

NYILATKOZAT

Név: SANDOR ZSUZSANNA

ELTE Természettudományi Kar, szak: BSC MATEMATIKA

NEPTUN azonosító: EZP51M

Szakedolgozat címe: VÉLETLEN GRAFOK SPEKTRUMA

A **szakedolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2021. 05. 28.

Sándor Zsuzsanna

a hallgató aláírása

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Sándor Zsuzsanna

VÉLETLEN GRÁFOK SPEKTRUMA

Szakdolgozat

Matematika BSc, alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető:

Backhausz Ágnes

Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék



Budapest, 2021

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Backhausz Ágnesnek, aki a kapcsolódó szakirodalom rendelkezésemre bocsátásával, rendszeres konzultációkkal, észrevételeivel, javaslataival segítette a szakdolgozatom létrejöttét.

Köszönöm a családom szeretetét és támogatását tanulmányaim alatt.

Tartalomjegyzék

Bevezetés	5
1. Gráfok spektruma, alapfogalmak	7
1.1. A spektrum fogalma	7
1.2. Gráftulajdonságok és spektrum	10
1.3. Néhány gráf spektruma	15
2. Véletlen gráfmodellek	17
2.1. Spektrálmérték, momentumok	17
2.2. Erdős–Rényi-modell	19
2.3. Reguláris modell	23
2.4. Preferenciális kapcsolódású modell	27
3. A spektrum stabilitása	34
3.1. A spektrum stabilitása	34
4. Összefoglaló, alkalmazások	38
5. Matlab kódok	41
5.1. Determinisztikus gráfok spektrumaik	41
5.2. Véletlen gráfmodellek és spektrumaik	44
5.2.1. Erdős–Rényi-gráf	44
5.2.2. Reguláris gráf	46
5.2.3. Az Erdős–Rényi és a reguláris gráf elméleti sűrűségfüggvényeinek grafikonja	48
5.2.4. PA gráf	49
5.2.5. Laplace-Spektrum	51
5.2.6. Előjelnélküli Laplace-spektrum	55

5.2.7. Perkoláció	59
-----------------------------	----

Bevezetés

A gráfelmélet a matematika széleskörűen alkalmazott ágai közé tartozik. Ezek közül már jó néhányal megismerkedhettünk egyetemi éveink alatt: ütemezési feladatok megoldása, legrövidebb út keresés, szállítási feladatok, párosítások, színezések a teljesség igénye nélkül.

A véletlen gráfok elméletében a matematika két különböző területe, a gráfelmélet és a valószínűségszámítás találkozik. Először Erdős Pál és Rényi Alfréd foglalkozott véletlen gráfokkal 1959-ben. A következő nagyobb lépés 1999-ben történt, mikor Barabási Albert-László és Albert Réka megalkotta a Barabási–Albert-modellt [2], és ezzel le is tették a mai modern véletlen gráf kutatás alapjait. Ez a gráfmodell alkalmasnak bizonyult különböző valós hálózatok szimulálására, mint az internet linkhálózata, társadalmi és kapcsolati hálózatok, vagy biológiai hálózatok.

A matematikában *véletlen gráfnak* nevezzük egy gráfot, ha egy véletlen folyamat hozza létre. A véletlen gráfok elmélete a gráfok olyan tulajdonságait tárgyalja, amelyek nagy valószínűséggel fordulnak elő a gráfok egy bizonyos eloszlása esetén. A kutatók gyakran a véletlen gráfok aszimptotikus viselkedésére összpontosítanak, azokra az értékekre, amelyeket akkor tapasztalnak, ha a gráf mérete nagyon nagyra növekszik. [13]

A gráfokat főleg a kombinatorika eszközei közé szokás sorolni, mégis lineáris algebrai módszerekkel is rengeteg mindent megtudhatunk róluk. A gráf spektrumából, vagyis az adjacenciamátrix sajátértékeinek halmazából is sok minden kiolvasható. Például meghatározható az összefüggőségi komponensek száma a spektrum egy bizonyos változatából, vagy megmondható a spektrumok alapján, hogy páros gráfhoz tartoznak-e. A Hoffmann-tétel pedig a spektrum segítségével ad felső becslést a gráfban lévő legnagyobb független pontthalmaz méretére.

Dolgozatomban véletlen gráfok spektrumának asszimptotikus viselkedését vizsgálom némi előkészület után. A gráfmodellek leprogramozásával ábrákat is készítettem.

Szakdolgozatom első részében leírom a téma tárgyalásához szükséges alapfogalmakat. Definiálom a gráfokhoz kapcsolódó mátrixokat. Ezek közül leginkább a adjacenciamátrix, incidenciamátrix, Laplace-mátrix és az előjel nélküli Laplace-mátrix kap majd jelentősebb szerepet később a dolgozatomban. Valamint definiálok különböző spektrumokat, amik a gráf mátrixainak sajátértékeiből állnak. Ezután állításokat fogalmazok meg, melyek alapján a gráf spektrumaiból olvashatunk ki tulajdonságokat a gráfról, illetve a véletlen gráfokról szóló részekhez felhasználhatók. Végül néhány konkrét determinisztikus gráf típus spektrumát mutatom be.

A második részben bevezetem a spektrálmértéket és leírok egy, a momentum módszer alapját képező tételt, aminek segítségével bizonyos esetekben be lehet látni, hogy egy gráfsorozat limeszének milyen spektrálmértéke lesz. Majd szót ejtek a hisztogramokról is, amit a későbbiekben a gráfok spektrumnak ábrázolásához használok. Ezután három a szakirodalomban leggyakrabban használt véletlen gráfmodellt (Erdős–Rényi, reguláris, preferenciális kapcsolódású) írok le és elemzem a spektrumait néhány róluk szóló tétel mellett. A modellek leprogramozásában Matlabot használtam.

A harmadik részben perkoláció mellett vizsgálom a különböző preferenciális kapcsolódású gráfok spektrumának stabilitását. Vagyis véletlenszerűen elhagyva éleket a gráfból figyelem, hogy mennyiben változott ettől a spektrum. A perkoláció valós jelenségeknek is megfeleltethető. Előfordulhat, hogy a hálózatnak csak egy részét tudjuk megfigyelni, vagy bizonyos kapcsolatok meghibásodtak.

1. fejezet

Gráfok spektruma, alapfogalmak

Ebben a fejezetben a gráfok spektrumával kapcsolatos alapvető fogalmakat és definíciókat szeretném tisztázni, illetve megemlíteni néhány fontosabb összefüggést a gráf szerkezete és spektruma között. Az itt felhasznált forrásaim: Andries E. Brouwer és Willem H. Haemers *Spectra of graphs* című könyve [3]; David Ellis *Eigenvalue methods in extremal combinatorics* című online cikke [4] és a Lévy–Desplanques-tétel bizonyítása [10] volt. A jelölések közt használni fogom az I -t, mint identitásmátrix, a J -t csupa 1-es mátrixként és $\mathbf{1}$ -et csupa 1-es vektorként.

1.1. A spektrum fogalma

Legyen G egy párhuzamos éleket nem tartalmazó gráf. Ekkor a G -hez tartozó $A \in G(V) \times G(V)$ *adjacenciamátrix* egy a G csúcsaival indexelt négyzetes mátrix, amelyben $A_{xy} = 1$, ha az x és y csúcs között fut él, különben $A_{xy} = 0$. Ez általánosítható multigráfokra is. Ekkor A_{xy} értéke megegyezik az x és y csúcsok között futó élek számával. Irányított gráf esetén értelmezhetjük úgy az adjacenciamátrixot, hogy $A_{xy} = 1$ pontosan akkor, ha x -ből y csúcsba mutat él a gráfban.

Legyen G egy hurokéleket nem tartalmazó irányítatlan gráf. Az *incidenciamátrixa* az az M 0–1-mátrix, aminek sorai G csúcsai, oszlopai pedig az élei szerint vannak indexelve, és $M_{ve} = 1$ pontosan akkor, ha e él illeszkedik a v csúcsra.

Legyen G egy irányított hurokélmentes gráf. G *irányított incidenciamátrixa* az a G csúcsaival indexelt sorú, éleivel indexelt oszlopú N mátrix, aminek elemei rendre $N_{ve} = -1, 1, 0$, ha e kezdőpontja v , végpontja v , nem illeszkedik v -re.

Legyen G egy hurokélmentes irányítatlan gráf. Ekkor G *Laplace-mátrixa* $L = D - A$,

előjel nélküli Laplace-mátrixa $Q = D + A$ csúcsok által indexelt négyzetes mátrixok, ahol A a G gráf adjacenciamátrixa, D pedig olyan diagonális mátrix, amelynek D_{xx} eleme megegyezik az x csúcs fokszámával minden $x \in G(V)$ csúcsra. Ezek alapján már a Laplace-mátrix néhány egyszerűbb tulajdonsága gyorsan megkapható.

1.1.1. Állítás ([3]). *A Laplace-mátrix minden sorösszege és minden oszlopösszege is 0.*

1.1.2. Állítás ([3]). *A Laplace-mátrix és a jelöletlen Laplace-mátrix is pozitív szemidefinit.*

Bizonyítás. A korábbi jelöléseket használva fennállnak a következő – kifejtésükkel könnyen ellenőrizhető – egyenlőségek: $Q = MM^T$ és $L = NN^T$. Emiatt tetszőleges $u \in \mathbb{N}$ esetén $u^T Lu = \sum_{xy \in G(E)} (u_x - u_y)^2 \geq 0$ és $u^T Lu = \sum_{xy \in G(E)} (u_x - u_y)^2 \geq 0$. \square

Véges gráf (közönséges) spektruma alatt a gráf adjacenciamátrixának spektrumát értjük, vagyis a sajátértékek halmazát multiplicitással.

Irányítatlan hurokélmentes véges gráf Laplace-spektruma alatt a gráf Laplace-mátrixának spektrumát, előjel nélküli Laplace-spektruma alatt pedig előjel nélküli Laplace-mátrixának spektrumát értjük.

A sajátértékek multiplicitását helyenként a kitevővel fogom jelölni a dolgozatomban.

A spektrum meghatározásához szükség van a csúcsok egy rendezésére, ami alapján felírhatjuk az A adjacenciamátrixot (ill. Laplace-mátrixot). Azonban egy adott gráf spektruma nem függ a választott csúcssorrendtől, mivel ez egy X -ből K -ba képező lineáris transzformáció spektruma K^X vektortéren, ahol X a csúcshalmaz, K pedig valamilyen test, például \mathbb{C} vagy \mathbb{R} .

A következő – kifejtve könnyen belátható – két állítás azt mutatja be, hogyan ellenőrizhető a gráf szerkezete alapján, hogy egy adott vektor a K^X vektortéren a θ sajátértékhez tartozó sajátvektor, illetve Laplace-sajátvektor-e:

1.1.3. Állítás ([3]). $Au = \theta u \iff \sum_{x \rightarrow y \in E(G)} u_y = \theta u_x \quad (\forall x \in V(G)).$

1.1.4. Állítás ([3]). $Lu = \theta u \iff \sum_{xy \in E(G)} u_y = (d_x - \theta)u_x \quad (\forall x \in V(G)).$

G gráf karakterisztikus polinomja alatt G adjacenciamátrixának a karakterisztikus polinomját értjük: $p_A(\theta) = \det(\theta I - A)$. Egy sajátérték algebrai multiplicitása k , ha ez a sajátérték k -szoros gyöke a karakterisztikus polinomnak. Sajátérték geometriai multiplicitása alatt pedig a sajátaltér dimenzióját értjük.

1.1.5. Állítás ([3]). Legyen G n csúcsú irányított gráf. Ekkor G karakterisztikus polinomja $p_A(t) = \sum_{i=1}^n c_i t^{n-i}$, ahol $c_i = \sum_C (-1)^{c(C)}$, C itt befutja az összes i csúcsból álló részgráfot, amire igaz, hogy minden csúcsának ki- és befoka is 1 (vagyis diszjunkt irányított körökből áll).

Például vegyünk egy irányított háromszöget, mint G gráf. Ekkor $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ az adjacenciamátrix. Ennek karakterisztikus polinomja (definíció szerint számolva)

$$p_A(t) = \det(tI - A) = \begin{vmatrix} t & -1 & 0 \\ 0 & t & -1 \\ -1 & 0 & t \end{vmatrix} = t^3 - 1.$$

Ugyanezt számolhatjuk az állítás szerint is. Mivel 0 csúcsú gráf csak egy van, az üres gráf, és ez 0 darab körből áll, így $c_0 = (-1)^0 = 1$. Ebben a gráfban nincsenek hurokélek, így $c_1 = 0$. Végül egy részgráf van, aminek mindhárom csúcsának ki- és befoka is 1, a teljes G , ezért $c_3 = (-1)^1 = -1$. Ezeket behelyettesítve a képletbe szintén megkapjuk a $p_A(t) = t^3 - 1$ polinomot.

Ugyanez a leírás igaz irányítatlan gráfok esetén is a karakterisztikus polinomra (minden élet két ellentétes irányú éllel helyettesíthetünk).

$\frac{d}{dt} \det(tI - A) = \sum_x \det(tI - A_x)$, ahol A_x az a részmátrix, amit A -ból az x csúcs sorát és oszlopát elhagyva kapunk. Tehát $p'_A(t)$ az összes G -ből egy csúcs eltörlésével keletkező részgráf karakterisztikus polinomjának az összege.

Például visszatérve az előbbi irányított háromszöghöz: $p'_A(t) = 3t^2$, illetve bármely csúcs elhagyásával egy 1-hosszú irányított utat kapunk, amelynek karakterisztikus polinomja: $\begin{vmatrix} t & -1 \\ 0 & t \end{vmatrix} = t^2$. Ezeket összeadva valóban a deriváltat kapjuk.

Ha G egy egyszerű, irányítatlan, n -csúcsú gráf, akkor az A adjacenciamátrix szimmetrikus, emiatt pedig minden sajátértéke valós szám. Ez pedig maga után vonja, hogy minden sajátérték algebrai multiplicitása egybeesik a geometriai multiplicitásával. Mivel A diagonális elemei mind nullák, A nyoma $\text{tr}(A) = \sum_i A_{ii} = 0$, vagyis a sajátértékek összege is 0-val egyenlő.

Hasonló gondolatmenet vihető végig a Laplace-mátrixra is: L valós, szimmetrikus mátrix, ezért a Laplace-spektrum is valós, és az algebrai és geometriai multiplicitás itt is egybeesik. Ezenfelül L pozitív szemidefinit és szinguláris (sorait/oszlopait összeadva

0-t kapunk). A Laplace-mátrix sajátértékeinek összege egyenlő az élszám kétszeresével, azaz $\text{tr}(L)$ -lel, ami a definícióiból adódóan ugyanannyi, mint $\text{tr}(Q)$, az előjel nélküli Laplace-mátrix nyoma. Végül Q -nak is valós a spektruma nemnegatív sajátértékekkel.

