# Intervallumleképezések periodikus pályái

Szakdolgozat

Készítette: Zarka Áron

Témavezető: Dr. Buczolich Zoltán

egyetemi tanár

Analízis Tanszék

Matematika BSc

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2022

Budapest

# Tartalomjegyzék

# Köszönetnyilvánítás

Kiemelten szeretném megköszönni dr. Buczolich Zoltánnak a tudást, iránymutatást és segítséget, amit nem csak a szakdolgozat írása közben, hanem egyetemi éveim alatt is kaptam tőle. Továbbá családomnak és barátaimnak a türelmüket. Áronnak és Tamásnak, hogy a korábbi tapasztalataikat megosztották velem, és Lidinek, hogy nyelvi kérdésekben mindig számíthattam a segítségére.

# 1. Bevezetés

A dolgozatban végig feltesszük, hogy $f$ egy intervallumot önmagára képző, folytonos leképezés, $f : I \mapsto I$, ahol $I \subset \mathbb{R}$.

Az $x$ pont orbitja alatt az alábbi halmazt értjük, melyet $\mathcal{O}$-val jelölünk:

$$\mathcal{O} := \{x, f(x), f^2(x), f^3(x), ...\} = \{f^n(x)|n := 0, 1, 2, 3, ...\}.$$

Az $f^n(x)$ jelölés az $f$ függvény $n$-szeri iterálását jelöli, azaz például $f^2(x) = f(f(x))$.

Számunkra különösen érdekes, ha ebben a sorozatban periodikus ismétlődés fedezhető fel. Ennek a vizsgálatához vezessük be a következő definíciókat.

**1.1. Definíció.** *Az $x \in I$ pont fixpont, ha $f(x) = x$.*
*$Fix(f) := \{x : f(x) = x\}$ az $f$ függvény fixpontjainak halmaza.*

**1.2. Definíció.** *Az $x \in I$ pont $n$-szerint periodikus pont, ha létezik $n \in \mathbb{N}$, amire $f^n(x) = x$.*
*$Per_n(f) := \{x : f^n(x) = x\}$ az $n$-szerint periodikus pontok halmaza, ebben benne vannak $n$ valódi osztói szerint vett periodikus pontok is.*

**1.3. Definíció.** *Az $x \in I$ pont alapperiódusa az a legkisebb $k \in \mathbb{N}$, amire $f^k(x) = x$.*

**1.4. Definíció.** *Az $x \in I$ pont $m$-szerint végperiodikus, ha létezik olyan $m > 0$, hogy $\forall i \geq m$-re $f^{m+i}(x) = f^i(x)$.*

A fixpont egy 1 periódusú pont, hiszen $f^1(x) = x$.

Adott egy $I$ intervallumon értelmezett folytonos leképezés, ebben az esetben arra vagyunk kíváncsiak, hogy egy adott periódushossz esetén milyen más periódus szerint léteznek szükségszerűen periodikus pontok.

Erre a kérdésre ad választ Alexander Sarkovszkij munkája, melyben a periódushosszak közti összefüggést tárta fel.

Ebben a dolgozatban ezt a rendszert szeretném [1] alapján ismertetni, a fő tételeket szemléletesen bizonyítani, ábrákkal és példákkal bemutatni. A dolgozat végén a [3]-ban szereplő, Sarkovszkij tételét függvényekkel konkretizáló, konstruktív tétel bizonyítását mutatom be.

# 2. Sarkovszkij tétele

## 2.1. Sarkovszkij-rendezés

Sarkovszkij tételének kimondásához először be kell vezessük a Sarkovszkij-rendezést a természetes számokon. Minden cikk, ami a tétellel foglalkozik ismerteti ezt a rendezést. [1], [2] és [3] alapján a Sarkovszkij-rendezés részletes leírását mutatom be, majd a dolgozatban később is használt duplázódási tulajdonságra egy saját bizonyítást adok.

A Sarkovszkij rendezési relációra a $\triangleright$ jelet használjuk.

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright 9 ... \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright 2 \cdot 7 \triangleright 2 \cdot 9 \triangleright ... \triangleright 2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 5 \triangleright 2^2 \cdot 7 \triangleright 2^2 \cdot 9 \triangleright ... \triangleright 2^3 \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1$$

A rendezés felépítése a következő:

A 3 a ”Sarkovszkij-legnagyobb” szám és az 1 a ”Sarkovszkij-legkisebb” szám.

A 3 után következő Sarkovszkij-kisebb szám az 5, majd a 7 és így tovább a páratlan számok (a megszokott rendezésünk szerint növekvő sorrendben).

Az 1-nél közvetlen Sarkovszkij-nagyobb a 2, majd a 4, majd a 8 és így tovább a kettőhatványok.

A rendezés két vége között pedig a kimaradó páros számok olyan rendszerben követik egymást, hogy a teljes páratlan sornál Sarkovszkij-kisebb a páratlan sor kétszerese, annál kisebb a négyszerese, és így tovább a páratlan sorok kettőhatványokkal vett szorzata.

