden $\psi \in X^*$ esetén. Speciálisan $\langle \Phi'(u^*), u_{n_k}\rangle \to \langle \Phi'(u^*), u^*\rangle$, ahonnan Φ konvexitását felhasználva kapjuk, hogy

$$\Phi(u_{n_k}) - \Phi(u^*) \geq \langle \Phi'(u^*), u_{n_k} - u^*\rangle \to 0$$

amiből következik, hogy $\Phi(u^*) \leq \alpha = \inf \Phi$, vagyis $\Phi(u^*) = \min \Phi$. ■

4.16. Megjegyzés. Ha a fenti állításban Φ szigorúan konvex, akkor a minimumhely egyértelmű.

4.4. Variációs elv

Ha az adott A operátor potenciáloperátor, akkor az $A(u) = b$ egyenlet megoldhatósága átfogalmazható a potenciállal, és ez gyakran hasznosnak bizonyul. Legyen tehát $A\colon X \to X^*$ potenciáloperátor és legyen $J\colon X \to \mathbb{R}$ egy potenciálja: $J'(u) = A(u) \quad (\forall u \in X)$. Vezessük be a

$$\Phi\colon X \to \mathbb{R}, \quad \Phi(u) := J(u) - \langle b, u\rangle \tag{2}$$

funkcionált. Ez potenciálja az $u \mapsto A(u) - b$ leképezésnek, azaz

$$\Phi'(u) = A(u) - b \quad (\forall u \in X).$$

Ez azt jelenti, hogy azok a pontok, ahol Φ deriváltja 0, megegyeznek az $A(u) = b$ egyenlet megoldásaival. Sok esetben a Φ funkcionál minimumhelyeire van szükség, például ha Φ energia jellegű mennyiséget ír le. Ha u^* minimumhelye Φ-nek, akkor $\Phi'(u^*) = 0$, így u^* megoldása az egyenletnek: $A(u^*) = b$. Monoton operátorok esetén ekvivalencia fogalmazható meg:

4.17. Állítás. *Legyen $A\colon X \to X^*$ monoton potenciáloperátor, J egy potenciálja, valamint Φ pedig a (2)-ben definiált funkcionál. Az $u^* \in H$ vektor pontosan akkor megoldása az $A(u) = b$ egyenletnek, ha minimumhelye Φ-nek.*

Bizonyítás Legyen először $A(u^*) = b$, azaz $\Phi'(u^*) = 0$. Itt A monotonitása, a 4.10 Állítás és a 4.11 Megjegyzés alapján J konvex és mivel a $u \mapsto \langle b, u\rangle$ leképezés lineáris, ezért Φ is konvex. A 4.8 állításból így $\Phi(u) - \Phi(u^*) \geq \langle \Phi'(u^*), u - u^*\rangle = 0$, vagyis u^* minimumhely. A másik irányt az előbb láttuk. ■

4.18. Tétel. *Legyen H valós Hilbert-tér, $A\colon H \to H$ adott operátor. Tegyük fel, hogy*

(i) A Gâteaux-deriválható és A' bihemifolytonos,

(ii) minden $u \in H$ esetén $A'(u) \in B(H)$ önadjungált,

(iii) létezik $m > 0$ állandó úgy, hogy

$$\langle A'(u)h, h\rangle \geq m||h||^2 \quad (\forall u, h \in H)$$

Ekkor bármely $b \in H$ esetén az $A(u) = b$ egyenletnek egyértelműen létezik $u^* \in H$ megoldása

Bizonyítás Az 4.14 Állítás alapján az első két feltétel biztosítja azt, hogy A potenciáloperátor. Legyen $\Phi\colon X \to \mathbb{R}$, $\Phi(u) = J(u) - \langle b, u\rangle$, ahol $J' = A$. Ekkor $\Phi'(u) = A(u) - b$. Mivel Φ kétszer Gâteaux-deriválható, ezért a 4.5 Taylor-formmula szerint minden $u \in H$ esetén

$$\Phi(u) = \Phi(0) + \langle \Phi'(0), u\rangle + \frac{1}{2}\langle \Phi''(\theta u)u, u\rangle$$

alkalmas $\theta \in [0, 1]$ esetén, amiből a (iii) feltétel, valamint $\Phi'' = A'$ felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\Phi(u) &\geq \Phi(0) - ||\Phi'(0)|| \cdot ||u|| + \frac{m}{2} \cdot ||u||^2 = \\ &= \Phi(0) + ||u||(\Phi'(0) + \frac{m}{2} \cdot ||u||) \to \infty, \text{ ha } ||u|| \to \infty\end{aligned}$$

Másrészt (iii) és a 4.10 Megjegyzésből következik, hogy Φ szigorúan konvex. A 4.15 Állítás és a 4.16 Megjegyzés alapján Φ-nek egyértelműen létezik minimumhelye, és ez a 4.17 Állítás alapján pontosan akkor igaz, ha $A(u^*) = b$. ■

5. Iterációs módszerek

5.1. Definíció. Egy iteráció *lineárisan* konvergál, ha létezik olyan $0 < q < 1$ állandó, hogy az ε_n hibatagokra $\varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon_n q$ teljesül ($\forall n \in \mathbb{N}$; ekkor $\varepsilon_n \leq \varepsilon_0 \cdot q^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$), illetve *kvadratikusan* konvergál, ha van olyan $c > 0$ állandó, hogy $\varepsilon_{n+1} \leq c \cdot \varepsilon_n^2$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) és $\varepsilon_n \to 0$.

5.1. Gradiens-módszer

Legyen X Banach-tér, $\Phi\colon X \to \mathbb{R}$ adott funkcionál. Szeretnénk meghatározni Φ egy lokális minimumhelyét. Ennek természetes módja egy olyan iteráció, melynek minden lépésében a legnagyobb csökkenés irányában lépünk tovább (emiatt szokás az ilyen eljárást a leggyorsabb ereszkedés módszerének is hívni). Formálisan ez a következőképp írható le: tegyük fel, hogy minden $u, v \in X$ esetén létezik a $\partial_v F(u)$ iránymenti derivált. Definiáljuk a következő sorozatot:

- Legyen u_0 tetszőleges
- Ha $n \in \mathbb{N}$ és már tudjuk u_n-et, akkor legyen

  $$u_{n+1} := u_n + \alpha_n v_n,$$

  ahol $\alpha_n > 0$ konstans, és a $v_n \in X$ eleget tesz a

  $$\partial_{v_n} F(u_n) = \min\{\partial_v F(u_n)\colon v \in X, ||v|| = 1\}$$

  feltételnek. Itt v_n létezését is feltesszük.

Ha X éppenséggel egy H Hilbert-tér és Φ Gâteaux-deriválható, akkor

$$\partial_v F(u_n) = \langle \Phi'(u_n), v \rangle \geq -||\Phi'(u_n)|| \cdot ||v||,$$

és itt akkor van egyenlőség, ha $v_n = -\frac{\Phi'(u_n)}{||\Phi'(u_n)||}$, tehát a legjobb ereszkedés iránya $-\Phi'(u_n)$ számszorosa. Végeredményben ilyenkor a gradiens-módszer iterációs lépése

$$u_{n+1} := u_n - t_n \cdot \Phi'(u_n) \tag{3}$$

A gradiens-módszert legtöbbször olyankor használják, amikor egyértelműen létezik Φ-nek minimumhelye, és megfelelő feltételekkel elérhető, hogy u_n ehhez tartson. Később látni fogjuk, hogy ez Φ egyenletes konvexitásának lesz köszönhető. Legyen

H valós Hilbert-tér és $A\colon H \to H$ olyan operátor, amelyre teljesülnek a 4.18 Tétel feltételei. Legyen $f \in H$ és keressük az

$$A(u) = f \tag{4}$$

egyenlet megoldását. A 4.4 szakaszban leírtak szerint létezik olyan $\Phi\colon H \to \mathbb{R}$ egyenletesen konvex funkcionál, amelyre $\Phi'(u) = A(u) - f$, vagyis Φ minimalizáló funkcionál, amelynek egyetlen minimumhelye megadja (4) megoldását. Erre a funkcionálra szeretnénk felírni a gradiens-módszert. Mivel Φ Gâteaux-deriválható, ezért (3) alapján a gradiens-módszer a következő:

- Legyen u_0 tetszőleges
- Ha $n \in \mathbb{N}$ és tudjuk u_n-et, akkor

$$u_{n+1} := u_n - t_n \cdot \Phi'(u_n) = u_n - t_n \cdot (A(u_n) - f)$$

Itt csak $t_n \equiv t$ állandó lépésközzel foglalkozunk. A konvergencia igazolásához a 4.18 tétel (iii) feltétel felső megfelelőjét is fel kell tennünk.

5.2. Tétel. *Legyen H valós Hilbert-tér, $A\colon H \to H$ adott operátor. Tegyük fel, hogy*

(i) A Gâteaux-deriválható és A' bihemifolytonos,

(ii) minden $u \in H$ esetén $A'(u) \in B(H)$ önadjungált,

(iii) léteznek olyan $M \ge m > 0$ állandók úgy, hogy

$$m||h||^2 \le \langle A'(u)h, h\rangle \le M||h||^2 \quad (\forall u, h \in H)$$

Legyen $f \in H$ és $u^* \in H$ a (4) egyenlet megoldása. Ekkor tetszőleges $u_0 \in H$ esetén a

$$u_{n+1} := u_n - \frac{2}{M+m} \cdot (A(u_n) - f)$$

sorozat a

$$||u_n - u^*|| \le \frac{1}{m}||A(u_0) - f|| \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^n$$

hibabecslés szerint konvergál u^*-hoz.

Bizonyítás A 4.6 Newton-Leibniz-tétel segítségével

$$\begin{aligned}\Phi'(u_{n+1}) &= \Phi'(u_n) + \int_0^1 \Phi''(u_n + t(u_{n+1} - u_n))(u_{n+1} - u_n)dt = \\ &= \Phi'(u_n) - \frac{2}{M+m} \int_0^1 \Phi''(u_n + t(u_{n+1} - u_n))\Phi'(u_n)dt = \\ &=: L_n\Phi'(u_n),\end{aligned}$$

ahol $\Phi'' = A'$ miatt $L_n \colon H \to H$ az alábbi operátor:

$$L_n x := x - \frac{2}{M+m} \int_0^1 A'(u_n + t(u_{n+1} - u_n))\ x\ dt$$

Itt L_n lineáris operátor, sőt korlátos is, ugyanis (iii) feltétel miatt $||A'(u)|| \leq M \quad (\forall u \in$ $\in H)$, így

$$\begin{aligned}||L_n x|| &\leq ||x|| + \frac{2}{M+m} \int_0^1 ||A'(u_n + t(u_{n+1} - u_n))||\ ||x|| \leq \\ &\leq \left(1 + \frac{2M}{M+m}\right) ||x|| \quad (\forall x \in H)\end{aligned}$$

A (ii) feltételt felhasználva kapjuk, hogy

$$\langle L_n x, y\rangle = \langle x, y\rangle - \frac{2}{M+m} \int_0^1 \langle A'(u_n + t(u_{n+1} - u_n))\ x, y\rangle\ dt = \langle x, L_n y\rangle,$$

azaz L_n önadjungált is. Innen $||L_n|| = \sup\limits_{||x||=1} |\langle L_n x, x\rangle|$. Itt a (iii) feltétel miatt

$$m||x||^2 \leq \langle A'(u_n + t(u_{n+1} - u_n))\ x, x\rangle \leq M||x||^2,$$

ezért ha $||x|| = 1$, akkor

$$\begin{aligned}-\left(\frac{M-m}{M+m}\right) = \left(1 - \frac{2M}{M+m}\right) &= ||x||^2 - \frac{2}{M+m}\int_0^1 M||x||^2 \leq \\ &\leq \langle L_n x, x\rangle \leq ||x||^2 - \frac{2}{M+m}\int_0^1 m||x||^2 = \\ &= 1 - \left(\frac{2m}{M+m}\right) = \frac{M-m}{M+m} =: K\end{aligned}$$

