NYILATKOZAT

Név: Mályusz Attila Edmund

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika BSc

NEPTUN azonosító: VQPI91

Szakdolgozat címe:
Népszerű- és stabil párosítások összehasonlítása

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2021.05.29

Mályusz Attila

a hallgató aláírása

Szakdolgozat

Népszerű- és stabil párosítások összehasonlítása

Mályusz Attila Edmund

Matematika BSc, alkalmazott matematika szakirány

Témavezetők:

Bérczi-Kovács Erika
adjunktus
Operációkutatási Tanszék

Cseh Ágnes
tudományos munkatárs
Közgazdaság- és Regionális Tudományi Kutatóközpont

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Matematikai Intézet

2021

Tartalomjegyzék

Köszönetnyílvánítás

A szakdolgozatom elkészítésében sok segítséget kaptam, amiért nagyon hálás vagyok. Mindenek előtt Bérczi-Kovács Erika belsős témavezetőmnek szeretnék köszönetet mondani, aki fáradhatatlanul segédkezett a szakdolgozat elkészítésében. Szép meglátásai, útmutatásai, tanácsai nélkül nem sikerülhetett volna. Másrészt Cseh Ágnes külsős konzulensemnek is szeretnék köszöntet mondani aki, mint ebben a témában aktív kutató hasznos meglátásaival és ötleteivel segítette a szakdolgozat megírását.

Bevezető

A stabil párosítás feladatot legelőször D. Gale és L. S. Shapley definiálta és vizsgálta [5]. A stabil párosítás feladat azt a természetes problémát modellezi, melyben vannak egyének, akik egymást rangsorolták. Az egyének egy párosítását stabilnak nevezzük, ha nincs két olyan ember, akik egymást jobban kedvelik, mint a kapott párjaikat. Eredetileg Gale és Shapley diákok egyetemi jelentkezéseinek vizsgálatához vezette be a stabil párosítás feladatot páros gráfokra. A nem páros gráf esetével olyan feladatok modellezhetők, mint kollégiumi szobatársak kiosztása vagy optimális veseátültetések keresése. Később ezen alapulva a népszerű párosítás fogalma is megjelent [1], mely a stabil párosítás egy gyengítése. Két párosítás közül az a népszerűbb, amelyiket többen kedvelnek a kettő közül. Egy párosítás népszerű, ha nincs nála népszerűbb.

A szakdolgozatom első fejezetében bemutatom, Gale-Shapley stabil párosítás kereső algoritmusát, valamint egy mester listák esetén működő algoritmust. Továbbá mérésekkel különböző gráf és preferencia modellekben összehasonlítom a stabil párosítás nagyságát a maximális párosításéval. A második fejezetben legnagyobb népszerű párosítás megtalálására adok algoritmust, és az előző fejezethez hasonlóan mérésekkel összehasonlítom nagyságát a maximális párosításéval. A harmadik fejezetben Irving algoritmusát mutatom be, mely általános gráfban ad algoritmust stabil párosítás keresésére. Ezen kívül bemutatok egy egyszerűbb algoritmust stabil párosítás keresésére globális preferencia lista esetén. A szakdolgozatom utolsó fejezetében általános gráfokban vizsgálom a népszerű párosításokat. Ez a feladat NP-teljes, de megmutatom, hogy megfelelően sűrű gráfban polinomiális időben kereshető népszerű párosítás. Ez utóbbi legjobb tudásom szerint új eredmény.

1. fejezet

Stabil párosítás páros gráfban

1.1. Stabil párosítás alapfogalmai

A stabil párosítás feladat inputja tartalmaz egy $G = (V, E)$ egyszerű gráfot és minden csúcshoz egy-egy preferencia listát, mely az adott csúccsal szomszédos csúcsokat preferencia sorrendbe rakja. A mi vizsgálódásainkban egy adott csúcshoz tartozó sorrendben nem lehetnek ugyanannyira kedvelt/preferált csúcsok.

1.1.1. Definíció. Az u csúcs jobban kedveli v csúcsot w-nél, ha v előrébb van u preferencia listáján, mint w vagy v rajta van u preferencia listáján, de w nincs.

Jelölés. Azt, hogy u csúcs jobban preferálja v-t, mint w-t $v >_u w$-vel jelöljük.

1.1.2. Definíció. Egy adott M párosításra nézve egy $e = (u, v) \in E$, $e \notin M$ élet blokkolónak nevezünk, ha u jobban preferálja v-t, mint $M(u)$-t (ahol $M(u)$ az u párja az M párosításban) és ugyanígy v jobban kedveli u-t mint $M(v)$-t.

1.1.3. Definíció. Egy adott M párosítást stabilnak nevezünk, ha nincsen rá nézve blokkoló él.

Az a kérdés, hogy létezik-e adott preferencia listákkal stabil párosítás páros gráfban megoldott. Az a válasz, hogy mindig létezik, és meg tudjuk találni polinom időben. Az algoritmust D. Gale és L. S. Shapley mutatta meg először az 1962-es cikkükben [5]. Látni fogjuk majd, hogy általános gráfban nem mindig létezik stabil párosítás, de polinom időben mindig eldönthető, hogy létezik-e [7].

1.2. Gale-Shapley algoritmusa

Mivel a stabil párosítás fogalma házassági feladattal terjedt el, így a két csúcshalmaz megfeleltethető férfiaknak és nőknek.

Adatok jelölése az algoritmushoz:

- n : nők száma
- k : már talált párok száma
- X : jelenlegi kérő (férfi)
- x : jelenleg megkért nő
- Ω : A nem létező, minden nő által a legkevésbé kedvelt férfi, azaz minden v férfire és minden vele szomszédos w nőre $v >_w X$

Algorithm 1: Gale és Shapley algoritmusa

```
Input: Páros gráf preferencia listákkal
Minden nőnek a legkevésbé kedvelt férfit párosítsuk azaz Ω-t;
k ← 0 ;
while k < n do
    X ← a k + 1. férfi;
    while X ≠ Ω és X-nek van még elérhető párja do
        x ← X még elérhető legkedveltebb választása;
        if x jobban kedveli X-et, mint jelenlegi párját M(x)-et then
            Legyen x párja X;
            X ← x előbbi párja;
        end
        if X ≠ Ω then
            Töröljük x-et X listájáról
        end
    end
    k ← k + 1
end
return egy stabil párosítás
```

Az algoritmusról a következőket fogjuk belátni:

- $O(m)$ lépésben lefut az algoritmus.
- Stabil párosítást ad ki az algoritmus.
- Férfiaknak ez a legjobb párosítást adja ki, azaz nincs más stabil párosítás, amelyben jobb párt kaphatnak.
- Nőknek pedig a legrosszabbat adja ki.

- Stabil párosítások mindig ugyanazokat a csúcsokat fedik le.

1.2.1. Állítás. Gale-Shapley algoritmus $O(m)$ lépésben lefut.

Bizonyítás. Mivel a második while ciklusban a férfiak elérhető párjainak száma szigorúan csökken, és mivel az elérhető párok száma az elején összesen m, és minden más lépés megoldható $O(c)$ időben, így $O(m)$ lépésben lefut az algoritmus.

Mielőtt bebizonyítjuk, hogy Gale és Shapley algoritmusa stabil párosítást ad ki, tegyünk meg két észrevételt.

- Az algoritmus egy pillanatában egy nőnek az aktuális párja mindig jobb számára, mint az előző.
- Ha egy A férfi kedvel egy a nőt, aki jobb jelenlegi $M(A)$ párjánál, akkor őt az a nő már korábban visszautasította.

1.2.2. Állítás. Gale-Shapley algoritmusa stabil párosítást ad ki.

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy van (A, a) blokkoló él, ekkor az előző észrevételek közül a második miatt a visszautasította A-t. Ez pedig csak azért lehet, mert jobb párja volt/lett a-nak, és így az első észrevétel miatt jobb is maradt, így ez ellentmondás. Tehát stabil párosítást ad ki.

Most megmutatjuk, hogy a férfiaknak a legjobbat adja az algoritmus.

1.2.3. Állítás. Ha az algoritmus során A férfi listájáról lekerült a, akkor nincs olyan stabil párosítás, amelyben párosítva lennének.

