Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Szita Márton

Klasszikus tételek diszkrét változata

BSc szakdolgozat

Alkalmazott matematika szakirány

Témavezető:

Dr. Kovács Sándor
Numerikus Analízis Tanszék

Budapest, 2021.

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani Dr. Kovács Sándornak, aki témavezetőmként végigkísérte a munkámat és szakmai segítséget nyújtott. Enélkül ez a dolgozat nem születhetett volna meg. Nagy örömömre szolgált a közös munka, illetve az ezáltal létrejött tanulási lehetőség.

Ezenkívül a családomnak és barátaimnak szeretném megköszönni mindazt, amit értem tettek: mellettem álltak jóban-rosszban az egész egyetemi időszak alatt.

Budapest, 2021. ősz

Szita Márton

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Az Abel-formula

1.1. Az Abel-formula motivációja és levezetése

Ismeretes, hogy ha az $f, g \in \mathfrak{D}[a,b]$ függvényekre $f', g' \in \mathfrak{R}[a,b]$ teljesül, akkor fennáll az

$$\int_a^b fg' = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'g \tag{1.1.1}$$

egyenlőség (a parciális integrálás tétele). Tegyük fel, hogy valamely $N \in \mathbb{N}$ esetén az $f : [1, N] \to \mathbb{R}$ függvény Riemann-integrálható, ill. differenciálható, akkor a

$$\sum_{k=1}^{N-1} f(k), \qquad \text{ill. az} \qquad f(k+1) - f(k)$$

összeg, ill. különbség az

$$\int_1^N f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{ill.} \qquad f'(k)$$

integrál, ill. derivált egy közelítésének tekinthető. A parciális integrálás tételének, pontosabban az (1.1.1) formulának diszkrét változatát fogalmazzuk meg az alábbi tételben.

1.1.1. tétel. Ha adott

$$(a_n), (b_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

sorozatok esetben

$$A_{n,m} := \sum_{j=m}^{n} a_j \qquad (m, n \in \mathbb{N} : \ n \geq m),$$

akkor

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = A_{n,m} b_n - \sum_{k=m}^{n-1} A_{k,m}(b_{k+1} - b_k) \qquad (m, n \in \mathbb{N} : \ n > m) \tag{1.1.2}$$

(**Abel-formula**).

Biz. Mivel

$$A_{k,m} - A_{k-1,m} = a_k \quad (k > m) \qquad \text{és} \qquad A_{m,m} = a_m,$$

ezért

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n} a_k b_k &= a_m b_m + \sum_{k=m+1}^{n} (A_{k,m} - A_{k-1,m}) b_k = a_m b_m + \sum_{k=m+1}^{n} A_{k,m} b_k - \sum_{k=m}^{n-1} A_{k,m} b_{k+1} = \\ &= a_m b_m + \sum_{k=m+1}^{n-1} A_{k,m} b_k + A_{n,m} b_n - \sum_{k=m+1}^{n-1} A_{k,m} b_{k+1} - A_{m,m} b_{m+1} = \\ &= A_{n,m} b_n - A_{m,m}(b_{m+1} - b_m) - \sum_{k=m+1}^{n-1} A_{k,m}(b_{k+1} - b_k) = \\ &= A_{n,m} b_n - \sum_{k=m}^{n-1} A_{k,m}(b_{k+1} - b_k). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

1.2. Az Abel-formula alkalmazásai

1.2.1. Elemi alkalmazások

1.2.1. állítás. Az első n pozitív szám összegére

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

teljesül.

Biz. Az $n = 1$ esetben nyilvánvalóan

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}.$$

Legyen

$$a_n := 1, \quad b_n := n \qquad (2 \leq n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor az (1.1.2) Abel-formula felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k &= \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot k = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right) b_n - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\sum_{j=1}^{k} a_j\right)(b_{k+1} - b_k) = \\ &= n \cdot n - \sum_{k=1}^{n-1} k[(k+1) - k] = n^2 - \sum_{k=1}^{n-1} k = n^2 - \left\{\sum_{k=1}^{n} k - n\right\}.\end{aligned}$$

Így

$$2\sum_{k=1}^{n} k = n^2 + n = n(n+1), \qquad \text{azaz} \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}. \quad \blacksquare$$

1.2.2. állítás. Ha $1 \neq q \in \mathbb{R}$, akkor fennáll a

$$\sum_{k=1}^{n} kq^k = \frac{q^{n+1}[n(q-1)-1]+q}{(q-1)^2}$$

egyenlőség.

Biz. Az $n = 1$ esetben nyilvánvalóan

$$\sum_{k=1}^{1} 1 \cdot q^1 = q = \frac{q[q^2-2q+1]}{(q-1)^2} = \frac{q^2[(q-1)-1]+q}{(q-1)^2}.$$

Legyen

$$a_n := q^n, \quad b_n := n \qquad (2 \leq n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor az (1.1.2) Abel-formula felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} kq^k &= \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right) b_n - \sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{k} a_j\right)(b_{k+1}-b_k) = \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} q^j\right) n - \sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{k} q^j\right)[(k+1)-k] = q \cdot \frac{q^n-1}{q-1} \cdot n - \sum_{k=1}^{n-1} q \cdot \frac{q^k-1}{q-1} = \\
&= \frac{1}{q-1}\left\{nq^{n+1} - qn - q \cdot \sum_{k=1}^{n-1} q^k + \sum_{k=1}^{n-1} q\right\} = \\
&= \frac{1}{q-1}\left\{nq^{n+1} - qn - q^2 \cdot \frac{q^{n-1}-1}{q-1} + (n-1)q\right\} = \\
&= \frac{1}{(q-1)^2}\left\{nq^{n+2} - nq^{n+1} - q^2 n + qn - q^{n+1} + q^2 + (n-1)q(q-1)\right\} = \\
&= \frac{1}{(q-1)^2}\left\{nq^{n+2} - nq^{n+1} - q^2 n + qn - q^{n+1} + q^2 + (n-1)(q^2-q)\right\} = \\
&= \frac{1}{(q-1)^2}\left\{nq^{n+2} - nq^{n+1} - q^2 n + qn - q^{n+1} + q^2 + nq^2 - nq - q^2 + q\right\} = \\
&= \frac{q^{n+1}[nq-n-1]+q}{(q-1)^2}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

1.2.1. példa. Megmutatjuk, hogy a

$$H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

ún. **harmonikus szám**okra fennáll a

$$\sum_{k=1}^{n} H_k = (n+1)(H_{n+1} - 1)$$

egyenlőség.

Világos, hogy az $n = 1$, ill. $n = 2$ esetben

$$\sum_{k=1}^{1} H_k = H_1 = \frac{1}{1} = 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} - 1\right) = 2 \cdot (H_2 - 1)$$

ill.

$$\sum_{k=1}^{2} H_k = H_1 + H_2 = 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 3 \cdot \frac{3+2}{6} = 3 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = 3 \cdot (H_3 - 1).$$

Legyen

$$a_n := 1, \quad b_n := H_n \qquad (2 \leq n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor az (1.1.2) Abel-formula felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} H_k &= \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot H_k = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right) b_n - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\sum_{j=1}^{k} a_j\right) (b_{k+1} - b_k) = \\
&= nH_n - \sum_{k=1}^{n-1} k\left(H_{k+1} - H_k\right) = nH_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k+1} = nH_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k+1-1}{k+1} = \\
&= nH_n - \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = nH_n - \left\{(n-1) - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}\right\} = \\
&= nH_n - (n-1) + H_n - 1 = (n+1)H_n - n = (n+1)(H_{n+1} - 1),
\end{aligned}$$

hiszen

$$H_n + \frac{1}{n+1} = H_{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

így

$$(n+1)H_n - n = (n+1)H_{n+1} - 1 - n = (n+1)(H_{n+1} - 1) \qquad (n \in \mathbb{N}). \quad \blacksquare$$

1.2.2. Konvergencia-kritériumok

Második alaklmazásként belátjuk a numerikus sorozatok konvergenciájára vonatkozó **Dirichlet-kritérium**ot.

1.2.1. tétel. Tegyük fel, hogy az $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$, ill. $(b_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatokra igazak az alábbiak:

(i). (b_n) monoton fogyó, pontosabban

$$0 \leq b_{n+1} \leq b_n \qquad (n \in \mathbb{N});$$

(ii). $\sup \left\{ \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N} \right\} < +\infty.$

Ekkor az $(a_n b_n)$ sorozat generálta numerikus sor konvergens, azaz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \in \mathbb{K}$$

teljesül.