így tehát $||L_n|| \leq K$. Emiatt

$$||\Phi'(u_{n+1})|| = ||L_n\Phi'(u_n)|| \leq K||\Phi'(u_n)||,$$

ezt a becslést n-szer elvégezve

$$||\Phi'(u_n)|| \le K^n ||\Phi'(u_0)|| = K^n ||A(u_0) - b|| \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Végül a (iii) valamint a 4.11 Megjegyzés alapján Φ' egyenletesen monoton, innen

$$\begin{aligned} ||\Phi'(u_n)|| \, ||u_n - u^*|| \ge \langle \Phi'(u_n), u_n - u^* \rangle = \\ = \langle \Phi'(u_n) - \Phi'(u^*), u_n - u^* \rangle \ge m||u_n - u^*||^2, \end{aligned}$$

amiből következik, hogy

$$||u_n - u^*|| \le \frac{1}{m} ||\Phi'(u_n)|| \le \frac{1}{m} ||A(u_0) - f|| \left(\frac{M - m}{M + m} \right)^n . \quad \blacksquare$$

5.2. Newton-módszer

Az előző szakasz lineárisan konvergens módszereinél sokkal gyorsabb eljárást ad a nevezetes Newton–Kantorovics-módszer, lépésenként egy-egy lineáris segédegyenlet megoldása árán. A Newton–Kantorovics-módszer közvetlenül általánosítja a klasszikus egyváltozós Newton-módszert, ahol adott $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény esetén az $f(x) = 0$ egyenlet megoldását keressük az alábbi iterációval:

- $x_0 \in \mathbb{R}$ tetszőleges,
- $x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

A fenti iteráció alkalmas általánosítása Banach-térre, ha az $f'(x_n)$-nel való osztás helyett formálisan az $F'(x_n)$ operátorok inverzét alkalmazzuk; a megfelelő feltételek teljesítése esetén ekkor is igaz a másodrendű konvergencia. A tételt Banach-terekre mondjuk ki, és ebből következtetünk Hilbert-térbeli alkalmazására. Legyenek tehát X, Y Banach-terek, valamint $F: X \to Y$ nemlineáris operátor. Keressük az

$$F(u) = 0 \tag{5}$$

egyenlet $u^* \in X$ megoldását. A jobboldal ilyenkor szokásos 0 voltát az egyváltozós analóg helyzet (zérushelykeresés) motiválja, de ez nyilvánvalóan nem jelent megszorítást, hiszen egy $A(u) = f$ típusú feladat esetén csak az $F(u) := A(u) - f$ operátorra kell áttérnünk. Tegyük fel, hogy $F: X \to Y$ Fréchet-deriválható (azaz $\exists A \in B(X, Y)$ folytonos lineáris operátor, hogy $\lim_{||h|| \to 0} \frac{||F(u+h) - F(u) - Ah||}{||h||} = 0$).

A másodrendű konvergencia kulcsa F' Lipschitz-folytonossága, azaz hogy létezik $L > 0$ állandó, hogy

$$||F'(u) - F'(v)|| \leq L||u - v|| \quad (\forall u, v \in X)$$

Ezáltal ugyanis az F operátort az iteráció lépéseiben elsőfokú Taylor-polinomjaival linearizálhatjuk, és a maradék másodrendben kicsi lesz. Itt garantálható az egyértelmű megoldás, mégpedig az alábbi tétel segítségével:

5.3. Tétel. *[9] Legyenek X, Y Banach-terek, $F\colon X \to Y$ Fréchet-deriválható, melyre bármely $u, h \in X$ esetén $F'(u)\colon X \to Y$ bijekció és*

$$||F'(u)h|| \geq m||h||\,, \tag{6}$$

ahol $m > 0$ független u, h-tól. Ekkor bármely $b \in X$ esetén az $F(u) = b$ egyenletnek egyértelműen létezik $u^* \in X$ megoldása.

5.4. Megjegyzés. A fenti egyenlőtlenség

(i) következménye az alábbi becslés:

$$||F'(u)^{-1}|| \leq \frac{1}{m} \quad (\forall u \in X)$$

(ii) elégséges feltétele $X = Y = H$ Hilbert-tér esetén:

$$\langle F'(u)h, h\rangle \geq m||h||^2 \quad (\forall u, h \in H)$$

5.5. Tétel. *Legyenek X, Y Banach-terek, $F\colon X \to Y$ Fréchet-deriválható. Teljesüljön (6), valamint legyen F' Lipschitz-folytonos L konstanssal. Ha u_0 tetszőleges, akkor az*

$$u_{n+1} = u_n - F'(u_n)^{-1}F(u_n) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

iterációra az alábbiak teljesülnek:

(1) $||F(u_{n+1})|| \leq \frac{L}{2m^2}||F(u_n)||^2 \quad (n \in \mathbb{N})$.

(2) Ha u_0 olyan, hogy

$$q := \frac{L}{2m^2}||F(u_0)|| < 1, \tag{7}$$

akkor

$$m||u_n - u^*|| \leq ||F(u_n)|| \leq \frac{L}{2m^2}\, q^{2^n} \to 0.$$

5.6. Megjegyzés. A megadott iterációs lépés az alábbi alakba írható át:

$$\begin{cases} F'(u_n)p_n = -F(u_n), \\ u_{n+1} = u_n + p_n, \end{cases}$$

és ezt is fogjuk használni.

Bizonyítás [az 5.5 tétel bizonyítása]

(1) A 4.6 Newton-Leibniz tétel alapján

$$\begin{aligned} F(u_{n+1}) &= F(u_n) + \int_0^1 F'(u_n + t(u_{n+1} - u_n))(u_{n+1} - u_n)\, dt = \\ &= -F'(u_n)p_n + \int_0^1 F'(u_n + tp_n)p_n\, dt = \\ &= \int_0^1 (F'(u_n + tp_n) - F'(u_n))p_n\, dt \end{aligned}$$

Itt $||F'(u)^{-1}|| \leq \frac{1}{m}$ minden $u \in H$ esetén. Ebből és felhasználva F' Lipschitz-folytonosságát,

$$\begin{aligned} ||F(u_{n+1})|| &\leq \int_0^1 ||F'(u_n + tp_n) - F'(u_n)||\, ||p_n||\, dt \leq \\ &\leq \int_0^1 Lt||p_n||^2\, dt = \frac{L}{2}||p_n||^2 = \frac{L}{2}||F'(u_n)^{-1}F(u_n)||^2 \leq \\ &\leq \frac{L}{2m^2}||F(u_n)||^2 \end{aligned}$$

(2) Alkalmazzuk a fenti becslést n-szer:

$$\begin{aligned} ||F(u_n)|| &\leq \frac{L}{2m^2}||F(u_{n-1})||^2 \leq \frac{L}{2m^2} \cdot \left(\frac{L}{2m^2}\right)^2 ||F(u_{n-2})||^4 = \\ &= \left(\frac{L}{2m^2}\right)^{1+2} ||F(u_{n+2})||^{2^2} \leq \left(\frac{L}{2m^2}\right)^{1+2+2^2} ||F(u_{n-3})||^{2^3} \leq \\ &\leq \ldots \leq \left(\frac{L}{2m^2}\right)^{1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}} ||F(u_0)||^{2^n} = \left(\frac{L}{2m^2}\right)^{2^n-1} ||F(u_0)||^{2^n}, \end{aligned}$$

azaz

$$||F(u_n)|| \leq \frac{2m^2}{L}\left(\frac{L}{2m^2}\, ||F(u_0)||\right)^{2^n} = \frac{2m^2}{L}q^{2^n}.$$

Ha (7) teljesül, akkor $q < 1$ és így $||F(u_n)|| \to 0$. ■

5.7. Megjegyzés. A 5.4 megjegyzésben láttuk, hogy Hilbert-térben a (6) feltétel garantálható pl. az

$$\langle F'(u)h, h\rangle \geq m||h||^2 \quad (\forall u, h \in H)$$

egyenlőtlenséggel. Ekkor a (5) egyenlet megoldhatóságához még feltesszük vagy F' bihemifolytonosságát és önadjungáltságát, vagy F (lokális) Lipschitz-folytonosságát, viszont a Fréchet-deriválhatóság helyett elég a Gâteaux-deriválhatóság. Könnyen látható, hogy az 5.5 tétel bizonyításában is elég a Gâteaux-deriválhatóság.

5.3. Newton-típusú módszerek

A következőkben az ún. Newton-típusú módszereket ismertetjük, a tételek bizonyításai megtalálhatók ([5], 18.3. szakasz) alatt. Az előző szakaszban definiált

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + p_n \text{ , ahol} \\ F'(u_n)p_n = -F(u_n) \end{cases}$$

iteráció a gyakorlatban két okból is módosításra szorul. Egyrészt a lineáris segédegyenletet csak közelítőleg tudjuk megoldnai, másrészt a konvergencia csak lokálisan, azaz elég jó kezdeti közelítés esetén teljesül. A lineáris segédegyenletek közelítő megoldásával felírt iterációt inegzakt Newton-módszernek hívjuk. Itt tehát p_n-et valamilyen előírt hibahatáron belül számítjuk ki, vagyis az

$$F'(u_n)p_n + F(u_n) = 0$$

egyenlőséget a

$$||F'(u_n)p_n + F(u_n)|| \leq \delta_n ||F(u_n)||$$

egyenlőtlenséggel helyettesíthetjük, ahol δ_n előre megadott relatív hibahatár.

5.8. Tétel. *(Inegzakt Newton-módszer) Teljesüljenek a (5.5) Tétel feltételei, és legyen $u^* \in X$ az (5) egyenlet megoldása. Ekkor van olyan $\varepsilon > 0$, hogy ha $||u_0 - u^*|| < \varepsilon$ és tekintjük az alábbi sorozatot:*

$$\begin{cases} u_{n+1} := u_n + p_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \text{ , } \textit{ahol} \\ ||F'(u_n)p_n + F(u_n)|| \leq \delta_n \cdot ||F(u_n)|| \quad \textit{és} \quad 0 < \delta_n \leq \delta_0 < 1 \end{cases}$$

akkor $u_n \to u^*$ a (δ_n) sorozattól függő rendben. Éspedig, ha $\delta_n \leq c||F(u_n)||^\gamma$ valamely $0 < \gamma \leq 1$ és $c > 0$ konstansok mellett, akkor a konvergencia rendje

$1+\gamma$*:*

$$\begin{aligned} &||F(u_{n+1})|| \le c_1 \cdot ||F(u_n)||^{\gamma} \quad (n \in \mathbb{N}) \\ \textit{és} \qquad &||u_n - u^*|| \le \frac{1}{m}||F(u_n)|| \le d_1 \cdot q^{(1+\gamma)^n} \quad (n \in \mathbb{N}) \\ &\textit{(ahol } 0 < q < 1, c_1, d_1 \textit{ alkalmas állandók)} \end{aligned}$$

A következő módosítás az ún. csillapított Newton-módszer, melyben a globális konvergencia érdekében a p_n vektorokat alkalmas $\tau_n \in (0,1]$ állandókkal szorozzuk.