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy az algoritmus során A és a a legelső olyan pár az algoritmus futása során, amire igaz az, hogy A-t visszautasította a, viszont van stabil párosítás M', amiben együtt vannak. Nézzük meg, hogy miért törlődhetett A listájáról a.

1. Amikor A megkérte a-t, akkor a-nak jobb párja volt B.
2. A és a egy pár voltak, amíg egy másik B férfi jobb nem volt a-nak.

B preferencia listájának legelején mindkét esetben a állt, így ha $(A, a) \in M'$ akkor, hogy ne legyen blokkoló él B-nek jobb pár kell, mint a, de ez ellentmondás mivel A a volt a legelső ellenpélda pár.

Most pedig megmutatjuk, hogy a nőknek a legrosszabbat adja az algoritmus.

1.2.4. Állítás. Minden stabil párosításban a nők legalább olyan párt kapnak, mint amilyet az algoritmus által kaptak.

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy van olyan M' stabil párosítás amiben a rosszabb párt kap, mint A algoritmusbeli párja, legyen ez a pár B. Mivel az A-nak az algoritmus a legjobbat adja, így blokkoló él lesz (A, a), ez ellentmondás. Tehát a nők az algoritmusbeli párjuknál stabil párosításban rosszabbat nem kaphatnak.

1.2.5. Állítás. Minden stabil párosítás ugyanazokat a csúcsokat fogja le.

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy léteznek M és M' stabil párosítások, ahol $a_1b_1 \in M$, de a_1 nincs lefedve M'-ben. Ekkor, hogy (a_1, b_1) ne legyen blokkoló él M'-ben, $M'(b_1) = a_2 >_{b_1} a_1$ és ahhoz, hogy (b_1, a_2) ne legyen blokkoló M-re nézve $M(a_2) = b_3 >_{a_2} b_1$. Ekkor láthatjuk, hogy ugyanezt folytathatjuk, és soha nem akadhatunk el, de mivel véges a gráf elérünk egy korábbi csúcsba, de az lehetetlen hisz, akkor nem lenne párosítás M vagy M'.

Megjegyzés: Ez azt jelenti, hogy két stabil párosítás nagysága megegyezik, ezért a méréseknél elég egyetlen stabil párosítást meghatározni.

1.3. Mester lista

A következőkben nagyon speciális struktúrájú preferencia mátrixokat vizsgálunk. Az alapgondolat onnan jön, hogy speciális esetben a párosítás felfogható, mint a diákok egyetemre való jelentkezése, és ekkor a diákok preferencia listájában lesz némi korreláció, mert például az egyetemeket hasonlóan rangsorolják.
A modell, melyet mi a páros gráfok esetében használunk a mester lista. Feltesszük, hogy az egyik csúcs osztálynak például a nőknek adva van egy rendezése, és minden férfinak a preferencia listáján a csúcsok ezen mester lista sorrend szerint vannak rendezve. Persze a férfiak mester listáját is megválaszthatjuk, és akkor a nők preferencia listáját ezen lista szerint kell rendezni. Ha csak az egyik csúcshalmaznak generálunk mester listát, akkor ezt $SM - 1ML$-nel fogom jelölni, ha mindkét csúcshalmazra generálunk mester listát, akkor pedig $SM - 2ML$-el. A mester listás módszer előnye, hogy stabil párosítást keresni még sokkal egyszerűbb lesz, és csak egy stabil párosítás létezik mester listás módszer esetén.

1.3.1. Állítás. [8] Legyen I egy $SM - 1ML$ input, ekkor egyetlen egy stabil párosítás létezik, és lineáris időben megtalálható egy mohó algoritmussal.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy adott egy nőket tartalmazó mester lista és a lista pedig legyen $m_1, \ldots, m_n$. Ekkor a mohó algoritmus az alábbi:

Algorithm 2: Mohó mester algoritmus [8]

```
Input: Páros Gráf SM − 1ML inputtal
M = ∅ a párosítás;
for i in 1...n do
    if m_i listáján van nem párosított férfi then
        w = m_i listáján a legelső nem párosított férfi;
        M = M ∪ {(w, m_i)}
    end
end
return M stabil párosítás
```

Ekkor a kapott párosításra a következők igazak.

1.3.2. *Lemma.* A kapott párosítás stabil.

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy $\exists$ (a, m_i) blokkoló él, ekkor viszont m_i amikor sorra került, akkor a-nak már volt párja, hisz most a párosításban rosszabb párja van m_i-nek. Ez azt jelenti, hogy $\exists j < i$ amire $(a, m_j) \in M$, de ekkor a mester lista definíciója miatt a jobban kedveli m_j-t, mint m_i-t.

1.3.3. *Lemma.* Nincs másik stabil párosítás a kapott stabil párosításon kívül.

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy $\exists M' \neq M$ stabil párosítás, ekkor legyen i az a legkisebb index, melyre m_i párja a két párosításban nem egyezzik meg. Legyen m_i párja a az M párosításban, ekkor az M' párosításra (a, m_i) blokkoló, hiszen m_i a még nem foglalt legjobban kedvelt férfit választotta, ezért m_i jobban kedveli a-t, mint M' beli párját, és a is jobban kedveli m_i-t, mint M' párját hiszen minden $j < i$-re m_j vagy párosítva van vagy nincs már választható párja.

1.4. Mérések

A következő kérdés merülhet fel stabil párosítás nagyságával kapcsolatban. Átlagosan mekkora az eltérés a stabil és a maximális párosítás nagysága között? E két érték hányadosát vizsgáltuk meg. A mérések során a két csúcshalmaz elemszáma ugyanannyi. A következő háromféle gráf modellt fogjuk használni az adjacencia mátrixok készítéséhez.

(a) Erdős-Rényi-féle véletlen gráf modell, azaz minden élet egy adott valószínűséggel veszünk be a gráfba.

(b) Minden férfinak generálunk egy számot 0 és n között, ami megadja, hogy mennyi a foka, és ezek után generálunk ennyi élet hozzá (későbbiekben csak Véletlen férfi fokszámú módszernek nevezem).

(c) Megadunk egy k konstanst és minden férfinak ennyi lesz a foka és ezek után generálunk éleket (ezt k-as férfi fokszámú módszernek nevezzük).

A következő háromféle preferencia lista modellt fogjuk használni.

(a) Véletlen módszer. Egy adott csúcs esetén a preferencia lista a szomszédsági lista egy véletlen sorrendje.

(b) Mester listás modell.

(c) Globális lista lásd 3.2.

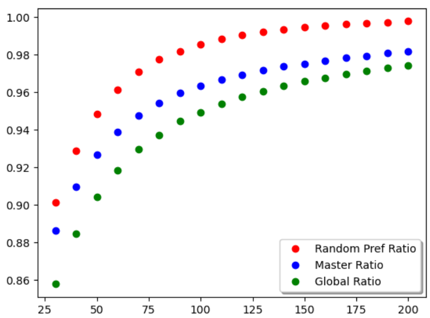
Ezek után a következőképpen néz ki egy adott n-re egy teszt példa generálása.

1. A fentebb leírt három módszer egyikével generálunk egy véletlen páros gráfot.

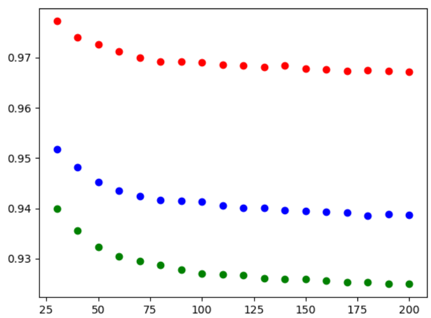
2. Ezek után a fentebb leírt modell egyikével generáljuk a preferencia listákat.

3. Ezek után pedig futtatjuk a Gale-Shapley és az alternáló utas maximális párosítás algoritmusokat, majd megszámoljuk, hogy hány élük van.

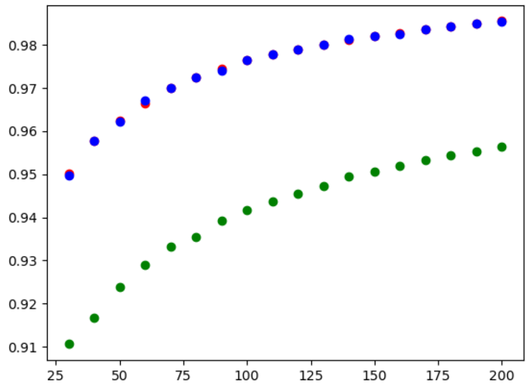
Végül az összes generált gráfon egy adott n-re az összes stabil párosítás és maximális párosítás hányadosát nézzük és ezt vizsgáljuk. A grafikonokon az x tengely az n-nek felel meg. Az y tengely pedig az előbb megmagyarázott hányados. A tesztekben $n = 10$-től $n = 150$-ig megyünk 5-ével kivéve az 1.1-es ábrán, amelyikben 250-ig megyünk.