Biz. Az

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \quad (n \in \mathbb{N}), \qquad \text{ill.} \qquad K := \sup \left\{ \left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| : n \in \mathbb{N} \right\}$$

jelölések bevezetésével látható, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ indexre $|s_n| < K$ teljesül. Így a háromszög-egyenlőtlenség felhasználásával azt kapjuk, hogy ha $m, n \in \mathbb{N}$ olyan indexek, amelyekre $n > m > 1$, akkor

$$|A_{n,m}| = \left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| = |s_n - s_{m-1}| \leq |s_n| + |s_{m-1}| \leq K + K = 2K.$$

Mivel (b_n) nullasorozat, ezért bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$ index, hogy

$$0 < b_n < \frac{\varepsilon}{2K} \qquad (N \leq n \in \mathbb{N}).$$ [1]

Az Abel-formulát felhasználva így azt kapjuk, hogy tetszőleges $m, n \in \mathbb{N}$, $n > m \geq N$ indexekre

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=m}^{n} a_k b_k \right| &= \left| A_{n,m} b_n - \sum_{k=m}^{n-1} A_{k,m}(b_{k+1} - b_k) \right| \leq |A_{n,m}| \cdot |b_n| + \sum_{k=m}^{n-1} |A_{k,m}| \cdot (b_k - b_{k+1}) \leq \\ &\leq 2K b_n + 2K(b_m - b_n) = 2K b_m < \varepsilon, \end{aligned}$$

ahonnan a kérdéses sor konvergenciája már nyilvánvaló. ■

[1] Feltehető, hogy (b_n) nem konstans nullsorozat, ui. ebben az esetben az állítás nyilvánvaló.

1.2.2. példa. Megmutatjuk, hogy tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén fennáll a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} \in \mathbb{R}$$

tartalmazás.

Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre az

$$f(x) := \sin(nx) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény 2π-periodikus és $f(0) = 0 = f(2\pi)$, ezért a fenti tartalmazás igazolása esetén szorítkozhatunk az $x \in (0,2\pi)$ esetre. Legyen

$$s_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$\begin{aligned}
s_n(x) \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \cdot \left\{\cos\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)x\right) - \cos\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)x\right)\right\} = \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left[\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{3x}{2}\right)\right] + \left[\cos\left(\frac{3x}{2}\right) - \cos\left(\frac{5x}{2}\right)\right] + \ldots + \right. \\
&\quad + \left[\cos\left(\left(n - \frac{3}{2}\right)x\right) - \cos\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)x\right)\right] + \\
&\quad \left. + \left[\cos\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)x\right) - \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)\right]\right\} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left\{\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)\right\},
\end{aligned}$$

ahonnan

$$|s_n(x)| = \left|\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2 \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

következik. Így

$$\left(\frac{1}{n}\right) \searrow 0 \qquad (n \to \infty)$$

következtében alkalmazható a Dirichlet-kritérium: a

$$\sum_{n=1} \left(\frac{\sin(nx)}{n}\right)$$

sor konvergens. ■

Megjegyezzük, hogy az

$$a := (-1)^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

választással a Dirichlet-kritériumból a **Leibniz-kritérium**ot kapjuk.

Szintén az Abel-formula felhasználásával látjuk be a sorok konvergenciájára vonatkozó **Kronecker-kritérium**ot (vö. [15]).

1.2.2. tétel. Tegyük fel, hogy az $(a_n), (b_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatokra

$$\textbf{(i)}\;\; A := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathbb{R}, \qquad \textbf{(ii)}\;\; 0 < b_n \le b_{n+1}\ (n \in \mathbb{N}), \qquad \textbf{(iii)}\;\; \lim_{n\to\infty} (b_n) = +\infty$$

teljesül. Ekkor fennáll a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = 0$$

határérték-reláció.

Biz. Legyen

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor az Abel-lemma következtében

$$\frac{1}{b_n} \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k a_k = s_n - \frac{1}{b_n} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) s_k \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{1.2.1}$$

Az (s_n) részletösszeg-sorozat konvergenciája következtében tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$ index, hogy

$$|s_n - A| < \varepsilon \qquad (N \le n \in \mathbb{N}).$$

Az (1.2.1) egyenlőség jobb oldalára így

$$\begin{aligned}
& s_n - \frac{1}{b_n} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) s_k = \\
= \quad & s_n - \frac{1}{b_n} \cdot \sum_{k=1}^{N-1} (b_{k+1} - b_k) s_k - \frac{1}{b_n} \cdot \sum_{k=N}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) s_k = \\
= \quad & s_n - \frac{1}{b_n} \cdot \sum_{k=1}^{N-1} (b_{k+1} - b_k) s_k - \frac{1}{b_n} \cdot \sum_{k=N}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) A - \frac{1}{b_n} \cdot \sum_{k=N}^{n-1} (b_{k+1} - b_k)(s_k - A) = \\
= \quad & s_n - \frac{1}{b_n} \cdot \sum_{k=1}^{N-1} (b_{k+1} - b_k) s_k - \frac{b_n - b_N}{b_n} \cdot A - \frac{1}{b_n} \cdot \sum_{k=N}^{n-1} (b_{k+1} - b_k)(s_k - A)
\end{aligned}$$

teljesül. Következésképpen az $n \to \infty$ határátmenetben

$$\lim_{n\to\infty} (s_n) = A = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{b_n - b_N}{b_n} \cdot A \right),$$

és tetszőleges(en rögzített) k esetén

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b_n}\cdot\sum_{k=1}^{N-1}(b_{k+1}-b_k)s_k\right)=0,$$

ahonnan tetszőleges $N\leq n\in\mathbb{N}$ indexre

$$\begin{aligned}\frac{1}{b_n}\cdot\sum_{k=N}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)(s_k-A)\leq\frac{\varepsilon}{b_n}\cdot\sum_{k=N}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)=\\ =\ \frac{\varepsilon}{b_n}\cdot\{(b_{N+1}-b_N)+(b_{N+2}-b_{N+1})+\ldots+(b_{n-1}-b_{n-2})+(b_n-b_{n-1})\}=\\ =\ \frac{b_n-b_N}{b_n}\cdot\varepsilon\leq\varepsilon\end{aligned}$$

következik. ■

Az Abel-formula utolsó alkalmazásaként az **Abel-kritérium**ot látjuk be.

1.2.3. tétel. Tegyük fel, hogy az $(a_n),(b_n):\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ sorozatokra igazak az alábbiak:

(i). (b_n) monoton és korlátos;

(ii). a $\sum_{n=1}(a_n)$ sor konvergens.

Ekkor az (a_nb_n) sorozat generálta numerikus sor konvergens, azaz

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n\in\mathbb{R}$$

teljesül.

Biz. Legyen

$$A_n:=\sum_{k=1}^{n}a_k,\qquad\text{ill.}\qquad S_n:=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\qquad(n\in\mathbb{N}).$$

Mivel (b_n) monoton és korlátos, ezért konvergens is, azaz alkalmas $B\in\mathbb{R}$ esetén $\lim(b_n)=B$. Ekkor az Abel-formula következtében tetszőleges $m,n\in\mathbb{N}$ indexre

$$\begin{aligned}S_m-S_n\ &=\ A_mb_m-A_nb_n-\sum_{k=n}^{m-1}A_n(b_{k+1}-b_k)=\\ &=\ (b_m-B)A_m-(b_n-B)A_n+B(A_m-A_n)-\sum_{k=n}^{m-1}A_k(b_{k+1}-b_k)\end{aligned}$$

Mivel (A_n) konvergens, így korlátos is, ezért pl. alkalmas $K\in\mathbb{R}$ esetén

$$|A_n|\leq K\qquad(n\in\mathbb{N}).$$

Ebből és a

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - B) = 0,$$

határértékrelációból az $m, n \to \infty$ határátmenet esetén

$$(b_m - B)A_m \longrightarrow 0, \qquad \text{ill.} \qquad (b_n - B)A_n \longrightarrow 0$$

következik. Az sorokra vonatkozó Cauchy-féle konvergenciakritérium felhasználásával látható, hogy

$$B(A_m - A_n) \longrightarrow 0 \qquad (m, n \to \infty).$$

Így (b_n) konvergens, ezért Cauchy-féle, ahonnan

$$\left|\sum_{k=n}^{m-1} A_k(b_{k+1} - b_k)\right| \le \sum_{k=n}^{m-1} |A_k|\cdot|b_{k+1}-b_k| \le K\cdot\sum_{k=n}^{m-1} |b_{k+1}-b_k| = K\cdot|b_n-b_m| \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty)$$

következik. ■

2. fejezet

Középértéktételek

Ebben a fejezetben az analízis három középértéktételével foglalkozunk egyváltozós esetben. A Rolle-tételből fogunk kiindulni, majd annak általánosításaként kimondjuk a Langrange-középértéktételt, végül pedig a Cauchy-középértéktétellel zárjuk a fejezetet.

2.1. A folytonos változat

2.1.1. tétel. (**Rolle-tétel**). Legyen $a, b \in \mathbb{R}$: $a < b$ és tegyük fel, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre $[a, b] \subset \mathcal{D}_f$, ill. $f \in \mathfrak{C}[a, b] \cap \mathfrak{D}(a, b)$, továbbá $f(a) = f(b)$ teljesül. Ekkor alkalmas $\xi \in (a, b)$ esetén $f'(\xi) = 0$.