5.9. Tétel. *(Csillapított Newton-módszer) Teljesüljenek a (5.5) Tétel feltételei, és legyen $u^* \in X$ a (5) egyenlet megoldása. Legyen $u_0 \in X$ tetszőleges és tekintsük az alábbi sorozatot:*

$$\begin{cases} u_{n+1} := u_n + \tau_n p_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \text{, } \textit{ahol} \\ F'(u_n)p_n = -F(u_n) \quad \textit{és } \tau_n = \min\left\{1, \frac{m^2}{L||F(u_n)||}\right\}. \end{cases}$$

Ekkor

$$||u_n - u^*|| \le \frac{1}{m}||F(u_n)|| \to 0$$

monoton csökkenően és lokálisan másodrendben, azaz alkalmas $n_0 \in \mathbb{N}$ index után

$$\begin{aligned} &||F(u_{n+1})|| \le c_1 \cdot ||F(u_n)||^2 \quad (n \ge n_0) \\ \textit{és} \qquad &||u_n - u^*|| \le \frac{1}{m}||F(u_n)|| \le d_1 \cdot q^{2^n} \quad (n \in \mathbb{N}) \\ &\textit{(ahol } 0 < q < 1, c_1, d_1 > 0\textit{).} \end{aligned}$$

Az ún. csillapított inegzakt Newton-módszer az előző két módszer kombinálása, amely globális konvergenciát nyújt a segédegyenletek közelítő megoldása mellett is.

5.10. Tétel. *(Csillapított inegzakt Newton-módszer) Teljesüljenek a (5.5) Tétel feltételei, és legyen $u^* \in X$ a (5) egyenlet megoldása. Legyen $u_0 \in X$ tetszőleges és tekintjük az alábbi sorozatot:*

$$\begin{cases} u_{n+1} := u_n + \tau_n p_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \text{, } \textit{ahol} \\ ||F'(u_n)p_n + F(u_n)|| \le \delta_n \cdot ||F(u_n)|| \quad \textit{és} \quad 0 < \delta_n \le \delta_0 < 1\text{, } \textit{valamint} \\ \tau_n = \min\left\{1, \frac{1-\delta_n^2}{1+\delta_n^2} \cdot \frac{m^2}{L||F(u_n)||}\right\}. \end{cases}$$

Ekkor

$$||u_n - u^*|| \le \frac{1}{m}||F(u_n)|| \to 0$$

monoton csökkenően, a (δ_n) *sorozattól függő rendben. Éspedig, ha* $\delta_n \le c||F(u_n)||^\gamma$ *valamely* $0 < \gamma \le 1$ *és* $c > 0$ *konstansok mellett, akkor a konvergencia rendje lokálisan* $1+\gamma$*, azaz alkalmas* $n_0 \in \mathbb{N}$ *index után*

$$||F(u_{n+1})|| \le c_1 \cdot ||F(u_n)||^\gamma \quad (n \ge n_0)$$

$$\textit{és} \qquad ||u_n - u^*|| \le \frac{1}{m}||F(u_n)|| \le d_1 \cdot q^{(1+\gamma)^n} \quad (n \ge n_0)$$

(ahol $0 < q < 1, c_1, d_1 > 0$ *alkalmas állandók)*

6. Maximum-elv és a feladat átfogalmazása

A következőkben [6] alapján belátunk egy tételt, mely segítségével az egyenletben szereplő e^u tagot "lecserélhetjük" egy olyan függvényre, amelyre az fog teljesülni, hogy ami az eredetinek megoldása volt, az ennek is, de ez a függvény rendelkezni fog olyan tulajdonságokkal, melyek a későbbieknek szerepet kapnak.

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány. Tekintsük a Bevezetőben vázolt egyenletet homogén peremfeltétellel!

$$\begin{cases} -\Delta u + e^u = f \\ u_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{8}$$

Most bevezetjük az egyenlet ún. *gyenge* alakját. Szorozzuk az egyenletet egy $v \in$ $\in H_0^1(\Omega)$ ún. tesztfügvénnyel, majd integráljunk mindkét oldalon és alkalmazzuk a Green-formulát, valamint a homogén peremfeltételt!

$$\int_\Omega -\Delta u \; v + e^u \; v = \int_\Omega f v$$

$$\int_\Omega -\Delta u \; v + \int_\Omega e^u v = \int_\Omega f v$$

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega e^u v = \int_\Omega f v \tag{9}$$

Most belátjuk, hogy ha u teljesíti (8)-at, akkor $\max_{\overline{\Omega}} u \leq 0$.

6.1. Tétel. *Legyen a (8) feladat gyenge megoldása $C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$-beli. Ha*

$$f(x) \leq 1 \text{ , m.m. } x \in \Omega$$

akkor

$$u \leq 0 \quad \overline{\Omega}\text{-on.} \tag{10}$$

Bizonyítás Legyen

$$r(u) := \begin{cases} \frac{e^u - 1}{u} & \text{ha } u \neq 0 \\ 1 & \text{ha } u = 0 \end{cases}$$

Ekkor r folytonos, valamint $r(u) > 0 \quad (\forall u \in \mathbb{R})$-re. Vegyük a feladat gyenge alakjának módosítását:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega r(u) \, u \, v = \int_\Omega \hat{f} v \; , \tag{11}$$

ahol $\hat{f}(x) = f(x) - 1 \quad (\forall x \in \Omega)$. Vezessük be a szakaszonként C^1-beli

$$v := \max\{u, 0\}$$

függvényt. Ekkor $v \geq 0$, illetve $v|_{\partial\Omega} = 0$, valamint $u(x) = v(x)$ minden $x \in \overline{\Omega}$-ra, kivéve ha $v(x) = 0$. Erre a v-re (11) jobb oldalára

$$\int_\Omega \hat{f} v \leq 0$$

mivel a feltétel miatt $\hat{f} \leq 0$. A bal oldalra

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega r(u)uv = \int_\Omega |\nabla v|^2 + \int_\Omega r(u)\, v^2 \geq 0.$$

A kettőt összevetve kapjuk, hogy

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 + \int_\Omega r(u)v^2 = 0$$

Innen $|\nabla v| \equiv 0$, és v nemnegativitásából következik, hogy $v \equiv c \geq 0$. Ha $c > 0$, akkor a $v|_{\partial\Omega} = 0$ feltétel miatt ellentmondásra jutunk. Azaz

$$c = 0 \Rightarrow \max\{u, 0\} = 0 \quad (\forall x \in \overline{\Omega}) \quad \Rightarrow u \leq 0 \quad \blacksquare$$

6.2. Megjegyzés. Ha u nem ennyire sima, hanem csak $H_0^1(\Omega)$-beli, akkor *max* helyett $\operatorname{ess\,sup}_{\overline{\Omega}} u \leq 0$ jön ki.

Ezek után vezessük be az alábbi függvényt:

$$q(x) = \begin{cases} e^x & \text{ha } x \leq 0 \\ x + 1 & \text{ha } x > 0. \end{cases} \tag{12}$$

Ekkor $q \in C^1(\mathbb{R})$, valamint $q'(x) \leq 1 \qquad (\forall x \in \mathbb{R})$.

A 6.1 tétel miatt e^u értékét csak $u \leq 0$ esetén kell figyelembe venni, ezért az eredeti egyenlet ekvivalens a következővel:

$$\begin{cases} -\Delta u + q(u) = f \\ u_{|\partial\Omega} = 0\,, \end{cases} \tag{13}$$

ahol a következők teljesülnek:

(i) $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható $\mathbb{R}$-en.

(ii) q monoton növekedő és q' korlátos, mégpedig

$$0 \leq q'(u) \leq 1 \quad (\forall u \in \mathbb{R}) \tag{14}$$

(iii) q és q' Lipschitz-folytonos 1 konstanssal.

7. A gyenge megoldás létezése és egyértelműsége

Az előző fejezetben bevezettük a gyenge megoldását. Felmerülhet a kérdés, hogy erre miért volt szükség? A *gyenge* szó itt mindig azt jelenti, hogy valamilyen, a függvénnyel szemben támasztott feltételt gyengítünk. Például (8)-ban adott jobb oldal esetén $u \in C_0^2(\Omega)$-nak ($f \in C(\Omega)$) vagy $u \in H^2(\Omega)$-nak ($f \in L^2(\Omega)$) kell teljesülnie. Az integrálás annyit segített, hogy a gyenge alakban u-nak már csak az elsőrendű parciális deriváltjai szerepelnek, ezért őt elég $H_0^1(\Omega)$-ben keresni.

Egy tétel kimondásával kezdünk, amely több becslésnél is hasznunkra lesz.

7.1. Tétel (Poincaré-Friedrichs-egyenlőtlenség)**.** *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány. Ekkor*

$$||u||^2_{H_0^1(\Omega)} \geq \lambda_1 ||u||^2_{L^2(\Omega)} \quad (\forall u \in H_0^1(\Omega)), \tag{15}$$

ahol λ_1 a $-\Delta$ operátor legkisebb sajátértéke $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$-n.

A bizonyításhoz lásd ([5], 8.27. Állítás). Egyszerű becslés λ_1-re:

$$\lambda_1 \geq \frac{n\pi^2}{\mathrm{diam}(\Omega)^2}, \tag{16}$$

ahol n a tér dimenziója és $\mathrm{diam}(\Omega)$ egyenlő Ω átmérőjével.

Vegyük észre, hogy a gyenge alakban e^u helyére tetszőleges olyan függvényt írhattunk volna, amelyre az integrál véges, és értelmes kifejezést kapnánk. Ez motiválja azt, hogy ugyanezt $q(u)$-ra is eljátsszuk. Az "új" gyenge alakot hasonlóképpen az első említéshez, a következőképpen adjuk meg:

$$\int_\Omega -\Delta u\, v + q(u)\, v = \int_\Omega f v$$

$$\int_\Omega -\Delta u\, v + \int_\Omega q(u)\, v = \int_\Omega f v$$

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega q(u) v = \int_\Omega f v \tag{17}$$

7.2. Definíció. Egy $u \in H_0^1(\Omega)$ függvényt az (13) egyenletrendszer *gyenge megoldásának* nevezünk, ha kielégíti (17) -et $\forall v \in H_0^1(\Omega)$-ra.

Most a célunk az lenne, hogy találjunk egy olyan $F\colon H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ operátort, melyre

$$\langle F(u), v\rangle = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega q(u) v \quad (\forall v \in H_0^1(\Omega)) \tag{18}$$

7.3. Lemma. *Legyen* $f \in L^2(\Omega)$ *rögzített függvény,* $\Phi\colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ *a következő funkcionál:*

$$\Phi v := \int_\Omega f v \qquad\qquad (v \in H_0^1(\Omega))$$

Ekkor Φ *folytonos lineáris funkcionál.*

Bizonyítás A linearitás nyilvánvaló, a korlátosság pedig a következőkből adódik:

$$|\Phi v| \le \int_\Omega |fv| \le ||f||_{L^2}\, ||v||_{L^2} \le \frac{||f||_{L^2}}{\sqrt{\lambda_1}}\, ||v||_{H_0^1}. \quad \blacksquare$$

A lemmából, valamint a Riesz-féle reprezentációs tételből adódik, hogy egyértelműen létezik $b \in H_0^1(\Omega)$, melyre

$$\int_\Omega f v = \langle b, v\rangle_{H_0^1} \quad (\forall v \in H_0^1(\Omega)).$$

Ha tehát létezik a (18)-ban kívánt F, akkor

$$\langle F(u), v\rangle_{H_0^1} = \langle b, v\rangle_{H_0^1} \qquad (\forall v \in H_0^1(\Omega))$$

ami ekvivalens az

$$F(u) = b$$

operátoregyenlettel $H_0^1(\Omega)$-ban.