1.2. Gráftulajdonságok és spektrum

Ha a gráf k -reguláris, vagyis minden csúcsának foka k , akkor minden sajátérték abszolút értéke legfeljebb k . Ez könnyen látható, ha feltesszük, hogy létezik t sajátérték, ami mégis nagyobb abszolút értékű k -nál. Ez azt jelentené, hogy a $(tI - A)$ mátrix szigorúan diagonálisan domináns, ami miatt nem lehet szinguláris (Lévy–Desplanques-tétel [10]), vagyis t mégsem lehet sajátérték. A k szám viszont sajátérték, mivel $A\mathbf{1} = k\mathbf{1}$. A k -reguláris gráf esetén a Laplace-mátrix $L = kI - A$ alakú. Legyenek a spektrum elemei $k = \theta_1 \geq \theta_2 \geq \dots \geq \theta_n$, a Laplace-spektrum elemei pedig $0 = \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n$ jelöléssel megadva. Ha vesszük a Laplace-spektrum egy μ_i elemét, akkor $\mu_i I - (kI - A)$ szinguláris. Ennek a (-1) -szerese is szinguláris: $-\mu_i I + (kI - A) = (k - \mu_i)I - A$, amiből kiolvasható egy $k - \mu_i$ értékű sajátértéke A -nak. Ezek a kiolvasott értékek egyre kisebbek, minél nagyobb μ_i . Tehát $\theta_i = k - \mu_i$ fennáll minden i indexre 1-től n -ig.

Ha G gráf adjacenciamátrixa A és Laplace-mátrixa L , akkor G komplementerének, \overline{G} -nek adjacenciamátrixa $\overline{A} = J - I - A$ és Laplace-mátrixa $\overline{L} = nI - J - L$. Az L sajátvektorai a megfelelő méretű J mátrixnak is sajátvektorai, mivel L szimmetrikus, és $\mathbf{1}$ sajátvektora, így a többi sajátvektora merőleges lesz $\mathbf{1}$ -re, vagyis ezek a vektorok 0 sajátértékkel sajátvektorai J -nek is. Ezért \overline{L} sajátértékei: $0, n - \mu_2, \dots, n - \mu_n$, ahol $\mu_n \leq n$. Ha G k -reguláris, hasonló a megoldás a közönséges spektrumra is: ha a sajátértékei $\theta_1 \geq \dots \geq \theta_n$, akkor a komplementer sajátértékei: $n - k - 1, -1 - \theta_2, \dots, -1 - \theta_n$.

A reguláris gráfok spektrumáról ezen felül még sok mindent le fogok írni a dolgozatom 3. részében.

Az adjacenciamátrix hatványaiból kiolvasható az adott hosszú zárt séták száma, ami a 2. részben leírtak szerint felhasználható gráfok sorozatának konvergenciájának bizonyítására:

1.2.1. Állítás ([3]). *Legyen h egy nem negatív egész szám. Ekkor az x -ből y -ba vezető h hosszú séták száma $(A^h)_{xy}$.*

Bizonyítás. Használjunk h szerinti (teljes) indukciót. Először tekintsük a $h = 1$ esetet. Ekkor A_{xy} valóban 1, ha van x és y között 1 hosszú séta (él), illetve 0, ha nincs. Tegyük fel,

hogy $h = k$ -ig beláttuk az állítást. Most szorozzunk újra rá az A^k mátrixra A -val. Ekkor $A_{xy}^{h+1} = \sum_{vy \in E(G)} A_{xv}^h$, mivel A^h x . sorát kell skalárisan szorozni A mátrix y . oszlopával, amiben y szomszédjainál 1-es, máshol 0 szerepel. Vagyis $h + 1$ -re is teljesül az állítás. \square

Ebből kifolyólag egy irányítatlan gráf esetén $(A^2)_{xx}$ az x csúcs fokszáma, illetve $tr(A^2)$ egyenlő az élszám kétszeresével; hasonlóan $tr(A^3)$ megegyezik a gráfbeli háromszögek hat-szorosával.

Egy darab irányított élből álló gráf sajátértékei mind 0-k. Irányítatlan gráfban ilyen nem fordulhat elő.

1.2.2. Állítás ([3]). *Legyen G egy irányítatlan gráf. Pontosan akkor lesz az összes sajátértéke 0, ha G -nek nincsenek élei. Ugyanez igaz a Laplace- és az előjel nélküli Laplace-sajátértékekre is.*

Ennél általánosabban, megadható egy felső becslés a gráf átmérőjére:

1.2.3. Állítás ([3]). *Legyen G egy d átmérőjű gráf. Ekkor G -nek legalább $d + 1$ különböző sajátértéke, legalább $d + 1$ különböző Laplace-sajátértéke, és legalább $d + 1$ különböző előjel nélküli Laplace-sajátértéke van.*

Bizonyítás. Legyen M egy tetszőleges nemnegatív mátrix, sorai és oszlopai $V(G)$ -vel indexelve, és $\forall x \neq y$ esetén $M_{xy} > 0$ pontosan akkor, ha x és y szomszédosak. Legyenek $\theta_1, \dots, \theta_t$ M különböző sajátértékei. Ekkor $(\theta_1 I - M)(\theta_2 I - M) \dots (\theta_t I - M) = 0$, így M^t előáll a $I, M, M^2, \dots, M^{t-1}$ mátrixok lineáris kombinációjaként. Azonban ha $d(x, y) = t$, akkor különböző G -beli x és y csúcsokra $M_{xy}^i = 0$ minden i -re 0-tól $(t - 1)$ -ig, és $M_{xy}^t > 0$. Ez pedig ellentmondás, tehát $t > d$. Ezt alkalmazzuk $M = A$ -ra, $M = nI - L$ -re és $M = Q$ -ra, ahol A az adjacenciamátrixa, L a Laplace-mátrixa, és Q az előjel nélküli Laplace-mátrixa G -nek. \square

Egy gráf Laplace-spektrumából meghatározható a gráfhoz tartozó feszítőfák száma, ami pontosan akkor 0, ha a gráf nem összefüggő.

1.2.4. Állítás ([3]). *Legyen G egy legalább egy csúcsú irányítatlan (multi)gráf L Laplace-mátrixszal és $0 = \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n$ Laplace-sajátértékekkel. Jelölje l_{xy} az x . sor és y . oszlop elhagyásával keletkező mátrix determinánsának a $(-1)^{i+j}$ szeresét (előjeles aldeterminánst). Ekkor a feszítőfák száma*

$$N = l_{xy} = \det(L + \frac{1}{n^2} J) = \frac{1}{n} \mu_2 \dots \mu_n \quad \forall x, y \in V(G).$$

Egy G gráfot *páros gráfnak* nevezünk, ha a csúcshalmaza felosztható két diszjunkt csúcshalmazra, V_1 -re és V_2 -re úgy, hogy minden él a két ponthalmaz között fusson. Egy $G \in \mathbb{R}^{n+m} \times \mathbb{R}^{m+n}$ irányítatlan páros gráf adjacenciamátrixa $A = \begin{bmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix}$ alakú, ahol $B \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, azaz $|V_1| = m$, $|V_2| = n$. Ebből következik, hogy a spektrum a 0-ra vonatkozóan szimmetrikus, mivel ha $u \in \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^n$ és $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ sajátvektora A -nak θ sajátértékkel, akkor az $\begin{bmatrix} u \\ -v \end{bmatrix}$ vektor is sajátvektora lesz $-\theta$ sajátértékkel. Ennek a fordítottja is igaz:

1.2.5. Állítás ([3]). (i) *Egy gráf pontosan akkor páros, ha minden sajátértékére igaz, hogy az ellentettje is sajátértéke ugyanazzal a multiplicitással.*

(ii) *Egy összefüggő gráf pontosan akkor páros, ha a legnagyobb sajátértékének az ellentettje is sajátérték.*

Páros gráf adjacenciamátrixának rangja $r(A) = 2r(B)$. Ha $|V_i| = n_i$ ($i = 1, 2$) és $n_1 \geq n_2$, akkor $r(A) \geq 2n_2$, így a 0 sajátérték multiplicitása legalább $n_1 - n_2$. Általánosságban nem tudjuk felismerni, hogy egy gráf páros-e csupán a Laplace- vagy az előjel nélküli Laplace-spektrumból. Például a $K_{1,3}$ és a $K_1 + K_3$ gráfok ugyanazt a $0, 1^2, 4$ előjel nélküli Laplace-spektrumot adják, pedig csak az első páros gráf. Azonos Laplace-spektrummal is megad-

ható páros és nem páros gráf is, például az $L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ Laplace-

mátrixú nempáros gráf és az $L' = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ Laplace-mátrixszal meg-

adott páros gráf Laplace-spektruma is $0, 3 - \sqrt{5}, 2, 3, 3, 3 + \sqrt{5}$. Az első mátrixban zölddel kiemeltem egy háromszöget a 2., 4. és 5. csúc között, emiatt nem lehet páros a gráf. A második mátrixban pedig az adjacenciamátrix felbomlik két blokkmátrixra, amiből látszik,

hogy ez egy páros gráf.

Egy gráf spektruma könnyen megadható az összefüggőségi komponensei spektrumából:

1.2.6. Állítás ([3]). *Legyen G egy gráf G_i ($1 \leq i \leq s$) összefüggőségi komponensekkel. Ekkor G spektruma előáll a G_i komponensek spektrumainak uniójaként (a multiplicitások összeadódnak). Ugyan ez fennáll a Laplace- és az előjel nélküli Laplace-spektrumra is. (Ez az összefüggés a mátrixok blokkmátrixokra tagolódásából adódik.)*

1.2.7. Állítás ([3]). *Egy irányítatlan G gráf Laplace-spektrumában a 0 sajátérték multiplicitása megegyezik G összefüggőségi komponenseinek számával.*

Bizonyítás. Meg kell mutatnunk, hogy egy összefüggő gráf 0 Laplace-sajátértékének multiplicitása pontosan 1. Mint ahogy azt korábban láttuk, $L = NN^T$, ahol N jelöli G incidenciamátrixát, így $u^T Lu = \|N^T u\|^2$. Ha $Lu = 0$, akkor $N^T u$ hossza is nulla, vagyis $N^T u = 0$. Ha azt tesszük fel, hogy $N^T u = 0$, akkor $Lu = NN^T u = 0$. Ezért $Lu = 0$ egyenlőség pontosan akkor teljesül, mikor $N^T u = 0$, vagyis az u vektor minden él két végpontján ugyanazt az értéket veszi fel. Ez egy összefüggő gráf esetén azt jelenti, hogy u konstans. \square

1.2.8. Állítás ([3]). *Legyen G irányított k -reguláris gráf. Ekkor k a legnagyobb sajátértéke G -nek, és a multiplicitása egyenlő G összefüggőségi komponensei számával.*

Csupán a spektrum segítségével még nem tudjuk meghatározni, hogy egy (irreguláris) gráf összefüggő-e. Például $K_{1,4}$ és $K_1 + C_4$ spektruma megegyezik, mindkettőt $2, 0^3, -3$ sajátértékek alkotják.

1.2.9. Állítás ([3]). *Egy irányítatlan G gráf 0 előjel nélküli Laplace-sajátértékének multiplicitása megegyezik G összefüggőségi komponensei között található páros gráfok számával.*

Bizonyítás. Legyen M G incidenciamátrixa, így $Q = MM^T$. Ha $MM^T u = 0$, akkor $M^T u = 0$, így $u_x = u_y$ minden xy élre. \square

1.2.10. Állítás ([3]). *Egy G gráf pontosan akkor páros, ha a Laplace-spektruma és az előjel nélküli Laplace-spektruma megegyezik.*

Bizonyítás. Ha a gráf páros, akkor $Q = DLD^{-1}$, ahol Q az előjel nélküli Laplace-mátrix, L a Laplace-mátrix, és D diagonális mátrix, hogy $D_{x,x} = 1$, ha x az egyik pontosztály tagja, -1 , ha a másiké. Ezért a két mátrix spektruma azonos. A másik irányhoz felhasználva az 1.2.7 és az 1.2.9 állításokat, ha a Laplace-spektrum megegyezik az előjel nélküli Laplace-spektrummal, akkor a gráfban minden komponens páros, vagyis a gráf páros. \square

Több felső becslés ismert a legnagyobb független ponthalmaz méretére a gráfban a gráfhoz köthető mátrixok sajátértékeinek segítségével. Az egyik legegyszerűbb becslés Hoffman tétele, amely a gráf adjacenciamátrixát használja fel:

1.2.11. Tétel (Hoffman [4]). *Legyen $G = (V, E)$ d -reguláris, n -csúcsú gráf, és legyen A a G gráf adjacenciamátrixa. Legyen λ_{\min} A legkisebb sajátértéke. Ha $S \subset V$ egy független ponthalmaz G -ben, akkor*

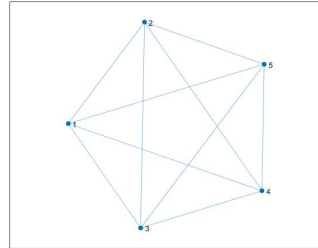
$$\frac{|S|}{n} \leq \frac{-\lambda_{\min}}{d - \lambda_{\min}}.$$

Ha itt egyenlőség áll fenn, akkor S karakterisztikus függvényre az alábbi teljesül:

$$f_S - \frac{|S|}{n} \mathbf{1} \in \text{Ker}(A - \lambda_{\min} I).$$

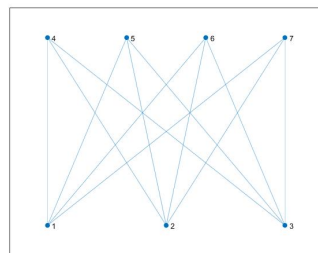
Bizonyítás. Tekintsük a csúcshalmazon értelmezett valós értékű függvények ($V \rightarrow \mathbb{R}^{|V|}$) terét egy skaláris szorzattal: $\langle f, g \rangle = \frac{1}{n} \sum_{x \in V} f(x)g(x)$. Jelöljük $\|\cdot\|_2$ -vel a skaláris szorzat által indukált euklideszi normát: $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$. Legyen $\{\mathbf{1} = v_1, v_2, \dots, v_n\}$ A adjacenciamátrix (valós) sajátvektoraiból álló ortonormált bázis a függvények terén a hozzá tartozó $d = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ sajátértékekkel. Legyen $S \subset V$ G -ben független ponthalmaz, legyen $f = f_S$ a karakterisztikus függvénye, és legyen $\alpha = \|f_S\|_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{x \in V} \chi_{x \in S} = |S|/n$. Írjuk fel f -et a sajátvektorok lineáris kombinációjaként: $f = \sum_{i=1}^n a_i v_i$. Ekkor $a_1 = \langle f, v_1 \rangle = \langle f, \mathbf{1} \rangle = \alpha$. Továbbá $\sum_{i=1}^n a_i^2 = \|f\|_2^2 = \alpha$. Így $\langle f, Af \rangle = \frac{1}{n} f^T Af = \frac{1}{n} \sum_{x,y \in S} A_{x,y} = \frac{2}{n} E(G(S)) = 0$, mivel S független ponthalmaz. A bal oldal sajátvektorokkal kifejezve: $0 = \langle f, Af \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i^2 \geq \lambda_1 a_1^2 + \lambda_{\min} \sum_{i=2}^n a_i^2 = \lambda_1 \alpha^2 + (\alpha - \alpha^2) \lambda_{\min}$. Átrendezés után épp a kívánt eredményt kapjuk: $\alpha \leq \frac{-\lambda_{\min}}{\lambda_1 - \lambda_{\min}} = \frac{-\lambda_{\min}}{d - \lambda_{\min}}$. Ha egyenlőség áll fenn, akkor $a_i \neq 0$ implikálja, hogy $i = 1$ vagy $\lambda_i = \lambda_{\min}$. \square

1.3. Néhány gráf spektruma



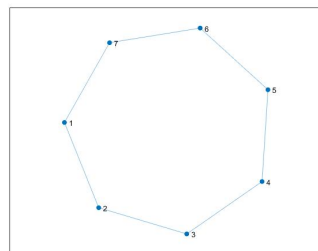
1.1. ábra. Teljes gráf (K_5)

A K_n n csúcsú teljesgráf adjacenciamátrixa $A = J - I$, spektruma pedig $(n - 1)$, $(-1)^{n-1}$. Laplace-mátrixa $nI - J$, Laplace-spektruma 0 , n^{n-1} .