2.1.2. tétel. (**Lagrange-féle középértéktétel**). Legyen $a, b \in \mathbb{R}$: $a < b$ és tegyük fel, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre $[a, b] \subset \mathcal{D}_f$, ill. $f \in \mathfrak{C}[a, b] \cap \mathfrak{D}(a, b)$. Ekkor alkalmas $\xi \in (a, b)$ esetén

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

2.1.3. tétel. (**Cauchy-féle középértéktétel**). Legyen $a, b \in \mathbb{R}$: $a < b$ és tegyük fel, hogy az $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényekre $[a, b] \subset \mathcal{D}_f$, $[a, b] \subset \mathcal{D}_g$ és $f, g \in \mathfrak{C}[a, b] \cap \mathfrak{D}(a, b)$. Ekkor alkalmas $\xi \in (a, b)$ esetén

$$(f(b) - f(a)) \cdot g'(\xi) = (g(b) - g(a)) \cdot f'(\xi).$$

Megjegyezzük, hogy ha tetszőleges $x \in (a, b)$ esetén $g'(x) \neq 0$, akkor a Rolle-tétel következtében $g(a) \neq g(b)$, és így

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

2.2. A diszkrét változat

A későbbiek szempontjából bevezetünk egy, a $\mathbb{K}$-beli sorozatok terén értelmezett operátort. Legyen $\mathcal{S} := \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$. Ekkor az

$$\Delta : \mathcal{S} \to \mathcal{S}, \qquad (\Delta u)_n := u_{n+1} - u_n \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

leképezést **előrefelé vett differenciaoperátor**nak, a

$$\nabla : \mathcal{S} \to \mathcal{S}, \qquad (\nabla u)_n := u_n - u_{n-1} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

leképezést pedig **visszafelé vett differenciaoperátor**nak nevezzük. Ebben a pontban teljes mértékben a [10] könyv megfelelő fejezetére támaszkodunk.
Az alábbiakban megfogalmazzuk a diszkrét halmazon értelmezett függvényekkel kapcsolatban a szélsőértékhely és a stacionárius hely fogalmát. Mielőtt még ezt megtennénk bevezetünk két egyszerű, de gyakran használt jelölést. Tetszőleges $a, b \in \mathbb{N}_0$ esetén legyen

$$\mathbb{N}_a := \{n \in \mathbb{N}_0 : \ a \leq n\}, \qquad \text{ill.} \qquad \mathbb{N}_a^b := \{n \in \mathbb{N} : \ a \leq n \leq b\}.$$

2.2.1. definíció. Legyen $a, b \in \mathbb{N}_0$: $a < b$, továbbá tegyük fel, hogy valamely $c \in \mathbb{N}$ indexre

$$\{c-1, c, c+1\} \subset \mathbb{N}_{a+1}^{b-1}.$$

Azt mondjuk, hogy a $c \in \mathbb{N}_{a+1}^{b-1}$ index az $u : \mathbb{N}_a^b \to \mathbb{R}$ leképezés

1. **lokális minimumhelye**, ha
$$u_c \leq \min\{u_{c-1}, u_{c+1}\}; \tag{2.2.1}$$
2. **lokális maximumhelye**, ha
$$u_c \geq \max\{u_{c-1}, u_{c+1}\}; \tag{2.2.2}$$
3. **stacionárius helye**, ha
$$(\Delta u)_c \cdot (\nabla u)_c \leq 0, \qquad \text{azaz} \qquad (\Delta u)_c \cdot (\Delta u)_{c-1} \leq 0. \quad \lozenge \tag{2.2.3}$$

Amennyiben (2.2.1)-ban, ill. (2.2.2)-ben szigorú egyenlőtlenség áll fenn, akkor a c indexet **szigorú (lokális) minimumhely**nek, ill. **szigorú (lokális) maximumhely**nek, röviden **szigorú (lokális) szélsőértékhely**nek nevezzük. Nyilvánvaló, hogy ha a c index az $u : \mathbb{N}_a^b \to \mathbb{R}$ (lokális) szélsőértékhelye, akkor fennáll az (2.2.3) egyenlőtlenség, azaz c stacionárius helye u-nak.

2.2.1. tétel. (**Diszkrét Rolle-tétel**). Legyen $a, b \in \mathbb{N}_0 \colon b - a \geq 2$, majd tegyük fel, hogy az $u : \mathbb{N}_a^b \to \mathbb{R}$ leképezésre $u_a = u_b$. Ekkor alkalmas $c \in \mathbb{N}_{a+1}^{b-1}$ index esetében u-nak lokális szélsőértéke van c-ben.

Biz. Ha $u_a = u_b$, de u-nak nincsen az $\mathbb{N}_{a+1}^{b-1}$ halmazon lokális szélsőértékhelye, akkor

$$(\Delta u)_n \cdot (\Delta u)_{n-1} > 0 \qquad \left(n \in \mathbb{N}_{a+1}^{b-1}\right).$$

Következésképpen

$$\begin{aligned}
(u_{a+2} - u_{a+1})(u_{a+1} - u_a) &> 0, \\
(u_{a+3} - u_{a+2})(u_{a+2} - u_{a+1}) &> 0, \\
&\vdots \\
(u_{b-1} - u_{b-2})(u_{b-2} - u_{b-3}) &> 0, \\
(u_b - u_{b-1})(u_{b-1} - u_{b-2}) &> 0.
\end{aligned}$$

Ha $u_{a+1} - u_a > 0$, akkor

$$\begin{aligned}
u_{a+2} - u_{a+1} &> 0, \\
u_{a+3} - u_{a+2} &> 0, \\
&\vdots \\
u_{b-1} - u_{b-2} &> 0, \\
u_b - u_{b-1} &> 0.
\end{aligned}$$

A fenti egyenlőtlenséget összeadva

$$u_b - u_a > 0, \qquad \text{azaz} \qquad u_b > u_a$$

adódik. Hasonlóan látható be, hogy

$$u_{a+1} - u_a < 0 \quad \text{esetén} \quad u_b - u_a < 0, \quad \text{azaz} \quad u_b < u_a.$$

Ez pedig ellentmond a kiinduló feltevésnek. ■

2.2.2. tétel. (**Diszkrét Lagrange-féle középértéktétel**). Legyen $a, b \in \mathbb{N}_0 \colon b - a \geq 2$. Ekkor bármely $u : \mathbb{N}_a^b \to \mathbb{R}$ leképezés esetén van olyan $c \in \mathbb{N}_{a+1}^{b-1}$ index, hogy

$$\left((\Delta u)_c - \frac{u_b - u_a}{b - a}\right) \cdot \left((\Delta u)_{c-1} - \frac{u_b - u_a}{b - a}\right) \leq 0.$$

Biz. Ha

$$v_n := u_n - \frac{u_b - u_a}{b - a}(n - a) \qquad (n \in \mathbb{N}_a^b),$$

akkor nyilvánvalóan $v_a = v_b = u_a$. Alkalmazható tehát a diszkrét Rolle-tétel, azaz alkalmas $c \in \mathbb{N}_{a+1}^{b-1}$ indexre

$$(\Delta v)_c \cdot (\Delta v_{c-1}) \leq 0$$

ahonnan a bizonyítandó állítás következik. ■

2.2.3. tétel. (Diszkrét Cauchy-féle középértéktétel). Legyen $a \in \mathbb{N}_0$ és $u, v : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, továbbá tegyük fel, hogy v szigorúan monoton, azaz bármely $n \in \mathbb{N}_a^{b-1}$ esetén

$$(\Delta v)_n < 0 \qquad \text{vagy} \qquad (\Delta v)_n > 0,$$

ill.

$$v_{n+1} < v_n \qquad \text{vagy} \qquad v_{n+1} > v_n$$

teljesül. Ekkor alkalmas $c \in \mathbb{N}_{a+1}^{b-1}$ indexre

$$\left(\frac{(\Delta u)_c}{(\Delta v)_c} - \frac{u_b - u_a}{v_b - v_a}\right) \cdot \left(\frac{(\Delta u)_{c-1}}{(\Delta v)_{c-1}} - \frac{u_b - u_a}{v_b - v_a}\right) \leq 0,$$

azaz

$$\frac{(\Delta u)_{c-1}}{(\Delta v)_{c-1}} \leq \frac{u_b - u_a}{v_b - v_a} \leq \frac{(\Delta u)_c}{(\Delta v)_c}$$

vagy

$$\frac{(\Delta u)_{c-1}}{(\Delta v)_{c-1}} \geq \frac{u_b - u_a}{v_b - v_a} \geq \frac{(\Delta u)_c}{(\Delta v)_c}.$$

Biz. A

$$K := \frac{u_b - u_a}{v_b - v_a}$$

jelölés bevezetésével a

$$w_c := u_c - K(v_c - v_a) \qquad \left(n \in \mathbb{N}_{a+1}^{b-1}\right)$$

sorozatra azt kapjuk, hogy $w_a = w_b = u_a$. Innen a diszkrét Rolle-tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy alkalmas $c \in \mathbb{N}_{a+1}^{b-1}$ indexre

$$\{(\Delta u)_c - K(\Delta v)_c\} \cdot \{(\Delta u)_{c-1} - K(\Delta v)_{c-1}\} \leq 0.$$

Mindkét oldalt elosztva a – v szigorú monotonitása következtében – pozitív

$$(\Delta v)_c \cdot (\Delta v)_{c-1}$$

számmal azt kapjuk, hogy

$$\left\{\frac{(\Delta u)_c}{(\Delta v)_c} - K\right\} \cdot \left\{\frac{(\Delta u)_{c-1}}{(\Delta v)_{c-1}} - K\right\} \leq 0,$$

ahonnan a bizonyítandó állítás következik. ■

3. fejezet

A Taylor formula

Az elemi analízisből jól ismert, hogy ha $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amelyre valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $f \in \mathfrak{D}^{n+1}(I)$ teljesül, akkor bármely $a, x \in I$ esetén van olyan $\xi \in (a, x) \cup (x, a)$, hogy

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \qquad (x \in I).$$

A fenti összegben a második tagot, azaz az

$$R_n(x) := \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \qquad (x \in I).$$

függvényt szokás Lagrange-féle maradéktagnak nevezni.