1.1. ábra. Erdős-Rényi féle



1.2. ábra. 10-es férfi fokszám



1.3. ábra. Véletlen férfi fokszámú

1.4.1. Konklúziók

1. A vizsgált hányadosok közel vannak az 1-hez, és a legnagyobb eltérés az Erdős-Rényi modellnél tapasztalható.
2. Minél kisebb a korreláció a listák között annál nagyobb a párosítás mérete.

2. fejezet

Népszerű párosítás páros gráfban

2.1. Népszerű párosítás alapfogalmai

A jelenlegi alfejezetben bevezetjük a népszerű párosítás definícióját, és ezek után bemutatjuk, hogy milyen kapcsolatok vannak a stabil és a népszerű párosítások között. Ezek után bemutatjuk a maximálisméretű népszerű párosítást kereső algoritmust páros gráfokra, majd a stabil, népszerű és maximális párosítások nagysága között végzünk méréseket.
Mint a stabil párosításnál, most is minden csúcsnak van egy preferencia listája melyen a szomszédos csúcsok szerepelnek adott sorrendben.

2.1.1. Definíció. Legyen M és M' két párosítás egy G gráfon. Azt mondjuk, hogy egy u csúcs jobban kedveli az M párosítást, ha vagy (1) u jobban kedveli $M(u)$ párját mint $M'(u)$-t, vagy (2) M-ben párosítva van, de M'-ben nem.

Jelölés. Jelöljük $P(M, M')$-vel (P mint prefer) azokat a csúcsokat, melyek jobban kedvelik az M párosítást, mint M'-t. Ha esetleg $V(G)$ egy S részhalmazára nézzük, akkor $P_S(M, M')$-val jelöljük.
Legyen $D(M, M') = |P(M, M')| - |P(M', M)|$.

2.1.2. Definíció. Legyen M és M' két párosítás egy G gráfon azt mondjuk, hogy M népszerűbb, ha $D(M, M') \geq 0$.

2.1.3. Definíció. Egy M párosítás népszerű, ha ő legalább olyan népszerű, mint mindenki más, azaz $\forall M'$-re $D(M, M') \geq 0$.

2.1.4. Definíció. Egy M párosítás nagyon népszerű, ha $\forall M'$-re $D(M, M') > 0$.

Fontos észrevenni, hogy mind a stabil, mind a népszerű párosításos definíciók általános (egyszerű) gráfokra is ugyanezek. A következő állításokat/tételeket általános

gráfra bizonyítjuk (érdekes tény, hogy ezek egy részét először páros gráfokra bizonyították). Az általános gráfokra vett stabil párosítás problémát SRP-vel jelöljük (Stable Roommates Problem), és az általános gráfokra vett népszerű párosítás problémát pedig PRP-vel jelöljük (Popular Roommates Problem), ha pedig inputként csak egy preferencia listákkal ellátott általános gráf adott, akkor RP-nek (Roommates Problem) nevezem ezt az inputot. Ha a G gráf páros, akkor SM (Stable Matching), PM-el (Popular Matching) fogjuk jelölni a feladatokat.
A következőket fogjuk megmutatni:

- Karakterizációt mondunk a népszerű és a nagyon népszerű párosításokra.
- Ha M stabil, akkor M népszerű is.
- Minden népszerű párosítás lefedi a stabil párosítás csúcsait is. Azaz stabil párosítás egy legkisebb népszerű pásorítás.
- Ha M nagyon népszerű, akkor csak egy népszerű párosítás van, ő maga.
- Ha M nagyon népszerű párosítás, akkor stabil is.

Az állítások bizonyításához a következő triviális megfigyelést fogjuk használni, és az adott állításhoz megfelelően formálni.

2.1.5. Állítás. Legyen $S_1, S_2, \ldots, S_k$ egy partíciója $V(G)$-nek, ekkor $P(M, M') = \sum_{i=1}^{k} P_{S_i}(M, M')$ és így $D(M, M') = \sum_{i=1}^{k} D_{S_i}(M, M')$.

Az első két állításhoz vegyük $V(G)$ következő partícióját. Legyen M és M' két párosítás G-n, ekkor legyenek az M és M' szimmetrikus differencia (jelölése $M \oplus M'$) komponensei G_i és $C_i = V(G_i)$. Ekkor C_i-k egy partícóját adják $V(G)$-nek, azaz igaz a következő egyenlőség: $D(M, M') = \sum_{i=1}^{k} D_{C_i}(M, M')$.

2.1.6. Állítás. [3] Legyen adva egy RP input, ekkor M párosítás népszerű akkor és csak akkor, ha $\forall M'$ párosításra $D_{C_i}(M, M') \geq 0$ minden komponensre.

Bizonyítás. Ebből az M népszerűsége irány triviálisan jön a definícióból, hisz $D(M, M') \geq 0$ kell, hogy teljesüljön, és a partíció miatt ez igaz is. A másik irány indirekt megy, mégpedig tegyük fel, hogy $\exists C_i$, hogy $D_{C_i}(M, M') < 0$. Ekkor legyen $M^* = (M \setminus M|_{C_i}) \cup M'|_{C_i}$ ekkor pedig $D(M^*, M) > 0$ adódik, ami ellentmondás.

2.1.7. Állítás. [3] Legyen adva egy RP input, ekkor M párosítás nagyon népszerű akkor és csak akkor, ha $\forall M'$ párosításra $D_{C_i}(M, M') > 0$ minden $G_i \in M \oplus M'$ komponensre, ahol $C_i = V(G_i)$ és $|C_i| \geq 2$, azaz az ugyanúgy fedett vagy nem fedett pontok nem számítanak most.

Bizonyítás. Az M nagyon népszerűséges megint triviális a definícióból. A másik irány pedig megint indirekt megy, tegyük fel, hogy $\exists C_i$, hogy $D_{C_i}(M, M') \leq 0$ ekkor legyen $M^* = (M \setminus M|_{C_i}) \cup M'|_{C_i}$, ekkor pedig $D(M^*, M) \geq 0$ lesz igaz, ami ellentmondás.

A következő három állításhoz vegyük a következő partícióját V-nek. Legyenek M és M' párosítások, legyen $F = M \setminus M' = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ ezen kívül legyen X azon csúcsok halmaza, melyeket F lefed és $\overline{X} = V(G) \setminus X$. Ekkor $V(G) = \{E_1, E_2, \dots, E_k, \overline{X}\}$, ahol E_i azon csúcsok, melyeket az e_i él fog le és így $D(M, M') = \sum_{i=1}^{k} D_{E_i}(M, M') + D_{\overline{X}}(M, M')$.

2.1.8. Lemma. [3] Adott egy RP feladat inputja valamint M és M' párosítások

(a) Ha $D(M', M) > 0$, akkor létezik M'-nek éle amely blokkoló M-re.

(b) Ha M stabil, akkor M népszerű.

(c) Ha M stabil, M' népszerű, akkor M' lefedi az összes M által lefedett csúcsot és $D_{E_i}(M, M') = 0$, azaz minden minden F beli élben lévő élre az egyik vége M-et a másik M'-t kedveli.

Bizonyítás. (a) Először figyeljük meg, hogy $P_{\overline{X}}(M', M) = \emptyset$ (bizonyítása indirekt: tegyük fel, hogy nem, akkor még kerülne él $F = M' \setminus M$-ba), így viszont $D_{\overline{X}}(M', M) \leq 0$, de $D(M', M) > 0$ miatt akkor létezik $e_i \in F$, hogy $D_{E_i}(M', M) > 0$ azért, hogy $D(M', M)$ teljesüljön és ekkor az e_i él blokkoló lesz M-re.

(b) Indirekt, ha nem lenne népszerű, akkor létezne blokkoló él.