1.2. ábra. Teljes páros gráf ($K_{3,4}$)

A $K_{n,m}$ teljes páros gráf spektruma $\pm\sqrt{nm}$, 0^{m+n-2} , Laplace-spektruma 0 , m^{n-1} , n^{m-1} .



1.3. ábra. Körgráf (C_7)

A D_n n hosszú irányított kör esetén a sajátvektorok $(1, \zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^{n-1})^T$ alakúak a hozzátartozó ζ sajátértékekkel, ahol $\zeta = e^{2\pi ij/n}$ n . primitív egységgyök valamelyik $j = 0, \dots, n - 1$ -re.

$$A \cdot v = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ 1 & & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \zeta \\ \zeta^2 \\ \vdots \\ \zeta^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta \\ \zeta^2 \\ \zeta^3 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \zeta \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \zeta \\ \zeta^2 \\ \vdots \\ \zeta^{n-1} \end{bmatrix}$$

Most tekintsünk egy n hosszú irányítatlan kört, C_n -et. D_n adjacenciamátrixát jelöljük B -vel, ekkor C_n adjacenciamátrixa $A = B + B^T$. Ekkor ugyanazok a sajátvektorok, mint az előbb, csak most $\zeta + \zeta^{-1}$ sajátértékekkel, így a spektrum a $2 \cos(2\pi j/n)$ alakú számokból áll, ahol a $j = 0$ -tól $n - 1$ -ig valamelyik egész szám.

Ez utóbbi gráf 2-reguláris is, így a Laplace-spektruma a $2 - 2 \cos(2\pi j/n)$ ($j = 0, \dots, n - 1$) számok lesznek.

Ha G n csúcson irányítatlan út, akkor a közönséges spektruma a $2 \cos(\pi j/(n + 1))$ ($j = 1, \dots, n$) számokból áll, Laplace-spektrumát pedig a $2 - 2 \cos(\pi j/n)$ ($j = 0, \dots, n - 1$) számok alkotják.

2. fejezet

Véletlen gráfmodellek

A véletlen gráfmodellek tanulmányozása egy viszonylag új ága a matematikának. Az 1959-ben Erdős és Rényi által kidolgozott egyszerű és könnyen vizsgálható modell után a matematikusok újabb és újabb modelleket próbáltak létrehozni a valós hálózatok szimulálásához és szerkezetének megértéséhez. Napjainkban is kiugróan aktívan kutatják ezt a területet. A véletlen gráfok között a három leggyakrabban vizsgált modell: az Erdős–Rényi, a reguláris gráfmodell és a preferential attachment (PA, preferenciális kapcsolódású) modell. Ezen modellekből származó gráfokról és spektrumaikról írok ebben a fejezetben.

Itt felhasznált források: Daniel Montealegre és Van Vu Spectrum of complex networks című jegyzete [9]; Erdős Pál és Rényi Alfréd On random graphs I. című cikke [6]; téma-vezetőm, Backhausz Ágnes Random graphs című jegyzete [1]; Brendan D. McKay The expected eigenvalue of a large regular graph című cikke [8]; Prof. Dr. Roland Speicher Random matrices című jegyzete [11] és Erdős László, Antti Knowles, Horng-Tzer Yau és Jun Yin Spectral statistics of Erdős–Rényi graphs I: Local semicircle law című cikke.

2.1. Spektrálmérték, momentumok

Még mielőtt rátérnék a konkrét modellekre, leírok néhány releváns fogalmat és tételt.

Először is minden n -re minden n csúcsú G gráfhoz tartozik egy *spektrálmérték* elnevezésű valószínűségi mérték, amelyből az adott G gráf sajátértékeinek eloszlása kiolvasható:

$$\mu_G(I) = \frac{1}{n} |\{i : \lambda_i(n) \in I\}|$$

$\forall I$ intervallumra, ahol $\lambda_1(n), \dots, \lambda_n(n)$ az n -méretű G gráf sajátértékei. Ez tulajdonképpen egy tapasztalati eloszlásfüggvény. Az adjacenciamátrix k -adik momentumát a sajátér-

tékek k -adik hatványának várható értékeként határozhatjuk meg. Azonos gráfmodellekből származó gráfsorozatok esetén, ahol a csúcsszám a végtelenbe tart, felmerül a kérdés, hogy létezik-e és pontosan mi is lesz a spektrálmértékek limesze.

Azt mondjuk, hogy egy μ valószínűségi mérték \mathbb{R} -en *meghatározott a momentumai által*, ha

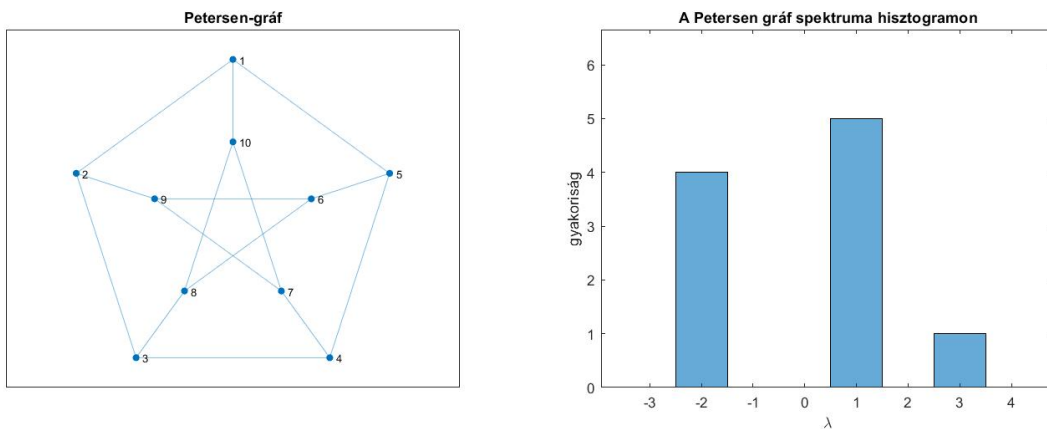
(i) minden momentuma: $\int t^k d\mu(t) < \infty$ létezik;

(ii) μ az egyetlen valószínűségi mérték ezekkel a momentumokkal: ha ν egy valószínűségi mérték és $\int t^k d\mu(t) = \int t^k d\nu(t) \quad \forall k \in \mathbb{N}$, akkor $\mu = \nu$.

2.1.1. Tétel (momentum módszer [11]). *Legyenek μ és μ_N $N = 1, 2, \dots$ valószínűségi mértékek, melyeknek minden momentuma létezik. Tegyük fel, hogy μ meghatározott a momentumai által, és minden momentuma konvergens, azaz*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int t^k d\mu_N(t) = \int t^k d\mu(t) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Ekkor gyenge konvergencia áll fenn: $\mu_N \xrightarrow{w} \mu$.



2.1. ábra. Petersen-gráf és sajátértékei: $-2^4, 1^5, 3$

A sajátértékek tipikus ábrázolási módja a hisztogram, amely azt mutatja meg oszlop diagram formájában, hogy hány sajátérték esett az egyes azonos méretű osztási intervallumokba. Elég nagy gráf esetén az ábra közelítőleg a limesz spektrálmérték sűrűségfüggvényét formázza, ha a limeszmérték létezik.

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{[s,t]}(\lambda_i) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_s^t p(x) dx = \int_{\mathbb{R}} 1_{[s,t]} d\mu(x),$$

ahol n a gráf csúcsszáma, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ a gráf sajátértékei, μ a limesz mérték, p pedig a limesz sűrűségfüggvény. Tehát az intervallumok indikátoraira teljesül a fenti konvergencia. Ebből pedig könnyű kiszámolni, hogy tetszőleges (mérhető) f függvényre is teljesül, speciálisan az $f(x) = x^k$ függvényre is, azaz

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} x^k d\mu(x).$$

Itt a jobb oldalon μ k . momentuma szerepel.

Mivel A mátrix, a gráf adjacenciamátrixa önadjungált, így diagonalizálható, vagyis $A = UDU^*$ szorzat alakban is felírható, ahol U unitér mátrix, U^* az adjungáltja, D pedig diagonális mátrix $d_{i,i} = \lambda_i$ $i = 1, \dots, n$ elemekkel. Továbbá $A^k = (UDU^*)^k = UD^kU^*$, ezért $\sum_{i=1}^n \lambda_i^k = \text{tr}(D^k) = \text{tr}(A^k)$, így

$$\frac{1}{n} \text{tr}(A_n^k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int x^k d\mu(x).$$

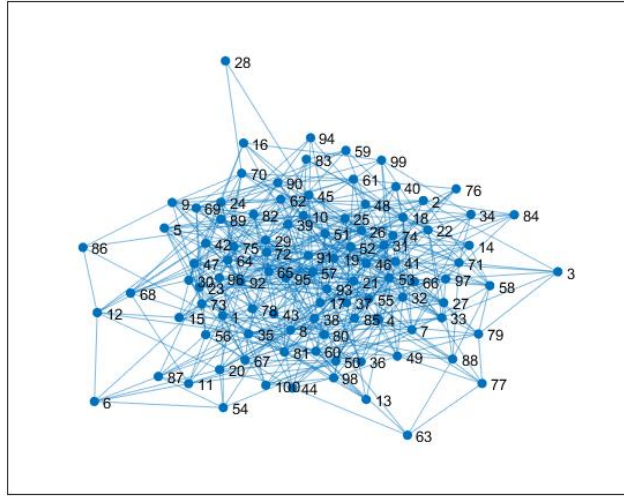
Ennek a formulának az előnye, hogy a sajátértékek kiszámítása nélkül, csak a gráf adjacenciamátrixának felhasználásával fel lehet írni.

A továbbiakban ismertetett tételekre a bizonyítás egy szokásos módszere: hogy megszámoljuk a visszatérő sétákat, ebből kijönnek az adjacenciamátrix hatványainak nyomai az 1.2.1. állítás alapján. Az előbbieket szerint ebből megkapjuk a spektrálmérték momentumait, majd belátjuk a momentumok konvergenciáját. Ha azt is be tudjuk látni, hogy a limeszben megjelenő mérték meghatározott a momentumai által, akkor a 2.1.1. tétel alapján következik a gyenge konvergencia is.

2.2. Erdős–Rényi-modell

Erdős Pál és Rényi Alfréd 1959-ben vezette be a róluk elnevezett *Erdős–Rényi*-modellt, és összefüggőségének feltételeit és az összefüggő komponensek méretét vizsgálták [6]. Egy $G(n, p)$ -vel jelölt Erdős–Rényi-gráf n csúcsú és minden két csúcs között egymástól függetlenül p valószínűséggel húzunk be élet. A gráfnak várhatóan $\binom{n}{2}p$ éle lesz, és $P(\text{deg}(v) = k) = \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-k-1}$.

A (standard) félkörelaszlás egy μ_W valószínűségi mérték $p_W(x) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4-x^2}$ sűrűségfüggvénnyel. Ennek az eloszlásnak meg tudjuk adni a momentumait is a Catalan-számok segítségével. A Catalan-számok azon C_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) sorozat tagjai, ahol a tagok leírhatók a $C_k = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}$ formulával. Ez a számsorozat az előzővel ekvivalensen megadható a $C_k = \sum_{l=0}^{k-1} C_l C_{k-l-1}$ ($k \geq 1$), $C_0 = 1$ rekurzióval is.



2.2. ábra. 100 csúcsú Erdős–Rényi-gráf 0.1 paraméterrel

2.2.1. Tétel ([11]). *A félkörelaszlás momentumai a következők:*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-2}^2 x^n \sqrt{4-x^2} dx = \begin{cases} C_k, & \text{ha } n = 2k \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

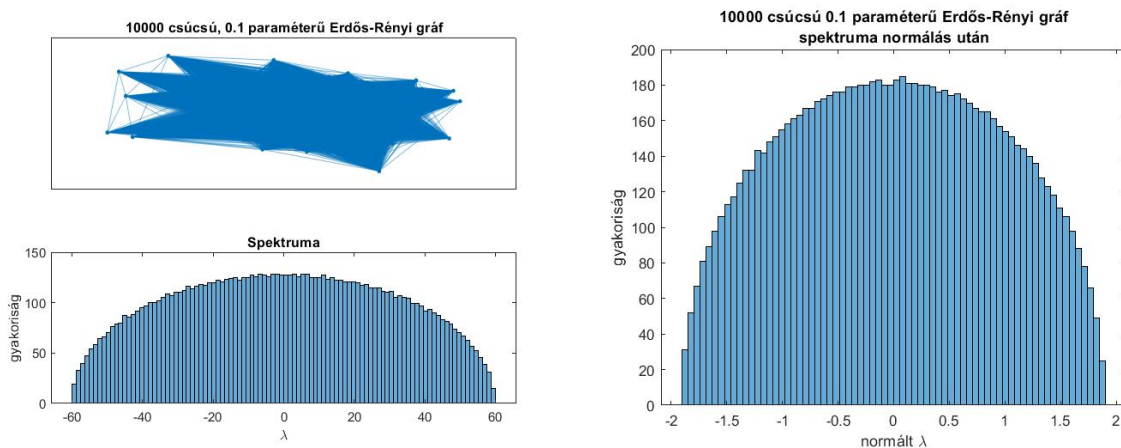
Legyen μ egy valószínűségi eloszlás \mathbb{R} -n. A hozzátartozó Wigner-féle véletlen mátrix az az A_n mátrix, amely önadjungált, vagyis szimmetrikus; elemei egymástól függetlenek; és minden elemének eloszlása μ/\sqrt{n} . Ezeknek a mátrixoknak a spektruma a félkörelaszláshoz tart a csúcsszám növelésével.

