

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM  
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

# A ZSETONLÖVŐ JÁTÉK

szakdolgozat

**Sisák László Sándor**

Matematika BSc

Alkalmazott matematikus szakirány

*Témavezető:*

**Tóthmérész Lilla**

Operációkutatási Tanszék



Budapest 2021

## Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Tóthmérész Lillának, hogy elvállalta a közös munkát, hogy rengeteg hasznos cikkel, észrevétellel és konzultációval segített a szakdolgozat megírásában, és hogy mindig türelmes volt velem, ha kérdéseim voltak.

# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezető</b>	<b>4</b>
1.1. Definíciók, alaptulajdonságok . . . . .	6
<b>2. Irányítatlan gráfok</b>	<b>8</b>
2.1. Végeség . . . . .	8
2.2. A játék hossza . . . . .	12
2.3. Végeséget eldöntő algoritmus élszámnyi zseton esetén . . . . .	14
<b>3. Irányított gráfok</b>	<b>21</b>
3.1. Végeség . . . . .	22
3.2. Periódusvektor, periódushossz . . . . .	24
3.3. A megállási probléma NP-teljesége . . . . .	28

# 1. fejezet

## Bevezető

Először 1986-ban Spencer vezetett be egy játékot, amit a zsetonlövő játék elődjének tekinthetünk [12], majd 1991-ben Björner, Lovász és Shor terjesztette ki a játékot gráfokra [5]. Ez a dolgozat az utóbbi általános zsetonlövő játékkal foglalkozik: egy gráf minden csúcsán áll néhány zseton. Egy lépésben egy csúcs minden élén egy-egy zsetont a szomszédos csúcsokba küldünk, vagyis "kilőjük". (Ezt persze csak akkor tehetjük meg, ha ehhez elegendő zseton van a csúcson.)

A szabályok egyszerűek, a játéknak mégis több érdekes tulajdonsága van. Például ha rácsgráfon játszunk, tekinthető a diffúzió egy diszkrét modelljének, másrészt a szabályok minimális módosításával (az adott állásban minden kilőhető csúcsot kilövünk, és ezt tekintjük egy lépésnek) sejtautomataként is értelmezhető. Figyelemreméltó az is, hogy a matematikusoktól függetlenül mások is bevezették a játékot valamilyen formában. [3]

Több kérdés is felmerül a játékkal kapcsolatban: Milyen hatással vannak a játékos döntései a játékra? Véges vagy végtelen hosszú a játék? Ha véges, hány lépést tehetünk a végéig?

Elsősorban a játék végességét fogjuk körüljárni. Látni fogjuk, hogy a végességet csak a zsetonok kezdeti leosztása és a gráf befolyásolja, a játékos

döntései nem. A végesség eldöntése ennek ellenére nem könnyű, ugyanis esetenként a játék végéig kisebb gráfokon is sok lépést teszünk. Ez azt jelenti, hogy a végesség eldöntésének NP-belisége sem triviális, mivel a játékos által végrehajtott lépések sorozata nem polinomiális tanú. Egyes speciális esetekben már megoldottak az említett problémák, de még sok a nyitott kérdés a témában, például sem egyszerű digráfokra, sem irányítatlan multigráfokra nem ismert polinomiális algoritmus, ami megállapítja, hogy véges vagy végtelen hosszú a játék. Érdekes kérdés az is, hogy ha adott a zsetonoknak két különböző leosztása, elérhető-e egyik a másikból a játék során. Utóbbi problémát a szakdolgozat nem tárgyalja, bár egyes itt kimondott tételek ehhez is kapcsolódnak.

A dolgozat során először irányítatlan gráfokon vizsgáljuk a játékot. A 2.1 szakaszban a játék végessége és a játékban lévő zsetonok száma közötti összefüggést vizsgáljuk, majd a 2.2 szakaszban közöljük Tardos eredményét véges játékok hosszáról. Bemutatjuk Hujter eredményét, mely szerint ha élszámnyi zseton van játékban, a végesség eldöntése P-ben van. Az algoritmus összetettsége miatt ennek külön szakaszt szánunk.

Ezt követően a zsetonlövő játék irányított változatát járjuk körül: több irányítatlan gráfokra kimondott állítást általánosítunk, vagy rávilágítunk, hogy miért nem lehet őket könnyedén általánosítani. A 3.1 szakaszban digráfokon vizsgáljuk a zsetonok számának és a játék végességének kapcsolatát. A 3.2 szakasz olyan játékokat vizsgál, ahol a játék valamely állásából néhány lépés után ugyanebbe az állásba érünk vissza, illetve kitérünk arra, hogyan kapcsolódik ez a véges játék hosszához. Az utolsó szakasz Farell és Levine eredményét közli: többszörös élekkel rendelkező digráfokon NP-nehéz a játék végességét eldönteni.

## 1.1. Definíciók, alaptulajdonságok

Adott egy  $G(V, E)$  irányított vagy irányítatlan összefüggő gráf, minden csúcán valahány (nemnegatív egész darab) zseton. Ezt *zsetonleosztásnak* nevezzük. Egy csúcs *aktív*, ha legalább annyi zseton van rajta, mint a kifoka. Egy csúcs *stabil*, ha nem aktív. Egy *megengedett lépésben* a játékos kiválaszt egy aktív csúcsot, levesz annyi zsetont a csúcsról, amennyi a kifoka (irányítatlan gráfon: foka) és minden szomszédos csúcsra áttesz egyet-egyét. (A zsetonok száma tehát állandó a játék során.) Ezt nevezzük a csúcs *kilövésének* is. Ilyen lépések véges vagy végtelen sorozatát *megengedett játéknak* nevezzük, ha pedig már nem tudunk megengedett lépéseket tenni, a játék véget ér vagy *megáll*. A *játék hossza* értelemszerűen a megállásig megtett lépések száma. Ha a játék nem áll meg, a játék hossza végtelen.

Adott  $G(V, E)$  (irányított) gráfra definiáljuk  $L \in \mathbb{Z}^{V \times V}$  Laplace-mátrixot a következő módon:

$$L(u, v) = \begin{cases} -d_{ki}(v) & \text{ha } u = v, \\ d(v, u) & \text{ha } u \neq v. \end{cases}$$

Ahol  $d_{ki}(v)$  a csúcs kifokát (irányítatlan gráfon: fokát)  $d(v, u)$  pedig a  $vu$  él multiplicitását jelöli. Könnyen ellenőrizhető, hogy ha egy zsetonleosztást  $C \in \mathbb{Z}^V$  vektorral jelölünk, akkor  $C + L\mathbf{1}_v$  a  $v$  csúcs kilövése utáni zsetonleosztás. ( $\mathbf{1}_v$  a  $v$  koordinátáján egy, máshol nulla.) Hasonló módon kilövések bármilyen hosszú sorozatát kódolhatjuk. Egy *játék vektora* olyan  $0 \leq x \in \mathbb{Z}^V$  vektor, amire  $x(v)$  a  $v$  csúcs kilövéseinek száma a játék során.

**1.1.1. Megjegyzés.** Ha valamely  $L \in \mathbb{Z}^n$  négyzetes mátrixra teljesül, hogy bármely oszlopában 0 az elemek összege, átlóelemei nempozitívak, a többi eleme pedig nemnegatív, akkor (és csak akkor)  $L$  meghatároz egy irányított multigráfot, melynek a Laplace-mátrixa. Ha a  $L$  szimmetrikus is, a gráf tekinthető irányítatlannak.

Definiáljuk a *megállási problémát*: adott  $G(V, E)$  irányított vagy irányítatlan gráf és  $C : V \rightarrow \mathbb{N}$  kezdeti zsetonleosztás mellett döntsük el, tudunk-e úgy játszani, hogy a játék megáll. A megállási problémával kapcsolatos Björner, Lovász és Shor tétele, ami itt Thorup [14] bizonyításával szerepel:

**1.1.1. Tétel** ([5], 1.1. tétel).  $G(V, E)$  gráfon adott  $C$  kezdeti zsetonleosztás mellett vagy minden játék véges, vagy minden játék végtelen.

*Bizonyítás.* Legyen  $x$  egy véges játék vektora kezdeti  $C$  zsetonleosztáson. Játsszuk  $C$  zsetonleosztásra a játékot úgy, hogy minden  $v$  csúcsot legfeljebb  $x(v)$ -szer lövünk ki. Mikor ezt nem tudjuk folytatni, a játék vektora  $x'$ , és  $x' \leq x$ . Tegyük fel indirekt, hogy az így kapott  $C + Lx'$  leosztásban van aktív  $u$  csúcs.  $x'(u) = x(u)$ , különben  $u$ -t még legalább egyszer kilőttük volna.  $x' \leq x$  miatt  $u$  szomszédairól a játék során legfeljebb annyi zseton került  $u$ -ra, mint az  $x$  vektorú játékban, tehát  $(C + Lx')(u) \leq (C + Lx)(u)$ . De  $C + Lx$  leosztásban ugyanez a csúcs stabil, ami ellentmond a feltevésünknek. Más szóval ha adott zsetonleosztásra van véges játék, minden játék véges.  $\square$

**1.1.2. Megjegyzés.** Ezzel beláttuk, hogy bármely két véges játék vektora koordinátáinként egyezik. Tetszőlegesen választott  $v$  csúcsra beláttuk, hogy legfeljebb  $x(v)$ -szer lő, vagyis szimmetriai okokból pontosan  $x(v)$ -szer lő.