(c) Mivel M' népszerű, ezért $D(M', M) \geq 0$ másrészt láttuk, hogy $D_{\overline{X}}(M', M) \leq 0$ és $\forall E_i$-re $D_{E_i}(M', M) \leq 0$, mert M stabil, ekkor viszont minden tag 0-val egyenlő. Viszont ekkor $P_{\overline{X}}(M', M) = \emptyset$ és $D_{\overline{X}}(M', M) = 0$ miatt $P_{\overline{X}}(M, M') = \emptyset$, azaz minden él ami F-ben van az egyik végpontja M-et a másik M'-t kedveli.

2.1.9. Állítás. [3] Legyen I egy RP input és M nagyon népszerű párosítás I-ben. Ekkor M az egyetlen népszerű párosítás I-ben.

Bizonyítás. Triviális a definícióból.

2.1.10. Állítás. [3] Legyen I egy RP input és M nagyon népszerű párosítás I-ben. Ekkor M az stabil párosítás.

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy $\exists\{a_i, a_j\}$ blokkoló él M-re, ekkor képezzük a következő M' párosítást M-ből úgy, hogy (i) töröljük $\{a_i, M(a_i)\}$-t M-ből, ha a_i párosítva van, (ii) töröljük $\{a_j, M(a_j)\}$-t M-ből, ha a_j párosítva van és (iii) vegyük be M'-be $\{a_i, a_j\}$-t, ekkor $|P(M', M)| = 2$ míg $|P(M, M')| \leq 2$, ekkor viszont M nem lehet nagyon népszerű, azaz ellentmondás.

2.2. Domináns Párosítás

2.2.1. Definíció. Domináns párosításnak nevezünk egy M párosítást, ha népszerű párosítás és tetszőleges M' párosításra, ha $|M'| > |M|$ teljesül, akkor M népszerűbb, mint M'.

Domináns párosítás megkeresésére páros gráfban legelőször 2011-ben adtak polinomiális algoritmust (Chien-Chung és Telikepalli [6]). Az algoritmus alapgondolata az, hogy futtassuk a Gale-Shapleyt a gráfra, ekkor kimaradhatnak férfiak ebből a párosításból. Ekkor ezeket a férfiakat úgymond sármossá tesszük (és sármosságból már nem kerülhetnek ki), azaz minden nő listáján előrébb fognak szerepelni, mint a most párosítatlan férfiak, és ezek után ezzel a módosítással újra futtatjuk a Gale-Shapleyt. Ezt a ciklust csináljuk addig, amíg a nem sármos férfiak mindegyike fog szerepelni a párosításban. A bemutatott algoritmus abban lesz más, hogy csak egyszer kell majd egy Gale-Shapley féle algoritmust futtatni. Mindebből még jobban érezhető, hogy mennyire szoros a kapcsolat a stabil és a népszerű párosítások között.
Legyen az eredeti gráf a továbbiakban $\mathcal{G} = (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}, E)$. Az algoritmus igényel egy kis előkészítést az adatok terén, mégpedig létrehozunk egy segédgráfot $\mathcal{G}_2 = (\mathcal{A}_2 \cup \mathcal{B}, E_2)$-t. $\forall a_i \in \mathcal{A}$ esetén legyen $a_i^0, a_i^1 \in \mathcal{A}_2$ (azaz a férfiak csúcshalmazában minden csúcsnak feleljen meg két csúcs), azaz $\mathcal{A}_2 = \{a_1^0, a_2^0, \dots, a_n^0, a_1^1, a_2^1, \dots, a_n^1\}$, ahol a kitevő azt fogja jelölni, hogy egy adott férfi a felső rétegben van (sármos= 1 kitevő) vagy az alsó rétegben. Természetesen $(a_i, b_j) \in E \Rightarrow (a_i^0, b_j), (a_i^1, b_j) \in E_2$. Az is igaz, hogy a_i^0, a_i^1 preferencia listájuk megegyezik a_i-jével. Az ötlet az lesz, hogy azt, hogy egy férfi sármos lett azt úgy fogjuk meg, hogy ekkor a_i^0 megpróbált mindenkit a preferencia listájáról, de visszautasították valamilyen okból. Ekkor abbahagyjuk a_i^0 használatát és helyette pedig a_i^1-t kezdjük el használni. Azt, hogy egy nő a sármosabb férfiakat preferálja azzal érjük el, hogy a preferencia listát módosítjuk úgy, hogy legyen b_i preferencia listája eredetileg $\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_t} \rangle$, ekkor b_i listája a $\mathcal{G}_2$ gráfban, pedig $\langle a_{i_1}^1, a_{i_2}^1, \dots, a_{i_t}^1, a_{i_1}^0, a_{i_2}^0, \dots, a_{i_t}^0 \rangle$. A népszerű párosítást az eredeti gráfra majd úgy kapjuk meg, hogy mivel egyszerre csak egyet használunk a a_i^0, a_i^1 közül így $(a_i, b_j) \iff (a_i^0, b_j)$ vagy (a_i^1, b_j)-vel kapjuk meg a népszerű párosítást.
Az algoritmus során azt, hogy a férfi preferencia listáján lévő nő visszautasította úgy jelöljük, hogy kitöröljük az élet a gráfból, ha pedig egy nő kap egy párt, akkor minden ennél a párnál rosszabb szomszéd közötti élet kitörlünk a gráfból. Így, ha u és v között találunk élt és v jelenleg nem u párja, akkor u és v jobban kedvelik

egymás, mint a párjukat. Most pedig akkor következzen az algoritmus.

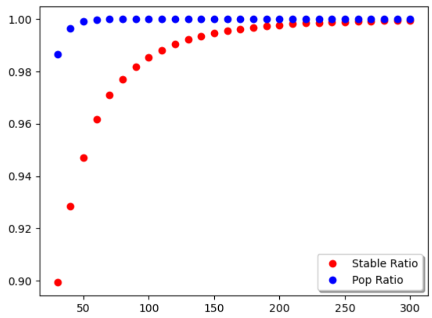
Algorithm 3: Domináns párosítás keresése

Input: PRP input
Létrehozzuk a Q sort amit $\{a_1^0, \ldots, a_{n_0}^0\}$-vel töltünk fel;
S párosítást üresre állítjuk be;
while Q *nem üres* **do**
  töröljük az első elemet a^l-t Q-ból ;
  if a^l *párjainak a halmaza a jelenlegi gráfban nem üres* **then**
    legyen b a legjobban kedvelt szomszéd a^l listájáról ;
    if $S(b)$ *létezik* **then**
      adjuk $S(b)$-t a Q-hoz ;
      legyen $S(b) = a^l$;
      töröljünk minden élet b és a^l-nél rosszabb szomszéd között ;
    end
  else
    if $l = 0$ **then**
      adjuk a^1-t Q-hoz ;
      { Azaz minden szomszédja visszautasította már a^0-t így sármossá kell tenni azaz a felső rétegbe megy }
    end
  end
end
return S *Népszerű Párosítás*

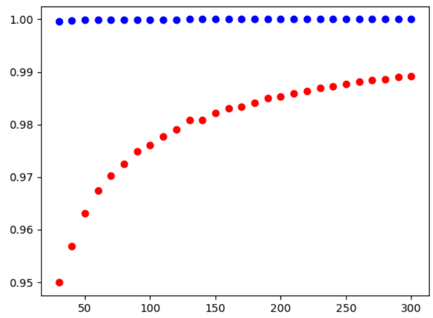
Az algoritmus futási ideje $O(n+m)$, mert a segédgráf felállítása $O(n+m)$ a párosítás keresése rész pedig ugyanígy $O(n+m)$ időt vesz igénybe.

2.3. Mérések

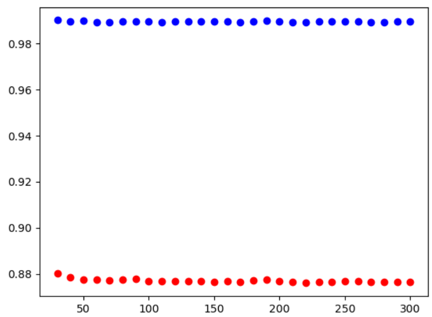
Most a népszerű párosítások méretét hasonlítjuk össze a maximális párosításéval. Azt vizsgáljuk, hogy mennyire közelíti meg egy stabil (minimális népszerű) párosítás illetve egy domináns (maximális népszerű) párosítás élszáma a maximális párosítás élszámát. A kék a domináns és a maximális párosítások nagyságának hányadosa, míg a piros a stabil és a maximális párosítások nagyságának hányadosa, hasonlóan az 1.1-es fejezetbeli méréshez.