2.2.2. Tétel (Wigner-féle félkör-törvény Wigner-mátrixokra [11]). *Legyen A_n egy μ eloszláshoz tartozó n méretű Wigner-mátrix, amelynek minden momentuma létezik; az elemek várható értéke 0, szórása 1. Ekkor minden $m \in \mathbb{N}$ -re:*

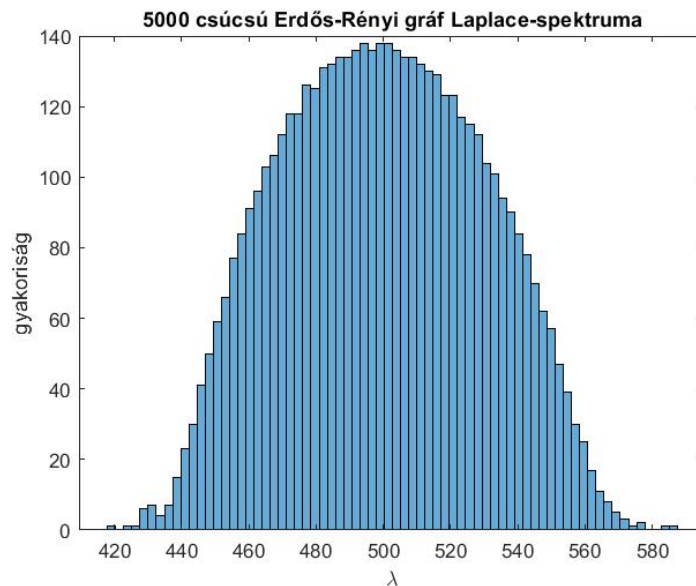
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\text{tr}(A_n^m)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^2 x^m \sqrt{4-x^2} dx.$$

Az Erdős–Rényi-gráf adjacenciamátrixa viszont nem teljesít két feltételt ebből a tételből: nem 0 a várható értéke és nem 1 a szórása az elemeknek. Ebből kifolyólag ez a konvergencia nem is teljesül ilyen formában a spektrumra. Az Erdős–Rényi-gráf spektrumának nagy-része ugyan a félkörelaszlást követi, azonban a legnagyobb sajátérték ezektől

távol egy nagyobb értéket vesz fel np érték környékén. Az Erdős–Rényi gráfok spektrumának ezen tulajdonságáról Erdős László, Antti Knowles, Horng-Tzer Yau és Jun Yin közös Spectral statistc of Erdős–Rényi graphs I: Local semicircle law [5] című cikke értekezik. Ebben az írásban szerepelnek ennél pontosabb eredmények is, de erre a dolgozatomban nem térek ki.

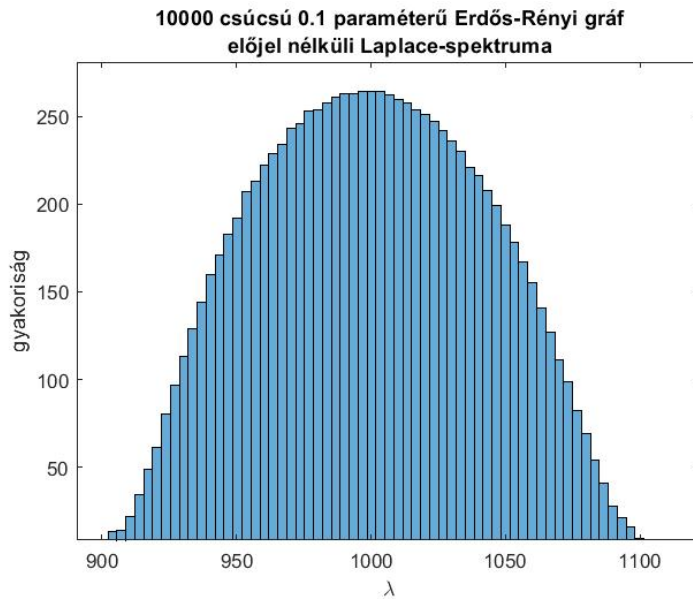


2.3. ábra. Erdős–Rényi-gráf és spektruma



2.4. ábra. Erdős–Rényi gráf Laplace-spektruma

A 2.3. ábra bal oldalán egy olyan 10000 csúcsú Erdős–Rényi-gráfot rajzoltattam ki Matlabban, amelynek minden két különböző csúcs közt futó élét 0.1 valószínűséggel be-



2.5. ábra. Erdős–Rényi gráf előjel nélküli Laplace-spektruma

húzta a program. Majd hisztogramon ábrázoltam a sajátvektorait a legnagyobb kivételével. Ez a leghagyott sajátérték valóban np , vagyis 100 környékére esett. Az ábrázolt sajátértékek pedig a félkörelaszlás egy szélesebb, nem standard változatát adják vissza. A jobb oldali képen viszont már egy ugyanilyen gráfnak a normált spektrumát ábrázolom. Ez a hisztogram jól közelíti a standard félkörelaszlást. A normálást a spektrum értékeinek \sqrt{np} -vel, azaz ebben az esetben $\sqrt{10000 \cdot 0.1} \approx 31$ -gyel való leosztásával érhetjük el Erdős–Rényi gráfoknál.

Beszúrtam egy ábrát [2.4.] az Erdős–Rényi-gráf Laplace-spektrumáról is, mivel a hisztogramja jelentősen más képet mutat, mint a sima spektrumé. Ugyan ez is szimmetrikusnak látszik, de a szimmetriaközéppontja nem a 0, hanem np körül van. Alakja a félkörelaszlás helyett inkább emlékeztet egy nemstandard normárelaszlás haranggörbéjére, bár azzal sem egyezik. Ennél a spektrumnál nem a legnagyobb, hanem épp a legkisebb sajátérték esik távol a többitől, ezt az ábrán nem tüntettem fel. Ez a legkisebb Laplace-sajátérték a 0. Ennek a gráfnak pontosan 1 Laplace-sajátértéke 0, ez pedig az 1.2.7. állítás alapján azt jelenti, hogy 1 darab összefüggőségi komponensből áll az egész gráf. Azt figyelembe véve, hogy a gráf egy csúcsából átlagosan 499.9 él fut ki egyenletesen a gráf minden részére, nem is olyan meglepő. Kisebb Erdős–Rényi modelleknél hamarabb fordulhat elő, hogy több összefüggőségi komponensből áll, és ezzel együtt több a 0 Laplace-sajátértékének a multiplicitása is.

Az Erdős–Rényi-gráfok előjel nélküli Laplace-spektruma hasonló formát vesz fel, mint a sima Laplace-spektruma, azzal a különbséggel, hogy nem a legkisebb sajátérték esik távol a többitől, hanem a legnagyobb. A 2.5. ábrán például egy 10000 csúcsú 0.1 paraméterű gráf spektruma látható a legnagyobb sajátértékén kívül. Ez a legnagyobb sajátérték a 2004.3 volt, de ez nem egy determinisztikus érték az ugyanilyen gráfok esetén csak ennek a környékére estek az eddigi kísérletek értékei is. Összességében úgy tűnik, ez a legnagyobb előjel nélküli Laplace-sajátérték egy n csúcsú p paraméterű Erdős–Rényi-gráf esetén $2.004np$ körüli értéket vesz fel. Ezt a feltételezést a következő mérési eredmények alapján tettem:

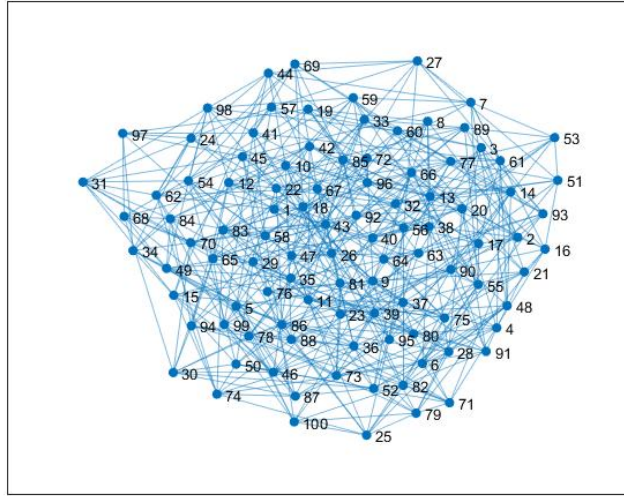
Csúcsszám (n)	Paraméter (p)	Legnagyobb előjel nélküli Laplace-sajátérték
2500	0.1	503.6, 503.4, 503
5000	0.1	1004.3, 1003
10000	0.1	2004.2, 2003.3, 2003.8
5000	0.1	1003
5000	0.2	2004.5
5000	0.05	502.9
2500	0.2	1002.7

Úgy tűnik, ez a legnagyobb érték nagyságrendileg lineárisan függ n -től és p -től is. Illetve nem hiszem, hogy a feltételezett képletemtől vett eltérés csupán numerikus hiba lenne, mivel a korábbi sajátérték számolásaim nem mutattak ekkora eltéréseket a valódi sajátértéktől. Tehát a véletlennek még van szerepe az eredményben.

2.3. Reguláris modell

A *reguláris* modellben egy $G(n, d)$ gráf úgy keletkezik, hogy vesszük az összes egyszerű n csúcsú, d -reguláris gráfot, és egyenletes eloszlással választunk közülük egyet. (Könnyen látható, hogy egy reguláris gráfban $nd = 2G(E)$, így $n, d \in \mathbb{Z}$ számokat érdemes úgy választani, hogy legalább az egyik páros legyen, különben nem létezik a modellnek megfelelő gráf.) Ebben és az Erdős–Rényi-modellben is azonos szerepet kapnak az egyes csúcsok, ellentétben a PA modellel. Illetve ebben a modellben is meghatározható a sajátértékek eloszlásának sűrűségfüggvénye.

A 2.6. ábrát szintén Matlabban szerkesztettem (ahogy a szakdolgozatomban szereplő ábrák nagyrésztét). A reguláris gráf generálásához eltároltam egy csúcsok szerint indexelt tömbben, hogy melyik csúcshoz hány élet kell még behúzni. Ezek közül a tömbelemek közül



2.6. ábra. 100 csúcsú véletlen 10-reguláris gráf

választottam kettőt véletlenszerűen a bennük lévő számok alapján súlyozva. Ebből a két csúcsból lett egy él, amit beírtam az adjacenciamátrixba, illetve csökkentettem a tömb ezen elemeit eggyel. Majd ezt ismételtam addig, amíg a tömb elemei mind 0-k nem lettek. Ezzel a módszerrel még fennáll a lehetőség, hogy a keletkező gráf tartalmaz hurokélet vagy párhuzamos élet. Ilyen élek viszont nagy gráfok esetén kis számban alakulnak ki, így a spektrum jellegén nem változtatnak. Ha mindenáron meg akarunk szabadulni ezektől a hurok- és párhuzamos élektől, írhatunk egy ciklust a programba, ami addig generálja a gráfokat, amíg hurokél és párhuzamos él mentes nem lesz. Az én kódomban csak a hurokéleket szűri ki.

2.3.1. Tétel ([8]). Legyen X_1, X_2, \dots d -reguláris gráfok sorozata. Továbbá legyen igaz, hogy $\lim_{i \rightarrow \infty} n(X_i) = \infty$ és $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{c_k(X_i)}{n(X_i)} = 0 \quad \forall k \geq 3$, ahol $n(X_i)$ az X_i gráf csúcsszáma, $c_k(X_i)$ pedig a k méretű körök száma X_i -ben. Ekkor meghatározható egy $f(x)$ határ sűrűségfüggvény X_i sajátértékeinek eloszlására $i \rightarrow \infty$ esetén. Ez a következőképpen néz ki:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{d\sqrt{4(d-1)-x^2}}{2\pi(d^2-x^2)} & \text{ha } |x| \leq 2\sqrt{d-1} \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Ez az $f(x)$ függvény mutatja a sajátértékek várható eloszlását elég nagy méretű véletlen d -reguláris gráfok esetén. Azt a mértéket, aminek f a sűrűségfüggvénye Kesten-

McKay-mértéknek nevezik. A bizonyítása ennek a tételnek is úgy megy, hogy először meg lehet érteni, mik a spektrum momentumai. Ezt a visszatérő séták kombinatorikus megszámlálásával megtehetjük. Majd a 2.1.1 tételt felhasználva bizonyíthatjuk, hogy a tapasztalati sűrűségfüggvény a fenti sűrűségfüggvényhez tart a gráfméret növelésével.

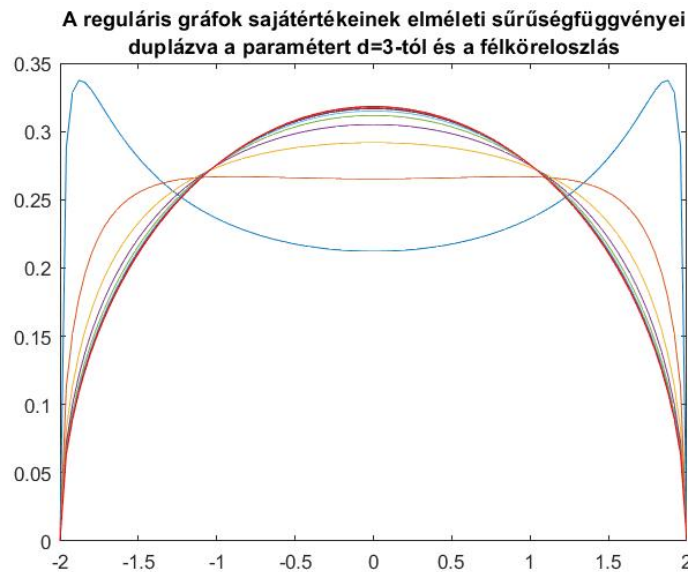
Ez az eloszlás (gyengén) tart a félköreloszláshoz, ha d tart a végtelenbe. A d -reguláris gráfokhoz tartozó eloszlásfüggvény:

$$F_d(t) = \int_{-\infty}^t \frac{d\sqrt{4(d-1)-x^2}}{2\pi(d^2-x^2)} \mathbb{1}_{|x| \leq 2\sqrt{d-1}} dx$$

Helyettesítéses intergált alkalmazva $y = x/\sqrt{d-1}$ behelyettesítéssel az integrandus:

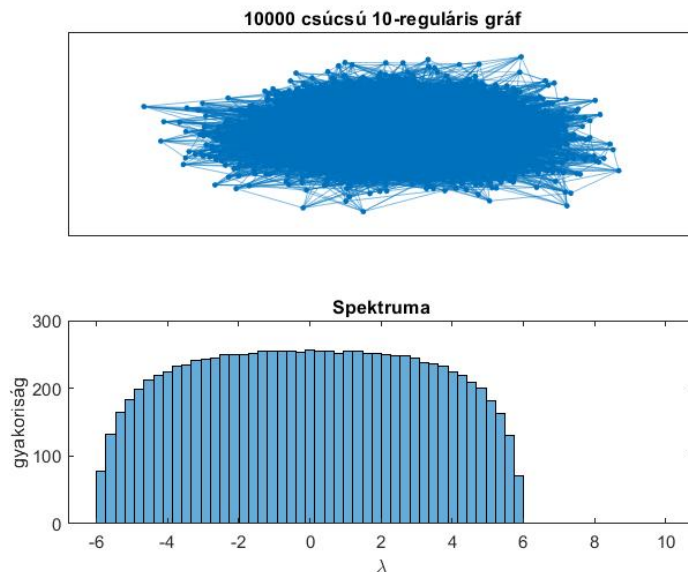
$$\begin{aligned} \frac{d\sqrt{4(d-1)-y^2(d-1)}}{2\pi(d^2-y^2(d-1))} \sqrt{d-1} \mathbb{1}_{|y| \leq 2} &= \frac{d\sqrt{(4-y^2)(d-1)}}{2\pi(d^2-y^2(d-1))} \sqrt{d-1} \mathbb{1}_{|y| \leq 2} = \\ &= \frac{d\sqrt{(4-y^2)(d-1)}}{2\pi(d^2-y^2(d-1))} \mathbb{1}_{|y| \leq 2} = \frac{\sqrt{(4-y^2)(d-1)}}{2\pi\left(\frac{d}{d-1} - \frac{y^2}{d}\right)} \mathbb{1}_{|y| \leq 2} \xrightarrow{d \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sqrt{4-y^2} \end{aligned}$$

Ez pedig valóban a félköreloszlás sűrűségfüggvénye.