A megállási problémát a tétel alapján úgy fogalmazhatjuk át, hogy adott  $G(V, E)$  gráfon döntsük el, hogy  $C$  zsetonleosztás mellett megáll-e a játék.

A probléma tehát megoldható úgy, hogy játsszuk a játékot: megengedett lépéseket teszünk amíg a játék megáll. A zsetonok száma a játék során állandó, a zsetonleosztások pedig nemnegatív egész függvények, tehát véges sok féle zsetonleosztás alakulhat ki adott kezdeti leosztásból. Ezért a végtelen hosszú játékok ciklizálnak, és felismerhetőek abból, hogy olyan zsetonleosztásba jutunk, ami korábban előfordult a játék során. Látni fogjuk azonban, hogy ez az algoritmus – és így a véges játékok hossza – általános esetben nem polinomiális.

## 2. fejezet

# Irányítatlan gráfok

A következő fejezetben csak összefüggő irányítatlan gráfokon vizsgáljuk a megállási problémát. Látni fogjuk, hogy a játék végeessége hogyan függ a játékban levő zsetonok számától, mutatunk egy általánosítást az 1.1.1 tételre és becslést adunk véges játékok hosszára.

### 2.1. Végeesség

Felmerül a kérdés, hogy hogyan dönthető el egy játék végeessége anélkül, hogy hosszasan megengedett lépéseket teszünk. Az egyik ilyen módszer, hogy a zsetonok számából következtetünk. Ezzel kapcsolatos Björner, Lovász és Shor tétele, melyhez először belátunk egy egyszerű lemmát:

**2.1.1. Lemma** ([5], 2.1. lemma). *Végtelen játék során  $G(V, E)$  gráf minden csúcsa végtelen sokszor lő.*

*Bizonyítás.* Mivel végtelen sok megengedett lépést teszünk, kell lennie  $u$  csúcsnak, ami végtelen sokszor lő. Ha  $uv \in E$  akkor  $v$  nem lőhet véges sokszor, ellenkező esetben  $v$  utolsó kilövése után az  $uv$  élen tetszőlegesen sok



zseton juthat  $v$ -re, ami ellentmond annak, hogy a zsetonok száma állandó és véges. Ha tehát egy csúcs végtelenszer lő, a szomszédai is végtelenszer lőnek. Mivel a gráf összefüggő, ezzel beláttuk az állítást.  $\square$

**2.1.1. Tétel** ([5], 2.3. tétel). *Vizsgáljuk  $G(V, E)$  gráfon  $C$  zsetonleosztást, ami  $K$  zsetont használ.*

- 1) *Ha  $K > 2|E| - |V|$ , a játék végtelen.*
- 2) *Ha  $2|E| - |V| \geq K \geq |E|$ , lehet úgy konstruálni  $C$ -t, hogy a játék véges legyen, és úgy is, hogy végtelen legyen.*
- 3) *Ha  $|E| > K$ , a játék véges.*

*Bizonyítás.*  $\sum_{v \in V} (d(v) - 1) = 2|E| - |V|$ , ezért ha ennél több zseton van játékban, mindig legalább egy csúcs aktív a skatulyaelv miatt.

Ha  $K \leq 2|E| - |V|$ , tudunk konstrukciót adni véges játéokra: ha minden  $v \in V$  csúcson legfeljebb  $d(v) - 1$  zseton áll, nincs aktív csúcs.

Hogy megmutassuk  $K \geq |E|$  zsetonra a játék végtelenségét (alkalmas konstrukció mellett) elég  $K = |E|$  zsetonra konstrukciót adni. Legyen  $G(V, E)$  egy aciklikus irányítása  $G'(V, A)$ . Tegyük minden csúcsra  $d_{be}(v)$  zsetont, ahol  $d_{be}(v)$  a  $v$  csúcs  $G'(V, A)$ -beli befoka. Ekkor  $G'(V, A)$ -nak van topologikus sorrendje, melynek utolsó  $u$  csúcsán  $d(u) = d_{be}(u)$  zseton áll, azaz  $u$  aktív. Ha kilőjük ezt a csúcsot, és az irányítást megfordítjuk az  $u$ -ra illeszkedő éleken, a kapott irányításra továbbra is teljesül, hogy  $d_{be}(v)$  zseton áll minden csúcson:  $u$ -n most nincs zseton, és az új kifoka nulla, a szomszédaira egy-egy zseton került, és ennek megfelelően a befokuk egyel nőtt. Nem keletkezett kör az irányításban, hiszen most  $u$ -ból csak kifelé mutatnak élek, így  $u$ -t a korábbi topologikus sorrend elejére téve  $G'(V, A)$  egy topologikus sorrendjét kapjuk. Mivel a körmentesség maradandó, mindig van topologikus sorrend melynek utolsó csúcsa aktív.

Végül megmutatjuk, hogy  $K < |E|$  esetén mindig véges a játék. Vizsgáljuk ismét  $G$  egy aciklikus  $G'(V, A)$  irányítását. Legyen

$$T = \sum_{v \in V} \max\{0, C(v) - d_{be}(v)\}$$

A 2) állítás bizonyításában leírt módon változtatjuk az irányítást játék közben, vagyis  $u$  csúcs kilövése után az  $u$ -ba befutó élek irányítását megfordítjuk. Be fogjuk látni, hogy ekkor  $T$  csökken a játék során.  $T \geq 0$  miatt  $T$  nem csökkenhet végtelen sokszor, így ez garantálni fogja a játék végeességét. Vizsgáljuk meg, mit történik egy  $u$  csúcs kilövésekor. Nyilván  $C(u) \geq d_{be}(u)$  a lövés előtt, különben  $u$  stabil.  $\max\{0, C(u) - d_{be}(u)\}$  értéke  $d_{ki}(u)$ -val csökken a lövés során, és  $u$  bármely  $w$  szomszédján  $\max\{0, C(w) - d_{be}(w)\}$  legfeljebb egyel nő, ha  $uw$  a  $w$  felé volt irányítva és  $C(w) - d_{be}(w) \geq 0$ . Mivel legfeljebb  $d_{ki}(u)$  darab ilyen csúcs van,  $T$  nem nőtt. Sőt, ha valamely  $w$  szomszédra  $0 > C(w) - d_{be}(w)$  és  $vw$  a  $w$  felé volt irányítva,  $T$  csökken.

Mivel  $K < |E|$ , mindig van  $0 > C(w) - d_{be}(w)$  tulajdonságú  $w$  csúcs, és ez a tulajdonság csak úgy változhat, ha  $w$  legalább egy szomszédját kilőjük. Tegyük fel indirekt, hogy a játék végtelen. Egy végtelen játékban minden csúcstól végtelen sokszor lövünk ki, speciálisan a  $\{w : C(w) < d_{be}(w)\}$  csúcsokat is. (Itt pillanatnyi zsetonelosztás és irányítás szerinti  $C$ -t és befokot vizsgáljuk.) Mivel az ilyen csúcsok stabilak, ez csak úgy lehetséges, ha előbb a csúcs szomszédait lövjük ki, vagyis  $T$ -nek csökkennie kell. Mint korábban megjegyeztük,  $T$  nem csökkenhet 0 alá, tehát a feltevésünk hibás és a játék véges.  $\square$

A szakasz hátralevő részében belátunk egy erős tételt, amelyet többször fel fogunk használni a dolgozat során.

$C_1, C_2 : V \rightarrow \mathbb{Z}$  zsetonelosztást nevezzük *ekvivalensnek*, ha van egész  $x$  vektor, hogy  $C_1 = C_2 + Lx$ . Ekkor persze  $C_2 = C_1 + L(-x)$ , ha pedig  $C_1 = C_2 + Lx$ ,  $C_2 = C_3 + Ly$  akkor  $C_1 = C_3 + L(x + y)$ , vagyis ez valóban

ekvivalenciareláció.

**2.1.1. Megjegyzés.** A Laplace-mátrix bármely oszlopában az elemek összege nulla, ezért  $C_1$  koordinátáinak összege ugyanannyi, mint  $C_1 + Lx$  koordinátáinak összege. Más szóval ekvivalens zsetonleosztások ugyanannyi zsetont használnak.