Mielőtt rátérnénk a Taylor-formula diszkrét változatának tárgyalására bebizonyítunk egy a 2.2. pontban bevezetett differenciaoperátor hatványaira vonatkozó állítást. Az differenciaoperátor hatványai a szokásos módon értelmezzük:

$$\Delta^k := \begin{cases} I & (k = 0), \\ \Delta \circ \Delta^{k-1} & (k \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

A tárgyalásmódot illetően nagy mértékben a [10] műre támaszkodunk.

3.0.1. állítás. Bármely $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$ sorozat, illetve $a, l \in \mathbb{N}_0$ index esetén fennáll a

$$(\Delta^l u)_n = (\Delta^l u)_a + \sum_{k=a}^{n-1} (\Delta^{l+1} u)_k \qquad (n \in \mathbb{N}_a) \tag{3.0.1}$$

egyenlőség.

Biz. Mivel $\Delta^{l+1} = \Delta^l \circ \Delta$, ezért tetszőleges $n \in \mathbb{N}_a$ indexre

$$\begin{aligned}
\sum_{k=a}^{n-1} \Delta^{l+1} u_k &= \sum_{k=a}^{n-1} \Delta^l [u_{k+1} - u_k] = \\
&= \Delta^l[u_{a+1} - u_a] + \Delta^l[u_{a+2} - u_{a+1}] + \cdots + \Delta^l[u_{n-1} - u_{n-2}] + \Delta^l[u_n - u_{n-1}] = \\
&= \Delta^l u_n - \Delta^l u_a,
\end{aligned}$$

azaz

$$\Delta^l u_a + \sum_{k=a}^{n-1} \Delta^{l+1} u_k = \Delta^l u_a + \Delta^l u_n - \Delta^l u_a = \Delta^l u_n. \quad \blacksquare$$

3.0.1. tétel. (Diszkrét Taylor-formula). Legyen

$$a, k, m \in \mathbb{N}_0: \quad k \leq m-1, \qquad \text{továbbá} \qquad u : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}.$$

Ekkor bármely $n \in \mathbb{N}_a$ esetén fennáll a

$$(\Delta^k u)_n = T_n(k,m) + R_n(k,m) \tag{3.0.2}$$

egyenlőség, ahol tetszőleges $n \in \mathbb{N}_a$ indexre

$$T_n(k,m) := \sum_{i=k}^{m-1} \frac{(n-a)^{[i-k]}}{(i-k)!} (\Delta^i u)_a,$$

és

$$R_n(k,m) := \frac{1}{(m-k-1)!} \sum_{j=a}^{n-m+k} (n-j-1)^{[m-k-1]} (\Delta^m u)_j.$$

Biz. Teljes indukcióval bizonyítunk.

- A tetszőleges $l \in \mathbb{N}_0^{m-1}$ indexre fennálló (3.0.1) formula következtében az (3.0.2) egyenlőség nyilvánvaló a $k = m-1$ esetben.
- Tegyük fel, hogy valamely $k = l+1$ indexre igaz az (3.0.2) egyenlőség. Ekkor (3.0.1)-ből

$$\begin{aligned}
\Delta^l u_n = \Delta^l u_a + \sum_{j=a}^{n-1} \Bigg\{ &\sum_{i=l+1}^{m-1} \frac{(j-a)^{[i-l-1]}}{(i-l-1)!} \Delta^i u_a + \\
&+ \frac{1}{(m-l-2)!} \sum_{p=a}^{j-m+l+1} (j-p-1)^{[m-l-2]} \Delta^n u_p \Bigg\} =
\end{aligned}$$

$$= \Delta^l u_a + \sum_{i=l+1}^{m-1} \sum_{j=a}^{n-1} \frac{\Delta(n-a)^{[i-l]}}{(i-l)!} \Delta^i u_a +$$

$$+ \frac{1}{(m-l-2)!} \sum_{j=a+m-l-1}^{n-1} \sum_{p=a}^{j-m+l+1} (j-p-1)^{[m-l-2]} \Delta^m u_p =$$

$$= \Delta^l u_a + \sum_{i=l+1}^{m-1} \left[\frac{(j-a)^{[i-l]}}{(i-l)!} \right]_{j=a}^{j=n} \Delta^i u_a +$$

$$+ \frac{1}{(m-l-2)!} \sum_{q=0}^{n-m+l-a} \sum_{j=a+q}^{n-m+l} (n-1-j-1)^{[m-l-2]} \Delta^m u_{a+q} =$$

$$= \Delta^l u_a + \sum_{i=l+1}^{m-1} \frac{(n-a)^{[i-l]}}{(i-l)!} \Delta^i u_a -$$

$$- \frac{1}{(m-l-1)!} \sum_{q=0}^{n-m+l-a} \sum_{j=a+q}^{n-m+l} \Delta(n-j-1)^{[m-l-1]} \Delta^m u_{a+q} =$$

$$= \sum_{i=l}^{m-1} \frac{(n-a)^{[i-l]}}{(i-l)!} \Delta^i u_a - \frac{1}{(m-l-1)!} \sum_{q=0}^{n-m+l-1} \Big\{ (m-l-2)^{[m-l-1]} -$$

$$- (n-a-q-1)^{[m-l-1]} \Big\} \Delta^m u_{a+q} =$$

$$= \sum_{i=l}^{m-1} \frac{(n-a)^{[i-l]}}{(i-l)!} \Delta^i u_a + \frac{1}{(m-l-1)!} \sum_{j=a}^{n-m+l} (n-j-1)^{[m-l-1]}) \Delta^m u_j$$

következik, ami azt jelenti, hogy az (3.0.2) egyenlőség a $k = l$ esetben is fennáll. ■

Megjegyezzük, hogy a $k = 0$ esetben a (3.0.2) formula nem más, mint

$$u_n = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(n-a)^{[i]}}{i!} (\Delta^i u)_a + \frac{1}{(m-1)!} \sum_{j=a}^{n-m} (n-j-1)^{[m-1]} (\Delta^m u)_j \qquad (n \in \mathbb{N}_0). \tag{3.0.3}$$

A $R_n(k,m)$ **maradéktag**nak nincsen Lagrange-alakja, viszont igaz az alábbi becslés:

$$|u_n - T_n(0,m)| =$$

$$= \left| u_n - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(n-a)^{[i]}}{i!} (\Delta^i u)_a \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{(m-1)!} \cdot \left| \sum_{j=a}^{n-m} (n-j-1)^{[m-1]} \right| \cdot \max\left\{ \Delta^m u_j \in \mathbb{R} : \ j \in \mathbb{N}_a^{n-m} \right\} =$$

$$= \frac{1}{(m-1)!} \cdot \frac{1}{m} \cdot \left| \left[(n-j)^{[m]} \right]_{l=a}^{l=n-m} \right| \cdot \max\left\{ \Delta^m u_j \in \mathbb{R} : \ j \in \mathbb{N}_a^{n-m} \right\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{m!} \cdot (n-a)^{[m]} \cdot \max\left\{ \Delta^m u_j \in \mathbb{R} : \ j \in \mathbb{N}_a^{n-m} \right\}.$$

4. fejezet

A Leibniz formula

Szintén az elemi analízisben kerül tárgyalásra a szorzatfüggvény deriváltjára vonatkozó Leibniz-formula, amely szerint ha $n \in \mathbb{N}$ és az $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények n-szer differenciálhatók valamely $a \in \mathbb{R}$ pontban, akkor az $f \cdot g$ szorzatfüggvény is n-szer differenciálható a-ban és a-beli deriváltjára

$$(f \cdot g)^{(n)}(a) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) \cdot g^{(n-k)}(a)$$

teljesül. Az iménti állítás igazolása teljes indukcióval történik.

Megjegyezzük, hogy az $n = 2$, ill. $n = 3$ esetben a fenti szabály

$$\begin{aligned}(f \cdot g)'' &= ((f \cdot g)')' = (f' \cdot g + f \cdot g')' = f'' \cdot g + f' \cdot g' + f' \cdot g' + f \cdot g'' = \\ &= f'' \cdot g + 2 \cdot f' \cdot g' + f \cdot g''\end{aligned}$$

ill.

$$\begin{aligned}(f \cdot g)''' &= ((f \cdot g)'')' = (f'' \cdot g + 2 \cdot f' \cdot g' + f \cdot g'')' = \\ &= f''' \cdot g + f'' \cdot g' + 2 \cdot f'' \cdot g' + 2 \cdot f' \cdot g'' + f' \cdot g'' + f \cdot g''' = \\ &= f''' \cdot g + 3 \cdot f'' \cdot g' + 3 \cdot f' \cdot g'' + f \cdot g'''\end{aligned}$$

alakú.
Mielőtt rátérnénk a Leibniz-formula diszkrét változatának tárgyalására belátunk két segédállítást (vö. [10]). Ehhez azonban szükségünk van az eltolásnak nevezett operátor fogalmára, amelyet az

$$E : \mathcal{S} \to \mathcal{S}, \qquad (Eu)_n := u_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

összefüggéssel értelmezünk.