2.7. ábra. Konvergencia a félköreloszláshoz

A 2.7. ábrával a fent említett konvergenciát vizualizáltam. Az összehasonlíthatóság miatt normáltam a reguláris gráfokhoz tartozó sűrűségfüggvényeket. Így a reguláris gráf spektrumának tartója $[-2\sqrt{d-1}, 2\sqrt{d-1}]$ -ről átkerült a $[-2, 2]$ intervallumra, a normált



2.8. ábra. Véletlen reguláris gráf és hisztogramon ábrázolt sajátértékei

félkörelaszlás tartójára. A kézzel rajzolt sűrűségfüggvény a $d = 3$ fokszámhoz tartozik, és ahogy duplázódik a fokszám, úgy közeledik a grafikon a félkörelaszlás görbéjéhez. Összesen 10 függvény van kirajzolva ($d = 3, 3 \cdot 2, 3 \cdot 2^2, \dots, 3 \cdot 2^9$), azonban a 6. sűrűségfüggvény ($d = 2^4$) után már olyan közel kerülünk a félkörelaszláshoz, hogy már nem is észrevehető az eltérés.

A 2.8. ábra gráfja is a 2.6. ábránál leírtak szerint készült. Itt már a spektrumot is ábrázoltam hisztogramon. A hisztogram ábrája nem lett szimmetrikus, mivel a legnagyobb sajátértéke 10, egyenlő a fokszámmal az 1.2.8 állításnak megfelelően. Ugyan d még csak 10, messze van még a végtelentől, de a hisztogramja már meglehetősen hasonlít a félkörelaszláshoz, ahogy azt a fenti számolás alapján várjuk.

Ha a reguláris gráf Laplace-spektrumát vizsgáljuk, épp olyan alakú hisztogramot kapunk, mint a hozzátartozó sima spektrum által kirajzolt hisztogramé annyi különbséggel, hogy ennek az ábrának a középpontja a regularitás értékénél, d -nél lesz, nem a 0-nál. Illetve legalább egy sajátértéket felvesz a 0-ban is, ami itt is azt jelzi, hány összefüggőségi komponense van a gráfnak. Persze minél nagyobb d , annál valószínűbb, hogy csak 1 ilyen sajátértéke lesz. A csúcscsám növelésével pedig növelhetjük az esélyt, hogy több mint 1 komponens legyen.

Ez a hasonló spektrum forma nem véletlen. Jelöljük egy d -reguláris gráf egy sajátér-

tékét λ -val, a hozzá tartozó sajátvektort pedig v -vel. Ekkor

$$Av = \lambda v$$

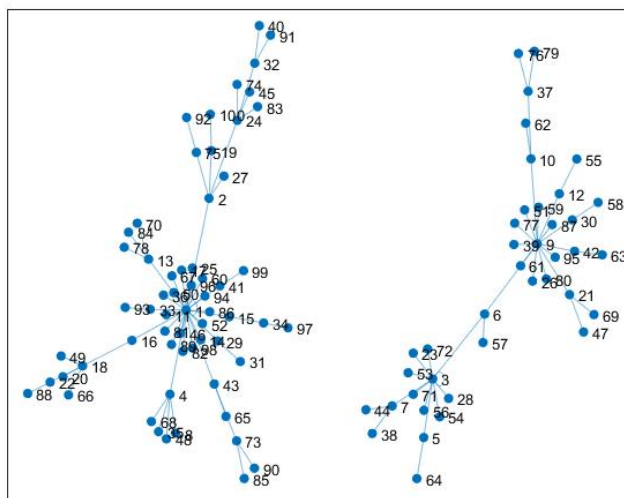
$$dv - Av = d v - \lambda v$$

$$(dI - A)v = (d - \lambda)v$$

Vagyis v egyben Laplace-sajátvektor is $(d - \lambda)$ sajátértékkel. Vagyis a spektrumból az $x \rightarrow d - x$ transzformációval megkapható a Laplace-spektrum, ami egyezik a fenti kísérlet eredményével is, illetve ahogy már az 1.2. szakaszban is írtam.

A reguláris gráf előjel nélküli Laplace-spektruma szintén ezt az alakot veszi fel, szintén d a várható értéke, de itt a legnagyobb sajátérték esik távol a spektrum többi elemétől, és a $2d$ értéket veszi fel. Ez is hasonló képpen magyarázható: $(dI + A)v = (d + \lambda)v$.

2.4. Preferenciális kapcsolódású modell



2.9. ábra. 1 paraméterű preferenciális kapcsolódású gráfmodell a 100. lépés után

A *preferenciális kapcsolódású* modell egy folyamatosan fejlődő gráfot mutat be (vagyis egy sztochasztikus folyamatot - időben fejlődő, és a fejlődésben valami véletlenszerűség van). Idő múlásával új csúcsok születnek, és véletlenszerűen kapcsolódnak a már létező csúcsokhoz. Minél nagyobb egy pont fokszáma, annál nagyobb valószínűséggel fog a

következő csúcs hozzá kapcsolódni. Ezt a modellt Barabási–Albert László és tanítványa Albert Réka vezette be 1999-ben. Céljuk az internet modellezése volt: a csúcsoakat a weboldalaknak, az éleket a linkeknek feleltették meg. Ez a gráfmodell már valóban nagyobb hasonlóságot mutatott az internettel, hiszen egy új felhasználó nagyobb valószínűséggel fog szintén rálinkelni egy már sokat linkelt weboldalra.

A precíz definícióhoz először szükségünk van egy m konstans paraméterre, ami azt a számot jelöli, hogy hány éleket húzunk be egy új csúcs bevételekor (az új csúcsból a már meglévőekbe). Jelöljük $G_{m,t}$ -vel azt a gráfot, ami a t . csúcs bevételevel jön létre az m paraméterű PA modellben. Definíció szerint $G_{1,1}$ egyetlen hurokélből áll az első csúcs körül. Ezután rekurzívan felírhatjuk $G_{1,t}$ -t $G_{1,t-1}$ -ből. Hozzáadjuk a t . pontot, majd összekötjük egy véletlen X_t ponttal a következő eloszlás szerint:

$$P[X_t = i] = \begin{cases} \frac{d(i, G_{1,t-1})}{2^{t-1}} & \text{ha } 1 \leq i < t \\ \frac{1}{2^{t-1}} & \text{ha } i = t \end{cases}$$

ahol $d(u, G)$ a G gráfban u csúcs fokszáma. Tekintsünk most tetszőleges m -et. Ekkor $G_{m,t}$ gráfot a $G_{1,mt}$ gráfból konstruáljuk meg úgy, hogy m -esével összevonjuk a csúcsoakat, vagyis az $\{am + 1, am + 2, \dots, am + m\}$ $G_{1,mt}$ belüli csúcsoak egy $G_{m,t}$ belüli csúcsnak felelnek meg minden $a = 0, \dots, t - 1$ egészre. Az ilyen csúcscsoportok között menő élekből hurokélekek lesznek, a keletkező csúcsoak között pedig annyi él fut, ahány a csúcscsoportjaik között futott.

Ennek a modellnek több változata is létezik. A fent leírt irányítatlan gráfhoz hasonlóan definiálhatók irányítottan is a PA gráfok általában az újonnan létrehozott pontokból indítva az új éleket. Ilyenkor a fokszám helyett használhatjuk csak a befokot is; illetve a fokszámokat konstans hozzáadása után normálva tompíthatjuk az új él helyének eloszlásában a valószínűségek különbségét. A fentiekben leírt hurokél helyett indulhat a gráf fejlődése egyéb kezdeti gráfból is.

A gráfmodell általános szemléltetéséhez a 2.9. ábrát választottam. Ezen jól látszik, hogy amelyik csúcsnak sok éle volt, oda szívesebben csatlakoznak a következő csúcsoak is, és így kialakulnak nagyobb csomópontok. Észrevételem szerint ebben a modellben könnyebben alakul ki több darab összefüggőségi komponens is azonos átlag fokszám mellett a másik két modellhez képest. Az $m = 1$ esetben még kiszámolható annak a valószínűsége, hogy egy n csúcsú G PA gráf összefüggő, illetve az is, hogy várhatóan hány különböző összefüggőségi komponens alakul ki benne. Új komponens akkor keletkezik a gráfban, ha az újonnan bevett csúcs egyetlen élet önmagához köti. Ebben az $m = 1$ esetben ez a kom-

ponens a későbbi lépésekben már nem is fog összeolvadni másik komponensekkel. Minél nagyobb a gráf, annál valószínűbb, hogy nem lesz összefüggő.

$$\mathbb{P}(G \text{ összefüggő}) = \prod_{t=2}^n \left(1 - \frac{1}{2t-1}\right) = \prod_{t=2}^n \frac{2t-2}{2t-1} = 1 - \frac{2^{n-1}(n-1)!}{\frac{(2n)!}{2^n n!}} = \frac{2^{2n-2}}{n \binom{2n-1}{n}}$$

$$\mathbb{E}(G \text{ összefüggőségi komponenseinek száma}) = \sum_{t=2}^n \frac{1}{2t-1}$$

Abban az esetben, ha $m > 1$ már nehezebb megállapítani ezt a valószínűséget. Ki tudjuk számolni a valószínűségét, hogy lesz olyan lépés a gráf fejlődésében, amikor több komponense van. Már erre is kisebb az esély, hiszen az új csúcsnak ekkor mind az m élének hurokélnek kell lennie. Azonban lehetséges, hogy a gráf fejlődése során valamelyik csúcs összeköti a különböző komponenseket.

Ahogy a gráf mérete végtelenhez tart, természetes kérdés, hogy mi a spektrum limesze. Az n . időpontban a gráf sajátértékei $\lambda_1(n), \dots, \lambda_n(n)$, ezekkel generálunk egy μ_n spektrálmértéket a valós számok halmazán: $\mu_n(I) = \frac{1}{n} |\{i : \lambda_i(n) \in I\}| \forall I$ intervallumra. Így a μ_n spektrálmérték limeszét keressük, ha n tart a végtelenbe.

2.4.1. Tétel ([9]). *Legyen $G_{m,n}$ véletlen gráf a PA modellben, és $\mu_{m,n}$ a hozzá tartozó spektrálmérték. Jelölje C_k $\mu_{m,n}$ k . (spektrál) momentumát. Ekkor*

$$\begin{aligned} C_0 &= 1 \\ C_1 &= \Theta\left(\frac{\log n}{n}\right) \\ C_2 &= (1 + o(1))2m \\ C_3 &= \Theta\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ C_4 &= (1 + o(1))2m(m+1) \log n \end{aligned}$$

Továbbá $k \geq 3$ esetén

$$\begin{aligned} C_{2k-1} &= \Theta(n^{k/2-3/2}) \\ C_{2k} &= \Theta(n^{k/2-1}). \end{aligned}$$

($f(n) = \Theta(g(n))$ jelentése, hogy létezik k_1, k_2 pozitív konstans és n_0 küszöbindex, hogy ha $n_0 < n$, akkor $k_1 g(n) < f(n) < k_2 g(n)$, azaz f -et aszimptotikusan korlátozza g alulról és felülről is.)

Ennek az aszimptotikus eredménynek ellénere a $\{C_k\}$ sorozat (önmagában) még nem határozza meg a sajátértékek eloszlását. A momentum módszer nem alkalmazható, mivel ez az eloszlás nem meghatározott a momentumai által, mert nem minden momentuma konvergens. A negyedik momentumtól kezdődően végtelenbe tartanak a momentumok.

A spektrálmérték közelítéséhez definiáljunk egy távolságot két valószínűségi mérték μ és ν között:

$$\text{dist}(\mu, \nu) = \sup_I |\mu(I) - \nu(I)|,$$

ahol I befutja az intervallumok halmazát.

2.4.2. Tétel ([9]). *Legyen $\mu_{\varepsilon, m, n}$ ($\varepsilon > 0$) (véletlen) mértéksorozat, hogy $\mu_{\varepsilon, m, n}$ a $G_{\varepsilon, m, n}$ spektrálmértéke, ahol $G_{\varepsilon, m, n}$ gráfot úgy kapjuk meg, hogy $G_{m, n}$ gráfból elhagyjuk az első εn élt. Ekkor*

$$\text{dist}(\mu_{m, n}, \mu_{\varepsilon, m, n}) \leq \varepsilon \text{ egy valószínűséggel.}$$

A $\{\mu_{\varepsilon, m, n}\}$ sorozat gyengén tart $\mu_{\varepsilon, m, \infty}$ (ε -tól és μ -tól függő) determinisztikus mértékhez. Ennek a limesznek a momentumai explicit kiszámíthatók tetszőleges ε esetén.

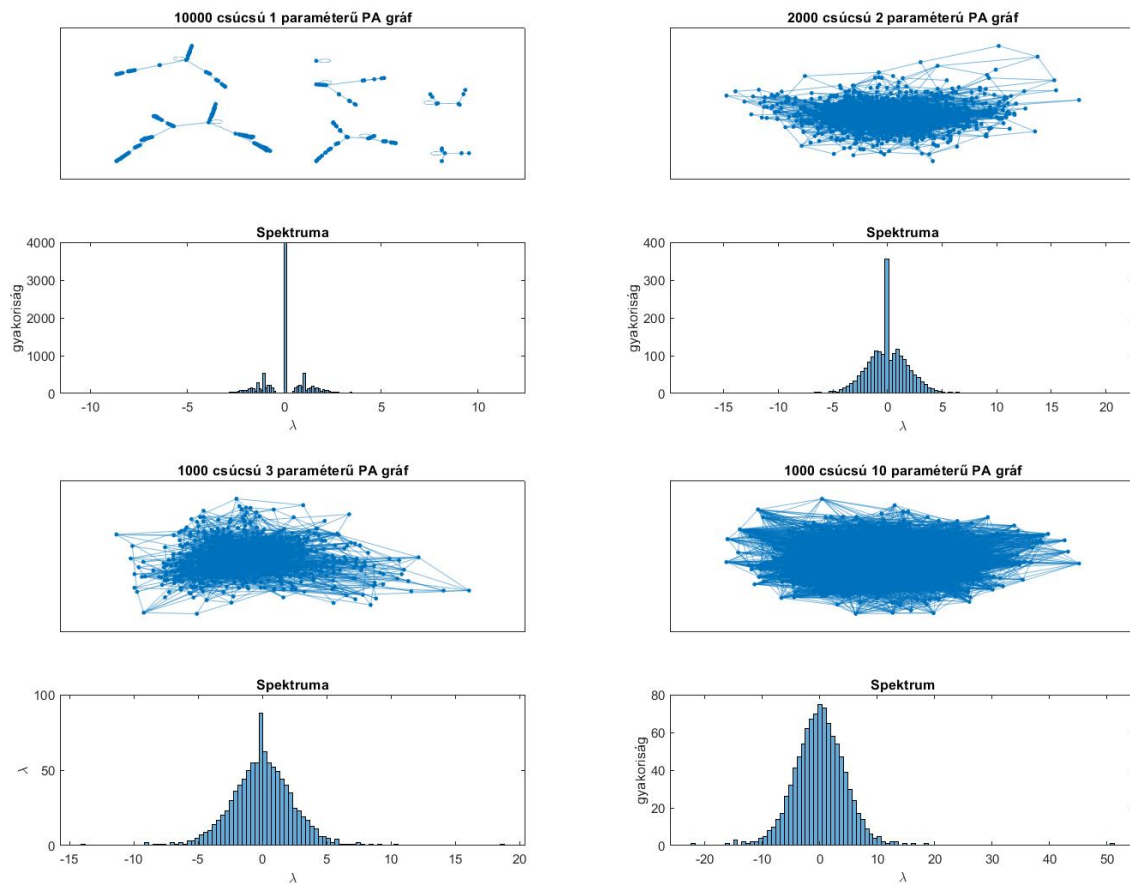
Tehát a limeszmértéket ugyan nem tudjuk meghatározni, de a momentumait azért ki tudjuk számolni. A momentum módszer alapján a mértékek gyenge konvergenciájához elég belátni, hogy a momentumok sorozata konvergál.