$C_1 \sim C_2$  szemléletes jelentése, hogy  $C_2$  leosztás elérhető  $C_1$  leosztásból a megengedő zsetonlövő játékban. A megengedő zsetonlövő játékban akkor is kilőhetünk egy  $v$  csúcst, ha  $C(v) < d(v)$ , vagyis egy csúcson állhat negatív számú zseton. A definíció birtokában az alábbi általánosítást adhatjuk az 1.1.1 tételre:

**2.1.2. Tétel** ([6], 4.3. lemma, [8], 2.1. lemma). *Ha  $C_1, C_2 : V \rightarrow \mathbb{N}$  kezdeti zsetonleosztás ekvivalens, akkor  $C_1$ -en a játék pontosan akkor véges, ha  $C_2$ -n is az*

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy  $C_1$  leosztásra a játék véges, és miután lejátszottuk a játékot,  $C'_1$  leosztással áll meg. Mivel  $C_2 \sim C_1 \sim C'_1$ , van  $x \in \mathbb{Z}^V$  vektor, amire  $C_2 + Lx = C'_1$ .  $x \geq 0$  feltehető, mert irányítatlan gráfon  $Lx = L(x + k\mathbf{1}) \forall k \in \mathbb{Z}$ .  $C_2$  kezdeti leosztáson játsszuk úgy a játékot, hogy minden  $v$  csúcst legfeljebb  $x(v)$ -szer lövünk ki. Mikor ezt nem tudjuk folytatni, a  $C'_2$  leosztásba jutunk. Ha belátjuk  $C'_2$  zsetonleosztásról, hogy stabil, az állítást igazoltuk. Tegyük fel indirekt, hogy  $C'_2 = C_2 + Ly$ -nak ( $y \leq z$ ) van aktív  $v$  csúcsa.  $y(v) = x(v)$ , különben  $v$ -t még legalább egyszer kilőttük volna.  $C'_1(v) < d(v)$ , hiszen  $C'_1 = C'_2 + L(x - y)$  stabil, de ekkor  $(x - y)(v) = 0$ ,  $x - y \geq 0$  miatt  $d(v) > C'_1(v) \geq C'_2(v)$ , ami ellentmond a feltevésnek.

Ugyanígy belátható, hogy ha  $C_2$ -re véges a játék, akkor  $C_1$ -re is.  $\square$

A tétel garantálja  $C$  zsetonleosztáson a játék megállását, ha találunk  $C' \sim C$  zsetonleosztást aktív csúcsok nélkül. Ez jelentősen megkönnyíti a

további bizonyításokat, hiszen nem kell belátni  $C'$ -ről, hogy megengedett lépésekkel előállítható  $C$ -ből. Ezt többek között az NP-nehézség belátásához is felhasználjuk a 3.3. szakaszban.

## 2.2. A játék hossza

Ebben a szakaszban felső korlátot adunk véges játék hosszára irányítatlan gráfon. Ezzel igazolni fogjuk, hogy egyszerű gráfokon polinomiális időben eldönthető a megállási probléma, mert ezekre a gráfokra a felső korlát polinomiális.

**2.2.1. Lemma** ([13], 4. lemma). *Ha minden csúcsot legalább egyszer kilövéünk, a játék végtelen.*

*Bizonyítás.* Tegyük fel indirekt, hogy minden csúcsot legalább egyszer kilövtünk, és a játék véget ért. Legyen  $v$  az a csúcs, melyet a játék vége előtt legrégebben lövtünk ki. Később  $v$  minden szomszédját legalább egyszer kilövtük, így  $v$ -re visszakerült legalább  $d(v)$  zseton, vagyis  $v$  aktív mikor megáll a játék, ami ellentmondás.  $\square$

**2.2.1. Megjegyzés.** Az állítás akkor is igaz, ha csak  $V \setminus \{u\}$ -ra követeljük meg, hogy legalább egyszer kilőjük (tetszőleges  $u \in V$  választása mellett). Ekkor ugyanis  $u$  minden szomszédját kilövtük, ettől  $u$  aktívvá vált.

**2.2.2. Lemma** ([13], 5. lemma). *Ha  $K$  zseton van játékban, a játék minden lépése után két szomszédos csúcs kilövéseinek száma legfeljebb  $K$ -val tér el.*

*Bizonyítás.* Legyen  $uv$  a gráf egy éle. Feltehetjük, hogy eddig  $u$ -t  $x(u)$ -szor,  $v$ -t  $x(v)$ -szer lövtük ki, és  $x(u) < x(v)$ .  $uv$ -n eddig  $x(u)$  zseton érkezett  $v$ -be és  $x(v)$  az ellenkező irányba. Ha  $H \subseteq V$  azon csúcsokból áll, melyeket legfeljebb  $x(u)$ -szor lövtünk ki,  $V \setminus H$ -ből több zseton került  $H$ -ba, mint vissza. Mivel legfeljebb  $K$  zseton hagyhatta el  $V \setminus H$ -t,  $x(v) - x(u) \leq K$   $\square$

A lemmákból már adódik az alábbi, Tardostól származó tétel a játék hosszára:

**2.2.1. Tétel** ([13], 2. tétel). *Véges játék irányítatlan  $G(V, E)$  gráfon  $2|V||E|diam(G)$  lépésben megáll.*

*Bizonyítás.* A 2.2.1 lemma miatt van  $u \in V$  amit egyszer sem lövünk ki. A 2.2.2 lemmát alkalmazva látható, hogy minden  $v$  csúcs legfeljebb  $dist(u, v)K \leq diam(G)K$ -szor volt kilőve, ahol  $K$  a zsetonok száma. Ezek szerint legfeljebb  $|V|diam(G)K$  megengedett lépés történt. Véges játékban  $K \leq 2|E| - |V|$ , (2.1.1 tétel) Ebből már adódik a játék hosszára a  $2|V||E|diam(G)$  felső becslés.  $\square$

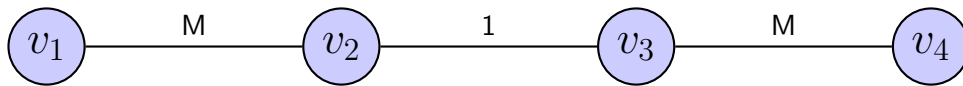
**2.2.2. Megjegyzés.** Egyszerű gráfra a játékot  $O(n^4)$  lépésben lejátszhatjuk  $|E| \sim O(n^2)$ ,  $diam(G) \sim O(n)$  becsléssel.

**2.2.3. Megjegyzés.** Nyitott kérdés, hogy a becslés mennyire éles. Pontosabban: nem ismert, hogy minden irányítatlan gráfra létezik-e kezdeti zsetonelosztás, melyre  $\epsilon|V||E|diam(G)$  lépés alatt áll meg a játék, ahol  $\epsilon \in \mathbb{R}$  rögzített konstans.

Láttuk, hogy egyszerű gráfokon a véges játékok gyorsan befejeződnek. Nagy élmultiplicitások esetén azonban a játék hossza nem mindig polinomiális az input méretében, ahogy a következő  $A$  adjacenciamátrixszal és  $C$  kezdeti zsetoneloszlással adott példa is mutatja:

**Példa.**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & M & 0 & 0 \\ M & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & M \\ 0 & 0 & M & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2M \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Nem nehéz ellenőrizni, hogy a játék  $2M + 3$  lépés után megáll. A bemenet viszont csak  $O(\log(M))$  méretű, hiszen egy  $M$ -szeres él megadható a két végpontjával ( $O(1)$  tár) és a multiplicitásával ( $O(\log(M))$  tár).

## 2.3. Végeességet eldöntő algoritmus élszámnyi zseton esetén

Ebben a szakaszban bemutatjuk Hujter eredményét [10]: polinomiális algoritmust adunk általános  $G(V, E)$  irányítatlan gráfra, ha a kezdeti  $C$  zsetonleosztás pontosan  $|E|$  zsetont használ. Az algoritmust a 2.1.1 tétel 2. és 3. állításának belátásához használt módszer motiválja. Egy irányítást fogunk módosítani a gráfon, és igyekszünk elérni hogy minden  $v$  csúcshoz  $C(v)$  legyen az irányítás szerinti befoka. Hogy átláthatóbban megfogalmazzhassuk a felhasznált lemmákat, ezt a módszert most precízebben definiáljuk.

Definiáljuk a következő játékot, amit *nyelő-fordító játéknak* nevezünk: adott egy  $G$  gyengén összefüggő irányított gráf. Nevezzük *nyelőnek*  $G$  azon csúcsait, melyeknek nulla a kifoka. Egy lépésben kiválasztunk egy nyelőt, és az összes rá illeszkedő él irányítását megfordítjuk. Ezt a nyelő *megfordításának* nevezzük. A játékot addig játsszuk, amíg nincs nyelő a gráfban.

Az előbbi játék a zsetonlövő játék speciális esete: ha  $G$ -t irányítatlannak tekintjük és a csúcsok befokait vesszük a csúcson álló zsetonok számának, ez egy olyan zsetonlövő játék, ahol pontosan akkor aktív egy csúcs, ha foksámnyi zseton van rajta. A csúcs kilövésekor a szomszédos csúcsokon a zsetonok száma pont annyival változik, mint nyelő-fordító játékban a megfelelő befokok. Látni fogjuk, hogy a nyelő-fordító játékokra (és így a neki megfelelő speciális zsetonlövő játékokra) könnyű a megállási probléma.