7.4. Állítás. *A (18) egyenlet egyértelműen meghatároz egy* $F\colon H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ *operátort.*

Bizonyítás Legyen $u \in H_0^1(\Omega)$ rögzített és legyen $\psi_u\colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ a következő funkcionál:

$$\psi_u(v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + q(u)v.$$

Ekkor ψ_u lineáris, valamint

$$|\psi_u v| \le \int_\Omega |\nabla u \cdot \nabla v| + \int_\Omega |q(u)v| \le ||\nabla u||_{L^2}||\nabla v||_{L^2} +$$
$$+ ||q(u)||_{L^2}||v||_{L^2} \le \left(||\nabla u||_{L^2} + \frac{||q(u)||_{L^2}}{\sqrt{\lambda_1}} \right) ||v||_{H_0^1},$$

tehát ψ_u korlátos is. (A becslésben a Minkowski-, CBS-, valamint a Poincaré-Friedrichs-egyenlőtlenségeket használtuk fel). Itt $||q(u)||_{L^2}$ végessége abból következik, hogy $|q(u)| \le |u| + 1$, és u $L^2(\Omega)$-beli. Vagyis ekkor egyértelműen létezik olyan $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$, melyre

$$\psi_u v = \langle \tilde{u}, v\rangle_{H_0^1} \quad (\forall v \in H_0^1(\Omega)).$$

Jelöljük F-fel azt a leképezést, mely u-hoz $\tilde{u}$-t rendel, ami az eddigiek szerint jóldefiniált. Erre az F-re

$$\langle F(u), v\rangle = \langle \tilde{u}, v\rangle = \psi_u v = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega q(u)v \quad (\forall v \in H_0^1(\Omega)). \quad \blacksquare$$

7.5. Állítás. *F Gâteaux-deriválható, és* $\langle F'(u)h, v\rangle_{H_0^1} = \int_\Omega \nabla h \cdot \nabla v + q'(u)hv$

Bizonyítás Legyen $u \in H_0^1(\Omega)$ tetszőleges. Rögzített $h, v \in H_0^1(\Omega)$ esetén

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\langle F(u+th) - F(u), v\rangle_{H_0^1} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_\Omega \nabla(u+th)\cdot\nabla v + q(u+th)v -$$
$$- \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - q(u)v = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_\Omega t\nabla h \cdot \nabla v + [q(u+th) - q(u)]v =$$
$$= \lim_{t\to 0} \int_\Omega \nabla h \cdot \nabla v + \frac{q(u+th) - q(u)}{t} v$$

Vegyük észre, hogy ha a legutolsó tagnál az integrálás és a limeszképzés felcserélhető, akkor készen vagyunk, így ha $\partial_h F(u)$ létezik, akkor

$$\langle \partial_h F(u), v\rangle_{H_0^1} = \langle D(h,u), v\rangle_{H_0^1} := \int_\Omega \nabla h \cdot \nabla v + q'(u)hv \quad (\forall v, h \in H_0^1(\Omega))$$

Itt adott $u \in H_0^1(\Omega)$ esetén $D(h,u) \in H_0^1(\Omega)$ létezését a Riesz-tétel garantálja, ugyanis az integrál jobb oldala folytonos lineáris fukcionálja v-nek: $|q'(u)| \leq$ ≤ 1 becsléssel együtt az integrál $(||h||_{H_0^1} + \frac{||h||_{L^2}}{\sqrt{\lambda_1}})||v||_{H_0^1}$-gyel becsülhető felülről. Ahhoz, hogy $D(h,u) = \partial_h F(u)$ legyen, az alábbinak kell teljesülnie:

$$\lim_{t\to 0} ||\frac{1}{t}(F(u+th) - F(u)) - D(h,u)||_{H_0^1} = 0$$

Itt a 3.5. Állítás alapján

$$\lim_{t\to 0} ||\frac{1}{t}(F(u+th) - F(u)) - D(h,u)||_{H_0^1} =$$
$$= \lim_{t\to 0} \sup_{||v||_{H_0^1}=1} \langle \frac{1}{t}(F(u+th) - F(u)) - D(h,u), v\rangle =$$

$$= \lim_{t\to 0} \sup_{||v||_{H_0^1}=1} \int_\Omega \frac{1}{t}(\nabla(u+th)\cdot\nabla v + q(u+th)v - \nabla u\cdot\nabla v - q(u)v) -$$

$$-(\nabla h\cdot\nabla v + q'(u)hv) = \lim_{t\to 0} \sup_{||v||_{H_0^1}=1} \int_\Omega (\frac{q(u+th)-q(u)}{t} - q'(u)h)v \leq$$

$$\leq \lim_{t\to 0} \sup_{||v||_{H_0^1}=1} ||\frac{q(u+th)-q(u)}{t} - q'(u)h||_{L^2}\, ||v||_{L^2} \leq$$

$$\leq \lim_{t\to 0} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} ||\frac{q(u+th)-q(u)}{t} - q'(u)h||_{L^2}.$$

Itt az L^2-normában olyan integrál szerepel, ahol az integrandus $q \in C^1$ miatt pontonként tart az azonosan 0 függvényhez m.m., illetve az integrandus a Lagrange-középérték-tétel, valamint a 6. Fejezetben említett (iii) tulajdonság alapján tetszőleges t esetén

$$\left|\frac{q(u+th)-q(u)}{t} - q'(u)h\right|^2 = \left|h\frac{q(u+th)-q(u)}{(u+th)-u} - q'(u)h\right|^2 =$$
$$= |[q'(u+\theta th) - q'(u)]h|^2 \leq (2h)^2$$

-tel becsülhető felül, ahol $\theta \in (0,1)$. Itt $h \in H_0^1(\Omega)$ miatt a jobb oldal L^1-beli. Innen a Lebesgue-tétel (ld. [10], 3.5.5. Tétel) alapján az integrál is 0-hoz tart, azaz $D(h,u) = \partial_h F(u)$. Már csak a $h \mapsto \partial_h F(u)$ leképezés folytonosságát kell belátnunk. Ehhez vegyük észre, hogy

$$||\partial_h F(u)||_{H_0^1} = \sup_{||v||_{H_0^1}=1} |\langle \partial_h F(u), v\rangle_{H_0^1}| = \sup_{||v||_{H_0^1}} |\int_\Omega \nabla h\cdot\nabla v + q'(u)hv| \leq$$

$$\leq \sup_{||v||_{H_0^1}} \int_\Omega |\nabla h\cdot\nabla v + hv| \leq \sup_{||v||_{H_0^1}} ||\nabla h||_{L^2}||\nabla v||_{L^2} + ||h||_{L^2}||v||_{L^2} \leq$$

$$\leq \sup_{||v||_{H_0^1}} \left(||v||_{H_0^1} + \frac{||v||_{H_0^1}}{\lambda_1}\right)||h||_{H_0^1} = \left(1+\frac{1}{\lambda_1}\right)||h||_{H_0^1}. \quad \blacksquare$$

7.6. Állítás. *Bármely $f \in L^2(\Omega)$ esetén a (13) egyenletnek egyértelműen létezik $u^* \in H_0^1(\Omega)$ gyenge megoldása.*

Bizonyítás A 4.18 Tételt szeretnénk használni. Az előbb láttuk, hogy értelmes a fenti $F\colon H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ általánosított operátor, valamint hogy F Gâteaux-deriválható. Hasonlóan látható be az is, hogy $F'(u)$ bihemifolytonos. A Gâteaux-deriváltból azonnal leolvasható, hogy $F'(u)$ önadjungált $\forall u \in H_0^1(\Omega)$-ra (ne felejtsük el ugyanis, hogy valósban az önadjungáltság szimmetrikusságra módosul). A harmadik feltételhez:

$$\langle F'(u)h, h\rangle_{H_0^1} = \int_\Omega |\nabla h|^2 + q'(u)h^2 \geq \int_\Omega |\nabla h|^2 = ||h||^2_{H_0^1} \quad (\forall u, h \in H_0^1(\Omega)). \quad \blacksquare$$

7.7. Következmény. $f \leq 1$ esetén a (8) egyenletnek is egyértelműen létezik $H_0^1(\Omega)$-beli gyenge megoldása.

8. Numerikus megoldás

Egy végtelen dimenziós térben felírt operátoregyenlet közelítő megoldásának természetes alapgondolata, hogy az alapteret véges dimenziós altereivel helyettesítjük, és az eredeti egyenletet megfelelő értelemben vetítjük erre a térre. A kapott véges dimenziós feladat ugyanis már a numerikus analízis módszereivel megoldható, az alterek megfelelő sorozatának választásával pedig a közelítő megoldások az eredetihez tartanak. A Ritz–Galjorkin-módszer ezt az elvet valósítja meg.

8.1. A Ritz-Galjorkin-módszer általános felépítése

Legyen H valós Hilbert-tér, $F : H \to H$ adott nemlineáris operátor, melyre az alábbiak teljesülnek:

8.1.1. Feltételek.

Léteznek $0 < m \leq M$ *állandók, hogy*

(i) F *egyenletesen monoton:*

$$\langle F(u) - F(v), u - v\rangle \geq m||u - v||^2 \quad (\forall u, v \in H);$$

(ii) F *Lipschitz-folytonos:*

$$||F(u) - F(v)|| \leq M||u - v|| \quad (\forall u, v \in H). \tag{19}$$

Teljesüljenek az 5.2 tétel feltételei. Tekintsük az

$$F(u) = b$$

egyenletet, melynek a 4.18 Tétel miatt egyértelműen létezik $u^* \in H$ megoldása. Irjuk fel az egyenlettel ekvivalens tesztfüggvényes alakot:

$$\langle F(u^*), v\rangle = \langle b, v\rangle \quad (\forall v \in H). \tag{20}$$

Minden $n \in \mathbb{N}$-re jelölje $H_n := span\{\varphi_1^{(n)}, \varphi_2^{(n)}, \ldots, \varphi_n^{(n)}\} \in H$ alterek ($n \in \mathbb{N}$), ahol minden n-re a $\varphi_1^{(n)}, \varphi_2^{(n)}, \ldots, \varphi_n^{(n)}$ elemek lineárisan függetlenek és bármely $u \in H$ esetén

$$dist(u, H_n) = min\{||u - v_n|| : v_n \in H_n\} \to 0 \quad \text{ha } n \to \infty. \tag{21}$$

Ha ez nem okoz félreértést, akkor az $\varphi_k^{(n)}$ helyett φ_k-t használunk. Az eredeti egyenlet megoldása abból áll, hogy a véges dimenziós altérben megoldjuk az

$$\langle F(u_n), v\rangle = \langle b, v\rangle \quad (\forall v \in H_n) \tag{22}$$

egyenletet, és azt szeretnénk, hogy $u_n \to u^*$ teljesüljön.

Az u_n közelítő megoldást $\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i \in H_n$ alakban keressük. Ezt az alakot, valamint a $v := \varphi_k$ függvényeket helyettesítsük be (22)-be:

$$\langle F(\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i), \varphi_k\rangle = \langle b, \varphi_k\rangle \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Vezessük be az

$$\mathcal{F}_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \mathcal{F}_k(c) := \langle F(\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i), \varphi_k\rangle$$

valós függvényeket és legyen $\beta_k := \langle b, \varphi_k\rangle$ Az ezekből összerakott $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvény, valamint a $\beta \in \mathbb{R}^n$ vektor segítségével u_n együtthatóit az

$$\mathcal{F}(c) = \beta$$

nemlineáris egyenlet megoldásával kapjuk. A (20) és a (22) egyenletek alapján világos, hogy

$$\langle F(u^*) - F(u_n), v\rangle = 0 \quad (\forall v \in H_n), \tag{23}$$

azaz $F(u^*) - F(u_n) \perp H_n$ (ezt hívjuk *Galjorkin-ortogonalitásnak*.) A módszer konvergenciájához

8.1. Tétel (nemlineáris Céa-lemma)**.** *Bármely $n \in \mathbb{N}^+$ esetén*

$$||u^* - u_n|| \le \frac{M}{m} \min\{||u^* - v_n|| : v_n \in H_n\}.$$

Bizonyítás . A (19) és a (23) összefüggésekből $\forall v_n \in H_n$ esetén

$$\begin{aligned} m||u^* - u_n||^2 &\le \langle F(u^*) - F(u_n), u^* - u_n\rangle = \langle F(u^*) - F(u_n), u^* - v_n\rangle \le \\ &\le ||F(u^*) - F(u_n)||\, ||u^* - v_n|| \le M||u^* - u_n||\, ||u^* - v_n||, \end{aligned}$$

így $||u^* - u_n|| \le \frac{M}{m}||u^* - v_n||$. ■

8.2. Következmény. Ha teljesül a (21) feltétel, akkor $||u^* - u_n|| \to 0$.

Mielőtt tovább haladnánk, lássuk be, hogy az e szakasz elején említett tulajdonságok teljesülnek a 7.4 Állításban meghatározott operátorra.