4.0.1. állítás. Tetszőleges $u, v \in \mathcal{S}$ sorozatra, ill. $m \in \mathbb{N}_0$ indexre

$$(\Delta^m u)_n = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} u_{n+m-k} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Biz. Jelölje

$$I : \mathcal{S} \to \mathcal{S}, \qquad (Iu)_n := u_n \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

az identikus oeprátort (vö. [10]). Ekkor nyilvánvalóan $\Delta = E - I$, és így tetszőleges $m, n \in \mathbb{N}_0$ indexekre

$$(\Delta^m u)_n = ((E-I)^m u)_n = \left(\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} E^{m-k} u \right)_n = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (E^{m-k} u)_n =$$
$$= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} u_{n+m-k}. \quad \blacksquare$$

4.0.2. állítás. Ha $u, v \in \mathcal{S}$, akkor

$$E(uv) = (Eu)(Ev).$$

Biz. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$(E(uv))_n = u_{n+1} v_{n+1} = (Eu)_n (Ev)_n.$$

Így ha $m \in \mathbb{N}_0$, akkor

$$(Eu^m) = (Eu)^m. \quad \blacksquare$$

Mindezek után beláthatjuk a sorozatok szorzatára vonatkozó Leibniz-formulát.

4.0.1. tétel. Tetszőleges $m \in \mathbb{N}$ indexre fennáll a

$$\Delta^m (uv) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \Delta^k u \Delta^{m-k} (E^k v).$$

egyenlőség.

Biz. Teljes indukcióval bizonyítunk.

1. lépés.. Az $m = 1$ esetben bármely $n \in \mathbb{N}_0$ indexre

$$\begin{aligned}(u\Delta v + (\Delta u)(Ev))_n &= u_n(v_{n+1} - v_n) + (u_{n+1} - u_n)v_{n+1} = \\ &= u_n v_{n+1} - u_n v_n + u_{n+1} v_{n+1} - u_n v_{n+1} = \\ &= u_{n+1} v_{n+1} - u_n v_n = (\Delta(uv))_n .\end{aligned}$$

2. lépés.. Tegyük fel tehát, hogy valamely $m \in \mathbb{N}$ indexre

$$\Delta^m(uv) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \Delta^k u \Delta^{m-k}(E^k v)$$

teljesül. Ekkor a fentiekben bizonyított állítások felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\Delta^{m+1}(uv) &= \Delta\left(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \Delta^k u \Delta^{m-k}(E^k v)\right) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \Delta\left\{\Delta^k u \Delta^{m-k}(E^k v)\right\} = \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \left\{\Delta^k u \cdot \Delta^{m+1-k}(E^k v) + \Delta^{k+1} u \cdot E(\Delta^{m-k}(E^k v))\right\} = \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \Delta^k u \cdot \Delta^{m+1-k}(E^k v) + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \Delta^{k+1} u \cdot (\Delta^{m-k}(E^{k+1} v)) = \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \Delta^k u \cdot \Delta^{m+1-k}(E^k v) + \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m}{k-1} \Delta^k u \cdot \Delta^{m+1-k}(E^k v) = \\
&= u\Delta^{m+1} v + \sum_{k=1}^{m} \left\{\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1}\right\} \Delta^k u \cdot \Delta^{m+1-k}(E^k v) + \\
&\quad + \Delta^{m+1} u \cdot (E^{m+1} v) = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} \Delta^k u \cdot \Delta^{m+1-k}(E^k v). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

5. fejezet

A Grönwall-lemma

A Grönwall-lemma segítségével bizonyos tulajdonságú függvényekre vonatkozó implicit egyenlőtlenségből kapunk explicit egyenlőtlenséget.

5.1. A klasszikus Gronwall-lemma

5.1.1. tétel. Legyen

$$-\infty < a < b \leq +\infty, \qquad 0 \leq c, d < +\infty,$$

továbbá $u \in \mathfrak{C}([a,b),\mathbb{R})$. Ha

$$0 \leq u(t) \leq c + d\int_a^t u(s)\,\mathrm{d}s \quad (t \in [a,b)), \tag{5.1.1}$$

akkor

$$0 \leq u(t) \leq ce^{d(t-a)} \quad (t \in [a,b)). \tag{5.1.2}$$

Biz. Legyen $T \in [a,b)$ tetszőleges. Ekkor u folytonossága miatt van olyan $M > 0$, hogy

$$|u(t)| \leq M \qquad (t \in [a,T]).$$

Így (5.1.1)-ből

$$u(t) \leq c + dM(t-a) \qquad (t \in [a,T]),$$

innen pedig (5.1.1) ismételt felhasználásával

$$u(t) \leq c + cd(t-a) + d^2M\frac{(t-a)^2}{2} \quad (t \in [a,T])$$

következik. Teljes indukcióval könnyen belátható, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$, ill. $t \in [a,T]$ esetén

$$u(t) \leq c\sum_{k=0}^{n-1}\frac{d^k(t-a)^k}{k!} + \frac{Md^n(t-a)^n}{n!} \longrightarrow ce^{d(t-a)} + 0 \qquad (n \to \infty). \quad \blacksquare$$

5.2. A diszkrét Grönwall-lemma

5.2.1. tétel. Adott $m \in \mathbb{N}_0$ index, ill. $u, a, b, c\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ sorozatok esetén az

$$u_n \le a_n + b_n \sum_{k=m}^{n-1} c_k u_k \qquad (m \le n \in \mathbb{N}) \tag{5.2.1}$$

implicit egyenlőtlenség maga után vonja az

$$u_n \le a_n + b_n \sum_{k=m}^{n-1} a_k c_k \prod_{l=k+1}^{n-1} (1 + b_l c_l) \qquad (m \le n \in \mathbb{N}) \tag{5.2.2}$$

explicit becslést.

Biz. Vezessük be a

$$\Delta : \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}, \qquad (\Delta f)_n := f_{n+1} - f_n$$

ún. differenciaoperátort. Ha

$$v_n := \sum_{k=m}^{n-1} c_k u_k \qquad (m \le n \in \mathbb{N}),$$

akkor $v_m = 0$ és

$$(\Delta v)_n = v_{n+1} - v_n = \sum_{k=m}^{n} c_k u_k - \sum_{k=m}^{n-1} c_k u_k = c_n u_n \qquad (m \le n \in \mathbb{N}),$$

továbbá

$$u_n \le a_n + b_n v_n \qquad (m \le n \in \mathbb{N}).$$

Így c nemnegativitása következtében

$$v_{n+1} - (1 + b_n c_n) v_n = (\Delta v)_n - b_n c_n v_n = c_n u_n - b_n c_n v_n \le a_n c_n \qquad (m \le n \in \mathbb{N}).$$

Felhasználva, hogy bármely $m \le n \in \mathbb{N}$ esetén $1 + b_n c_n > 0$, az iménti egyenlőtlenséget a

$$\prod_{k=m}^{n} \frac{1}{1 + b_k c_k}$$

számmal szorozva a

$$\Delta\left(\prod_{k=m}^{n-1} \frac{v_n}{1 + b_k c_k}\right) = v_{n+1} \prod_{k=m}^{n} \frac{1}{1 + b_k c_k} - (1 + b_n c_n) v_n \prod_{k=m}^{n} \frac{1}{1 + b_k c_k} \le a_n c_n \prod_{k=m}^{n} \frac{1}{1 + b_k c_k}$$

becslés adódik. Az m indextől $(n-1)$-ig összegezve, majd felhasználva, hogy $v_m = 0$ a

$$\prod_{k=m}^{n-1} \frac{v_n}{1 + b_k c_k} \le \sum_{k=m}^{n-1} a_k c_k \prod_{l=m}^{k} \frac{1}{1 + b_l c_l} \qquad (m \le n \in \mathbb{N}),$$

azaz a

$$v_n \leq \sum_{k=m}^{n-1} a_k c_k \prod_{l=k+1}^{n-1} (1 + b_l c_l) \qquad (m \leq n \in \mathbb{N})$$

becsléshez jutunk. Innen az (5.2.1) feltétel figyelembevételével az (5.2.2) igazolandó állítást kapjuk. ■

Ha a, b, c állandósorozatok, pontosabban

$$a_n = \alpha \in \mathbb{R}, \quad b_n = \beta \in \mathbb{R}, \quad c_n = 1 \qquad (m \leq n \in \mathbb{N}),$$

akkor az

$$u_n \leq \alpha + \beta \sum_{k=m}^{n-1} u_k \qquad (m \leq n \in \mathbb{N}) \tag{5.2.3}$$

implicit egyenlőtlenség következménye a tetszőleges $m \leq n \in \mathbb{N}$ esetén fennálló

$$\begin{aligned} u_n \;&\leq\; \alpha + \beta \sum_{k=m}^{n-1} \alpha(1+\beta)^{n-k-1} = \alpha \left\{ 1 + \beta(1+\beta)^{n-1} \cdot \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{(1+\beta)^k} \right\} = \\ &= \alpha \left\{ 1 + \frac{\beta(1+\beta)^{n-1}}{(1+\beta)^m} \cdot \sum_{k=0}^{n-m-1} \frac{1}{(1+\beta)^k} \right\} = \alpha \left\{ 1 + \frac{\beta(1+\beta)^{n-1}}{(1+\beta)^m} \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+\beta)^{n-m}}}{1 - \frac{1}{1+\beta}} \right\} = \\ &= \alpha \left\{ 1 + \beta(1+\beta)^{n-m-1} \cdot \frac{(1+\beta) - \frac{1}{(1+\beta)^{n-m-1}}}{\beta} \right\} = \alpha(1+\beta)^{n-m}. \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

explicit becslés. Az alábbiakban egy másik, kevésbbé ismert következményt igazolunk (vö. [3]).