**2.3.1. Lemma** ([10], 2.10. állítás). *Ha a gráfban nincs irányított kör, a nyelő-fordító játék végtelen.*

*Bizonyítás.* Ezt a lemmát a 2.1.1 tétel 2. állításának bizonyításánál már lényegében beláttuk: nyelő megfordítása során nem keletkezhet új kör, így mindig van topologikus sorrend a gráfon, melynek utolsó csúcsa nyelő kell, hogy legyen.  $\square$

**2.3.2. Lemma** ([10], 2.11. lemma). *Ha  $v$  benne van egy irányított körben, és van  $u \rightarrow v$  út,  $u$  soha nem lesz nyelő.*

*Bizonyítás.* Egy út  $i$ . csúcsa csak úgy válhat nyelővé, ha előbb az  $i+1$ . csúcs nyelővé válik, és megfordítjuk. Mivel a kör visszatér önmagába, nem tudjuk elkezdni a kör és az odavezető út csúcsainak megfordítását.  $\square$

**2.3.3. Lemma** ([10], 2.12. állítás). *Ha van a megirányításban irányított kör, a játék véges.*

*Bizonyítás.* Vegyük fel a kezdeti  $G(V, A)$  gráfhoz a  $G'(V, A')$  segédgráfot.

- $\forall uv \in A : uv \in A'$  és  $c(uv) = 0$ .
- $\forall uv \in A : vu \in A'$  és  $c(vu) = 1$ .

Legyen  $S \subseteq V$  azon csúcsok halmaza, melyeket tartalmaz legalább egy  $G(V, A)$ -beli kör. Definiáljuk a  $\pi : V \rightarrow \mathbb{N}$  függvényt úgy, hogy

$$\pi(v) = \min\{K : K \text{ egy } v \rightarrow S \text{ út költsége}\}$$

A 2.3.2 lemma miatt ha  $\pi(v) = 0$ ,  $v$  már nem válhat nyelővé. Ha  $v$  nyelő,  $\pi(v) \geq 1$ . Könnyen ellenőrizhető, hogy ha  $v$ -t megfordítjuk,  $\pi(v)$  pontosan egyel csökken, a többi  $u \in V - \{v\}$  csúcson pedig  $\pi(u)$  változatlan, ezért  $\sum_{v \in V} \pi(v)$  lépésben véget ér a játék.  $\square$

**2.3.1. Megjegyzés.** Mivel  $\pi(v) \leq |V| - 1$ , a véges nyelő-fordító játékok  $O(|V|^2)$  lépésben véget érnek.

A fenti lemmákból adódik a végtelen nyelő-fordító játékokat karakterizáló tétel:

**2.3.1. Tétel** ([10], 2.9. állítás). *Egy nyelő-fordító játék pontosan akkor végtelen, ha a kezdeti irányítás körmentes.*

Általános esetben persze nem feltétlenül van irányítás, ami a kezdeti zsetonleosztást előállítja a csúcsok befokaként, annak ellenére hogy élszámnyi zseton áll a gráfon. A szakasz hátralevő részében belátjuk, hogy ekkor van ekvivalens zsetonleosztás, amit megirányítás indukál és ez a zsetonleosztás polinom időben számolható.

Az algoritmus alapötlete a következő: vegyünk az irányítatlan gráfon tetszőleges kezdeti irányítást. Lesznek csúcsok, melyeken ekkor több zseton van, mint az irányításbeli befoka, és lesznek csúcsok, melyeken kevesebb. Ha találunk egy zsetonhiánnyal rendelkező csúcsból irányított utat egy zsetontöbblettel rendelkező csúcsba, az út éleinek irányítását megfordítva a hiányt és a többletet is egyel csökkentettük. Ezt addig folytatjuk amíg lehetséges. Ha nincs több ilyen út, akkor (és csak akkor) van a gráfban egy vágás, ami  $T, U \subseteq V$ -re osztja a csúcsokat úgy, hogy  $T$ -ben zsetonhiányos,  $U$ -ban zsetontöbbletes csúcsok nincsenek, és a vágás élei mind  $T$  felé irányítottak. Lőjük ki  $T$  összes csúcsát és fordítsuk meg a vágás élein az irányítást! Könnyű ellenőrizni, hogy ekkor az egyes csúcsokon a zsetonok számának és az irányításbeli befoknak a különbsége változatlan, de a  $T \rightarrow U$  utak létezését gátló vágás megszűnik. Ezeket a lépéseket addig ismételjük, amíg a kezdeti  $C$  zsetonleosztásból olyan  $C'$  zsetonleosztáshoz jutunk, melyre  $C'(v) - d_{be}(v) = 0$  ( $\forall v \in V$ ).

Az algoritmus nem lenne polinomiális, ha a fenti módon, ismételt folyamkereséssel próbáljuk megoldani a problémát. Definiáljuk a konvex költségfüggvényes áram feladatot. Látni fogjuk, hogy ennek a modellnek a segítségével polinomiális futásidőben megkapjuk  $C'$ -t.



Az általános konvex költségfüggvényű áram feladatban egy  $G(V, A)$  irányított gráfon adott egy  $b : V \rightarrow \mathbb{R}$  függvény, amire  $\sum_{v \in V} b(v) = 0$ . Minden élen adott  $u : A \rightarrow \mathbb{R}^+$  kapacitás és  $c_{vw} : [0, u(\vec{vw})] \rightarrow \mathbb{R}$  konvex költségfüggvény.

Célunk olyan  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  függvény keresése, melyre:

$$0 \leq f(\vec{vw}) \leq u(\vec{vw}) \quad \forall vw \in A$$

$$b(v) = \sum_{\vec{vw} \in A} f(\vec{vw}) - \sum_{\vec{wv} \in A} f(\vec{wv}) \quad \forall v \in V$$

$$\sum_{\vec{vw} \in A} c_{vw}(f(\vec{vw})) \rightarrow \min$$

**2.3.2. Megjegyzés.** Ha  $c_{vw}$  szakaszosan lineáris konvex költségfüggvény ami  $0 = t_0, t_1, \dots, t_k = u_{vw}$  pontokban törik, a  $\vec{vw}$  él helyettesíthető  $\vec{vw}_1, \dots, \vec{vw}_k$  lineáris költségfüggvényű élekkel, melyek közül az  $i$ -edik kapacitása  $t_i - t_{i-1}$  és költsége  $c_{vw}^i(x) = \frac{c_{vw}(t_i) - c_{vw}(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}x$ . A konvexitás miatt  $c_{vw}^i(x) \geq c_{vw}^j(x)$ , ha  $i > j$ , ezért az optimális áram csak akkor használja  $\vec{vw}_i$  élt, ha a kisebb indexű  $\vec{vw}_j$  élek mind telítettek. Ebből látható, hogy az élcserével kapott gráfon egy optimális megoldás megfeleltethető az eredeti gráfon egy optimális megoldásnak, és az optimumok értéke megegyezik.

Bizonyítás nélkül kimondunk két tételt, melyeket fel fogunk használni az algoritmushoz.

**2.3.2. Tétel** ([1], 9.3. tétel). *Olyan konvex költségfüggvényes áram feladatban, ahol  $b$ ,  $u$  egészértékű, és minden  $\vec{vw}$  élen:*

- $c_{vw}$  szakaszosan lineáris konvex költségfüggvény
- $c_{vw}$  a  $t_1, t_2, \dots, t_n$  egész pontokban törik
- $c_{vw}(t_1), c_{vw}(t_2), \dots, c_{vw}(t_n) \in \mathbb{Z}$

létezik  $\pi : V \rightarrow \mathbb{Z}$  függvény, hogy tetszőleges  $f$  áram akkor és csak akkor optimális, ha

$$c_{vw}(f(\vec{vw}) + 1) - c_{vw}(f(\vec{vw})) \geq \pi(w) - \pi(v) \geq c_{vw}(f(\vec{vw})) - c_{vw}(f(\vec{vw}) - 1)$$

minden  $\vec{vw}$  élen. Itt  $c_{vw}(u(\vec{vw}) + 1) = \infty$  és  $c_{vw}(-1) = -\infty$  konvencióval élünk.

**2.3.3. Tétel** ([1], 14.1. tétel). Van algoritmus, ami a 2.3.2 tétel feltételeit teljesítő áram feladatra megad egy optimális egészértékű áramot és kiszámolja a tételben megadott  $\pi : V \rightarrow \mathbb{Z}$  potenciálfüggvényt  $O(T(G, C) \cdot |A| \cdot \log(U))$  futásidőben, ahol

$$C = \max\{c_{vw}(x) : \vec{vw} \in A, x \in \mathbb{R}\}$$

$$U = \max\{u(\vec{vw}) : \vec{vw} \in A\}$$

és  $T(G, C)$  a  $G$  gráfban  $C$  felső korlátos élköltségek esetén a legrövidebb út megkereséséhez szükséges futásidő.

A fenti tételek segítségével  $G(V, E)$  gráfon adott  $C$  zsetonelosztás mellett (amiben  $|E|$  a zsetonok száma) tudunk keresni irányítást, amire  $d_{be} = C$ .