8.3. Állítás. *A 7.4 Állításban meghatározott operátor egyenletesen monoton, valamint Lipschitz-folytonos.*

Bizonyítás Az egyenletes monotonitáshoz $\forall u, v \in H_0^1(\Omega)$-ra

$$\begin{aligned}
&\langle F(u) - F(v), u - v\rangle = \langle F(u), u\rangle - \langle F(v), u\rangle - \langle F(u), v\rangle + \langle F(v), v\rangle = \\
&= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u + q(u)u - \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u + q(v)u - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + q(u)v + \\
&+ \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla v + q(v)v = \int_\Omega |\nabla(u - v)|^2 + (q(u) - q(v))(u - v) \geq \\
&\geq \int_\Omega |\nabla(u - v)|^2 = ||u - v||^2_{H_0^1},
\end{aligned}$$

felhasználva, hogy q monoton növő függvény. A Lipschitz-folytonossághoz

$$\begin{aligned}
&||F(u) - F(v)|| = \sup_{||z||_{H_0^1}=1} \langle F(u) - F(v), z\rangle = \sup_{||z||_{H_0^1}=1} \int_\Omega \nabla(u - v) \cdot \nabla z + (q(u) - q(v))z \leq \\
&\leq \sup_{||z||_{H_0^1}=1} \int_\Omega \nabla(u - v) \cdot \nabla z + |(u - v)z| \leq \sup_{||z||_{H_0^1}=1} \int_\Omega |\nabla(u - v) \cdot \nabla z + (u - v)z| \leq \\
&\leq ||\nabla(u - v)||_{L^2} ||\nabla z||_{L^2} + ||u - v||_{L^2} ||z||_{L^2} \leq ||u - v||_{H_0^1} + \frac{1}{\lambda_1} ||u - v||_{H_0^1},
\end{aligned}$$

azaz $m = 1$ és $M = 1 + \frac{1}{\lambda_1}$ megfelelőek, ahol λ_1 a Laplace-operátor legkisebb sajátértéke Ω-n homogén peremfeltétellel. ■

8.2. Végeselem-módszer

A következő szakasz [4] alapján készült. A Ritz-Galjorkin-féle projekciós módszer használata ma leginkább az ún. végeselem-módszerben valósul meg, amelynek széleskörű használata miatt irodalma rendkívül gazdag (ld pl. [1], [7]). A módszer lényege a következő: a tartományt felosztjuk véges sok kis egyszerűbb résztartományra, ún. "elemekre" (innen a név), amelyek 2D-ben majdnem mindig háromszögek, illetve téglalapok, 3 dimenzióban pedig tetraéderek, valamint téglatestek. A kívánt véges dimenziós alterek olyan függvényekből állnak, amelyek leszűkítései egy-egy ilyen elemre valamilyen megadott fokú polinomok, melyek az egész tartományon folytonosak, vagy bizonyos esetben folytonosan differenciálhatóak. Az alterek jelölése $n \in \mathbb{N}^+$ helyett a h, ún. "rácsparaméter"lesz, ez jelöli az elemek "átmérőjét", illetve a rács finomságát, viszont a közelítő megoldás jelölésére továbbra is az u_n jelölést használjuk. Ezek után a már látott H_n alterek helyett V_h alterekkel dolgozunk, ahol

$$V_h = \{u \in C^k(\overline{\Omega}) \colon u|_{T_i} \in P_m \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n\},$$

ahol $k, m \geq 0$ és $n \geq 1$ egészek, P_m jelöli az m-edfokú polinomok halmazát, $T_1, \ldots, T_n$ pedig az elemeket. A legegyszerűbb, de rendkívül elterjedt eset, amikor az elemek háromszögek/teraéderek, $k = 0$, $m = 1$, azaz szakaszonként lineáris polinomok alkotják V_h-t. Mivel az ilyen közelítő megoldások nem differenciálhatóak az egész tartományon , ezért a gyenge megoldásból kiindulva konstruáljuk meg őket.

8.3. Elméleti algoritmusok

Mint a dolgozat elején említettem, eme dolgozat célja a gradiens- és a Newton-módszer konvergenciájának összehasonlítása. Nézzük most meg, hogy építhető be a számítógépes alkalmazásokba az elméleti megvalósítás.

8.3.1. Gradiens-módszer

Röviden emlékeztetünk a gradiens-módszer algoritmusára és konvergenciabecslésére.
Legyen H valós Hilbert-tér, $F : H \to H$ adott operátor. Tegyük fel, hogy

(i) F Gâteaux-deriválható és F' bihemifolytonos,

(ii) minden $u \in H$ esetén $F'(u) \in B(H)$ önadjungált,

(iii) léteznek olyan $M \geq m > 0$ állandók úgy, hogy

$$m||h||^2 \leq \langle F'(u)h, h\rangle \leq M||h||^2 \quad (\forall u, h \in H)\,,$$

valamint legyen $b \in H$. Ekkor az $F(u) = b$ operátoregyenlet $u^* \in H$ megoldásának megtalálására az alábbi sorozatot definiáltuk:

(i) Legyen $u_0 \in H$ tetszőleges

(ii) ha $n \in \mathbb{N}$-re u_n ismert, akkor

$$u_{n+1} := u_n - \frac{2}{M+m}(F(u_n) - b)$$

Ekkor az u_n sorozat konvergenciájára az alábbi becslés írható fel:

$$||u_n - u^*|| \leq \frac{1}{m}||F(u_0) - b|| \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^n$$

Ezzel viszont egy baj van: se F-et, se b-t nem ismerjük expliciten, ugyanis a Riesz-féle reprezentációs tétel csak egzisztenciára ad feltételt, képletet nem ad. Ezért a következő trükköt alkalmazzuk (most már a mi feladatunkra):
Legyen

$$z_n := F(u_n) - b,$$

vagy a vele ekvivalens alakban

$$\langle z_n, v\rangle_{H_0^1} = \langle F(u_n) - b, v\rangle_{H_0^1},$$

itt viszont a jobb oldalt már ismerjük. Ezáltal a fenti algoritmus a következőként módusul:

(i) Legyen $u_0 \in H$ tetszőleges

(ii) ha $n \in \mathbb{N}$-re u_n ismert, akkor $z_n \in H_0^1(\Omega)$ megoldása az alábbi egyenletnek:

$$\int_\Omega \nabla z_n \cdot \nabla v = \int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla v + (q(u_n) - f)v \quad (\forall v \in H_0^1(\Omega))$$

(iii) $u_{n+1} := u_n - \frac{2}{M+m} z_n$

Ezen felül még egy egyszerűsítést is tehetünk annak érdekében, hogy ne kelljen az u_n gradiensét használni, nevezetesen legyen $w_n := z_n - u_n$, ekkor az iteráció a következő:

$$u_{n+1} = \frac{M+m-2}{M+m} u_n - \frac{2}{M+m} w_n, \text{ ahol}$$
$$\int_\Omega \nabla w_n \cdot \nabla v = \int_\Omega (q(u_n) - f)v \quad (\forall v \in H_0^1(\Omega))$$

8.3.2. Newton-módszer

Hasonlóan az előző szakaszhoz, az F operátor explicit ismerete nélkül a Newton-módszernél is a gyenge alakot kell majd használnunk. A konstrukció az alábbi:

(i) $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tetszőleges; ha $n \in \mathbb{N}$-re u_n ismert, akkor

(ii) $p_n \in H_0^1(\Omega)$ megoldása a következő egyenletnek:
$\langle F'(u_n)p_n, v\rangle_{H_0^1} = -\langle (F(u_n) - b), v\rangle_{H_0^1} \quad (\forall v \in H_0^1(\Omega))$, vagyis

(iii) $\int_\Omega \nabla p_n \cdot \nabla v + q'(u_n)p_n v = -\int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla v + (q(u_n) - f)v \quad (\forall v \in H_0^1(\Omega))$

(iv) $u_{n+1} := u_n + p_n$

Itt is hasonló egyszerűsítéseket hajthatunk végre, mint a gradiens-módszernél. Ha a ∇v-t tartalmazó integrálokat egy oldalra visszük és az alacsonyabbrendű tagot kiegészítjük, akkor a következőt írhatjuk:

$$\int_\Omega \nabla u_{n+1} \cdot \nabla v + q'(u_n) u_{n+1} v = \int_\Omega (q'(u_n) u_n + f - q(u_n)) v \quad (\forall v \in H_0^1(\Omega),$$

vagyis az egyenletrendszert megoldva egyből u_{n+1} együtthatóit kapjuk.

8.4. Rácsfüggetlen konvergencia

A fejezet a következők alapján fog haladni. Először tetszőleges H Hilbert-térben megfogalmazott végeselemes diszkretizációs feladatra belátjuk mind a gradiens-módszer, mind a Newton-iteráció rácsfüggetlen konvergenciáját, majd ezekből következtetünk a kitűzött feladatra felírt közelítő módszerek rácsfüggetlen konvergenciájára.

Legyen H valós Hilbert-tér, $F : H \to H$ adott operátor. Tegyük fel, hogy teljesülnek az alábbiak:

8.4.1. Feltételek.

(i) F Gâteaux-deriválható és F' bihemifolytonos,

(ii) minden $u \in H$ esetén $F'(u) \in B(H)$ önadjungált,

(iii) léteznek olyan $0 < m \leq M$ állandók úgy, hogy

$$m||h||^2 \leq \langle F'(u)h, h\rangle \leq M||h||^2 \quad (\forall u, h \in H)\,,$$

(iv) Létezik $L > 0$ állandó, hogy

$$||F'(u) - F'(v)|| \leq L||u - v|| \quad (\forall u, v \in H)$$

Tekintsük az $F(u) = b$ egyenletet, aminek a 4.18 Tétel alapján egyértelműen létezik $u^* \in H$ megoldása.

A feladatot két lépésben oldjuk meg. Először diszkretizáljuk a feladatot, vagyis véges dimenziós feladattal megfelelően közelítjük, ami egy nemlineáris algebrai egyenletrendszerre vezet, majd ezt az egyenletrendszert iterációs módszerekkel megoldjuk. A diszkretizációra a fent említett Ritz-Galjorkin-módszert alkalmazzuk.

Legyen rögzített h-ra

$$V_h = span\{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\} \subset H$$

adott altér, ahol a φ_i függvények lineárisan függetlenek. A 8.1 Szakasz alapján az $u_h \in V_h$ megoldást $u_h = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i$ alakban keressük úgy, hogy teljesüljön az

$$\langle F(u_h), v\rangle = \langle b, v\rangle \quad (\forall v \in V_h) \tag{24}$$

vetületi egyenlet. Ezeket a c_i együtthatókat az $\mathbf{F}_h(c) = \mathbf{b}_h$ nemlineáris egyenletrendszerből kapjuk, ahol

$$\mathbf{F}_h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \mathbf{F}_h(c) := \left\{\langle F(\sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i), \varphi_k\rangle\right\}_{k=1}^{N}$$

Láttuk, hogy ha teljesül a (21) feltétel, akkor $||u_h - u^*|| \to 0$.

Legyen

$$F_h : V_h \to V_h, \quad F_h := P_h \circ F|_{V_h},$$

ahol $P : F \to V_h$ a V_h altérre merőleges vetítés operátora.