5.2.2. tétel. Ha $m \in \mathbb{N}_0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ és az $u : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ sorozatra

$$u_n \leq \alpha + \beta \sum_{k=m}^{n-1} u_k \qquad (m+1 \leq n \in \mathbb{N}), \tag{5.2.5}$$

akkor

$$u_n \leq (\alpha + \beta u_m)(1+\beta)^{n-m-1} \qquad (m+1 \leq n \in \mathbb{N}). \tag{5.2.6}$$

Biz.

1. lépés.. A (5.2.3) egyenlőtlenség a $n = m + 1$ esetben

$$u_n \leq \alpha + \beta \sum_{k=m}^{m} u_k = \alpha + \beta u_m = (\alpha + \beta u_m) \cdot 1 = (\alpha + \beta u_m) \cdot (1+\beta)^0$$

azaz (5.2.6) alakú.

2. lépés.. Tegyük fel most, hogy bármely, az $m+1 \leq k \leq n$ egyenlőtlenségeknek eleget tévő $k \in \mathbb{N}$ indexre

$$u_k \leq (\alpha + \beta u_m)(1+\beta)^{k-m-1}.$$

Ekkor $u_{n+1} \leq$

$$\begin{aligned}
&\leq \alpha + \beta \sum_{k=m}^{n} u_k = \alpha + \beta u_m + \beta \sum_{k=m+1}^{n} u_k \leq (\alpha + \beta u_m) + \beta \sum_{k=m+1}^{n} u_k (1+\beta)^{k-m-1} = \\
&= (\alpha + \beta u_m) \left\{ 1 + \beta \sum_{l=0}^{n-m-1} (1+\beta)^l \right\} = (\alpha + \beta u_m) \left\{ 1 + \beta \cdot \frac{(1+\beta)^{n-m} - 1}{1 + \beta - 1} \right\} = \\
&= (\alpha + \beta u_m)(1+\beta)^{n-m}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

6. fejezet

Területszámítás

6.1. A folytonos eset

Ismeretes, hogy ha $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ korlátos halmaz és $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ olyan zárt rektifikálható út, amelyre $\varphi|_{(a,b)}$ injektív,

$$\partial\Omega = \mathcal{R}_\varphi = \left\{\varphi(t) \in \mathbb{R}^2 :\ t \in [a,b]\right\},$$

továbbá a

$$J(r) := (-y, x) \qquad (r = (x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

vektormezőre $\int_\varphi J > 0$ teljesül, akkor Ω Jordan-mérhető, továbbá tetszőleges sima ($\mathfrak{C}^1$-beli) $f = (f_1, f_2) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ vektormezőre

$$\int_\Omega (\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1) = \oint_\varphi f \tag{6.1.1}$$

(Green-tétel). Ha a (6.1.1) formulában az f vektormezőre

$$f := \frac{1}{2} J$$

vagy

$$f(r) = (0, x) \quad (r = (x,y) \in \mathbb{R}^2), \qquad \text{ill.} \qquad f(r) = (-y, 0) \quad (r = (x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

feltételek valamelyike teljesül, akkor Ω területére

$$T(\Omega) = \frac{1}{2} \int_a^b \det \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \dot\varphi_1 & \dot\varphi_2 \end{bmatrix} \tag{6.1.2}$$

vagy

$$T(\Omega) = \int_a^b \varphi_1(t) \dot\varphi_2(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \text{ill.} \qquad T(\Omega) = \int_a^b -\dot\varphi_1(t)\varphi_2(t)\,\mathrm{d}t,$$

hiszen

$$\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 = 1,$$

így

$$\begin{aligned}
T(\Omega) &= \int\limits_\Omega 1 = \int\limits_\Omega (\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1) = \oint\limits_\varphi f = \int_a^b \langle f \circ \varphi, \dot{\varphi} \rangle = \\
&= \int_a^b \langle f(\varphi_1(t), \varphi_2(t)), (\dot{\varphi}_1(t), \dot{\varphi}_2(t)) \rangle \,\mathrm{d}t = \\
&= \int_a^b \left\langle \frac{1}{2}\left(-\varphi_2(t), \varphi_1(t)\right), \left(\dot{\varphi}_1(t), \dot{\varphi}_2(t)\right) \right\rangle \mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{2} \int_a^b \{\varphi_1(t)\dot{\varphi}_2(t) - \dot{\varphi}_1(t)\varphi_2(t)\} \,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{2} \int_a^b \det \begin{bmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \dot{\varphi}_1(t) & \dot{\varphi}_2(t) \end{bmatrix} \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

6.2. A diszkrét eset

6.2.1. tétel. (Vö. [9]) Ha $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ olyan síkidom amelyenek $\partial\Omega$ határa

$$P_1(r_0), \ldots, P_n(r_n) \in \mathbb{R}^2$$

pontok alkotta töröttvonal, akkor Ω területe

$$T(\Omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} x_k (y_{k+1} - y_{k-1}).$$

Biz. Ha

$$r_k = (x_k, y_k) \qquad (k \in \{0, \ldots, n\})$$

és

$$(x_n, y_n) := (x_0, y_0), \qquad \text{ill.} \qquad (x_{n+1}, y_{n+1}) := (x_1, y_1),$$

akkor a k-adik oldal paraméterezése:

$$\varphi(t) := (x_k + t(x_{k+1} - x_k), y_k + t(y_{k+1} - y_k)) \qquad (t \in [0,1]).$$

Így

$$\begin{aligned}\int_0^1 \varphi_1(t)\dot{\varphi}_2(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \{(x_k + t(x_{k+1} - x_k))\,(y_{k+1} - y_k)\}\ \mathrm{d}t \\ &= x_k(y_{k+1} - y_k) + \frac{1}{2}(x_{k+1} - x_k)(y_{k+1} - y_k) = \\ &= \frac{1}{2}x_k(y_{k+1} - y_k) + \frac{1}{2}x_{k+1}(y_{k+1} - y_k),\end{aligned}$$

ezért

$$\begin{aligned}T(\Omega) &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} x_k(y_{k+1} - y_k) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1}(y_{k+1} - y_k) = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} x_k(y_{k+1} - y_k) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} x_k(y_k - y_{k-1}) = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} x_k(y_{k+1} - y_{k-1}). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

7. fejezet

A Wirtinger-egyernlőtlenség

A késleltetett differenciálegyenletek stabilitáselméletében, az irányításelméletben igen fontos szerephez játszó egyenlőtlenségről, illetve annak ekvivalens alakjáról lesz szó ebben a fejezetben.

7.1. A folytonos eset

7.1.1. tétel. (Wirtinger-egyenlőtlenség). Legyen $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ olyan folytonosan differenciálható függvény, amelyre $f(0) = 0 = f(\pi)$ teljesül. Ekkor

$$\int_0^\pi f^2 \leq \int_0^\pi (f')^2, \tag{7.1.1}$$

és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha alkalmas $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = c\sin(x) \qquad (x \in [0, \pi]).$$

Biz.

1. lépés. A

$$g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}, \qquad g(x) := \begin{cases} -f(-x) & (x \in [-\pi, 0]), \\ f(x) & (x \in [0, \pi]) \end{cases}$$

függvény nyilván páratlan és folytonosan differenciálható. Következésképpen g Fourier-sorba fejtjető, azaz (vö. [18])

$$g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{g}(n)e^{\imath nx} \quad (x \in [-\pi, \pi]), \qquad \text{ahol} \qquad \widehat{g}(n) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t)e^{-\imath nt}\,\mathrm{d}t \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Mivel a g' Fourier-együtthatóira

$$\widehat{g'}(n) = \imath n\widehat{g}(n) \qquad (n \in \mathbb{Z}),$$

teljesül (vö. [2]), ezért a Parseval-egyenlőség és a feltételek következtében nyilvánvaló

$$\widehat{g}(0) = 0$$

egyenlőség felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(g')^2 &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}|\widehat{g'}(n)|^2 \geq \sum_{0\neq n\in\mathbb{Z}}|\widehat{g'}(n)|^2 = \sum_{0\neq n\in\mathbb{Z}}|\imath n\widehat{g}(n)|^2 = \\
&= \sum_{0\neq n\in\mathbb{Z}}|n\widehat{g}(n)|^2 \geq \sum_{0\neq n\in\mathbb{Z}}|\widehat{g}(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g^2,
\end{aligned}$$

ahonnan az igazolandó egyenlőtlenség triviálisan következik.