Vegyük  $E$  egy olyan irányítását, amiben nincs többszörös él ellentétes irányítású élekkel. Vegyük a következő konvex költségfüggvényű áram feladatot: a gráf  $G'(V, A')$ . Minden  $E$ -beli  $vw$  multiélnek megfeleltetünk  $A'$ -ben egy  $\vec{vw}$  előre élt, aminek megegyezik az iránya  $vw$  irányításával és egy ellentétes irányú  $\vec{wv}$  hátra élt. Minden él kapacitása  $U = |V| \cdot \max_{v \in V}\{C(v)\}$ .  $b(v)$  a  $v$  csúcson álló zsetonok és a  $G(V, E)$  irányítása szerinti befokok  $C(v) - d_{be}(v)$  különbsége. A költségfüggvény minden előre élen

$$c_{vw}(x) = \left( \left\lfloor \frac{x}{m_{vw}} \right\rfloor \right) + \left\lfloor \frac{x}{m_{vw}} \right\rfloor \left\{ \frac{x}{m_{vw}} \right\}$$

Ahol  $m_{vw}$  a  $vw \in E$  él multiplicitása. Ez a függvény  $k$  meredekségű

$m_{vw}(k-1)$  és  $m_{vw}k$  között, vagyis szakaszosan lineáris és konvex. A hátra éleken  $c'_{vw}(x) = c_{vw}(x + m_{vw})$ .

Mivel a költségfüggvények mind monoton nőnek, az optimális áram bármely  $\vec{vw}$  előre él és  $\vec{wv}$  hátra él közül legfeljebb az egyik pozitív. Ez a pozitív függvényérték legyen  $f(vw)$ .

A 2.3.2 tételt felhasználva látjuk, hogy van optimális megoldás, amire

$$(\pi(w) - \pi(v))m_{vw} \leq f(vw) \leq (\pi(w) - \pi(v) + 1)m_{vw}$$

Mivel  $0 \leq f(vw) - (\pi(w) - \pi(v))m_{vw} \leq m_{vw}$ , megtehetjük, hogy a kezdeti irányításunk minden többszörös élén  $f(vw) - (\pi(w) - \pi(v))m_{vw}$  él irányítását megfordítjuk.

**2.3.4. Tétel** ([10], 3.5. állítás). *Adott  $C$  kezdeti zsetonelosztás, ahol  $C$  élszámnyi zsetont használ. A fent definiált irányításra és  $\pi : V \rightarrow \mathbb{Z}$  potenciálfüggvényre  $d_{be} = C - L\pi$  teljesül.*

*Bizonyítás.* Jelölje  $d_{be} \in \mathbb{Z}^V$  a kezdeti irányítás befok vektorát,  $f_\pi$  legyen

$$f_\pi(vw) = f(vw) - (\pi(w) - \pi(v))m_{vw}$$

$$T^+(v) = \{w : \vec{vw} \text{ előre él}\}, T^-(v) = \{w : \vec{wv} \text{ hátra él}\}$$

$$\begin{aligned} \forall v \in V : \quad b(v) = C(v) - d_{be}(v) &= \sum_{w \in T^+(v)} f(vw) - \sum_{w \in T^-(v)} f(wv) = \\ &= \left( \sum_{w \in T^+(v)} f_\pi(vw) + \sum_{w \in T^+} (\pi(w) - \pi(v))m_{vw} \right) - \\ &- \left( \sum_{w \in T^-(v)} f_\pi(wv) + \sum_{w \in T^-(v)} (\pi(v) - \pi(w))m_{vw} \right) = \end{aligned}$$

$$= \sum_{w \in T^+(v)} f_\pi(vw) - \sum_{w \in T^-(v)} f_\pi(wv) + \sum_{w \in T^+(v) \cup T^-(v)} (\pi(w) - \pi(v))m_{vw}$$

Ezt átrendezve kapjuk a

$$d_{be}(v) + \sum_{w \in T^+(v)} f_\pi(vw) - \sum_{w \in T^-(v)} f_\pi(wv) = C(v) - \sum_{w \in T^+(v) \cup T^-(v)} (\pi(w) - \pi(v))m_{vw}$$

egyenlőséget. A bal oldalon épp az újonnan definiált irányítás szerinti  $d'_{be}(v)$  befok áll. Mivel ez minden  $v$  csúcsra igaz, az állítást beláttuk.  $\square$

**2.3.3. Megjegyzés.** A 2.3.3 tételben szereplő futásidő az itt megoldott áram feladatra (gyengén) polinomiális az eredeti input méretében: a gráfnak  $O(|V|^2)$  éle van, a kapacitás- és költségfüggvényekre  $U \leq |V||E|$  és  $c_{vw} \leq \binom{U+1}{2}$  teljesül.

A fenti tétel birtokában polinomiális algoritmust adhatunk az élszámnyi zsetonból álló  $C$  zsetonleosztások megállításának eldöntésére:

- Veszünk egy tetszőleges kezdeti irányítást, amiben a nincs többszörös él ellentétes irányítású élekkel
- A korábban definiált  $G'(V, A')$  gráfon az említett  $b, u, c_{vw}, c'_{vw}$  mellett megkeressük az optimális egész folyamatot és  $\pi : V \rightarrow \mathbb{Z}$  potenciálfüggvényt.
- Előállítjuk az új irányítást, melyre  $d_{be} = C - L\pi$ . A kapott irányításon a nyelő-fordító játék pontosan akkor véges, ha  $C$ -n a zsetonlövő játék véges. (2.1.2 tétel)
- A nyelő-fordító játék végeességét eldöntjük abból, hogy megvizsgáljuk az irányítás körmentességét.

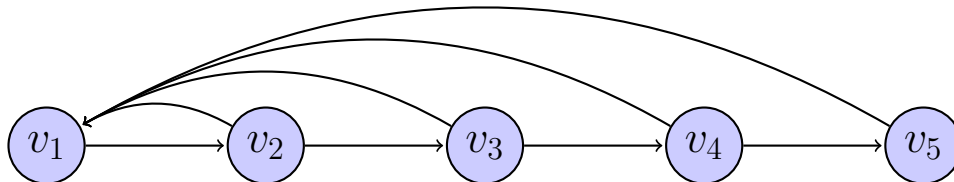
## 3. fejezet

# Irányított gráfok

A következő fejezetben irányított gráfokon vizsgáljuk a megállási problémát. Itt érdemes kikötni, hogy a gráf nulla kifokú csúcsait soha nem tekintjük aktívnek, ellenkező esetben ezeket a csúcsokat tetszőlegesen sokszor kilőhetnénk, nem változna a zsetonleosztás.

Az irányítatlan esettel ellentétben digráfon kis élszám esetén is lehet hosszú a játék. Ezt szemlélteti az alábbi gráf:

**Példa.** Vegyünk egy  $n$  hosszú irányított utat, és a másodiktól kezdve minden csúcsból vezessünk egy-egy élet az út első csúcsába.



Ha kezdetben  $v_1$  csúcson  $n - 2$  zseton van, a többin pedig nincs zseton, a játék megáll amikor az első és utolsó csúcsot kivéve egy-egy zseton áll a csúcsokon. Nem nehéz ellenőrizni, hogy mire egyetlen zsetont eljuttatunk  $v_k$ -ra, minden kisebb indexű  $v_i$  csúcsot legalább  $2^{k-i-1}$ -szer kilövünk, vagyis a játék hossza exponenciális a bemenet méretében.

## 3.1. Végesség

Ebben a szakaszban a zsetonok száma és a végesség kapcsolatát vizsgáljuk irányított gráfokra. Az irányítatlan esettel ellentétben digráfokon nem tudunk a gráf struktúrájának figyelembevétel nélkül a 2.1.1 tételhez hasonló becslést adni. Ezt szemlélteti a következő példa:

**Példa.** Legyen  $G$  irányított kör. Kettőzzük meg minden élét. Ekkor ha két zsetont teszünk ugyanarra a csúcsra, a játék végtelen. Most fordítsuk meg  $G$  minden kétszeres élének egyik példányát. A kapott  $G'$  gráfnak ugyanannyi csúcsa és éle van mint  $G$ -nek, de a játék véges, ha a kezdeti zsetonelosztás csúcsszámnyi vagy kevesebb zsetont használ.

A 2.1.1 tétel skatulyaelven alapuló becslése viszont egyszerűen átültethető digráfokra.

**3.1.1. Tétel** ([4], 2. fejezet). *Vizsgáljuk  $G(V, A)$  digráfon  $C$  zsetonelosztást, ami  $K$  zsetont használ. Tegyük fel, hogy minden  $v \in V$  csúcsra  $d_{ki}(v) \geq 1$ .*

- 1) *Ha  $K > |A| - |V|$ , a játék végtelen.*
- 2) *Ha  $K \leq |A| - |V|$ , lehet úgy konstruálni  $C$ -t, hogy a játék véges legyen.*

*Bizonyítás.* Mivel  $\sum_{v \in V} (d_{ki}(v) - 1) = |A| - |V|$ , ha ennél több zseton van játékban, mindig legalább egy csúcs aktív a skatulyaelv miatt. Itt kihasználjuk, hogy nincs 0 kifokú csúcs, hiszen azokról kikötöttük, hogy soha nem tekintjük őket aktívnek.