8.4. Lemma. *F_h teljesíti a 8.4.1 Feltételeket*

Bizonyítás Mivel bármely $u \in V_h$ esetén $F(u) - F_h(u) = F(u) - P_h F(u) \perp V_h$, így

$$\langle F_h(u), v\rangle = \langle F(u), v\rangle \quad (\forall u, v \in V_h)$$

Könnyen látható, hogy az (i) feltétel teljesül F_h-ra, hiszen P_h folytonos és lineáris, így $F_h'(u) = P_h F'(u)|_{V_h}$. Ebből

$$\langle F_h'(u)z, v\rangle = \langle F'(u)z, v\rangle \quad (\forall u, v, z \in V_h),$$

ebből nyilvánvalóan következik F_h-ra az (ii) és az (iii) feltételek ugyanazokkal az m és M korlátokkal, mint F-re. Hasonlóan,

$$||F_h'(u) - F_h'(v)|| = \sup_{\substack{z \in V_h \\ ||z||=1}} |\langle (F_h'(u) - F_h'(v))z, z\rangle| = \sup_{\substack{z \in V_h \\ ||z||=1}} |\langle (F'(u) - F'(v))z, z\rangle| \leq$$

$$\leq \sup_{\substack{z \in H \\ ||z||=1}} |\langle (F'(u) - F'(v))z, z\rangle| = ||F'(u) - F'(v)|| \leq L||u - v|| \quad (\forall u, v \in V_h). \quad \blacksquare$$

8.4.1. Gradiens-módszer általános esetben

Legyen $u_0 \in H$ adott, ennek V_h-ra vett vetülete u_0^h. Írjuk fel az ezzel a kezdővektorral a (24) Feladatra a gradiens-módszert:

$$u_{n+1} := u_n - \frac{2}{M+m}\left(F_h(u_n) - b_h\right) \tag{25}$$

8.5. Tétel. *Ha teljesülnek a 8.4.1 Feltételek közül (i) - (iii), akkor tetszőleges kezdőértékre a (25) iteráció a*

$$||u_n - u_h|| \le \frac{1}{m}||F_h(u_0^h) - b_h||\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^n$$

hibabecslés szerint konvergál u^*-hoz.

Bizonyítás A bizonyításhoz elég igazolni, hogy F_h teljesíti az 5.2 Tétel feltételeit. Azonban a 8.4 Lemmában éppen ezt láttuk be. ■

8.4.2. Newton-módszer általános esetben

Legyen $u_0 \in H$ adott, ennek V_h-ra vett vetülete u_0^h. Írjuk fel ezzel a kezdővektorral a (24) feladatra a Newton-iterációt:

$$\begin{cases} u_{n+1} := u_n + p_n, \text{ ahol} \\ F_h'(u_n)p_n = -(F_h(u_n) - b_h). \end{cases} \tag{26}$$

8.6. Tétel. *Ha teljesülnek a 8.4.1 feltételek, akkor*

(1) $||F_h(u_{n+1}) - b_h|| \le \frac{L}{2m^2}||F_h(u_n) - b_h||^2 \quad (n \in \mathbb{N})$.

(2) Ha u_0 olyan, hogy:

$$q := \frac{L}{2m^2}\left(||F(0) - b|| + M||u_0||\right) < 1, \tag{27}$$

akkor

$$m||u_n - u_h|| \le ||F_h(u_n) - b_h|| \le \frac{2m^2}{L}q^{2^n} \to 0. \tag{28}$$

Mindkét becslés állandói V_h-tól függetlenek.

Bizonyítás A fenti megfontolásban láttuk, hogy a 8.4.1 feltételek öröklődnek a (26) feladatra is, így a 5.7 megjegyzés alapján teljesülnek a 5.3 tétel feltételei. Így érvényes a 5.3 tétel az $A_h(u) := F_h(u) - b_h$ operátorból származtatott (26) sorozatra, h-tól függetlenül ugyanazon m és L állandókkal. A 5.3 tétel (1) pontja erre az esetre egybeesik a fentivel, így utóbbit beláttuk.

A 5.5 tétel (2) pontja most azt állítja, hogy ha u_0^h olyan, hogy

$$q_h := \frac{L}{2m^2} ||F_h(u_0^h) - b_h|| < 1, \tag{29}$$

akkor

$$m||u_n - u_h|| \leq ||F_h(u_n) - b_h|| \leq \frac{2m^2}{L} q_h^{2^n} \to 0.$$

Most

$$||F_h(u_0^h) - b_h|| \leq ||F_h(0) - b_h|| + ||F_h(u_0^h) - F_h(0)||.$$

Itt

$$||F_h(0) - b_h|| = \sup_{\substack{z \in V_h \\ ||z||=1}} |\langle F_h(0) - b_h, z\rangle| = \sup_{\substack{z \in V_h \\ ||z||=1}} |\langle F(0) - b, z\rangle| \leq$$
$$\leq \sup_{\substack{z \in H \\ ||z||=1}} |\langle F(0) - b, z\rangle| = ||F(0) - b||,$$

valamint hasonló módon, és az $||F'(u)|| \leq M$ becslésből

$$||F_h(u_0^h) - F_h(0)|| \leq ||F(u_0^h) - F(0)|| \leq M||u_0^h|| \leq M||u_0||.$$

Ezekből a becslésekből

$$||F_h(u_0^h) - b_h|| \leq ||F(0) - b|| + M||u_0||,$$

azaz $q_h \leq q$. Ezt (29)-vel összehasonlítva kapjuk, hogy ha $q < 1$, azaz teljesül (27), akkor q_h is kisebb 1-nél, ezért igaz (28) is. Tehát (2)-t is beláttuk. ■

8.4.3. Alkalmazás a gyenge alakra

Nézzük, hogy tudjuk a fentieket felhasználni a vizsgált egyenlethez. Emlékeztetőül a vizsgált probléma:

$$\begin{cases} -\Delta u + q(u) = f \\ u_{|\partial\Omega} = 0\ , \end{cases} \tag{30}$$

ahol

$$q(x) = \begin{cases} e^x & \text{ha } x \le 0 \\ x+1 & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

A tulajdonságok, amelyekre szükségünk lesz:

(i) $q \in C^1(\mathbb{R})$, valamint q monoton növő és q' korlátos, speciálisan

$$0 \le q'(x) \le 1 \quad (\forall x \in \mathbb{R});$$

(ii) q és q' Lipschitz-folytonos $L_q = 1$ együtthatóval;

(iii) $f \in L^2(\Omega)$ és $f \le 1$.

A 7.6 Állításban beláttuk, hogy a (30) feladatnak egyértelműen létezik $u^* \in H_0^1(\Omega)$ gyenge megoldása, vagyis az előző szakasz eredményeit felhasználva szeretnénk végeselemes diszkretizációt alkalmazni, és a kapott nemlineáris algerai egyenletrendszert Newton-módszerrel megoldani, valamint ennek a rácsparamétertől független kvadratikus konvergenciáját bizonyítani.

Legyen $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ megfelelő véges dimenziós altér $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ bázissal. Az $u_h \in$ $\in V_h$ közelítő megoldást úgy keressük, hogy teljesüljön az

$$\langle F(u_h), v\rangle_{H_0^1} = \langle b, v\rangle_{H_0^1} = \int_\Omega f v \quad (\forall v \in V_h)$$

vetületi egyenlet, azaz

$$\int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla v + \int_\Omega q(u_h) v = \int_\Omega f v \quad (\forall v \in V_h).$$

Itt F_h és F_h' definícióját az előző szakasz alapján úgy kapjuk, hogy rendre F és F' definíciójában $H_0^1(\Omega)$-t kicseréljük V_h-ra. Vagyis $F_h\colon V_h \to V_h$, illetve $F_h'\colon V_h \to V_h$ a következők:

$$\langle F_h(u), v\rangle = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega q(u) v \quad (\forall v \in V_h), \tag{31}$$

valamint

$$\langle F_h'(u) z, v\rangle_{H_0^1} = \int_\Omega \nabla z \cdot \nabla v + \int_\Omega q'(u) z v \quad (\forall z, v \in V_h). \tag{32}$$

8.7. Lemma. *Legyen*

$$L(\Omega) := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\mathrm{diam}(\Omega)}{\pi}\right)^2,$$

ahol $\mathrm{diam}(\Omega)$ *a tartomány átmérője. Ekkor a (31)-ben definiált* F_h *operátor teljesíti a (8.4.1) Feltételeket* $m = 1$ *és* $M = 1 + \frac{1}{\lambda_1}$*-gyel, a Lipschitz-folytonossághoz* $n = 2$ *esetén* $L(\Omega)$ *választható.*

Bizonyítás A 7.5 Állításban és a 7.6 Tételben beláttuk F Gâteaux-deriválhatóságát és bihemifolytonosságát, valamint $F'(u)$ önadjungáltságát és 8.4.1 (iii) alsó becslését. A felsőhöz:

$$\langle F'(u)h, h\rangle \leq \int_\Omega \left(|\nabla h|^2 + h^2\right) = ||h||^2_{H^1_0} + ||h||^2_{L^2} \leq \left(1 + \frac{1}{\lambda_1}\right)||h||^2_{H^1_0} \ (\forall h \in H^1_0(\Omega)),$$

ahol a Poincaré-Friedrichs-egyenlőtlenséget használtuk. Lássuk be most, hogy F' Lipschitz-folytonos. Itt

$$|\langle(F'(u) - F'(v))z, z\rangle| = |\int_\Omega (q'(u) - q'(v))z^2| \leq \int_\Omega |u - v|z^2 \leq ||u - v||_{L^2}\, ||z||^2_{L^4},$$

ahol az általánosított Hölder-egyenlőtlenséget használtuk az $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$ felbontás mellett (ld. [5], 1.23 Mj). Itt z tényleg $L^4(\Omega)$-beli, a Szoboljev-féle beágyazási tételnek köszönhetően: Hogyha $\Omega \in \mathbb{R}^d$ $(d \leq 4)$, akkor

$$H^1_0(\Omega) \subset L^4(\Omega), \text{ és } \exists K_4 > 0 \text{ állandó, hogy } ||v||_{L^4} \leq K_4\, ||v||_{H^1_0} \quad (\forall v \in H^1_0(\Omega))$$

(bővebben ld. [3], 11.Fejezet, A2 Szakasz). Ezt, és a Poincaré-Friedrichs-egyenlőséget felhasználva

$$|\langle(F'(u) - F'(v))z, z\rangle| \leq \frac{K_4^2}{\sqrt{\lambda_1}}||u - v||_{H^1_0}||z||^2_{H^1_0},$$

innen

$$||F'(u) - F'(v)||_{H^1_0} = \sup_{||z||_{H^1_0}=1} |\langle(F'(u) - F'(v))z, z\rangle| \leq \frac{K_4^2}{\sqrt{\lambda_1}}||u - v||_{H^1_0},$$

azaz F' Lipschitz-folytonos $L := \frac{K_4^2}{\sqrt{\lambda_1}}$ konstanssal. Erre a K_4 konstansra megfelelő $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ esetén él a következő becslés:

$$K_4^2 \leq \sqrt{\frac{2}{\lambda_1}},$$

ebből, valamint a (16) becslésből $n = 2$-t helyettesítve:

$$L \leq \frac{\sqrt{2}}{\lambda_1} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\mathrm{diam}(\Omega)}{\pi} \right)^2 .$$

A 8.6 Tétel alapján teljesül (35) és (36) is. ■

Lássuk először a gradiens-módszert a fenti feladatra!