2.4.3. Tétel ([9]). *Legyen $G_{m, n}$ egy PA véletlen gráf és $k = n^{1/25}$. Ekkor $i = 1, 2, \dots, k$ -ra 1-hez tartó valószínűséggel teljesül a következő:*

$$\lambda_i(G_{m, n}) = (1 \pm o(1)) \sqrt{\Delta_i(G_{m, n})},$$

ahol Δ_i $i = 1, \dots, n$ jelöli a gráf csúcsainak fokszámát csökkenő sorrendben.

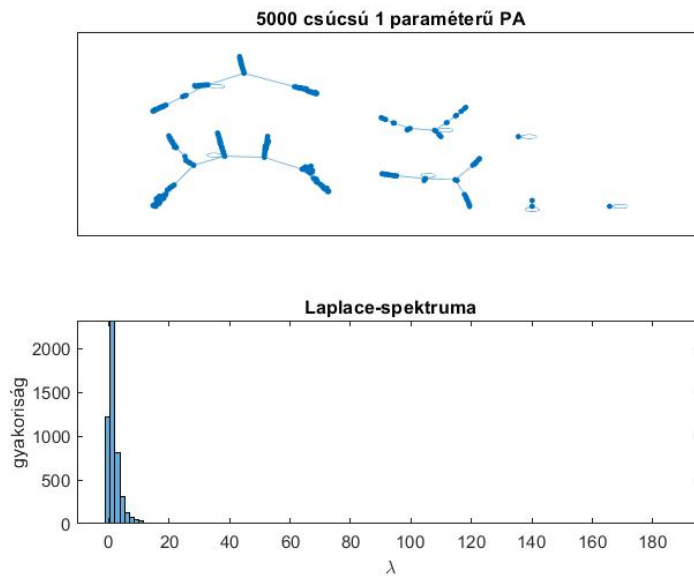
A 2.10. ábrán nagyméretű preferenciális kapcsolódású gráfokat rajzoltam ki Matlabban különböző paraméterekkel. A gráfok elkészítése a korábban definícióként leírt algoritmus alapján történt. Ezek mind 0-ra szimmetrikus(nak tűnő) spektrumok, de paraméterenként más-más eloszlásúak. Az 1 paraméterű PA gráfnak körülbelül 4000 darab 0 sajátértéke van, és a 0 környezetében nincs is más sajátérték, míg a 2 és 10 paraméterű gráf esetében nincs szakadás a spektrumban. A 2 paraméternél viszont még mindig kiugrik a középső oszlop a 322 darabnak számolt 0 sajátérték miatt. A 10 paraméter mellett, már nincs a gráfnak 0 sajátértéke. 10-nél nagyobb paraméterek esetén is a 10 paraméterű PA gráféhoz hasonló eloszlású spektrumot kapunk.



2.10. ábra. PA gráfok és spektrumuk

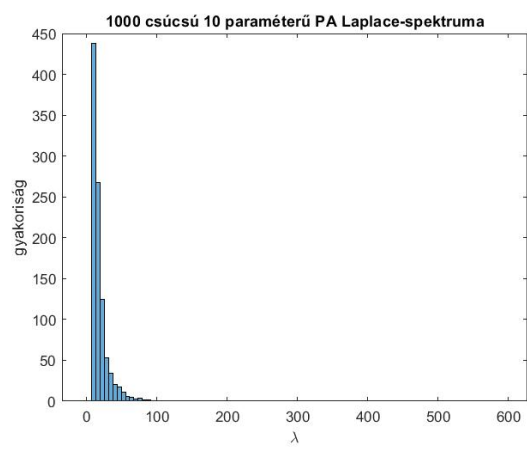
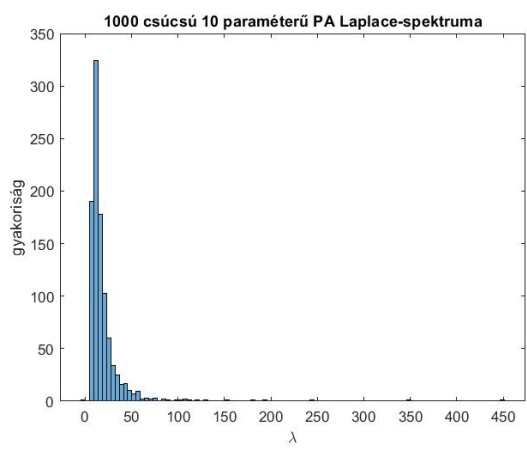
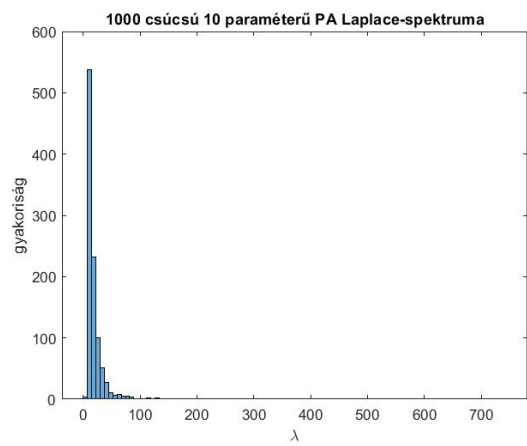
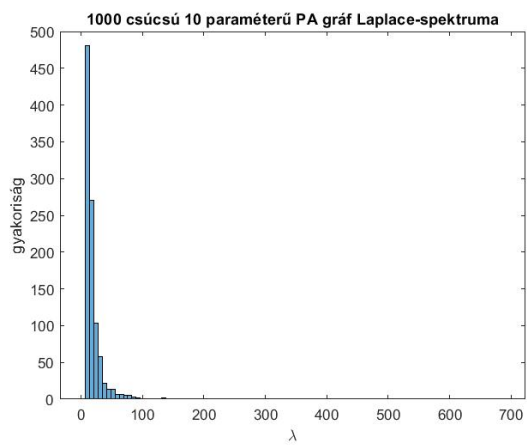
A 2.11. ábrán egy 1 paraméterű PA gráf és Laplace-spektruma látható. A programmal össze is számoltattam a 0 multiplicitását a Laplace-spektrumban: összesen 7 volt, ahogy az ábrán látható összefüggőségi komponensek száma is. Ez az 1.2.7. állítással magyarázható.

A 2.12. ábrán több Laplace-spektrumot rajzoltam ki 10 paraméterű PA gráfokhoz. Ezt azért tettem, hogy több ábrát egyszerre vizsgálva könnyebb legyen felismerni a tulajdonságait a spektrumnak. Először is közös jellemző, hogy csak nemnegatív Laplace-sajátértékek vannak. Ennek a gráfnak is legalább 1 multiplicitású a 0 Laplace-sajátértéke. A legtöbb sajátérték valahol a paraméter értéke körül mozog, ami most 10. Illetve van néhány Laplace-sajátérték, ami a kimagasló hisztogramoszlopok helyénél magasabb értékeket is felvesznek. Ezek a helyek a 3. hisztogramon látszanak is, máshol csak el van tolódva balra az ábra, ebből lehet tudni, hogy az ábra jobb oldalán is vannak még Laplace-sajátértékek. Azonban ennél a spektrumnál véletlenszerű a legnagyobb sajátérték helye.



2.11. ábra. PA gráf és Laplace-spektruma

A PA gráfok előjel nélküli Laplace-spektrumának eloszlása hasonló a sima Laplace-spektrumának eloszlásához, viszont a gráf felépítésének fogva egyetlen összefüggőségi komponense sem lehet páros (ha új komponens keletkezik, az egy hurokkel kezdődik). Így az 1.2.9. állítás értelmében a 0 előjel nélküli Laplace-sajátérték multiplicitása csak 0 lehet.



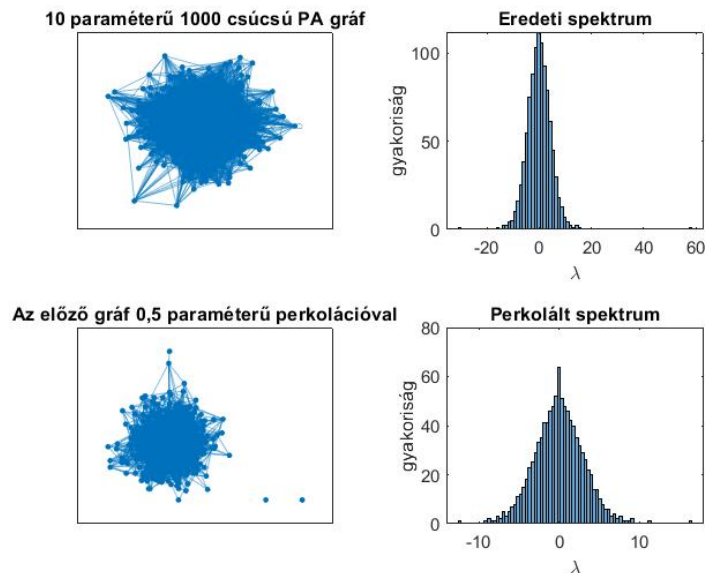
2.12. ábra. 10 paraméterű PA gráf Laplace-spektruma

3. fejezet

A spektrum stabilitása

Ebben a fejezetben azzal foglalkozom, hogy változnak a gráf sajátértékei, ha az eredeti gráfon módosítástunk; milyen mértékű gráfmodosítás esetén következik be szignifikáns eltérés a spektrumban, vagyis a spektrum mennyire stabil. Néhány szimulációmnak az eredményét fogom prezentálni.

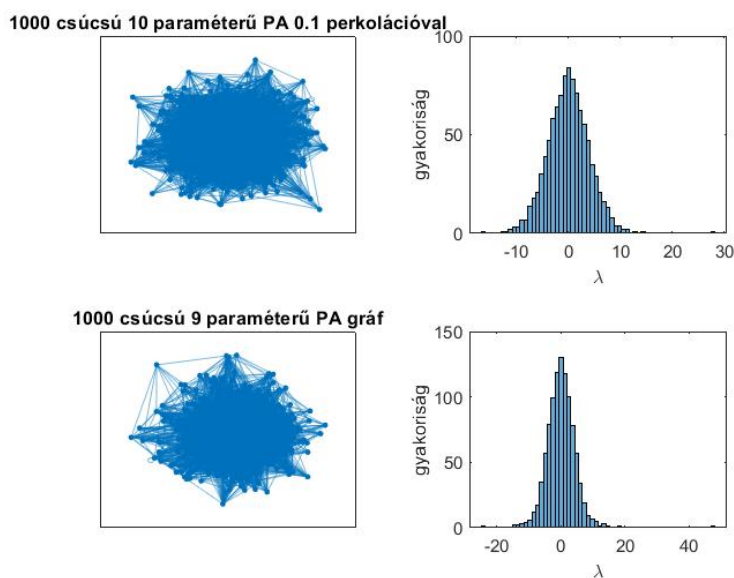
3.1. A spektrum stabilitása



3.1. ábra. Perkoláció a PA gráfon

A 3.1. ábrán egy 1000 csúcsú 10 paraméterű PA gráfot ábrázoltam a spektrumával

együtt. Majd ennek a gráfnak minden élét 0.5 valószínűséggel elhagytam, 0.5 valószínűséggel benne hagytam a gráfban, azaz $p = 0.5$ valószínűségű perkolációt hajtottam rajta végre. Ennek a perkolált gráfnak is kiszámoltam a sajátértékeit. A szakdolgozatomban a p paraméterű perkoláció alatt azt értem, hogy a gráf minden élét p valószínűséggel elhagyom, $1 - p$ valószínűséggel megtartom. A megfigyeléseim alapján a 0.5 a legalacsonyabb élelhagyási valószínűség, ami mellett már észrevehető a változás a spektrumon ennél a gráfnál. Minél nagyobb a p , annál élesebb lesz a különbség a két hisztogram között, egyre tömörebb és laposabb lesz a hisztogram és lesz egyre kiugróbb a nulla sajátérték oszlopa a perkolált esetben.