Ha  $K \leq |A| - |V|$ , tudunk konstrukciót adni véges játékokra: ha minden  $v \in V$  csúcson legfeljebb  $d_{ki}(v) - 1$  zseton áll, nincs aktív csúcs.  $\square$

**3.1.1. Lemma.** *Erősen összefüggő digráfon végtelen játék során minden csúcs végtelen sokszor lő.*

*Bizonyítás.* Az erős összefüggőséget kihasználva a bizonyítás menete ugyanaz, mint a 2.1.1 lemma esetében.  $\square$

**3.1.2. Tétel** ([4], 2.2. tétel). *Legyen  $G$  erősen összefüggő digráf, melyben  $h$  az élfüggetlen körök maximális száma. Ha a kezdeti zsetonleosztás kevesebb, mint  $h$  zsetont használ, a játék véges.*

*Bizonyítás.* Legyenek  $K_1, K_2, \dots, K_h$  élfüggetlen körök. Játsszunk úgy, hogy mikor  $K_i$  kör valamely élén először mozog zseton, akkor ezt a zsetont a körhöz rendeljük: ha később kilőjük a csúcsot amelyen ez a zseton áll, mindig a kör következő csúcsára tesszük, vagyis már nem hagyhatja el a kört. Ettől persze a játékmenet változatlan, a végességre nincs hatással, hogy különbséget teszünk a zsetonok között. Mivel  $h$ -nál kevesebb zseton van, lesz  $K_i$  kör, amihez nem rendelünk zsetont a játék során, vagyis  $K_i$  csúcsai egyszer sem lőnek. Mivel összefüggő gráfon végtelen játék során minden csúcs végtelen sokszor lőne, ez garantálja a játék végességét.  $\square$

A 2.1.1 tétellel ellentétben itt nem állítjuk, hogy ha legalább  $h$  zseton van játékban, lehet végtelen a játék. Erre jó példa a 3. fejezet legelején látott gráf, ahol nincs két élfüggetlen kör, mégis legalább  $|V| - 1$  zseton kell, hogy a játék végtelen hosszú legyen. Euler-gráfokra teljesül az alábbi becslés:

**3.1.3. Tétel** ([11], 3.3. tétel). *Legyen  $G(V, A)$  Euler-gráf, melyben  $h = \min\{|F| : F \subset A, G(V, A \setminus F) \text{ aciklikus}\}$ . Ha  $C$  kezdeti zsetonleosztás legalább  $h$  zsetont használ, lehet úgy konstruálni  $C$ -t, hogy a játék végtelen.*

*Bizonyítás.* Hogy megmutassuk a játék végtelenségét  $K \geq h$  zsetonra, elég  $h$  zsetonra konstrukciót adni. Legyen  $F \subset A$  minimális  $h$  elemszámú élhalmaz, melyre  $G(V, A \setminus F)$  aciklikus. Jelölje  $d_{be}^F(v)$  és  $d_{ki}^F(v)$  a csúcsok  $G(V, F)$ -beli be- és kifokát. Be fogjuk látni, hogy ha minden  $v \in V$  csúcsra  $C(v) = d_{be}^F(v)$ , a játék végtelen.

$F$  definíciója miatt  $G(V, A \setminus F)$ -nek van topológiai sorrendje. Ha ennek a sorrendnek  $u$  az első csúcsa,  $u$ -ba nem fut be él  $G(V, A \setminus F)$ -ben, tehát  $d_{be}^F(u) = d_{be}(u)$ .  $G$  Euler-gráf, tehát  $d_{be}(u) = d_{ki}(u)$ .  $C$  definíciója miatt  $C(u) = d_{be}^F(u) = d_{be}(u) = d_{ki}(u)$ , tehát  $u$  aktív. Lőjük ki  $u$ -t, ekkor a  $C' = C + L\mathbf{1}_u$  zsetonleosztásba jutunk.

Megmutatjuk, hogy van  $F' \subset A$  élhalmaz, ami  $h$  élből áll,  $G(V, A \setminus F')$  aciklikus és  $C'(v) = d_{be}^{F'}(v)$  is minden  $v$  csúcsra teljesül. Legyen

$$F' = F \cup \{\vec{uv} \in A\} \setminus \{\vec{vu} \in A\}$$

Ekkor  $G(V, A \setminus F')$ -ben nincs kör, hiszen csak  $u$ -ra illeszkedő élek változtak  $G(V, A \setminus F)$ -hez képest, tehát a keletkezett körökre  $u$ -nak illeszkedni kéne.  $u$  kifoka  $G(V, A \setminus F')$ -ben 0, tehát nincs ilyen kör.  $u$ -n most nincs zseton, a  $\{v \in V : \vec{uv} \in A\}$  csúcsokon  $C'(v) = C(v) + 1$ .  $F'$  definíciójából adódóan  $d_{be}^{F'}(v) = d_{be}^F(v) + 1$  és  $d_{be}^{F'}(u) = 0$ . A többi csúcsra  $d_{be}^{F'}(w) = d_{be}^F(w)$ .

A fenti lépéseket tetszőlegesen sokszor meg tudjuk ismételni, tehát a játék végtelen. □

## 3.2. Periódusvektor, periódushossz

Adott  $G(V, A)$  gráf, melynek Laplace-mátrixa  $L$ . Az olyan  $x \in \mathbb{Z}^V$  vektort, melyre  $Lx = 0$  teljesül, *periódusvektornak* nevezük.  $x$  periódusvektor *primitív*, ha  $x(v_1), x(v_2), \dots, x(v_n)$  legnagyobb közös osztója 1. A periódusvektor névadó tulajdonsága, hogy ha  $G$  minden  $v$  csúcsát  $x(v)$ -szer kilőjük, a zsetonleosztás változatlan. Látni fogjuk, hogy a periódusvektor (alkalmas skalárszorzóval) nemnegatív, így értelmes a lövések ilyen sorozatáról beszélni.

**3.2.1. Tétel** ([4], 4.1. állítás). *Erősen összefüggő  $G$  digráf  $x$  primitív periódusvektorára teljesül, hogy  $x \geq \mathbf{1}$  és minden periódusvektor  $tx$  alakú, ahol  $t \in \{1, 2, \dots\}$*



*Bizonyítás.* Ha  $d = \max\{d_{ki}(v) : v \in V\}$ ,  $L + dI$  nemnegatív irreducibilis mátrix. A Perron-Frobenius tétel miatt  $L + dI$ -nek van  $x > 0$  valós sajátvektora, amihez  $d$  sajátérték és egydimenziós sajátaltér tartozik. Ez a sajátaltér az  $\{x : Lx = 0\}$  halmaz, hiszen  $(L + dI)x = Lx + dx$ . Ebből látható, hogy  $L$  rangja  $|V| - 1$  és  $\{x : Lx = 0\}$  alteret egyelemű  $x_0$  bázis feszíti.  $x_0 \in \mathbb{Q}^V$ , mert  $L$  egész, így alkalmas  $\lambda$  skalárral  $x = \lambda x_0 \geq 1$  primitív periódusvektor.  $\square$

**3.2.1. Megjegyzés.** Egyetlen  $\lambda$  esetén teljesül  $\text{lnko}(x_0(v_1), \dots, x_0(v_n)) = 1$  és  $x_0 \geq 1$  egyszerre, tehát eöf. digráf primitív periódusvektora egyértelmű.

**3.2.2. Megjegyzés.** Mivel Euler-gráfokon minden  $v$  csúcsra  $d_{be}(v) = d_{ki}(v)$ , a gráf  $L$  Laplace-mátrixára  $L\mathbf{1} = 0$  teljesül. Vagyis bármely Euler-gráf primitív periódusvektora az azonosan 1 vektor.

A periódusvektorok pozitív-sága miatt a 2.1.2 tétel általánosítható erősen összefüggő digráfokra:

**3.2.2. Tétel.** *Erősen összefüggő digráfon ha  $C_1, C_2 : V \rightarrow \mathbb{N}$  kezdeti zsetonleosztás ekvivalens, akkor  $C_1$ -en a játék pontosan akkor véges, ha  $C_2$ -n is az.*

*Bizonyítás.* Az irányítatlan eset bizonyításában kihasználtuk, hogy bármely  $z \in \mathbb{R}^V$  vektorra és  $k \in \mathbb{Z}$  konstansra  $Lz = L(z + k\mathbf{1})$ , vagyis  $z \geq 0$  feltehető.  $x$  periódusvektor szigorúan pozitív és  $Lz = L(z + kx) \forall k \in \mathbb{Z}$  teljesül, így erősen összefüggő digráfon is feltehető  $z \geq 0$ . A bizonyítás többi lépése minden nehézség nélkül átültethető digráfra.  $\square$

Összefüggő, de nem erősen összefüggő gráfokra természetesen nem igaz a 3.2.1 tétel. Bevezetjük a *nyelő komponens* fogalmát, ami olyan erősen összefüggő komponenst jelent, amiből nem fut él a komponensen kívüli csúcsokba. Az új definíció segítségével a fenti tétel általánosítása az alábbi módon írható le:

**3.2.3. Tétel** ([4], 4.1. állítás). *Tegyük fel, hogy  $G(V, A)$  digráf nyelő komponensei  $S_1, S_2, \dots, S_k$ , Laplace-mátrixa  $L$ . Ekkor léteznek  $x_1, x_2, \dots, x_k$  primitív periódusvektorok, melyek  $\{x : Lx = 0\}$  egy bázisát alkotják, és  $x_i(v) > 0$ , ha  $v \in S_i$ ,  $x_i(v) = 0$  egyébként.*

*Bizonyítás.* Először belátjuk, hogy minden periódusvektor 0 a nyelő komponenseken kívül. Tegyük fel indirekt, hogy ez valamilyen  $x'$  periódusvektorra nem teljesül. Legyen  $T^+$  azon  $V \setminus \bigcup_{i=1}^k S_i$ -beli csúcsok nemüres halmaza, melyekre  $x'(v) > 0$ . Hasonlóan definiáljuk  $T^-$ -t az  $x'(v) < 0$  csúcsokra.  $Lx' = 0$  miatt speciálisan  $\sum_{v \in T^+} Lx'(v) = 0$  is igaz, ami  $L$  definíciójából adódóan

$$\sum_{v \in T^+} d_{ki}(v)x'(v) = \sum_{v \in T^+} \sum_{u \in V} d(u, v)x'(u) = \sum_{u \in V} x'(u) \sum_{v \in T^+} d(u, v)$$

alakban írható.  $u \in V$  helyett elég  $u \in T^+ \cup T^-$ -on összegezni, hiszen ellenkező esetben vagy  $x'(u) = 0$ , vagy  $u$  egy nyelő komponensben van, így nem futhat él  $u$ -ból a komponensen kívüli  $T^+$ -ba.

$$\begin{aligned} \sum_{v \in T^+} d_{ki}(v)x'(v) &= \sum_{v \in T^+} d(v, T^+)x'(v) + \sum_{v \in T^-} d(v, T^+)x'(v) = \\ &= \sum_{v \in T^+} d(v, T^+)x'(v) + \sum_{v \in T^+} d(v, V \setminus T^+)x'(v) \end{aligned}$$

Ahol  $d(v, H)$  a  $v$ -ből a  $H \subseteq V$ -be futó csúcsok száma. Egyszerűsítés után azt kapjuk, hogy

$$\sum_{v \in T^-} d(v, T^+)x'(v) = \sum_{v \in T^+} d(v, V \setminus T^+)x'(v)$$

Itt a bal oldal nemnegatív, a jobb pedig nempozitív  $T^+$  és  $T^-$  definíciója miatt, így csak  $\forall v \in T^- : d(v, T^+) = 0$  és  $\forall v \in T^+ : d(v, V \setminus T^+) = 0$  esetén

lehet igaz az egyenlőség, ekkor viszont  $T^+$  nyelő komponens, ami ellentmond a definíciójának.

Tetszőleges  $S_j$  nyelő komponensből definíció szerint nem fut ki él, így  $S_j$ -re megszorítva alkalmazhatjuk a 3.2.1 tételt.  $S_j$ -hez tartozó  $x_j$  periódusvektorról feltehetjük, hogy egész és a koordinátáinak legnagyobb közös osztója 1.  $x_j$ -t kiegészíthetjük nullákkal, hogy kiterjesszük az egész gráfra, ekkor  $x_1, x_2, \dots, x_k$  teljesítik a tétel állítását.  $\square$

Végül röviden kitérünk a periódusvektor és a véges játékok hossza közötti összefüggésekre. Az egyik triviális összefüggés, hogy ha a játék vektora  $z$  és valamely  $x$  periódusvektorra  $z \geq x$  teljesül, a játék végtelen. Ez lényegében a 2.2.1 lemma általánosítása digráfra.

$G(V, A)$  erősen összefüggő digráf  $x$  primitív periódusvektorának  $\sum_{v \in V} x(v)$  hosszát *periódushossznak* nevezzük és  $Per(G)$ -vel jelöljük.

**3.2.3. Megjegyzés.** Euler-gráfok és irányítatlan gráfok periódushossza a csúcsszám.

A periódushossz lehet exponenciális a gráf méretében. Erre jó példa a fejezet elején vizsgált gráf, melynek  $x$  primitív periódusvektora

$$x(v_i) = \begin{cases} 2^{n-i-1} & \text{ha } i \neq n, \\ 1 & \text{ha } i = n. \end{cases}$$

vagyis periódushossza  $2^{|V|-1}$ .

Léteznek felső becslések a periódushosszra, melyek közül Björner és Lovász eredményét [4] mutatjuk be.

**3.2.4. Tétel** ([4], 4.10. állítás).  $G(V, A)$  erősen összefüggő digráfon legyen  $D = \max_{v \in V} d_{ki}(v)$ . Ekkor  $Per(G) \leq (2D)^{|V|-1}$ .

*Bizonyítás.* A 3.2.1 tétel bizonyításánál láttuk, hogy az  $L$  Laplace-mátrix rangja  $|V| - 1$ , tehát van  $(|V| - 1) \times (|V| - 1)$  méretű reguláris részmátrix.

Legyen ez az  $L_{i,j}$  részmatrix, melyet  $L$ -ből az  $i$ . sor és  $j$ . oszlop törlésével kapunk. Legyen  $x : V \rightarrow \mathbb{Z}$  olyan, hogy  $x(v_j) = (-1)^{i+j} \det(L_{i,j})$ . Ekkor  $Lx = 0$  és (alkalmas  $\lambda \in \{+1, -1\}$  szorzóval)  $x > 0$ , vagyis  $x$  periódusvektor. A Hadamard-egyenlőtlenséget felhasználva  $\det(L_{i,j}) \leq (\sqrt{2}D)^{|V|-1}$ , mert feltehető, hogy minden oszlop legalább két elemű, és feltettük, hogy  $L$  minden elemének abszolút értéke legfeljebb  $D$ . Ebből már következik az állítás, ha a gráfnak elég csúcsa van:

$$Per(G) \leq |V|(\sqrt{2}D)^{|V|-1} \leq (2D)^{|V|-1}$$

□

Végül kimondunk egy tételt, ami becslést ad véges játék hosszára a periódushossz függvényében. A maradéktalan bizonyítás hosszadalmas, ezért itt csak kimondjuk az állítást.

**3.2.5. Tétel** ([4], 4.8. tétel). *Irányítatlan  $G(V, A)$  gráfon*

$$game(G) \leq 2|V||A|D \cdot per(G)$$

Ahol  $D = \max_{v \in V} d_{ki}(v)$  és  $game(G)$  a játék hossza.

### 3.3. A megállási probléma NP-teljesége

Ebben a szakaszban belátjuk, hogy a megállási probléma NP-teljes erősen összefüggő irányított multigráfokon.

**3.3.1. Lemma** ([8], 3. fejezet). *A megállási probléma NP-beli.*

*Bizonyítás.* A 3.2.2 tétel szerint a kezdeti  $C$  zsetonleosztással ekvivalens  $C'$  stabil leosztás polinomiális tanú a végességre:  $C$  és  $C'$  ugyanannyi zsetont

használ (2.1.1 megjegyzés), így az  $x \in \mathbb{Z}^V : Lx = C - C'$  lineáris egyenletrendszerben minden konstans és együtttható polinomiális az input méretében. Az egyenlet megoldása igazolja a megállást.  $\square$

Legyen  $\mathbb{Z}_0^n \subset \mathbb{Z}^n$  azon egész vektorok halmaza, melyek koordinátáinak összege 0. A következő "nemnegatív rang problémát" fogjuk a megállásra visszavezetni: Adott egy  $n - 1$  dimenziós  $A \subseteq \mathbb{Z}_0^n$  rács bázisa és  $z \in \mathbb{Z}^n$  vektor. Döntsük el, van-e  $x \in \mathbb{N}^n$ , melyre  $z - x \in A$ .

Ha van ilyen  $x$ , azt mondjuk, hogy  $z$  rangja nemnegatív az  $A$ -hoz képest. A fenti kérdés NP-nehézségét Amini és Manjunath igazolta [2]. A nemnegatív rang és a megállási probléma közötti összefüggést a következő tétel írja le:

**3.3.1. Tétel** ([8], 3.1. tétel). *Bármely  $n - 1$  dimenziós  $A \subseteq \mathbb{Z}_0^n$  rácshoz létezik erősen összefüggő irányított multigráf, melynek  $L$  Laplace-mátrixára  $A = L(\mathbb{Z}^n)$  teljesül.  $L$  polinomiális időben számolható  $A$  bázisából és minden eleme kisebb, mint  $n \cdot \det(L)$*

A tétel bizonyításához felhasználunk három klasszikus rácselméleti lemmát.