Legyen $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tetszőleges, a vetülete V_h-ra pedig u_0^h. Írjuk fel az ezzel a kezdővektorral adott gradiens-módszert a fenti feladatra:

$$\begin{cases} u_{n+1} & = \frac{1}{2\lambda_1+1} u_n - \frac{2\lambda_1}{2\lambda_1+1} w_n, \text{ ahol} \\ \int_\Omega \nabla w_n \cdot \nabla v & = \int_\Omega (q(u_n) - f)v \quad (\forall v \in V_h) \end{cases} \tag{33}$$

8.8. Tétel. *A (33)-ban meghatározott iterációra a következő becslés teljesül:*

$$||u_n - u_h||_{H_0^1} \leq \left(||F(0) - b||_{H_0^1} + \left(1 + \frac{1}{\lambda_1} \right) ||u_0||_{H_0^1} \right) \left(\frac{1}{2\lambda_1 + 1} \right)^n .$$

A becslés állandói V_h-tól függetlenek.

Bizonyítás A 8.5 Tétel bizonyítása megismételhető H helyett V_h-val, ugyanis a fennt definiált F_h operátor örökli az eredeti F operátor tulajdonságait a rácsparamétertől függetlenül, ahogy azt a 8.7 Lemmában beláttuk. A 8.5 Tétel az

$$||u_n - u_h|| \leq \frac{1}{m} ||F_h(u_0^h) - b_h||_{H_0^1} \left(\frac{M - m}{M + m} \right)^n$$

becslést adta, ahol a $||F_h(u_0^h) - b_h||_{H_0^1}$ tagot a (8.6) Tétel második részében szereplő

$$||F_h(u_0^h) - b_h||_{H_0^1} \leq \left(||F(0) - b||_{H_0^1} + M||u_0||_{H_0^1} \right)$$

egyenlőtlenséggel, valamint a 8.7 Lemma eredményeit felhasználva kapjuk a tételbeli állítást. ■

Most a feladatra megfogalmazott Newton-iterációra bizonyítjuk a rácsfüggetlen konvergenciát.

Legyen $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tetszőleges, a vetülete V_h-ra pedig u_0^h. Írjuk fel az ezzel a kezdővektorral adott Newton-iterációt a fenti feladatra:

$$\begin{cases} u_{n+1} := u_n + p_n, \text{ ahol} \\ \langle F_h'(u_n) p_n, v \rangle_{H_0^1} = -\langle (F_h(u_n) - b_h), v \rangle_{H_0^1} \quad (\forall v \in V_h). \end{cases} \tag{34}$$

Itt a (34)-ben lévő lineáris egyenlet az alábbi alakot ölti:

$$\int_\Omega \nabla u_{n+1} \cdot \nabla v + q'(u_n) u_{n+1} v = \int_\Omega (q'(u_n) u_n + f - q(u_n)) v \quad (\forall v \in V_h).$$

8.9. Tétel. *2 dimenzióban a konvergenciára a következő becslés adható:*

(1) $||F_h(u_{n+1}) - b_h||_{H_0^1} \leq \frac{L(\Omega)}{2}||F_h(u_n) - b_h||_{H_0^1}^2 \quad (n \in \mathbb{N}).$

(2) Ha u_0 olyan, hogy:

$$q := \frac{L(\Omega)}{2}\left(||F(0) - b||_{H_0^1} + \left(1 + \frac{1}{\lambda_1}\right)||u_0||_{H_0^1}\right) < 1, \tag{35}$$

akkor

$$||u_n - u_h||_{H_0^1} \leq ||F_h(u_n) - b_h||_{H_0^1} \leq \frac{2}{L(\Omega)}q^{2^n} \to 0. \tag{36}$$

Mindkét becslés állandói V_h-tól függetlenek.

Bizonyítás A 8.7 Lemma alapján teljesülnek a 8.6 Tétel feltételei, amelyből következik (35) és (36) is. ■

8.10. Következmény. Nagy a kísértés, hogy u_0-t az azonosan 0 függvénynek válasszuk, mert ez kiveszi a becslésekből a $||u_0||_{H_0^1}$-s tagokat, amelyek λ_1-es szorzókat tartalmaznak, amelyeket amúgy is csak becsülni tudunk, pontos értékét nem ismerjük. Ekkor már csak az $||F(0)-b||_{H_0^1}$ értéket kell valahogy úgy becsülnünk felülről, hogy az számolható legyen. Ehhez vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned}
||F(0) - b||_{H_0^1} &= \sup_{||v||_{H_0^1}=1} |\langle F(0) - b, v\rangle_{H_0^1}| = \sup_{||v||_{H_0^1}=1} |\int_\Omega v - \int_\Omega fv| = \\
&= \sup_{||v||_{H_0^1}=1} |\int_\Omega (1-f)v| \leq \sup_{||v||_{H_0^1}=1} \int_\Omega |(1-f)v| \leq \sup_{||v||_{H_0^1}=1} ||1-f||_{L^2}||v||_{L^2} \leq \\
&\leq \sup_{||v||_{H_0^1}=1} \left(\frac{||1-f||_{L^2}}{\sqrt{\lambda_1}}\right)||v||_{H_0^1} = \frac{||1-f||_{L^2}}{\sqrt{\lambda_1}} \leq \frac{||1-f||_{L^2}\,\mathrm{diam}(\Omega)}{\pi\sqrt{n}},
\end{aligned}$$

felhasználva a (16) becslést, a Poincaré-Friedrichs-egyenlőtlenséget, valamint azt, hogy $f \in L^2$.

9. Számítógépes program és futtatások

A fent tárgyalt iterációkat egy-egy programban implementáltam, melyeket különböző f jobb oldallal és u_0 kezdővektorral futtattam. Tartománynak az $\Omega = [0,1]^2$ egységnégyzetet választottam, ebből fakadóan a fenti becslésekben $\operatorname{diam}\Omega = \sqrt{2}$, valamint $\lambda_1 = \pi$ vehető. A végeselemes altér konstrukciójához a négyzet oldalán ekvidisztáns felosztást vettem, majd a meghatározott négyzetrács négyzeteit ugyanolyan irányú átlókkal egyenlő szárú háromszögekre osztottam. Az altér a folytonos,az ezekre a háromszögekre megszorítva lineáris függvények lesznek. A lenti táblázatokban találhatók a futási idők. A program ábrázolja a kapott megoldást, valamint a függvény gradiensmezejét is.

***1. Program.* A gradiens-módszer kódja**

```
function num_grad()
% Adatok megadása

n = 20; h = 1/(n + 1); % osztópontok száma a tengelyek irá-
    nyába, rácstávolság
xx = h*[1:n]; yy = xx; % oldalak felosztása
[x, y] = meshgrid(xx, yy); % a rácspontok koordinátáinak
    eltárolása
u_h = 5*sin(pi*x).*sin(pi*y);
u_h = reshape(u_h, n^2, 1);                    % a kezdövektor
u_temp = ones(n^2, 1);% segédváltozó; mivel az iterációban
    u_h értékeit frissítjük, ezért az n. megoldást ebben tá-
    roljuk

f = 0.9*ones(n);  % az egyenlet jobb oldala
f = reshape(f, n^2, 1);

% A diszkretizációs mátrix konstrukciója
I = speye(n);
E = sparse(2:n,1:n-1,1,n,n);
D = E+E'-2*I;
A = -kron(D,I)-kron(I,D);

tic % indítjuk a beépített stopperórát
while  norm(u_h - u_temp, inf) > 1e-15 % Az iteráció
     u_temp = u_h;
     b = (exp(u_temp) - f) * h^2; % az egyenlet jobb oldalá-
         nak megadása
     w = A\b; % Az egyenletrendszer megoldása
     % Az iterációs lépés
```

```
    u_h = (u_temp - 2 * pi^2 * w) / (2*pi^2 + 1);
end
run_time = toc; % ebben a változóban tároljuk az iteráció sebességét

u_grid_in = reshape(u_h, n, n); % megoldásvektor visszalakítása mátrixsszá
u_grid = zeros(n + 2, n + 2); % itt vesszük hozzá a peremfeltételt
u_grid(2:n + 1, 2:n + 1) = u_grid_in;

% A háromszögek konstrukciója a hozzájuk tartozó csúcsokból.
triangular_mesh = [0 0 0];
for i=1:(n + 1)*(n + 2)
    if mod(i, n + 2)~=0
        triangular_mesh(length(triangular_mesh(:, 1))+ 1,:) =[i, i + 1, i + n + 2];
        triangular_mesh(length(triangular_mesh(:,1))+1,:)= [i + 1, i + 1 + n + 2, i + n + 2];
    end
end
triangular_mesh(1,:) = [];
[x_0, y_0] = meshgrid(0:h:1,0:h:1);
[u_x, u_y] = gradient(u_grid, h);


% Az eredmények ábrázolása


subplot(1, 2, 1)
% A végeselemes megoldás ábrázolása
trisurf(triangular_mesh, x_0, y_0, u_grid)
axis([0, 1, 0, 1, -0.1, 0])
xlabel('x','FontSize',12)
ylabel('y','FontSize',12)
title(['Az egyenlet gradiens-módszerrel adott megoldása.'], 'FontSize',12)

subplot(1, 2, 2)
% A megoldás gradiensének ábrázolása
quiver(x_0, y_0, u_x, u_y)
axis([0, 1, 0, 1])
xlabel('x','FontSize',12)
ylabel('y','FontSize',12)
```

```
title(['A megoldás gradiensének vektormezeje.'], 'FontSize', 12)

% Az iteráció idötartama
X = ['Az iteráció ', num2str(run_time), ' másodperc alatt konvergált.'];
disp(X)
```