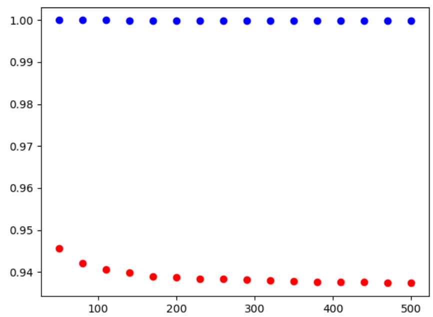
2.1. ábra. Erdős-Rényi-féle



2.2. ábra. Véletlen férfi fokszám



2.3. ábra. 3-as férfi fokszám



2.4. ábra. 10-es férfi fokszám

2.3.1. Konklúziók

Az Erdős-Rényi-féle és az véletlen férfi fokszámú módszerrel generált gráfok azt mutatják, hogy csak az elején vannak különbségek, de határértékben ugyanakkora nagyságúak lesznek a párosítások. Ellenben a konstans férfi fokszámú módszer mutat egy mondhatni konstans nagyságú különbséget a kettő nagysága között, tehát ezek szerint a domináns párosítás tényleg több embert ér el. A grafikonokból az is leolvasható, hogy a domináns párosítás szinte minden esetben megegyezik méretben a legnagyobb párosítással, így ezt a fogalmat nem érdemes tovább relaxálni, hogy több embert érhessünk el.

3. fejezet

Stabil párosítások általános gráfban

3.1. Irving algoritmusa

Mint azt az első fejezetben említettük az a feladat, hogy polinom időben keressünk stabil párosítást vagy igazolást arra, hogy nincs, megoldott. A problémát Robert Irving oldotta meg legelőször [7]. A páros gráfbeli esettel szemben általános gráfra az nem igaz, hogy minden RP inputra létezik is stabil párosítás. Egy példa olyan RP inputra melyben nem létezik stabil párosítás:

Emberek	Preferencia Listák
1	2 3 4
2	3 1 4
3	1 2 4
4	bármilyen sorrend

Az ellenőrzéshez csak azt kell megnézni, hogy mivel most mindenki párosítva kell, hogy legyen, a 4-esnek is lesz párja. Akárki is a párja, a maradék kettő közül az egyik jobban fogja őt kedvelni, mint a párját.
Ebben a fejezetben bemutatjuk Irving polinom idejű algoritmusát, és kimondunk egy karakterizációt népszerű párosítások létezésére általános gráfban. A következőkben az RP inputban a preferenica listák teljesek lesznek, azaz minden preferencia lista $n-1$ hosszú lesz, az n csúcsszám páros lesz és a cél az lesz, hogy egy $\frac{n}{2}$ nagyságú stabil párosítást találjunk.
A következőkben az x párját x kérőjének fogom nevezni, mert Irving algoritmusában x megkérhet valakit és lehet kérője is egyszerre és ezek nem feltétlenül egyazon csúcsok/személyek.
Irving algoritmusa két fázisból épül fel.

- Első fázisban egy a Gale-Shapley algoritmushoz hasonló algoritmussal lefuttatunk egy megkérő (propose) fázist, majd leállás után megnézzük, hogy egy adott ember kit kért meg és ki az, akinek a kérését elfogadta, ezek most lehetnek különbözőek, kitöröjük a preferencia listáról azokat az éleket amelyeket ezek a lehetséges párok kizárnak.

- A második fázisban speciális preferencia körök kitörlésével addig szűkítjük a lehetséges párokat, míg csak egy lehetséges vagy kijön, hogy nem létezik stabil párosítás.

Első Fázis

Egy részletes példáért lásd [7] cikket 580. oldalon. A kérések a következő stratégia szerint fognak menni.

1. Ha x-et megkéri y, akkor
   (a) Visszautasítja x y-t, ha jobb kérőt tart jelenleg, mint y.
   (b) Elfogadja y-t, ha jobb, mint a jelenlegi kerője vagy még nincs kérője.
2. Az x csúcs a preferencia sorrendje szerint csökkenő sorrendben kér, és megáll, ha olyasvalakit talált, aki nem utasította vissza egyből. Viszont, ha később visszautasítják, akkor egyből folytatnia kell a preferencia sorrend szerinti kérést.

A megkérések sorozata a következő féleképpen érhet véget.

- Mindenkinek van kérője.
- Egyvalaki vissza lett utasítva mindenki által, ez történik a fejezet elején adott ellenpéldában például.

Ami miatt a megkérés alapján való kizárás működik az egy ugyanolyan lemma, mint ami a páros gráfban lehetővé tette a megkérés alapján lévő párkeresést 1.2.3.

3.1.1. Állítás. Ha y visszautasítja x-et az előbbi algoritmus során, akkor y és x nem lehetnek egy pár stabil párosításban.

A állítás bizonyítása nagyon hasonlóan megy, mint páros gráf esetén. Ezek után ebből az állításból a jövő következmények a következőek.

3.1.2. Következmény. Ha van valaki, akit mindenki visszautsított, akkor nincs stabil párosítás.

3.1.3. Következmény. Az algoritmus futása során, ha x megkéri y-t, akkor

- x-nek nem lehet jobb partnere, mint y.

- y-nak nem lehet rosszabb partnere, mint x.

Miután vége lett a megkéréseknek elvégezzük a preferencia listák redukálását ami a következőket jelenti.

3.1.4. Következmény. Legyen a megkérés algoritmus lefutása után x egy csúcs, akit megkért y. Ekkor a következő redukciókat tudjuk elvégezni x és y preferencia listáin.

- y listájáról letörölhető mindenki, akit x-nél jobban kedvel.
- y listájáról még le lehet törölni azokat az a_i-ket, akiket megkért egy olyan b_i, akire $b_i >_{a_i} y$.

A törlések után a következőek lesznek igazak.

- y listáján x az első és x listáján y az utolsó.
- általában a listáján van b akkor és csak akkor, ha b listáján van a.

Ekkor 3.1.4-ból következik, hogy

3.1.5. Következmény. Ha minden redukált preferencia listákon csak egy ember van, akkor ez egy stabil párosítást ad.

Második Fázis

A következőkben egy preferencia listát redukáltnak nevezek, ha végrehajtódott rajta egy első fázisú és valahány második fázisú redukció, akár 0 is. A második fázis lényege az lesz, hogy bizonyos típusú csúcssorozatokat keresünk, majd ezen sorozatok alapján még tovább csökkentjük a preferencia listákat. Legyen $a_1, a_2, \ldots, a_r$ egy csúcssorozat amire a következeők teljesülnek:

- Minden $i = 1, \ldots, r-1$-re a_i redukált preferencia listáján a második csúcs b_{i+1} a legelső csúcs a_{i+1} listáján.
- a_r redukált preferencia listáján a második csúcs pedig a_1-n az első.

Az ilyen csúcs sorozatokat minden-vagy-semmi sorozatnak fogjuk nevezni, az elnevezés egy későbbi lemmából válik tisztává. Megtalálni egy ilyen minden-vagy-semmi sorozatot egyszerű, a következő algoritmust kell futtatni.
Legyen p_1 egy olyan csúcs, akinek a preferencia listáján egynél több csúcs van.

- Legyen $q_i = p_i$ redukált preferencia listáján a második csúcs.

- Legyen $p_{i+1} = q_i$ redukált preferencia listáján a legutolsó csúcs, egy későbbi lemma majd azt fogja megmutatni, hogy ekkor q_i első p_{i+1} listáján.
- Az előző két lépést addig ismételjük amíg a p_i sorozat nem ismétlődik.

Legyen $a_1, a_2, \ldots, a_r$ a kör, azaz minden-vagy-semmi sorozat, ami kialakul az előző algoritmus során.
Ezek után pedig végrehatjunk egy redukciót a megtalált minden-vagy-semmi sorozattal. Minden $i = 1, \ldots, r$-re a_i visszautasítja b_i-t és így b_{i+1} (modulo r) lesz az új, akit megkér. Ekkor b_{i+1} listáján minden a_i-nél rosszabbat ki lehet törölni.
Az előző két lépést pedig addig csináljuk, amíg vagy elfogy valakinek a listájáról az ember, ekkor nincs stabil párosítás vagy pedig mindenkién 1 ember van és ekkor ez a stabil párosítás.
Az alábbi lemma mutat rá, miért lehet redukálni minden-vagy-semmi sorozat mentén.