**3.3.2. Lemma** ([9], [7]). *Bármely reguláris  $M \in \mathbb{Z}^{n \times n}$  mátrixnak van egyértelmű  $H = MU = (h_{ij})$  Hermite-normálformája, ahol*

- $U \in \mathbb{Z}^{n \times n}$  unimoduláris
- $H \in \mathbb{Z}^{n \times n}$  alsóháromszög-mátrix
- $0 < h_{ii} \quad (1 \leq i \leq n)$  és  $0 \leq h_{ij} < h_{ii} \quad (1 \leq j < i \leq n)$

*továbbá  $H$  polinomiális időben kiszámolható  $M$ -ből.*

Mivel  $U$  unimoduláris,  $M(\mathbb{Z}^n) = M(U\mathbb{Z}^n) = H(\mathbb{Z}^n)$ , és teljesül  $|\det(M)| = \det(H) = \prod_{i=1}^n h_{ii}$  egyenlőség.

**3.3.3. Lemma** ([7], 2.3. következmény). *Legyen  $M(\mathbb{Z}^n)$  rács. Ha  $(b_{ij}) = B \in \mathbb{Z}^{n \times n}$  alsóháromszög-mátrix oszlopai  $M(\mathbb{Z}^n)$ -beliek és  $b_{ii} = h_{ii}$  ( $1 \leq i \leq n$ ,  $H = (h_{ij})$  az  $M$  Hermite-normálforája.) Ekkor  $M(\mathbb{Z}^n) = B(\mathbb{Z}^n)$ .*

**3.3.4. Lemma** ([7], 2.5. állítás).  *$M(\mathbb{Z}^n)$  rács. Ekkor  $|\det(M)| \cdot (\mathbb{Z}^n)$  ennek a rácsnak részhalmaza.*

Ezzel minden eszköz adott a 3.3.1 tétel bizonyításához.

*Bizonyítás.* Legyen  $M \in \mathbb{Z}^{n \times (n-1)}$  az  $A$  bázisa,  $M' \in \mathbb{Z}^{(n-1) \times (n-1)}$  pedig az a mátrix, amit  $M$  alsó sorának törlésével kapunk.  $M$  bármely oszlopában az elemek összege 0, ezért a kapott  $M'$  reguláris. Legyen  $H = M'U$  az  $M'$  Hermite-normálformája. A 3.3.3 lemma feltételeit  $B = H$  nyilván teljesíti. A 3.3.4 lemma szerint 3.3.3 feltételei nem sérülnek, ha  $B$  valamely főátló alatti eleméből  $d = |\det(M')|$ -t levonunk. Ennek segítségével tudjuk  $B$ -t úgy definiálni, hogy bármely oszlopában nempozitív az elemek összege:

$$b_{ij} = \begin{cases} h_{ij} - k_j d & \text{ha } i = j + 1, \\ h_{ij} & \text{egyébként} \end{cases}$$

$k_j \in \mathbb{Z}$  értékét úgy határozzuk meg, hogy

$$(k_j - 1)d < \sum_{i=1}^{n-1} h_{ij} \leq k_j d \quad j = 1, 2, \dots, n-2$$

Legyen

$$L = \begin{bmatrix} -d & h_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & - & h_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & + & - & h_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & + & + & + & \dots & h_{(n-1)(n-1)} \\ d & l_{1n} & l_{2n} & l_{3n} & \dots & -h_{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix}$$

Az  $L$  úgy áll elő  $B$ -ből, hogy az elejére egy  $(-d, 0, \dots, 0, d)^T$  oszlopot írunk, az aljára pedig egy  $(d, l_{1n}, \dots, l_{(n-2)n}, h_{(n-1)(n-1)})$  sort. Ennek a sornak minden eleme az oszlopában lévő egyéb elemek összegének  $-1$ -szerese, így  $L$  bármely oszlopában az elemek összege 0. Mivel  $B$  bármely oszlopában az elemek összege nem pozitív, az alsó sor minden eleme nemnegatív (az utolsótól eltekintve).

Ekkor  $L$  átlóelemei negatív egészek, a többi eleme nem pozitív egész, az oszlopok elemeinek összege pedig 0.  $L$  tehát meghatároz egy irányított gráfot, melynek a Laplace-mátrixa. (1.1.1 megjegyzés) A főátló fölötti elemek mind negatívak, tehát  $n \rightarrow 1 \rightarrow \dots \rightarrow n-1 \rightarrow n$  Hamilton-kör, ami bizonyítja, hogy a gráf erősen összefüggő.

A 3.3.4 lemma szerint  $L$  első oszlopa  $A$ -beli. Mivel  $A, L(\mathbb{Z}^n) \subseteq \mathbb{Z}_0^n$ , valamint  $M'(\mathbb{Z}^{n-1}) = M(\mathbb{Z}^{n-1})$ , a többi oszlop egész kombinációinak halmaza  $A$ , vagyis  $A = L(\mathbb{Z}^n)$ . Mivel  $H$  minden eleme legfeljebb  $d = \det(H)$ ,  $L$  minden elemének abszolút értéke legfeljebb  $nd$ .  $\square$

**3.3.2. Tétel** ([8], 3.2. következmény). *A megállási probléma NP-teljes erősen összefüggő irányított multigráfra.*

*Bizonyítás.* Mint azt korábban említettük, a nemnegatív rang problémát vezetjük vissza a megállási problémára. Legyen a rács  $A$ , a kezdeti vektor  $C$ . Alkalmazzuk a 3.3.1 tételt  $A$ -ra és  $C$ -re, ekkor kapunk egy  $G(V, A)$  gráfot  $L$  Laplace-mátrixszal,  $A = L(\mathbb{Z}^n)$ .

Erősen összefüggő digráfon  $Lz = L(z+kx)$  bármely  $x > 0$  periódusvektor és  $k \in \mathbb{Z}$  konstans mellett, tehát  $A = L(\mathbb{Z}^n) = L(\mathbb{N}^n)$  teljesül. Ez azt jelenti, hogy

$$\exists C' \in \mathbb{N}^n : C - C' \in A \iff \exists z \in \mathbb{N}^n : C + Lz \geq 0$$

mert ekkor  $C' = C + Lz$  választással teljesül  $C - C' \in L(\mathbb{Z}^n)$ . Legyen  $C_{max} \in \mathbb{N}^n$  a maximális stabil zsetonleosztás  $G$ -n, vagyis minden  $v \in V$

csúcsra  $C_{max}(v) = d_{ki}(v) - 1$ . Ekkor

$\exists z \in \mathbb{N}^n : C + Lz \geq 0 \iff C_{max} - C$  zsetonleosztásra megáll a játék

mert ekkor  $C_{max} - C \sim C_{max} - C - Lz \leq C_{max} < d_{ki}$  stabil.  $\square$

Érdemes kiemelni, hogy a kapott gráf élmultiplicitásai lehetnek exponenciálisak az eredeti nemnegatív rang feladat inputjának méretében. Például  $M' = 2I$  esetén  $d = |\det(M')| = 2^n$ , ekkor  $L$  konstrukciójából adódóan lesznek  $2^{|V|} - 2$  multiplicitású élek. Nyitott kérdés, hogy ha az élszám polinomiális a csúcshatárban, P-ben van-e a megállási probléma.



# Irodalomjegyzék

- [1] Ravindra K. Ahuja, Thomas L. Magnanti, and James B. Orlin. *Network flows*. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1993. Theory, algorithms, and applications.
- [2] Omid Amini and Madhusudan Manjunath. Riemann-Roch for sublattices of the root lattice  $A_n$ . *Electron. J. Combin.*, 17(1):Research Paper 124, 50, 2010.
- [3] Per Bak, Chao Tang, and Kurt Wiesenfeld. Self-organized criticality: An explanation of the  $1/f$  noise. *Phys. Rev. Lett.*, 59:381–384, Jul 1987.
- [4] Anders Björner and László Lovász. Chip-firing games on directed graphs. *J. Algebraic Combin.*, 1(4):305–328, 1992.
- [5] Anders Björner, László Lovász, and Peter W. Shor. Chip-firing games on graphs. *European J. Combin.*, 12(4):283–291, 1991.
- [6] Benjamin Bond and Lionel Levine. Abelian networks I. Foundations and examples. *SIAM J. Discrete Math.*, 30(2):856–874, 2016.
- [7] P. D. Domich, R. Kannan, and L. E. Trotter, Jr. Hermite normal form computation using modulo determinant arithmetic. *Math. Oper. Res.*, 12(1):50–59, 1987.
- [8] Matthew Farrell and Lionel Levine. CoEulerian graphs. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 144(7):2847–2860, 2016.

- [9] C. Hermite. Sur l'introduction des variables continues dans la théorie des nombres. *J. Reine Angew. Math.*, 41:191–216, 1851.
- [10] Bálint Hujter. The chip-firing halting problem for multigraphs and convex cost flows. Report, Egerváry Research Group, 2017.
- [11] Viktor Kiss and Lilla Tóthmérész. Chip-firing games on Eulerian digraphs and **NP**-hardness of computing the rank of a divisor on a graph. *Discrete Appl. Math.*, 193:48–56, 2015.
- [12] J. Spencer. Balancing vectors in the max norm. *Combinatorica*, 6(1):55–65, 1986.
- [13] Gábor Tardos. Polynomial bound for a chip firing game on graphs. *SIAM J. Discrete Math.*, 1(3):397–398, 1988.
- [14] Mikkel Thorup. Firing games. Technical Report 94/15, University of Copenhagen, 1994.