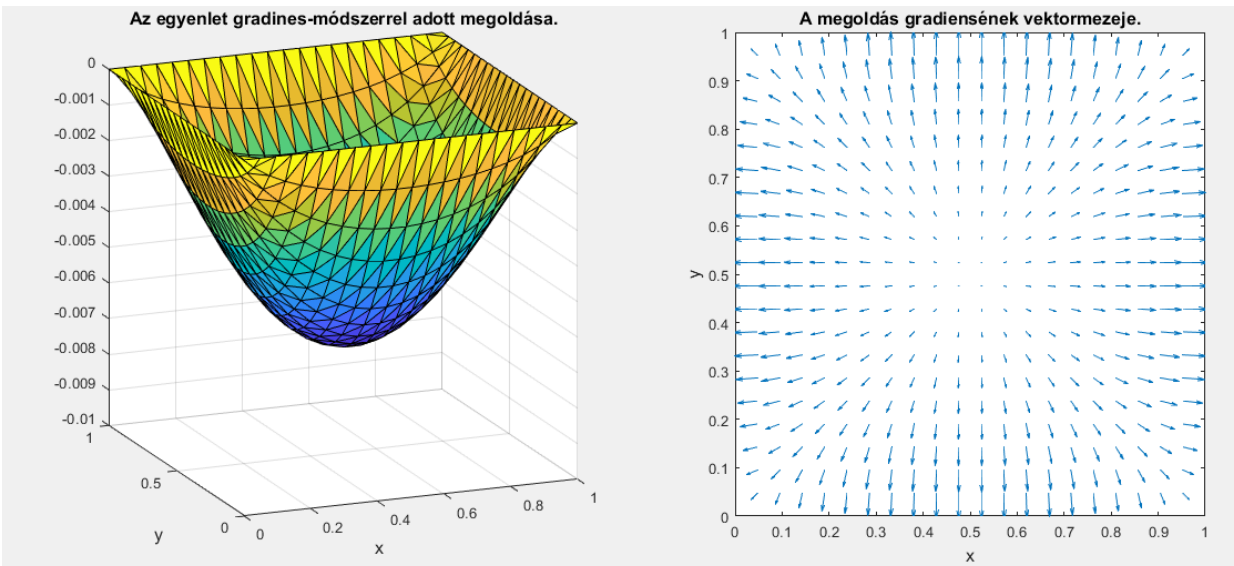
2. *Program.* A Newton-módszer kódja

```
function num_newton()
%Adatok megadása

n = 20; h = 1/(n + 1);% osztópontok száma a tengelyek irányába, rácstávolság
xx = h*[1:n]; yy = xx;% oldalak felosztása
[x, y] = meshgrid(xx, yy); % a rácspontok koordinátáinak eltárolása
u_h = 5*sin(pi*x).*sin(pi*y);
u_h = reshape(u_h, n^2, 1);                              % a kezdövektor
u_temp = ones(n^2, 1);% segédváltozó; mivel az iterációban u_h értékeit
      % frissítjük, ezért az n. megoldást ebben tároljuk
f = 0.9*ones(n);  % az egyenlet jobb oldala
f = reshape(f, n^2, 1);

% A diszkretizációs mátrix konstrukciója
r_egyseg = speye(n);
E = sparse(2:n,1:n-1,1,n,n);
D = E+E'-2*r_egyseg;
A = -kron(D,r_egyseg)-kron(r_egyseg,D);
log_A = logical(A);
% Indítjuk a stopperórát
tic
while  norm(u_h - u_temp, inf) > 1e-15 %  Az iteráció
    u_temp = u_h;
    eu = exp(u_temp)';

    % A diszkretizációs mátrix megadása
    A_temp = A + (h^2 / 3) * (log_A .* eu(ones(n^2, 1), :))

    % az egyenlet jobb oldalának megadása
    j_o = (exp(u_temp).*(u_temp - 1) + f) * h^2;
    % Az egyenletrendszer megoldása
```

```
    u_h = A_temp\j_o; % ez már u_n+1 együtthatóit adja
end
run_time = toc; % ebben a változóban tároljuk az iteráció sebességét

u_grid_in = reshape(u_h, n, n); % megoldásvektor visszalakí-tása mátrixszá
u_grid = zeros(n + 2, n + 2); % itt vesszük hozzá a peremfeltételt
u_grid(2:n + 1, 2:n + 1)=u_grid_in;

% A háromszögek konstrukciója a hozzájuk tartozó csúcsokból.
triangular_mesh=[0 0 0];
for i=1:(n + 1)*(n + 2)
    if mod(i, n + 2)~=0
            triangular_mesh(length(triangular_mesh(:, 1))+1,:)=[i, i + 1, i + n + 2];
            triangular_mesh(length(triangular_mesh(:,1))+1,:)=[i + 1, i + 1 + n + 2, i + n + 2];
    end
end
triangular_mesh(1,:)=[];
[x_0, y_0]=meshgrid(0:h:1,0:h:1);
[u_x, u_y] = gradient(u_grid, h);
% Az eredmények ábrázolása


subplot(1, 2, 1)
% A végeselemes megoldás ábrázolása
trisurf(triangular_mesh, x_0, y_0, u_grid)
axis([0, 1, 0, 1, -0.1, 0])
xlabel('x','FontSize',12)
ylabel('y','FontSize',12)
title(['Az egyenlet Newton-módszerrel adott megoldása.'],'FontSize',12)

subplot(1, 2, 2)
% A megoldás gradiensének ábrázolása
quiver(x_0, y_0, u_x, u_y)
axis([0, 1, 0, 1])
xlabel('x','FontSize',12)
ylabel('y','FontSize',12)
title(['A megoldás gradiensének vektormezeje.'], 'FontSize', 12)
```

```
% Az iteráció idötartama
X = ['Az iteráció ', num2str(run_time), ' másodperc alatt
    konvergált.'];
disp(X)
```

A feltöltött gradiens-módszer futtatása után a következő ábrát kapjuk:



h \ f	$\equiv 0$		$(x^{25} + (1-x)^{25})(y^{25} + (1-y)^{25})$		$\equiv 0.9$	
$\frac{\sqrt{2}}{21}$	0.01	0.0079	0.012	0.014	0.01	0.009
$\frac{\sqrt{2}}{51}$	0.011	0.074	0.05	0.055	0.046	0.056
$\frac{\sqrt{2}}{101}$	0.3	0.392	0.263	0.3	0.272	0.382
$\frac{\sqrt{2}}{121}$	0.43	0.438	0.36	0.44	0.35	0.446

1. táblázat. **A gradiens-módszer futási ideje különböző kezdővektorokkal**

Egy pár szó a paraméterek választásáról. A 7.7 Következményben említettük, hogy ha $f \leq 1$, akkor az egyenlet gyenge alakjának egyértelműen létezik megoldása, ezért csak ilyen f-et használtam; ezen belül próbáltam a spektrum mindegyik feléről választani egyet-egyet, rendre az azonosan 0-t, egy olyat, amely megközelítőleg 0 a tartomány közepén és majdnem 1 a tartomány peremén; az azonosan 1 jobb

h \ f	$\equiv 0$		$(x^{25}+(1-x)^{25})(y^{25}+(1-y)^{25})$		$\equiv 0.9$	
$\frac{\sqrt{2}}{21}$	0.042	0.056	0.0358	0.0344	0.022	0.037
$\frac{\sqrt{2}}{51}$	0.376	0.52	0.376	0.435	0.28	0.41
$\frac{\sqrt{2}}{101}$	4.544	7.57	4.203	5.519	3.05	4.825
$\frac{\sqrt{2}}{121}$	14.403	11.32	8.12	12.18	6.23	10.12

***2. táblázat.* A Newton-módszer futási ideje különböző kezdővektorokkal**

oldalnak sok értelme nincs, ugyanis ekkor az $u \equiv 0$ megoldás, ezért egy ehhez közelit, a 0.9-et választottam.

Kipróbáltam, mi történik, ha nem az azonosan 0 kezdővektorból indítom az iterációt, hanem valamilyen "nagy" pozitív függvényből, vajon ekkor melyik iteráció lesz a gyorsabb. Mindkét táblázatban az egyes függvények alatt az oszlopok rendre az $u_0 \equiv 0$, illetve az $u_0 = 5\sin(\pi x)\sin(\pi y)$ kezdővektorral indított iterációk idejét jelzik, az iteráció megállítási követelménye az egymás utáni tagok különbségének $||\cdot||_\infty$-ja kisebb, mint 10^{15}.

h \ f	$\equiv 0$			$(x^{25}+(1-x)^{25})(y^{25}+(1-y)^{25})$			$\equiv 0.9$		
	10^{-7}	10^{-10}	10^{-15}	10^{-7}	10^{-10}	10^{-15}	10^{-7}	10^{-10}	10^{-15}
$\frac{\sqrt{2}}{51}$	0.02	0.03	0.04	0.02	0.03	0.04	0.02	0.03	0.04
$\frac{\sqrt{2}}{101}$	0.11	0.11	0.22	0.1	0.15	0.22	0.08	0.13	0.22
$\frac{\sqrt{2}}{121}$	0.16	0.15	0.33	0.16	0.21	0.33	0.13	0.2	0.31

***3. táblázat.* A gradiens-módszer futásideje különböző megállási feltételekre**

h \ f	$\equiv 0$			$(x^{25}+(1-x)^{25})(y^{25}+(1-y)^{25})$			$\equiv 0.9$		
	10^{-7}	10^{-10}	10^{-15}	10^{-7}	10^{-10}	10^{-15}	10^{-7}	10^{-10}	10^{-15}
$\frac{\sqrt{2}}{51}$	0.22	0.28	0.34	0.22	0.29	0.37	0.17	0.24	0.27
$\frac{\sqrt{2}}{101}$	2.87	3.57	5.05	2.84	3.62	5.01	2.15	2.87	3.58
$\frac{\sqrt{2}}{121}$	6.17	7.61	10.53	6.13	7.33	10.51	4.44	6.18	7.62

***4. táblázat.* Newton-iterációk futásideje különböző megállási feltételekre**

Az eredményeket látva meglepődve tapasztaljuk, hogy a gradiens-módszer mindenféle nehezítés ellenére is gyorsabban konvergált a megoldáshoz, ugyanez a tendencia megmaradt sűrűbb felosztás esetén is. $\frac{\sqrt{2}}{121}$-nél kisebb rácsparaméter esetén a gradiens-módszer továbbra is 1 másodpercen belül volt, a Newton-iteráció viszont fél óra alatt sem végzett, $\frac{\sqrt{2}}{151}$-nál a számítógépem kifogyott a memóriából, ezért ennél kisebb rácsparamétert nem választottam. A Newton-iterációk mindenhol 3 és 7 lépésben jutottak el a megoldáshoz, míg a gradiens-módszer 7 és 11 lépés között konvergált. A jelentős különbség oka az lehet, hogy a Newton-módszernél a kevesebb lépésszám nem kompenzálja a lineáris egyenletrendszer megoldásának lassúságát, a Newton-módszernél a legtöbb időt az alacsonyabbrendű tagok beépítése tette ki.

Összefoglalás

A szakdolgozat célkítűzése az volt, hogy különböző iterációs módszereket ismertessen és hasonlítson össze. Ehhez lefektettük az alapokat a normált terek elméletének alapjaival, különös tekintettel a Hilbert-terekre, melyek a dolgozat során többször előfordultak. Ezek után nemlineáris operátorok tulajdonságait vizsgáltuk, különösképpen az ilyen operátorokkal megadott egyenletek megoldhatóságát szem előtt tartva. Majd a konkrét iterációs módszereket mutattuk be, és ezek konvergenciabecsléseit ismertettük.

Ezek után egy, az elektrosztatikában megjelenő nemlineáris egyenletet vizsgáltunk, aminek egy tulajdonságát kihasználva , azt egy kis trükkel átfogalmaztuk, hogy a fenti elméletet alkalmazhassuk. Bevezettük az egyenlet gyenge alakját, majd ennek megoldhatóságát, illetve az itt feltűnő általánosított differenciáloperátor tulajdonságait vizsgáltuk.

Végül a pontos megoldást közelítendő, vázoltuk az egyenlet véges dimenziós megfelelőjét, ennek megoldására pedig a fenti iterációs módszereket alkalmaztuk, konvergenciájukat bizonyítottuk. Mindkét módszerhez készült egy-egy program, amelyeket különböző paraméterekkel teszteltünk.

Hivatkozások

[1] Philippe G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*. North Holland Publisher Co., Amsterdam, 2002.

[2] Simon L., Baderko, E.A.,. *Másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek*. Tankönyvkiadó Vállalat, 1983.

[3] Faragó István, Karátson János,. *Numerical Solution of Nonlinear Elliptic Problems Via Preconditioning Operators, Advances in Computation : Theory and Practice*. Nova Science Publishers, 2002.

[4] Horváth Róbert, Izsák Ferenc, Karátson János,. *Parciális differenciálegyenletek numerikus módszerei számítógépes alkalmazásokkal*. Budapest, 2013. http://web.cs.elte.hu/~karatson/pdnm_vegleges_2013.pdf.

[5] Karátson János. *Numerikus funkcionálanalízis*. Typotex Kiadó, 2014. http://etananyag.ttk.elte.hu/FiLeS/downloads/_Karatson_Num_Funk_Anal.pdf.

[6] Karátson János, Sergey Korotov,. Discrete maximum principles for finite element solutions of nonlinear elliptic problems with mixed boundary conditions. *Numerische Matematik*, 99(4):669–698, 2005.

[7] Gockenbach, M.S. *Understanding And Implementing the Finite Element Method*. Siam, 2006.

[8] Krizek, M., Neittaanmäki, P.,. *Mathematical and Numerical Modelling in Electrical Engineering Theory and Applications*. Kluwer Academic Publisher, 1996.

[9] Roy Plastock. Homeomorphisms between Banach spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 200:169–183, 1974. https://doi.org/10.1090/S0002-9947--1974-0356122-6.

[10] Simon Péter. *Mérték és integrál*. ELTE Eötvös Kiadó Kft., 2016.

[11] Besenyei Ádám, Komornik Vilmos, Simon László,. *Parciális differenciálegyenletek*. Typotex Kiadó, 2013. http://etananyag.ttk.elte.hu/FiLeS/downloads/_Besenyei_Parc_diffegyenlet.pdf.