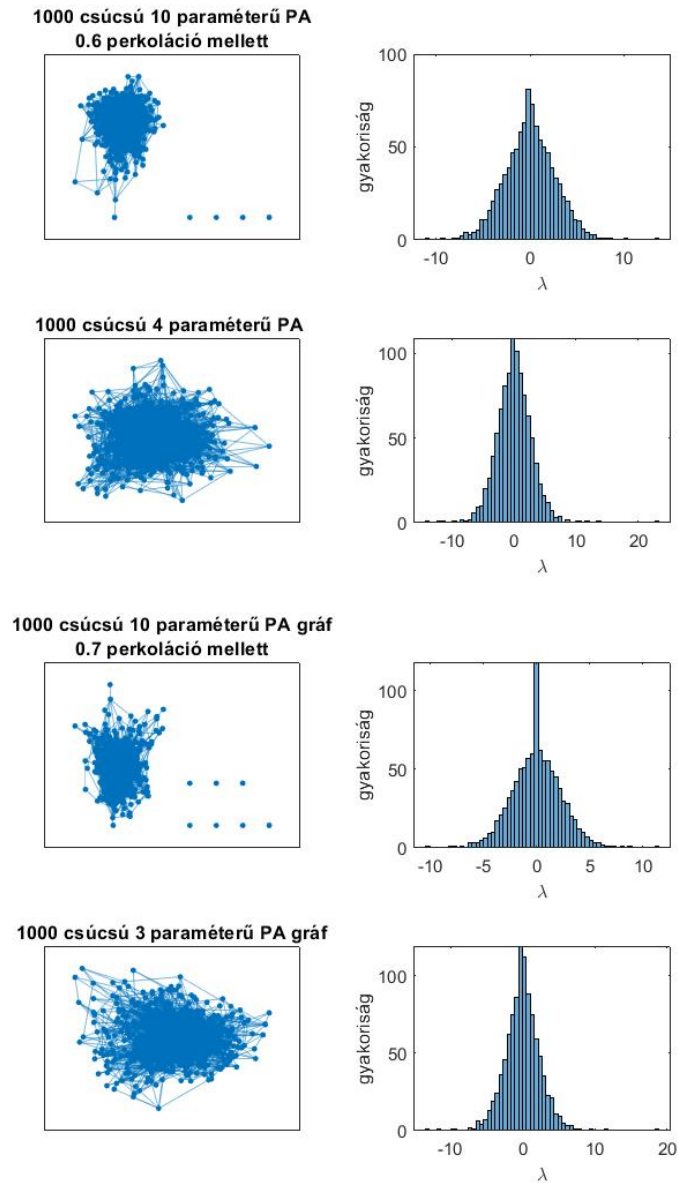
3.2. ábra. Azonos átlagfokszám(1)

Ez a kiugró oszlop az izolált csúcsok számának növekedésével magyarázható, ahogy elhagyjuk az éleket. Hiszen minden izolált csúcshoz tartozik egy 0 sajátérték. Ha az

$$A = \begin{bmatrix} A' & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \text{ egy gráf adjacenciamátrixa, } A' \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ egy blokkmátrixa, és } k \text{ darab}$$

csupa nulla sor van A -ban, akkor a karakterisztikus polinom: $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_{n+k}) = \det(A' - \lambda I_n)(-\lambda)^k$. Ennek a 0 legalább k -szoros gyöke, így legalább k darab 0 sajátértéke van. Másrészt minden ilyen 0-s sor egy izolált csúcshoz tartozik, vagyis a gráfban van k darab izolált csúcs. A adjacenciamátrix spektruma A' spektrumából, és k darab 0

sajátértékből tevődik össze. Tehát legalább annyi 0 sajátértéke van a gráfnak, mint ahány izolált csúcsa. Ez az 1.2.6. állítás következménye is.



3.3. ábra. Azonos átlagfokszám (2)

A 3.2. és a 3.3. ábrán azonos átlagfokszámú PA gráfokkal vettem össze a perkolált PA gráfokat, hogy a fokszámeltérés által okozott különbségeket kiszűrhessek. Össességében itt is elmondható, hogy minél nagyobb mértékű a perkoláció, annál inkább kiemelkedik az oszlop a nulla felett, míg a sima PA gráfnál folytonosabb a spektrum. Aztán a viszonyítási gráf hisztogramja rendszerint alacsonyabb a perkolálténál ha eltekintünk a

nulla sajátértékek miatt megnövekedett oszloptól. A 0.1 valószínűségű perkolációnál még alig észrevehető a különbség a két spektrum hisztogramja között. A perkolált spektruma egy kicsit szélesebb és laposabb. Itt nincs még se izolált csúcs, se kiemelkedő oszlop a 0 felett. A 0.7-es perkoláció esetén viszont már nem csak teltebb a hisztogram, de magas a 0 sajátértékek száma, illetve 7 darab izolált csúcs található.

4. fejezet

Összefoglaló, alkalmazások

Azon felül, hogy a gráf tulajdonságairól sokat elárul a spektruma, ahogy a szakdolgozatomban is bemutattam jó néhányat, számos gyakorlatias alkalmazása is ismert a sajátértékeknek.

A Google egyik legismertebb kereső algoritmus, a PageRank (PR) algoritmus a weboldalak link hálózatának módosított adjacenciamátrixának sajátértékeit felhasználva ad a felhasználónak egy közelítőleg legoptimálisabb találati sorrendet. Az algoritmus célja, hogy minél több jelentősebb weboldalról mutat link egy weboldalra, annál előrébb lehessen a találatok között. [12]

A véletlen séták esetén is hasznos a gráf spektrum ismerete. Vegyünk egy gráfot és egy kezdőpontot. Elindulunk a kezdőpontból, majd minden lépésben egyenletes eloszlással választunk egy a jelenlegi csúcsunkból mutató élet, amin tovább haladunk egy következő csúcsba. Az így kapott véletlen pontsorozatot nevezzük *véletlen sétának*. Véges gráf esetén elég nagy lépésszámra az érkezési hely eloszlása közelít a határeloszláshoz, amikor annak a valószínűsége, hogy éppen a v csúcsban vagyunk: $d(v)/(2m)$ valószínűségű, ahol m a gráf élszámát, $d(v)$ a v csúcsfokszámát jelöli. Ezt a kellően nagy lépésszámot, pedig a gráf sajátértékeinek segítségével lehet megbecsülni. A második legnagyobb sajátértéknek van ebben különösebb szerepe. [7]

Előfordul, hogy olyan csoportokat szeretnénk megtalálni egy hálózatban, amin belül majdnem minden pont majdnem minden másik ponttal kapcsolatban van. Például ismerettségi hálóban keresünk iskolai osztályokat, közösségeket. Speciálisan ha minden pont minden másikkal összeköttetésben van, azt nevezzük *klikkeknek*. A gráf ezen sűrűbb csoportjainak megkeresésére is használják a gráf Laplace-spektrumát. Ezt az eljárást *spektrális klaszterezésnek* nevezik.

Irodalomjegyzék

- [1] BACKHAUSZ, ÁGNES, Random graphs, 2017. (<https://backhauszagi.web.elte.hu/gyak/veletlengrafi.pdf>)
- [2] BARABÁSI, ALBERT LÁSZLÓ AND ALBERT, RÉKA. Emergence of scaling in random networks. *Science* 286.5439 (1999): 509-512.
- [3] BROUWER, ANDRIES E. AND HAEMERS, WILLEM H. Spectra of graphs. Springer Science & Business Media, 2011., 1-11. oldal
- [4] ELLIS, DAVID. "Eigenvalue methods in extremal combinatorics: an overview." (2011). 1-3. oldal (<https://davidellis2.files.wordpress.com/2019/07/lecture11.pdf>)
- [5] ERDŐS, LÁSZLÓ, ET AL. "Spectral statistics of Erdős–Rényi graphs I: Local semi-circle law." *The Annals of Probability* 41.3B (2013): 2279-2375., 3. oldal (<https://arxiv.org/pdf/1103.1919.pdf>)
- [6] ERDŐS, PÁL AND RÉNYI, ALFRÉD. "On Random Graphs." *Publicationes Mathematicae* 6 (1959): 290-297. (https://www.renyi.hu/~p_erdos/1959-11.pdf)
- [7] LOVÁSZ, LÁSZLÓ. "Random walks on graphs: A survey." *Combinatorics, Paul Erdős is eighty 2.1* (1993): 1-46. (<https://web.cs.elte.hu/~lovasz/erdos.pdf>)
- [8] MCKAY, BRENDAN D. "The expected eigenvalue distribution of a large regular graph." *Linear Algebra and its Applications* 40 (1981): 203-216.
- [9] MONTEALEGRE, DANIEL AND VU, VAN. "Spectrum of complex networks." *arXiv preprint arXiv:1809.05469* (2018)., 1-8. oldal (<https://arxiv.org/abs/1809.05469>)

- [10] <https://planetmath.org/levydesplanquestheorem>.
- [11] SPEICHER, ROLAND. "Lecture Notes on" Random Matrices"." arXiv preprint arXiv:2009.05157 (2020). (<https://arxiv.org/pdf/2009.05157.pdf>)
- [12] <https://en.wikipedia.org/wiki/PageRank>
- [13] https://hu.wikipedia.org/wiki/Véletlen_gráf

5. fejezet

Matlab kódok

5.1. Determinisztikus gráfok spektrumai

```
%TELJES GRÁF
n=5;
KA = ones(n)-eye(n);
K = graph(KA);
%plot(K)
[KV,KD] = eig(KA);
%Laplace mátrix
KL = n*eye(n)-ones(n);
[KLK, KLD] = eig(KL);
```

```
%KÖR
%irányítatlan
m=7;
CA = zeros(m);
if m>1
    for i=1:(m-1)
        CA(i,i+1) = 1;
        CA(i+1,i) = 1;
    end
    CA(1,m) = 1;
```

```

        CA(m,1) = 1;
    end
    C = graph(CA);
    %plot(C)
    [CV,CD] = eig(CA);
    %irányított
    irCA = zeros(m);
    if m>1
        for i=1:(m-1)
            irCA(i,i+1) = 1;
        end
        irCA(m,1) = 1;
    end
    [irCV,irCD] = eig(irCA);

%TELJES PÁROSGRÁF (k és l méretű pontosztályok között)
k=3;
l=4;
TPA1 = zeros(k,k);
TPA2 = ones(k,l);
TPA3 = ones(l,k);
TPA4 = zeros(l,l);
TPA = [TPA1,TPA2;TPA3,TPA4];
TP = graph(TPA);
h=plot(TP);
%csinosítás
h.YData(1:k) = 1;
h.YData((k+1):end) = 2;
h.XData(1:k) = linspace(0,1,k);
h.XData((k+1):end) = linspace(0,1,l);
[TPV,TPD] = eig(TPA);
h;
%Laplace
TPL = diag(sum(TPA))-TPA;

```

```
[TPLV,TPLD] = eig(TPL);
```

```
%axis equal
```

```
%PÁROS ÉS NEM PÁROS GRÁF AZONOS LAPLACE SPEKTRUMMAL
```

```
A = [2,-1,0,-1,0,0;  
      -1,4,-1,0,-1,-1;  
      0,-1,2,-1,0,0;  
      -1,0,-1,2,0,0;  
      0,-1,0,0,2,-1;  
      0,-1,0,0,-1,2];
```

```
[V,D] = eig(A);
```

```
B = [2,-1,0,-1,0,0;  
      -1,3,-1,0,-1,0;  
      0,-1,2,-1,0,0;  
      -1,0,-1,3,-1,0;  
      0,-1,0,-1,3,-1;  
      0,0,0,0,-1,1];
```

```
[V,D] = eig(B);
```

```
%PETERSEN-GRÁF ÉS SPEKTRUMA
```

```
A = [0 1 0 0 1 0 0 0 0 1;  
      1 0 1 0 0 0 0 0 1 0;  
      0 1 0 1 0 0 0 1 0 0;  
      0 0 1 0 1 0 1 0 0 0;  
      1 0 0 1 0 1 0 0 0 0;  
      0 0 0 0 1 0 0 1 1 0;  
      0 0 0 1 0 0 0 0 1 1;  
      0 0 1 0 0 1 0 0 0 1;  
      0 1 0 0 0 1 1 0 0 0;  
      1 0 0 0 0 0 1 1 0 0];
```

```
%Gráf:
```

```
G = graph(A);
```

```
h=plot(G);
```

```

%make it pretty
h.YData(1)=1;
h.XData(1)=0;
h.YData(2)=sin(pi/2+2*pi/5);
h.XData(2)=cos(pi/2+2*pi/5);
h.YData(3)=sin(pi/2+4*pi/5);
h.XData(3)=cos(pi/2+4*pi/5);
h.YData(4)=sin(pi/2+6*pi/5);
h.XData(4)=cos(pi/2+6*pi/5);
h.YData(5)=sin(pi/2+8*pi/5);
h.XData(5)=cos(pi/2+8*pi/5);
axis equal;
h.YData(10)=1/2;
h.XData(10)=0;
h.YData(9)=sin(pi/2+2*pi/5)/2;
h.XData(9)=cos(pi/2+2*pi/5)/2;
h.YData(8)=sin(pi/2+4*pi/5)/2;
h.XData(8)=cos(pi/2+4*pi/5)/2;
h.YData(7)=sin(pi/2+6*pi/5)/2;
h.XData(7)=cos(pi/2+6*pi/5)/2;
h.YData(6)=sin(pi/2+8*pi/5)/2;
h.XData(6)=cos(pi/2+8*pi/5)/2;

% %Hisztogram:
% spect = eig(A);
% edges=[-2.5 -1.5:1:2.5 3.5];
% histogram(spect,edges)

```

5.2. Véletlen gráfmodellek és spektrumaik

5.2.1. Erdős–Rényi-gráf

```

%ERDŐS-RÉNYI GRÁF (normált spektrum)
n=1000;

```

```

p=0.1;
nbins=50;

%P=0.5 ESET:
% m1 = randi([0,1],[n,n]);
% for i=1:n
%     m1(i,i)=0;
% end
% for i=2:n
%     for j=1:(i-1)
%         m1(i,j)=m1(j,i);
%     end
% end
% m1;
% g1 = graph(m1);
% spect1 = eig(m1);
%
% tiledlayout(2,1)
% ax1 = nexttile;
% plot(ax1,g1)
% ax2 = nexttile;
% histogram(ax2,spect1,nbins)

%TETSZŐLEGES P:
m2 = rand(n,n);
for i=1:n
    m2(i,i)=0;
end
for i=2:n
    for j=1:(i-1)
        if m2(i,j)<p
            m2(i,j)=1;
            m2(j,i)=1;
        else

```

```

                m2(i,j)=0;
                m2(j,i)=0;
            end
        end
    end

g2 = graph(m2);
spect2 = eig(m2)/sqrt(n*p); %normálom a spektrum
s2=sort(spect2); %levágom a legnagyobb sajátértéket
maxs=s2(n);
s2=s2(1:(n-1));

% plot(g2) %csak gráf

% tiledlayout(2,1) %gráf és hisztogram
% ax1 = nexttile;
% plot(ax1,g2)
% ax2 = nexttile;
% histogram(ax2,s2,nbins)

histogram(s2,nbins) %csak hisztogramm

```

5.2.2. Reguláris gráf

```

%REGULÁRIS GRÁF
n=100; %csúcsszáma
k=10; %regularitás
nbins=70;

if mod(k*n,2)==0
    hurok=1;
    while(hurok>0) %hurokélek kiküszöbölve, párhuzamos élek nem
        A=zeros(n); %adjacenciamátrix
        d=k*ones(1,n); %még felhasználandó fél élek vektora
    end
end

```

```

e=k*n;          %még felhasználandó fél élek száma
for i=1:k*n/2
    r=randi(e);
    x1=1;       %első fél él
    s=d(x1);
    while s<r
        x1=x1+1;
        s=s+d(x1);
    end
    d(x1)=d(x1)-1;
    e=e-1;

    q=randi(e);
    x2=1;       %második fél él
    s=d(x2);
    while s<q
        x2=x2+1;
        s=s+d(x2);
    end
    d(x2)=d(x2)-1;
    e=e-1;

    A(x1,x2)=A(x1,x2)+1;
    A(x2,x1)=A(x2,x1)+1;
end

hurok=0;
for i=1:n
    if A(i,i)>0
        hurok = hurok+A(i,i);
    end
end
end
else

```



```

        error("nem lehetséges!");
    end
    G=graph(A);
    s=eig(A);

    tiledlayout(2,1)
    ax1 = nexttile;
    plot(ax1,G)
    ax2 = nexttile;
    histogram(ax2,s,nbins)