2. lépés. Ha a $[0,\pi]$ intervallumon valamely $c \in \mathbb{R}$ esetén $f = c\sin$, akkor (7.1.1)-ben nyilván egyenlőség áll fenn, hiszen ekkor

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi}(f')^2 &= \int_0^{\pi} c^2\cos^2 = c\cdot\int_0^{\pi}\frac{1+\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x = c^2\cdot\left(\frac{\pi}{2}+0\right) = \\
&= c^2\cdot\int_0^{\pi}\frac{1-\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} c^2\sin^2 = \int_0^{\pi} f^2.
\end{aligned}$$

Ha pedig (7.1.1)-ben egyenlőség áll fenn, akkor

$$0 = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi}(f')^2 - \int_0^{\pi} f^2\right) = \sum_{0\neq n\in\mathbb{Z}}\left(n^2-1\right)|\widehat{g}(n)|^2.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy tetszőleges $2 \leq |n| \in \mathbb{N}$ esetén $\widehat{g}(n) = 0$, így

$$g(x) = \widehat{g}(-1)e^{-\imath x} + \widehat{g}(1)e^{\imath x} \qquad (x \in [0,\pi]).$$

Ezért az $f(0) = 0 = f(\pi)$ feltételből $g(0) = 0 = g(\pi)$, ahonnan – az Euler-formulákat felhasználva – alkalmas $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = g(x) = c\sin(x) \qquad (x \in [0,\pi])$$

következik. ■

Megjegyezzük, hogy közismert a fenti egyenlőtéernség alábbi ekvivalens alakja.

7.1.2. tétel. (Izoperimetrikus egyenlőtlenség). Tegyük fel, hogy valamely $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ Jordan-mérhető halmaz határát a $\varphi := (\varphi_1, \varphi_2) : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ reguláris út paraméterezi:

$$\mathcal{R}_\varphi = \partial\Omega.$$

Ekkor az Ω halmaz T területe és a φ út l ívhossza között az

$$T \leq \frac{l^2}{4\pi} \tag{7.1.2}$$

egyenlőtlanség áll fenn. Egyenlőség pedig pontosan akkor áll fenn (7.1.2)-ben, ha $\mathcal{R}_\varphi$ kör.

Biz. Az (6.1.2) formula felhasználásával azt kapjuk, hogy Ω területére

$$T = \frac{1}{2}\int_0^\pi (\varphi_1\dot{\varphi}_2 - \varphi_2\dot{\varphi}_1)\,.$$

A $\partial\Omega$ határ ívhossza pedig az

$$l = \int_0^\pi \sqrt{(\dot{\varphi}_1)^2 + (\dot{\varphi}_2)^2} \tag{7.1.3}$$

formula alapján számítható (vö. [18]). Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy a $\partial\Omega$ határ ívhossz szerint van paraméterezve, azaz

$$\|\varphi'(s)\| = \sqrt{(\varphi_1'(s))^2 + (\varphi_2'(s))^2} = 1 \qquad (s \in [0, l]).$$

Ezután a $t := s\pi/l$ paraméter-transzformáció alkalmazásával azt kapjuk, hogy $\varphi(0) = \varphi(\pi)$. A

$$\varphi \mapsto \varphi - \varphi(0)$$

transzláció alkalmazásával (vö. [14]) pedig

$$\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0 \in \mathbb{R}^2$$

adódik. Polárkoordináták, azaz a

$$\varphi_1(t) =: r(t)\cos(\vartheta(t)), \quad \varphi_2(t) =: r(t)\sin(\vartheta(t)) \qquad (t \in [0, \pi])$$

helyettesítés bevezetésével látható, hogy

$$r(0) = 0 = r(\pi), \tag{7.1.4}$$

így a láncszabályt alkalmazva

$$\varphi_1\dot{\varphi}_2 - \varphi_2\dot{\varphi}_1 = r^2\dot{\varphi}$$

és

$$(\dot{\varphi}_1)^2 + (\dot{\varphi}_2)^2 = (\dot{r})^2 + r^2(\dot{\vartheta})^2$$

adódik. Mivel

$$(\dot{\varphi}_1)^2 + (\dot{\varphi}_2)^2 = \left\{(\varphi_1')^2 + (\varphi_2')^2\right\} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 = 1 \cdot \frac{l^2}{\pi^2},$$

ezért

$$(\dot{r})^2 + r^2(\dot{\vartheta})^2 = \frac{l^2}{\pi^2},$$

ennélfogva az Ω tartomány területére

$$T = \frac{1}{2}\int_0^\pi r^2\dot{\vartheta},$$

ill. a $\partial\Omega$ határ ívhosszának négyzetére

$$l^2 = \pi\int_0^\pi (\dot{r})^2 + r^2(\dot{\vartheta})^2$$

teljesül. Azt kell tehát belátnunk, hogy

$$0 \leq \frac{l^2}{4\pi} - T = \frac{1}{4}\pi \int_0^\pi \left((\dot{r})^2 + r^2(\dot{\vartheta})^2\right) - \frac{1}{2}\int_0^\pi r^2\dot{\vartheta} =: \frac{1}{4}\cdot\mathcal{I}, \tag{7.1.5}$$

ahol

$$\mathcal{I} := \int_0^\pi \left((\dot{r})^2 + r^2(\dot{\vartheta})^2 - 2r^2\dot{\vartheta}\right),$$

és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $\mathcal{R}_\varphi$ kör. Az intergál additivitásának következtében

$$\mathcal{I} = \int_0^\pi r^2(\dot{\vartheta} - 1)^2 + \int_0^\pi \left((\dot{r})^2 - r^2\right).$$

Az iménti összeg első tagja nyilvánvalóan nem-negatív, a második tag nem-negatív volta pedig (7.1.4) miatt a Wirtinger egyenlőtlenség közvetlen következménye. Egyenlőség tehát pontosan akkor áll fenn, ha a fenti integrál minkét tagja zérus, azaz alkalmas $d, c \in \mathbb{R}$ esetén

$$\vartheta(t) = t + d \quad \text{és} \quad r(t) = c\sin(t) \qquad (t \in [0,\pi]).$$

Ez pedig azt jelenti, hogy

$$r(\vartheta) = c\sin(\vartheta - d),$$

ami nem más, mint egy c átmérőjű kör polárkoordinátás egyenlete. ■

Az izoprimetrikus egyenlőtlenségből levezethető a Wirtinger-egyenlőtlenség is (vö. [12]), hiszen (7.1.5) fényében az $\mathcal{I} \geq 0$ egyenlőtlenség következménye

$$0 \leq \frac{l^2}{4\pi} - T, \qquad \text{azaz} \qquad l^2 \geq 4\pi T.$$

7.2. A diszkrét eset

Ugyanúgy, mint folytonos esetben, a Wirtinger-egyenlőtlenségnek is sok változata ismert (vö. [11]). Most ezek közül csak egyet tárgyalunk.

7.2.1. tétel. Legyen $n \in \mathbb{N}$ és tegyük fel, hogy az $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ számokra

$$x_1 + \ldots + x_n = 0.$$

teljesül, majd legyen $x_{n+1} := x_1$. Ekkor

$$\sum_{k=1}^n (x_k - x_{k+1})^2 \geq 4\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\sum_{k=1}^n x_k^2. \tag{7.2.1}$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn (7.2.1)-ben, ha alkalmas $c, d \in \mathbb{R}$ számokkal

$$x_k = c\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + d\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \qquad (k \in \{1, \ldots .n\})$$

(vö. [4]).

A [6] tanulmányban a 7.2.1 tétel egy általánosítását bizonyította be a szerző, konkrétan az alábbi állítást.

7.2.2. tétel. Ha $n \in \mathbb{N}$ és az $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, ill. az $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in (0, \pi)$ számokra

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha_k}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha_{k+1}}{2}\right)\right) x_k = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \leq 2\pi$$

akkor

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(x_k - x_{k+1})^2}{\sin(\alpha_{k+1})} \geq \sum_{k=1}^{n} \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha_k}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha_{k+1}}{2}\right)\right) x_k^2. \tag{7.2.2}$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn (7.2.2)-ban, ha

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 2\pi$$

és alkalmas $c, d \in \mathbb{R}$ esetén

$$x_i = c \cos\left(\sum_{k=1}^{i} \alpha_k\right) + b \sin\left(\sum_{k=1}^{i} \alpha_k\right).$$

Az

$$\alpha_k = \frac{2\pi}{n}$$

esetben nyilvánvaló, hogy a 7.2.2. tételből következik a 7.2.1. tétel.
A 7.2.1. tétel felhasználásával belátható az alábbi

7.2.1. tétel. Legyen $n \in \mathbb{N}$, majd $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ olyan számok, amelyre

$$x_1 + \ldots + x_n = 0.$$

teljesül, majd képezzük az $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatot úgy, hogy n-periodikus legyen. Ekkor tetszőleges $p \in \mathbb{N}_0$ indexre fennáll a

$$\sum_{k=1}^{n} (\Delta^p x_k) \geq 4^p \left(\sin^{2p}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \tag{7.2.3}$$

egyenlőtlenség.

Biz. Teljes indukcióval bizonyítunk (vö. [16]).