3.1.6. Lemma. Legyen $a_1, a_2, \ldots, a_r$ egy minden-vagy-semmi sorozat és minden $i = 1, \ldots, r$-re a_i redukált listáján a legelső ember pedig legyen b_i. Ekkor

- Minden stabil párosításban vagy minden i-re a_i és b_i párok vagy egyikőjük sem az.
- Ha létezik egy stabil párosítás amiben együtt van a_i és b_i akármilyen i-re is, akkor létezik olyan stabil párosítás amiben nem.

3.1.7. Következmény. Ha az eredeti gráfban van stabil párosítás, akkor a redukált preferencia listás gráfban is van.

3.1.8. Következmény. Ha a redukált preferencia listák egyike üres, akkor nincs stabil párosítás.

3.1.9. Lemma. Ha a redukált preferencia listák mindegyikén pontosan egy ember van, akkor ez egy stabil párosítást ad.

Az algoritmus futási ideje pedig $O(n^2)$.

3.2. Globális lista

A következőkben legyen egy G gráfon I egy SRP input és legyen ezen egy M egy párosítás. A következő definíciókban fontos kiemelni, hogy a preferencia listákon lehetnek ugyanolyan kedveltek, azaz u listáján v és w-t kedvelheti u ugyanannyira.

3.2.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy egy (u, v) él erősen blokkoló az M párosításra nézve, ha u és v is jobban kedvelik egymást, mint az M-beli párjukat.

3.2.2. Definíció. Azt mondjuk, hogy egy (u, v) él gyengén blokkoló az M párosításra nézve, ha u jobban kedveli v-t, mint az M-beli párját és v legalább annyira kedveli u-t, mint M-beli párját.

3.2.3. Megjegyzés. Ha a preferencia listákon nincsenek egyenlőségek, akkor az előző két definíció azonos.

3.2.4. Definíció. Azt mondjuk, hogy az M párosítás gyengén stabil, ha nincs ránézve erősen blokkoló él.

3.2.5. Definíció. Azt mondjuk, hogy az M párosítás erősen stabil, ha nincs ránézve gyengén blokkoló él.

Az előző definíciókból következik, hogy ha egy M párosítás erősen stabil, akkor gyengén is stabil. Most pedig a stabil szobatárs feladatnak adjuk meg kétféle szűkítését, majd használatukat és kapcsolatukat.

3.2.6. Definíció. A stabil szobatárs feladat globálisan rangsorolt párokkal a Stable Roomates egy olyan szűkítése, melyben a preferencia listákat egy rangsoroló függyvényből kapjuk. Azaz legyen $rank : E \to \mathbb{N}$ és ekkor u, v-t jobban kedveli, mint w-t, akkor és csak akkor, ha $e = \{u, v\}$ és $e' = \{u, w\}$ esetén $rank(e) < rank(e')$ és u indiferens v és w között, ha $rank(e) = rank(e')$.

3.2.7. Megjegyzés. A következőkben a Stable Roomates feladat globálisan rangsorolt párokkal feladatot röviden $SRP - GRP$-vel fogjuk jelölni.

Jelölés. A következőkben E_i-n azon éleket értjük, amelyek rangja i, továbbá $E_{\leq i} = E_1 \cup \cdots \cup E_i$ és feltehetjük, hogy csak $|E| = m$-ig vannak a rangok.

A modell alkalmazására három példát mutatunk most be. [2]

- Az első modellben a páronkénti vese cserés átültetést lehet modellezni, azaz van egy páciens akinek valamilyen halálos vese betegsége van és van önkéntes donorja, viszont a donorja és a páciens nem kompatibilis. Ekkor készíthetünk egy gráfot, amelyben egy csúcsot a páciens és önkéntes donorja alkot és két csúcs között, akkor megy él, ha a két donort megcseréljük, akkor mindenkinek kompatibilis vese jut. Fontos feltevés még mely statisztikailag igaz, hogy ha egy páciens donor pár több emberrel is cserélhet, akkor számukra lényegtelen, hogy melyikkel teszi ezt. Ekkor az egész feladat modellezhető egy $SRP - GRP$ modellel, ahol minden élnek ugyanakkora a rangja.

- A második modellben ugyanúgy a páronkétni vese átültetést modellezük, de más aspektusát is figyelembe vesszük: mégpedig, hogy az orvosok a csere előtt közvetlenül egy igen költséges teszttel állapítják meg, hogy az adott csere megtörténhet-e. Viszont az orvosok még a teszt előtt tudnak valószínűséget rendelni ahhoz, hogy az adott két pár között a csere megtörténhet-e. Ezen valószínűségek segítségével pedig adódik egy *rank* függvény, így megint modellezhető $SRP - GRP$-vel.

- Az utolsó modellben pedig a kollégiumi szobatárs keresését mutatjuk meg. A diákok magukról megválaszolnak egy pár kérdést például, mikor szeretnek lefeküdni aludni, mikor szeretnek felkelni és stb., majd ezek után lehet a diákokat egy több dimenziós térben ábrázolni, ahol kedveltséget két diák között a több dimenziós térbeli távolsággal mérünk.

Most pedig egy másik megközelítéssel karakterizáljuk a modellbeli feladatokat.

3.2.8. Definíció. Egy SRP inputot stabil szobatársak globálisan aciklikus preferenciákkal nevezünk, ha az inputból készített $P(G)$ gráf aciklikus. A $P(G)$ írányított gráfot pedig a következő féle képpen készítjük el, minden $e \in E$ élre feleltessünk meg egy csúcsot $P(G)$-ben és $e = \{u, v\}$ és $e' = \{u, w\}$ csúcsok között akkor és csak akkor menjen él, ha u w-t jobban kedveli, mint v-t, és ha u indiferens v és w között, akkor olvasszuk egybe ezt a két csúcsot.

3.2.9. Megjegyzés. A következőkben a Stable Roomates feladat globálisan aciklikus preferenciákkal inputot röviden $SRP - GAP$-val fogjuk jelölni.

Ekkor pedig a következő fontos megállapítást tehetjük, hogy

3.2.10. Állítás. [2] Legyen I egy RP input, ekkor I $SRP - GRP$ input akkor és csak akkor, ha I $SRP - GAP$-ben van.

Bizonyítás. $\Rightarrow$: Ekkor az irányíott élek a *rank* függvény szerint csökkenően haladnak így nem térhetünk vissza ugyanoda.
$\Leftarrow$: Ekkor a *rank* függvények jó lesz a gráf topologikus sorrend fordítottja.

Az $SRP - GRP$ inputnak van még egy fontos tuljdonsága ami a modellezhetőségen kívül még jobban kiemel őt. Az SRP inputok nem mindegyikében létezik gyengén stabil párosítás és NP-teljes eldönteni, hogy létezik-e gyengén stabil párosítás. Ellenben az $SRP - GRP$ feladatokban mindig van gyenge párosítás és polinomiális algoritmussal lehet találni egy ilyet.

3.2.11. Állítás. [2] Legyen $G = (V, E_1 \cup \dots E_m)$ egy $SRP - GRP$ input. Ekkor M párosítás gyengén stabil akkor és csak akkor, ha minden i-re $M \cap E_{\leq i}$ egy tartalmazásra nézve maximális párosítás $E_{\leq i}$-ben.

Bizonyítás. $\Rightarrow$: Indirekt tegyük fel, hogy $\exists i$, hogy $M \cap E_{\leq i}$ tartalmazásra nézve nem maximális $E_{\leq i}$-ben, ekkor viszont a kimaradó élek közül bármelyik erősen blokkoló lesz hiszen a későbbi élek amelyek alacsonyabban vannak rangsorolva

nem segíthetnek.
$\Leftarrow$: Indirekt tegyük fel, hogy M nem gyengén stabil, ekkor létezik erősen blokkoló él ezek közül pedig válasszuk a legkisebb rangút e-t akinek rangja legyen i. Ekkor viszont $E_{\leq i}$-ben a feltételek szerint maximal párosítás $M \cap E_{\leq i}$, így e-t nem lehet bevenni, mert legalább az egyik csúcs le van fedve viszont ez azt jelenti, hogy legfeljebb i rangúval van azaz e mégse lehet erősen blokkoló él.