```

5.2.3. Az Erdős–Rényi és a reguláris gráf elméleti sűrűségfüggvényeinek grafikonja

%SŰRŰSÉGÜGGVÉNY KIRAJZOLÁS/ÖSSZEHASONLÍTÁS

%REGULÁRIS

```

theta=3;
x=linspace(-2*sqrt(theta-1),2*sqrt(theta-1),101);
y=theta*sqrt(4*(theta-1)-x.^2)./(2*pi*(theta^2-x.^2));
x=x/sqrt(theta-1); %lenormálás -2 és 2 közé rakja minden thetára
y=y.*sqrt(theta-1);
plot(x,y)
hold on
for i=1:10
    theta=theta*2;
    x=linspace(-2*sqrt(theta-1),2*sqrt(theta-1),101);
    y=theta*sqrt(4*(theta-1)-x.^2)./(2*pi*(theta^2-x.^2));
    x=x/sqrt(theta-1); %lenormálás -2 és 2 közé rakja minden thetára
    y=y.*sqrt(theta-1);
    plot(x,y)
end

```

%ERDŐS-RÉNYI

```

x=linspace(-2,2,101);
y=sqrt(4-x.^2)./(2*pi);
plot(x,y,"red")
hold off

```

5.2.4. PA gráf

```

%PA GRÁF
v=100;%csúcsszám
m=10;
n=m*v;
nbins=100;

%m=1 eset:
A=zeros(n);
A(1,1)=1;
for i=2:n
    r=rand(1);
    k=0;
    j=1;
    d=sum(A);
    d=d+diag(A)';
    d(i)=1;
    while (k<r)
        k=k+d(j)/(2*i-1);
        j=j+1;
    end
    A(i,j-1)=1;
    A(j-1,i)=1;
end
%G=graph(A);
% plot(G)
% hold on

```

```

%gráfpontok összehúzása:
B=zeros(v);
for i=1:n
    for j=1:n
        if floor((i-1)/m)+1==floor((j-1)/m)+1%ha B főátlójában
            if i>=j
                B(floor((i-1)/m)+1,floor((j-1)/m)+1)=
                B(floor((i-1)/m)+1,floor((j-1)/m)+1)+A(i,j);
            end
        else
            B(floor((i-1)/m)+1,floor((j-1)/m)+1)=
            B(floor((i-1)/m)+1,floor((j-1)/m)+1)+A(i,j);
        end
    end
end
end
G1=graph(B);
% plot(G1)
% hold off

spect = eig(B);
e=0.1^5;
nulla=0;
for i=1:v
    if (spect(i)<e && spect(i)>-e)
        nulla=nulla+1;
    end
end
nulla
tiledlayout(2,1)
ax1 = nexttile;
plot(ax1,G1)
ax2 = nexttile;
histogram(ax2,spect,nbins)

```

5.2.5. Laplace-Spektrum

```
%LAPLACE-SPEKTRUM
modell="PA"; %"erdos", "regularis" vagy "PA"

%ERDŐS-RÉNYI
if modell=="erdos"
    n=1000;
    p=0.1;
    nbins=70;

    m2 = rand(n);
    for i=1:n
        m2(i,i)=0;
    end
    for i=2:n
        for j=1:(i-1)
            if m2(i,j)<p
                m2(i,j)=1;
                m2(j,i)=1;
            else
                m2(i,j)=0;
                m2(j,i)=0;
            end
        end
    end
end

m2=diag(sum(m2))-m2; %Laplace-mátrix

s2 = eig(m2);
% s2=sort(s2); %levágtam a legkisebb sajátértéket
% mins=s2(1); %megjegyzem, hogy mi volt a legkisebb (0 érték)
% s2=s2(2:n);
```

```

    %g2=graph(m2);
    %plot(g2)
    histogram(s2, nbins)
end
%*****
%REGULÁRIS GRÁF
if modell=="regularis"
    n=1000; %csúcsok száma
    k=10; %regularitás
    nbins=80;

    if mod(k*n,2)==0
        hurok=1;
        while(hurok~=0) %hurokélek kiküszöbölve
            A=zeros(n);
            d=k*ones(1,n);
            e=k*n;
            for i=1:k*n/2
                r=randi(e);
                x1=1; %első fél él
                s=d(x1);
                while s<r
                    x1=x1+1;
                    s=s+d(x1);
                end
                d(x1)=d(x1)-1;
                e=e-1;

                q=randi(e);
                x2=1; %második fél él
                s=d(x2);
                while s<q
                    x2=x2+1;
                    s=s+d(x2);

```

```

        end
        d(x2)=d(x2)-1;
        e=e-1;

        A(x1,x2)=A(x1,x2)+1;
        A(x2,x1)=A(x2,x1)+1;
    end

    hurok=0;
    for i=1:n
        if A(i,i)>0
            hurok = hurok+A(i,i);
        end
    end
end

end
else
    error("nem lehetséges!");
end
L=k*eye(n)-A;
% G=graph(A);
s=eig(L);
histogram(s,nbins);
end
%*****
%PA
if modell=="PA"
    v=1000;%csúcsszám
    m=1;
    n=m*v;
    nbins=120;

    A=zeros(n);
    A(1,1)=1;
    for i=2:n

```

```

    r=rand(1);
    k=0;
    j=1;
    d=sum(A);
    d=d+diag(A)';
    d(i)=1;
    while (k<r)
        k=k+d(j)/(2*i-1);
        j=j+1;
    end
    A(i,j-1)=1;
    A(j-1,i)=1;
end
G=graph(A);
% plot(G)
% hold on

B=zeros(v);
for i=1:n
    for j=1:n
        if floor((i-1)/m)+1==floor((j-1)/m)+1 %ha B főátlójában vagyunk
            if i>=j
                B(floor((i-1)/m)+1,floor((j-1)/m)+1)=
                B(floor((i-1)/m)+1,floor((j-1)/m)+1)+A(i,j);
            end
        else
            B(floor((i-1)/m)+1,floor((j-1)/m)+1)=
            B(floor((i-1)/m)+1,floor((j-1)/m)+1)+A(i,j);
        end
    end
end
end
%G1=graph(B);
% plot(G1)
L=diag(sum(B))-B;

```

```

s=eig(L);
e=0.1^5;
nulla=0;
for i=1:v
    if (s(i)<e && s(i)>-e)
        nulla=nulla+1;
    end
end
nulla %0 Laplace-sajátérték multiplicitása
histogram(s,nbins)

% tiledlayout(2,1)
% ax1 = nexttile;
% plot(ax1,G1)
% ax2 = nexttile;
% histogram(ax2,s,nbins)
%s=sort(s);
%s(1) %legkisebb sajátérték
end

```

5.2.6. Előjelnélküli Laplace-spektrum

```

%ELŐJELNÉLKÜLI LAPLACE-SPEKTRUM
modell="PA"; %"erdos", "regularis" vagy "PA"

%ERDŐS-RÉNYI
if modell=="erdos"
    n=1000;
    p=0.2;
    nbins=70;

    m2 = rand(n);
    for i=1:n
        m2(i,i)=0;
    end
end

```



```

end
for i=2:n
    for j=1:(i-1)
        if m2(i,j)<p
            m2(i,j)=1;
            m2(j,i)=1;
        else
            m2(i,j)=0;
            m2(j,i)=0;
        end
    end
end

m2=diag(sum(m2))+m2; %előjel nélküli Laplace-mátrix
s2 = eig(m2);
% s2=sort(s2); %levágom a legnagyobb sajátértéket
% maxs=s2(n) %megjegyzem, hogy mi volt a legkisebb (0 érték)
% s2=s2(1:n-1);

    histogram(s2, nbins)
end
%*****
%REGULÁRIS GRÁF
if modell=="regularis"
    n=500; %csúcsszáma
    k=10; %regularitás
    nbins=80; %hisztogram oszlopok

    if mod(k*n,2)==0
        hurok=1;
        while(hurok~=0) %hurokélek kiküszöbölve
            A=zeros(n); %adjacenciamátrix lesz
            d=k*ones(1,n); %még felhasználandó fél élek vektora
            e=k*n; %még felhasználandó fél élek száma
        end
    end
end

```

```

for i=1:k*n/2
    r=randi(e);
    x1=1;      %első fél él
    s=d(x1);
    while s<r
        x1=x1+1;
        s=s+d(x1);
    end
    d(x1)=d(x1)-1;
    e=e-1;

    q=randi(e);
    x2=1;      %második fél él
    s=d(x2);
    while s<q
        x2=x2+1;
        s=s+d(x2);
    end
    d(x2)=d(x2)-1;
    e=e-1;

    A(x1,x2)=A(x1,x2)+1;
    A(x2,x1)=A(x2,x1)+1;
end

hurok=0;
for i=1:n
    if A(i,i)>0
        hurok = hurok+A(i,i);
    end
end
end
else
    error("nem lehetséges!");

```

```

end
L=k*eye(n)+A; %előjel nélküli Laplace-mátrix
s=eig(L);
%   s=sort(s);
%   maxs=s(n)
    histogram(s,nbins);
end
%*****
%PA
if modell=="PA"
    v=100; %csúcsszám
    m=10;
    n=m*v;
    nbins=120;

    A=zeros(n);
    A(1,1)=1;
    for i=2:n
        r=rand(1);
        k=0;
        j=1;
        d=sum(A);
        d=d+diag(A)';
        d(i)=1;
        while (k<r)
            k=k+d(j)/(2*i-1);
            j=j+1;
        end
        A(i,j-1)=1;
        A(j-1,i)=1;
    end

    B=zeros(v);
    for i=1:n

```

```

    for j=1:n
        if floor((i-1)/m)+1==floor((j-1)/m)+1 %ha B főátlójában vagyunk
            if i>=j
                B(floor((i-1)/m)+1,floor((j-1)/m)+1)=
                B(floor((i-1)/m)+1,floor((j-1)/m)+1)+A(i,j);
            end
        else
            B(floor((i-1)/m)+1,floor((j-1)/m)+1)=
            B(floor((i-1)/m)+1,floor((j-1)/m)+1)+A(i,j);
        end
    end
end

L=diag(sum(B))+B;
s=eig(L);
histogram(s,nbins)

% e=0.1^5; %hibahatár a 0 sajátértékek számolásához
% nulla=0;
% for i=1:v
%     if (s(i)<e && s(i)>-e)
%         nulla=nulla+1;
%     end
% end
% nulla %0 előjel nélküli Laplace-sajátérték multiplicitása

% s=sort(s);
% s(1) %legkisebb sajátérték
end

```

5.2.7. Perkoláció

```

%PA GRÁFBÚL PERKOLÁCIÓ
v=100; %csúcsszám

```

```

m=10; %paraméter
n=m*v;
nbins=30; %hiszogram oszlopszáma
%m=1 eset:
A=zeros(n);
A(1,1)=1;
for i=2:n
    r=rand(1);
    k=0;
    j=1;
    d=sum(A);
    d=d+diag(A)';
    d(i)=1;
    while (k<r)
        k=k+d(j)/(2*i-1);
        j=j+1;
    end
    A(i,j-1)=1;
    A(j-1,i)=1;
end
G=graph(A);

%csúcsok összevonása:
if m>1
    B=zeros(v);
    for i=1:n
        for j=1:n
            if floor((i-1)/m)+1==floor((j-1)/m)+1 %B főátlójában
                if i>=j
                    B(floor((i-1)/m)+1,floor((j-1)/m)+1)=
                    B(floor((i-1)/m)+1,floor((j-1)/m)+1)+A(i,j);
                end
            else
                B(floor((i-1)/m)+1,floor((j-1)/m)+1)=

```

```

                B(floor((i-1)/m)+1,floor((j-1)/m)+1)+A(i,j);
            end
        end
    end
    G1=graph(B);
else
    G1=G;
end

C=zeros(v); %perkolálás
p=0.6;
for i=1:v
    for j=1:i
        if B(i,j)==1
            r=rand(1);
            if r>p
                C(i,j)=1; C(j,i)=1;
            end
        end
    end
end

G2=graph(C);
spect2=eig(C);
spect = eig(B);

tiledlayout(2,2)
ax1 = nexttile;
plot(ax1,G1)
ax2 = nexttile;
histogram(ax2,spect,nbins)
ax3 = nexttile;
plot(ax3,G2)
ax4 = nexttile;
histogram(ax4,spect2,nbins)

```

```

%SPEKTRUM STABILITÁSA
v=100; %közös csúcscsám
m=10; %perkolálandó gráfhoz paraméter
m2=3; %sima PA gráfhoz paraméter
n=m*v;
n2=m2*v;
p=0.7; %perkoláció valószínűsége
nbins=60; %hisztogram oszlopszáma

%Perkolálandó PA gráf:
A=zeros(n);
A(1,1)=1;
for i=2:n
    r=rand(1);
    k=0;
    j=1;
    d=sum(A);
    d=d+diag(A)';
    d(i)=1;
    while (k<r)
        k=k+d(j)/(2*i-1);
        j=j+1;
    end
    A(i,j-1)=1;
    A(j-1,i)=1;
end

B=zeros(v);
for i=1:n
    for j=1:n
        if floor((i-1)/m)+1==floor((j-1)/m)+1 %ha B főátlójában vagyunk
            if i>=j
                B(floor((i-1)/m)+1,floor((j-1)/m)+1)=
                B(floor((i-1)/m)+1,floor((j-1)/m)+1)+A(i,j);
            end
        end
    end
end

```

```

        end
    else
        B(floor((i-1)/m)+1,floor((j-1)/m)+1)=
        B(floor((i-1)/m)+1,floor((j-1)/m)+1)+A(i,j);
    end
end
end

%Sima PA gráf:
A2=zeros(n2);
A2(1,1)=1;
for i=2:n2
    r=rand(1);
    k=0;
    j=1;
    d=sum(A2);
    d=d+diag(A2)';
    d(i)=1;
    while (k<r)
        k=k+d(j)/(2*i-1);
        j=j+1;
    end
    A2(i,j-1)=1;
    A2(j-1,i)=1;
end

B2=zeros(v);
for i=1:n2
    for j=1:n2
        if floor((i-1)/m2)+1==floor((j-1)/m2)+1 %ha B főátlójában vagyunk
            if i>=j
                B2(floor((i-1)/m2)+1,floor((j-1)/m2)+1)=
                B2(floor((i-1)/m2)+1,floor((j-1)/m2)+1)+A2(i,j);
            end
        end
    end
end

```



```

        else
            B2(floor((i-1)/m2)+1,floor((j-1)/m2)+1)=
            B2(floor((i-1)/m2)+1,floor((j-1)/m2)+1)+A2(i,j);
        end
    end
end
end

C=zeros(v); %perkolálás
for i=1:v
    for j=1:i
        if B(i,j)==1
            r=rand(1);
            if r>p
                C(i,j)=1; C(j,i)=1;
            end
        end
    end
end

G1=graph(C);
G2=graph(B2);
spect1=eig(C);
spec2 = eig(B2);

tiledlayout(2,2)
ax1 = nexttile;
plot(ax1,G1)
ax2 = nexttile;
histogram(ax2,spect1,nbins)
ax3 = nexttile;
plot(ax3,G2)
ax4 = nexttile;
histogram(ax4,spec2,nbins)

```