- Nyilvánvaló, hogy a $p = 0$ esetben fennáll a (7.2.3) egyenlőtlenség, sőt egyenlőség van.
- Tegyük fel, hogy valamely $p \in \mathbb{N}_0$ esetben fennáll a (7.2.3) egyenlőtlenség, majd legyen

$$x'_k = x_{k+1} - x_k \quad (k \in \{1, \ldots, n\}).$$

Ekkor
$$\sum_{k=1}^{n} x'_k = x_{k+1} - x_k = 0.$$
Képezzük az $(x'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatot, úgy, hogy n-periodikus legyen. Ekkor tetszőleges $n+1 \leq$ $\leq k \in \mathbb{N}$ indexre is $x'_k = x_{k+1} - x_k$ teljesül. Így az indukciós feltevés, az 7.2.1. tétel és a Δ^p operátorhatványra vonatkozó (4.0.1) formula felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \left(\Delta^{p+1} x_k\right)^2 &= \sum_{k=1}^{n} \left(\Delta^p x'_k\right)^2 \geq 4^p \left(\sin^{2p}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) \sum_{k=1}^{n} (x'_k)^2 = \\ &= 4^p \left(\sin^{2p}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) \sum_{k=1}^{n} (x_{k+1} - x_k)^2 \geq 4^{p+1} \left(\sin^{2(p+1)}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) \sum_{k=1}^{n} x_k^2. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

8. fejezet

A Laplace-operátor

8.1. A Laplace-operátor

8.1.1. A folytonos eset

Legyen

$$\mathcal{X}_D := \left\{u \in \mathfrak{C}^2[a,b] :\; u(a) = 0 = u(b)\right\}, \quad \text{ill.} \quad \mathcal{X}_N := \left\{u \in \mathfrak{C}^2[a,b] :\; u'(a) = 0 = u'(b)\right\}.$$

A fenti terek értelmezésében a D és az N indexek a Dirichlet-, illetve a Neumann-féle peremfeltételeket szimbolizálják.

8.1.1. definíció. Legyen $\mathcal{X} \in \{\mathcal{X}_D, \mathcal{X}_N\}$. A

$$\Delta : \mathcal{X} \to L^2[a,b], \qquad \Delta(f) := f''$$

operátort (egydimenziós) **Laplace-operátor**nak nevezzük.

A Δ operátor lineáris a $\mathfrak{C}^2[a,b] \subset \mathfrak{C}[a,b] \subset L^2[a,b]$ téren, így a szokásos skaláris szorzatot használva vizsgálhatjuk a Δ szimmetrikus voltát.

8.1.1. tétel. A 8.1.1 definícióban értelmezett operátor szimmetrikus.

Biz. Bármely $f, g \in \mathcal{X} \in \{\mathcal{X}_D, \mathcal{X}_N\}$ esetén parciálisan integrálva azt kapjuk, hogy tetszőleges $f, g \in \mathcal{X}$ függvények esetén

$$\langle f, \Delta(g)\rangle_{L^2[a,b]} = \int_a^b f\overline{g''} = \left[f\overline{g'}\right]_a^b - \int_a^b f'\overline{g'} = 0 - \left[f'\overline{g}\right]_a^b + \int_a^b f''\overline{g} = \int_a^b f''\overline{g} = \langle \Delta(f), g\rangle_{L^2[a,b]}. \quad \blacksquare$$

8.1.2. A diszkrét eset

Ahhoz, hogy a Laplace-operátor diszkrét változatát értelmezni tudjuk, bevezetjük a következő jelölést. Adott H megszámlálható halmaz esetén legyen

$$l_2(H) := \left\{ f : H \to \mathbb{K} : \sum_{x \in H} |f(x)|^2 < +\infty \right\}.$$

Ekkor $l_2(H)$ euklideszi tér az

$$\langle f, g \rangle_{l_2(H)} := \sum_{x \in H} f(x)\overline{g(x)} \qquad (f, g \in l_2(H))$$

skaláris szorzással, speciálisan $l_2 = l_2(\mathbb{N})$ euklideszi tér az

$$\langle x, y \rangle_2 := \langle x, y \rangle_{l_2} := \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n} \qquad (x = (x_n), y = (y_n) \in l_2)$$

skaláris szorzással.

8.1.1. állítás. Legyen $a \in \mathbb{Z}$ és $\mathcal{X} := l_2(\mathbb{Z})$. Ekkor az

$$A_a : \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \qquad (A_a x)(n) := x(n-a) \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

operátor unitér.

Biz.

1. lépés.. Ha $x, y \in l_2(\mathbb{Z})$ és $a \in \mathbb{Z}$, akkor

$$\begin{aligned} \langle x, A_a y \rangle_{l_2} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{x(n)}(A_a y)(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{x(n)} y(n-a) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{x(k+a)} y(k) = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{(A_{-a} x)(n)} y(k) = \langle A_{-a} x, y \rangle_{l_2}. \end{aligned}$$

2. lépés.. Mivel bármely $x \in l_2(\mathbb{Z})$ és $n \in \mathbb{Z}$ esetén

$$(A_{-a} A_a x)(n) = (A_a x)(n+a) = x(n+a-a) = x(n),$$

ezért

$$A_{-a} = A_a^{-1}. \quad \blacksquare$$

8.1.2. tétel. A

$$\Delta : \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \qquad (\Delta x)(n) := x(n+1) + x(n-1) - 2x(n) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

operátor (**diszkrét Laplace-operátor**) önadjungált.

Biz. Mivel bármely $x, y \in l_2(\mathbb{Z})$ esetén

$$\begin{aligned}
\langle x, \Delta y\rangle_{l_2} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{x(n)}(\Delta y)(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{x(n)}\{y(n+1) - y(n-1) - 2y(n)\} = \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{x(n-1)}y(n) + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{x(n+1)}y(n) - 2\sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{x(n)}y(n) = \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\{x(n-1) + x(n+1) - 2x(n)\}}y(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{(\Delta x)(n)}y(n) = \\
&= \langle \Delta x, y\rangle_{l_2},
\end{aligned}$$

azért

$$\Delta^* = \Delta,$$

azaz Δ önadjungált. ■

Irodalomjegyzék

[1] AGARWAL R. P.: *Difference Equations and Inequalities*, Marcel Dekker, New York, 1992.

[2] AMANN, H.; ESCHER, J.: *Analysis II.*, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 2008.

[3] AULBACH, B.: *Continuous and discrete dynamics near manifolds of equilibria*, Lecture Notes in Mathematics, 1058. Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[4] FAN, K.; TAUSSKY, O.; TODD, J.: *Discrete analogs of inequalities of Wirtinger*, Monatsh. Math. **59** (1955), 73–90.

[5] HEUSER, H.: *Lehrbuch der Analysis. Teil 1.*, Lecture Notes in Mathematics, 1058. Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2009.

[6] ISMESTIEV, I..: *A general discrete Wirtinger inequality and spectra of discrete Laplacians*, arXiv:1502.03186v1

[7] KELLEY W. G.; PETERSON, A. C.: *Difference equations. An introduction with applications*, Academic Press, San Diego, 2001.

[8] KOVÁCS, S.: *Funkcionálanalízis feladatokban, egyetemi jegyzet*, Budapest, 2013. ISBN: 978-963-284-445-9 (https://www.inf.elte.hu/dstore/document/298/FunkAnalKS.pdf)

[9] KOVÁCS, S.: *Alkalmazott analízis gyaklorlat, egyetemi jegyzet*, Budapest, 2018. ISBN: 978-963-489-032-4 (https://numanal.inf.elte.hu/~alex/AlkAnalGyak/AlkAnalGyakKS.pdf)

[10] KOVÁCS, S.: *Differenciaegyenletek*, Typotex, Budapest, 2020.

[11] NOVOTNÁ, J.: *Variations of discrete analogues of Wirtinger's inequality*, Časopis Pěst. Mat. **105**(3) (1980), 278–285.

[12] OSSERMAN, R.: *The isoperimetric inequality*, Bull. Amer. Math. Soc. **84**(6) (2005), 1182–1238.

[13] PETZ, D.: *Lineáris analízis*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 2002.

[14] PRESSLEY, A.: *Elementary differential geometry*, Second edition. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2010.

[15] SHIRYAEV, A. N.: *Probability*, Graduate Texts in Mathematics, 95. Springer, New York, 2019.

[16] SHISHA, O.: *On the discrete version of Wirtinger's inequality*, Amer. Math. Monthly **80** (1973), 755–760.

[17] SIMON, P.: *Bevezetés az analízisbe 1*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2016.

[18] SIMON, P.: *Bevezetés az analízisbe 2*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2016.

[19] WADE, W. R.: *Introduction to Analysis*, Pearson Education Limited, 2014.

[20] ZHOU, Y.: *Oscillation and nonoscillation criteria for second order quasilinear difference equations*, J. Math. Anal. Appl. **303**(2) (2005), 365–375.

[21] ZIA, L.: *Using the Finite Difference Calculus to Sum Powers of Integers*, The College Mathematics Journal **22**(4) (1991), 294–300.

Szita Márton,
alkalmazott matematika szakos egyetemi hallgató
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar,
1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C,
martonszita@gmail.com