Azaz $O(n+m)$ időben tudunk gyenge stabil párosítást keresni mégpedig úgy, hogy először az 1 rangú éleken keresünk nem bővíthető párosítást majd a párosított csúcsokat kitöröljük és megyünk tovább a 2 rangúakra és így tovább.
Egy hasonló tétel mondható erősen stabil párosításokra.

3.2.12. Állítás. [2] Legyen $G = (V, E_1 \cup \ldots E_m)$ egy $SRP - GRP$ input. Ekkor M párosítás erősen stabil akkor és csak akkor, ha minden i-re $M \cap E_{\leq i}$ egy teljes párosítás $\{e \in E_i : e$ nem szomszédos $e' \in E_{<i}$ éllel $\}$-ben.

A bizonyítás hasonló, és ekkor $O(m\sqrt{n})$ időben megvalósítható az erős stabil párosítás keresése.

4. fejezet

Népszerű párosítás általános gráfban

4.1. Népszerű párosítások karakterizációja

Mint azt a 3.2 fejezetben megemlítettem az a probléma, hogy általános gráfban népszerű párosítást találjunk vagy megmutassuk, hogy nem létezik NP-teljes szigorú preferencia listákra, pontosabban a páros sok csúcsú esetre.

4.1.1. Tétel. [4] Legyen G egy teljes gráf n csúccsal, ahol n páros. Ekkor eldönteni, hogy G-ben létezik-e népszerű párosítás vagy megmutatni, hogy nem létezik NP-teljes.

Amikor a gráf csúcsszáma páratlan, és a gráf elég sűrű, akkor tudjuk, hogy minden népszerű párosításból kimarad egy csúcs és azt gondolhatjuk, hogy ez talán segíthet megoldani ilyen esetekben a feladatot. Ezen gondolat mentén megyünk végig a 4.2 alfejezetben.
A 4.2 fejezetbeli tételek bizonyításában központi szerepet fog játszani a népszerű párosítások karakterizációja, aminek kimondásához kell egy kis előkészület. Legyen M egy párosítás $G = (V, E)$ gráfban és RP preferencia listákkal, ekkor minden $(v, u) \notin M$-re definiáljuk a következő $vote_u(v, M)$ függvényt a következő féleképpen,

$$vote_u(v, M) = \begin{cases} +, \text{ha } u \text{ } v\text{-t jobban kedveli, mint } M(u)\text{-t} \\ -, \text{ ha } u \text{ } M(u)\text{-t jobban kedveli, mint } v\text{-t} \end{cases}$$

Ekkor minden $(u, v) \notin M$ élhez rendeljük a $(vote_u(v, M), vote_v(u, M))$ párt. Például, ha $\{+, +\}$ éleket találnánk akkor ez az él egy blokkoló él lenne a stabil párosítások esetében. Ekkor legyen G_M azon gráf, amely G-ből jön, úgy hogy minden $\{-, -\}$ élet kitöröltünk a G gráfból. A következőkben az alternáló utakat köröket az M és a nem M-beli élekre nézzük.

4.1.2. Tétel. [6] M népszerű párosítás G-ben, akkor és csak akkor, ha G_M-ben nem létezik a következő obijektumok egyike sem:

1. Alternáló kör, amiben van $\{+,+\}$ él.
2. Alternáló út két különböző $\{+,+\}$ éllel.
3. Alternáló út, amelyben van $\{+,+\}$ él és egy párosítatlan csúcsban ér véget.

4.2. Nagy fokszámú gráfok esete

Ezen karakterizáció segítségével könnyen ellenőrizhető polinomiális algoritmussal, hogy egy adott párosítás népszerű-e vagy sem [6]. Most pedig ezen karakterizáció segítségével azt mutatjuk meg, hogy teljes gráfban minden népszerű párosítás egyben stabil is. Ez pedig nagyon jó hír hisz a stabil párosítás keresésére van polinomiális algoritmus az Irving algoritmusa így könnyű megnézni, hogy van egy népszerű párosítás a gráfban.

4.2.1. Állítás. [4] Legyen G egy teljes gráf páratlan csúccsal, ekkor minden népszerű párosítás egyben stabil is.

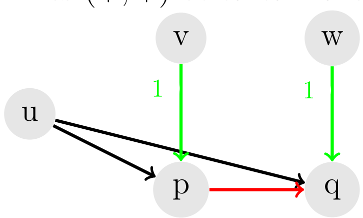
Bizonyítás. Legyen M népszerű párosítás és legyen a kihagyott párosítatlan csúcs u. Azt fogjuk megmutatni, hogy nem létezik $\{+,+\}$ él a népszerű párosításban, és ehhez a karakterizáció 3. pontját használjuk. Első észrevétel, hogy minden népszerű párosítás ezen a gráfon minden csúcsot lefog kivéve egyet. Jelölje ezt a csúcsot u. Legyen $v \neq u$ csúcs, majd vegyük $M(v)$-nek egy $w \neq v \neq u$ szomszédját $(n \geq 5)$. Ekkor az $u, v, M(v), w$ út alternáló út és így nem lehet rajta $\{+,+\}$ él. Így minden $G_M \setminus M$-beli élet le is tudunk fogni, mert minden u-n lévőt lefogunk és minden $(M(v), w)$-t is, azaz nem létezik a párosításra $\{+,+\}$ él. Most már csak azt kell megmutatni, hogy az út minden éle G_M-ben van, azaz egyik se $(-,-)$. Az $(u, v) \in G_M$, mert u-nak nincs párja így ez az él $(+,\pm)$ alakú. $(v, M(v)) \in G_M$, mert a párosításban van. $(M(v), w) \in G_M$, hisz ezt az élet teszteljük $(+,+)$-ra. Így minden népszerű párosítás egyben stabil is.

Ekkor persze adódik az a kérdés, hogy meddig igaz az az állítás, hogy, ha a G gráf minden fokszáma legalább $n - c$, akkor polinom időben el lehet dönteni, hogy létezik-e népszerű párosítás a gráfban. Nagyobb nehézségek nélkül meg tudjuk mutatni $c = 2$-re is az előző állítást.

4.2.2. Állítás. Legyen G egy gráf, amiben minden csúcs fokszáma legalább $n - 2$ és n páratlan. Ekkor minden népszerű párosítás egyben stabil is.

Bizonyítás. Legyen M népszerű párosítás és legyen a kihagyott párosítatlan csúcs u. Ha u fokszáma $n - 1$, akkor az előző állítás érvelése ugyanúgy igaz itt is, tehát ez a népszerű párosítás stabil is. Legyen u fokszáma $n - 2$. Ekkor legyen p az a csúcs amivel nem szomszédos u. Ekkor a népszerű párosításban mindenkinek van párja. Ugyanis, ha egy p-n kívülinek nincs párja, akkor u-val lehetne párosítani, így népszerűbb lenne a párosítás, ha pedig p-nek nincs párja, akkor egy másik csúcsnak sincsen párja, de ez a csúcs, akkor már biztosan szomszédos u-val, így megint népszerűbb párosítást lehetne elérni. Most pedig megmutajuk, hogy egyik él sem lehet $\{+,+\}$. Egyik u-n lévő él sem lehet $\{+,+\}$, mert ekkor az előző bizonyítás jelöléseivel $u, v, M(v)$ alternáló út lenne $\{+,+\}$ éllel és fedetlen csúcsban végződne. Ugyanígy minden más élre is egy ilyen alternáló út létezne ellenpéldaként, csak azt kell megmutatni, hogy az út minden éle G_M-ben van, de ez ugyanúgy megy, mint az előbb. Tehát minden népszerű párosítás stabil is.

Így $c = 2$-re is polinom időben tudjuk eldönteni, hogy van-e a gráfban népszerű párosítás. Persze gondolhatnánk, hogy ez a bizonyítás mindegyik c-re eljátszható, de már $c = 3$-ra is előjön az a probléma, hogy $(+,+)$ éleket a G_M gráfban keresünk, azaz a G-ből kitöröltük a $(-,-)$ éleket. Viszont ez azt jelenti, hogy lehet, hogy van a G_M-ben $(+,+)$ él, de nem tudunk egy alternáló utat készíteni, aminek a végén u van, ugyanis a $(-,-)$ élek adták volna az út egy részét. Ilyen eset elő is fordulhat, azaz $c \geq 3$ esetén már nem feltételenül lesz igaz, hogy minden népszerű párosítás egyben stabil is, amint azt az alábbi példa mutatja.
A gráfon a zöld élek a népszerű párosítás élei a piros él blokkoló élt jelent. Az alábbi gráf részlet jó ellenpéldát ad a $c = 3$ esetre, hiszen ekkor a v és a w el vannak szigetelve midenki mástol, hiszen a legkedveltebb párjukat kapták, és ekkor nincs $(+,+)$-ot tartalmazó alternáló út, amely u-ban végződik.



Az ellenpéldát nem nehéz úgy kiegészíteni, hogy tetszőleges páratlan n-re jó legyen, mindegyik csúcsot összekötjük a többivel, és csak u lesz az akinek $n-3$ a fokszáma. Ebből úgy tűnhet, hogy akkor nem is lehet polinom időben keresni népszerű párosítást, de ez nem így van, mert mint azt sikerül megmutatni, a blokkoló élek lehetséges helyzetei igen speciálisak, és ebből sikerül polinomiális futásidejű algoritmust adni a feladatra.

4.2.3. Tétel. Ha egy G gráf olyan, hogy minden fokszáma $\geq n-3$, akkor $O(n^2)$ időben eldönthető, hogy létezik-e népszerű párosítás, és ha igen, meg is adható egy.

Bizonyítás. Mint az előző két állításnál 4.2.1, 4.2.2 most is egy fontos lemma lesz az, hogy majdnem mindenkinek van párja, azaz

4.2.4. *Állítás.* Ha a G gráf olyan, hogy minden fokszáma $\geq n-3$, akkor minden népszerű párosításban egy vagy három csúcs maradhat csak párosítatlanul.

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy a párosítatlan csúcsok független ponthalmazt alkotnak, melyből adódik az állítás.

Először a G-re futtatjuk Irving algoritmusát (3.1), ha találunk stabil párosítást, akkor készen vagyunk, hiszen 2.1.8 miatt minden stabil népszerű is. Ezért tegyük fel, hogy nem találtunk stabil párosítást, ezek után minden csúcson egyesével lépkedjünk végig, hogy megnézzük van-e őt nem fedő népszerű párosítás. Ha az adott csúcs fokszáma $> n-3$, akkor a 4.2.2 állítás bizonyításához hasonlóan most is tudjuk, hogy minden őt elkerülő népszerű párosítás stabil párosítás is. Így az érdekes csúcsok most már csak azok, amelyek fokszáma $n-3$.
Legyen u a kérdéses csúcs v és w pedig a két csúcs amelyek nem szomszédosak vele. A következőkben egy v csúcs esetén v_i-n a v csúcs i. legkedveltebb szomszédját fogom érteni. Legyen $p = v_1, q = w_1$. A továbbiakban a $p = q$ esettel foglalkozunk, a $p \neq q$ esetet pedig kisebb technikai módosításokkal hasonlóan kezelhetjük. A következőkben $G_{\setminus pq}$ alatt azt a gráfot értjük, amelyiket G-ből kapjuk (p, q) kitörlésével.

4.2.5. *Lemma.* G-ben akkor és csak akkor létezik népszerű párosítás, ami u-t fedetlenül hagyja, ha létezik S stabil párosítás $G_{\setminus pq}$-ban, most $p \neq q$, amire a következők igazak,

- $(v, p) \in S$, $(w, q) \in S$ vagy $(v, q) \in S$, $(w, p) \in S$ és
- az S párosításban $\{u, v, w, p, q\}$-n kívül mindenkinek u,v és w-nél jobb párt ad.

Bizonyítás. $\Rightarrow$: Legyen P népszerű párosítás G-ben ami fedetlenül hagyja u-t. Ekkor

4.2.6. *Lemma.* G-ben P-t csak (p, q) blokkolja.

Bizonyítás. Mivel nem volt stabil párosítás G-ben, így P-t biztosan blokkolja valamilyen él. Most nézzük végig az eseteket, hogy milyen élek blokkolhatnak. Legyen (r, s) a blokkoló él, ekkor

- Ha $M(r)$ és $M(s)$ nem v és w, akkor a következő utak közül valamelyik megfelelő alternáló út lesz: $s, r, M(r), u$ vagy $r, s, M(s), u$.
- Ha $M(r)$ és $M(s)$ a v és w csúcsok valamilyen sorrendben, akkor ha r és s nem p és q, akkor megmutatjuk, hogy r-nél és s-nél nem kedvelhetnek jobban senkit $M(r)$ és $M(s)$. Indirekt tegyük fel, hogy $\exists z$ csúcs, hogy $z >_{M(r)} r$. Ekkor a $s, r, M(r), z, M(z), u$ jó alternáló út lesz ellenpéldaként.

Így minden élet kizártunk kivéve (p, q)-t így kizárásos alapon ez az él a blokkoló.

4.2.7. *Lemma.* $(v,p),(w,q) \in P$ vagy $(v,q),(w,p) \in P$

Bizonyítás. Adódik az előző lemma indirekt bizonyításából.

4.2.8. *Lemma.* P minden $\{u,v,w,p,q\}$-n kívüli csúcsnak u,v és w-nél jobb párt ad.

Bizonyítás. Egyrészt jobb párt kapnak, mint u. Indirekt tegyük fel, hogy r csúcs rosszabbat kapott, ekkor viszont az $(r, M(r))$ pár helyett vegyük inkább az (r,u) párt és így népszerűbb párosítást kaptunk.
Másrészt jobb párt kapnak, mint v (a w esete ugyanígy). Indirekt tegyük fel, hogy r csúcs jobban kedveli v-t, mint párját. Ekkor viszont a q,p,v,r,u vagy p,q,v,r,u alternáló út $(+,+)$ élet tartalmazva u-ban végződik, azaz P mégse népszerű.

Azaz azt kaptuk, hogy P stabil $G_{\setminus pq}$-ban.
$\Leftarrow$: Ez az irány pedig a népszerű párosítás karakterizációjából jön (lásd 4.1.2.). Ahhoz, hogy $(+,+)$ élt tartalmazó alternáló utat vagy kört alkothassunk az eleje p,q,w,r vagy q,p,v,r vagy q,p,u,r vagy p,q,v,r-el kell, hogy kezdődjön, viszont megköveteltük, hogy v és w negatív vágást alkossanak, azaz minden belőlük kimenő él másba p és q-n kívül $(-,-)$ legyen. Így viszont nem lehet alternáló kört vagy utat csinálni a karakterizációnak megfelelően.

Irodalomjegyzék

[1] D. Abraham, R. Irving, T. Kavitha, and K. Mehlhorn. Popular matchings. volume 37, pages 424–432, 01 2005.

[2] D. J. Abraham, A. Levavi, D. F. Manlove, and G. O'Malley. The stable roommates problem with globally-ranked pairs. In X. Deng and F. C. Graham, editors, *Internet and Network Economics*, pages 431–444, Berlin, Heidelberg, 2007. Springer Berlin Heidelberg.

[3] P. Biró, R. W. Irving, and D. F. Manlove. Popular matchings in the marriage and roommates problems. In T. Calamoneri and J. Diaz, editors, *Algorithms and Complexity*, pages 97–108, Berlin, Heidelberg, 2010. Springer Berlin Heidelberg.

[4] Á. Cseh and T. Kavitha. Popular matchings in complete graphs. *arXiv preprint arXiv:1807.01112*, 2018.

[5] D. Gale and L. S. Shapley. College admissions and the stability of marriage. *The American Mathematical Monthly*, 69(1):9–15, 1962.

[6] C.-C. Huang and T. Kavitha. Popular matchings in the stable marriage problem. In L. Aceto, M. Henzinger, and J. Sgall, editors, *Automata, Languages and Programming*, pages 666–677, Berlin, Heidelberg, 2011. Springer Berlin Heidelberg.

[7] R. W. Irving. An efficient algorithm for the „stable roommates" problem. *Journal of Algorithms*, 6:577–595, 1985.

[8] I. R.W, D. Manlove, and S. Scott. The stable marriage problem with master preference lists. *Discrete Applied Mathematics*, 156(15):2959–2977, August 2008.