**2.1. Állítás.** *A Sarkovszkij rendezési relációra teljesül az úgynevezett duplázódási tulajdonság, azaz*

$$l \triangleright r \Leftrightarrow 2l \triangleright 2r.$$

*Bizonyítás.* Különböztessünk meg a rendezésben 3 csoportot: $A$-t, $B$-t és $C$-t.

- $A := \{\text{páratlan számok}\}$,
- $B := \{2^l \cdot \text{páratlan számok} : l \geq 1\}$,
- $C := \{2^k : k \geq 0\}$.

$a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ esetén a konstrukcióból következik, hogy $a \triangleright b \triangleright c$ és $2 \cdot a \in B$, $2 \cdot b \in B$, $2 \cdot c \in C$, továbbá $a \triangleright 2 \cdot a$, $b \triangleright 2 \cdot b$, $2 \cdot c \triangleright c$ ($2c$ nem csak Sarkovszkij-nagyobb $c$-nél, hanem a legkisebb $c$-nél Sarkovszkij-nagyobb szám).

Ha $l$ és $r$ azonos csoportból kerül ki, például $l, r \in B$, akkor $2r, 2l \in B$, és ekvivalencia következik a rendezés definíciójából. Ha pedig $r$ és $l$ különböző csoportokból kerülnek ki, például $l \in B$ és $r \in C$, akkor is igaz marad az ekvivalencia, mert a 2-vel szorzás nem vezet ki a csoportból és a csoportok elemei közt az $A \triangleright B \triangleright C$ reláció fennáll. Ezek alapján az ekvivalencia mindkét iránya könnyen belátható az összes többi esetben is. $\square$

Sarkovszkij megmutatta, hogy a fenti rendezés jól leírja, hogy mely számok lesznek szükségszerűen periódusai egy intervallum önmagára vett folytonos leképzésének, abban az esetben, ha már ismerjük valamely periódushosszát.

## 2.2. Sarkovszkij-tétel

**2.2. Tétel.** *Ha $f$-nek van $m$-szerint periodikus pontja és $m \triangleright l$, akkor létezik $l$-szerint periodikus pontja is.*

Ebből következik, hogy egy folytonos leképezés periódusai a Sarkovszkij rendezés egy végszeletét adják. Jelöljük a végszeleteket a következőképpen: $\mathcal{F}_m \subset \mathbb{N}$,
$\mathcal{F}_m := \{l : m \triangleright l\} \cup \{m\}$

Háromféle végszelet-típust különböztetünk meg:

- $\mathcal{F}_m$, ahol $m \neq 2^k$,
- $\mathcal{F}_{2^k} = \{2^k, ..., 16, 8, 4, 2, 1\}$,
- $\emptyset$, üres halmaz.

## 2.3. A Sarkovszkij-tétel alakjai

A most következő tételt (amit Sarkovszkij az eredeti [5] dolgozatában bizonyított) gyakran az előző tétel megfordításaként emlegetik.

**2.3. Tétel.** *Sarkovszkij-rendezés minden végszelete egy intervallumot önmagára képező folytonos leképezés periódusainak halmaza.*

Sarkovszkij-tétel alatt a 2.2 Tétel és a 2.3 Tétel kombinációját is szokás érteni.

**2.4. Tétel.** *$\mathcal{I} \subset \mathbb{N}$ részhalmaza akkor és csak akkor áll elő egy $f$ leképezés periodikus pontjainak halmazaként, ha $\mathcal{I}$ a Sarkovszkij-rendezés végszelete.*

# 3. Intervallumok, lefedések és körök

Ebben a fejezetben fogalmazzuk meg a végső bizonyításhoz szükséges definíciókat és lemmákat, amelyek intervallumokról és azokon értelmezett leképezés(ek)ről szólnak. Be fogunk vezetni egy relációt, ami [1]-ben szerepel, és adott leképezés esetén kapcsolatot teremt intervallumok között. Ezek után definiálunk egy szemléletes gráfelméleti jelölést, mely a cikkben szereplő bizonyításban nem szerepel, de megkönnyíti a bizonyítások értelmezését a későbbiekben.

Ehhez legyenek $I, J \subset \mathbb{R}$ intervallumok és egy adott függvény $f : I \to \mathbb{R}$. A következőkben végig föltesszük, hogy $f$ egy rögzített folytonos leképezés.

## 3.1. Fedési relációk

**3.1. Definíció.** *Azt mondjuk, hogy $I$ $f$-fedi a $J$ intervallumot, ha $J \subset f(I)$.*

*Ezt $I \xrightarrow{f} J$-vel, vagy egyértelmű $f$ esetén egyszerűen $I \to J$-vel jelöljük.*

**3.2. Definíció.** *Teljes fedésnek nevezzük, ha $I \to J$ esetén $J = f(I)$, és ezt $I \rightarrowtail J$-vel jelöljük.*

**3.3. Lemma.** *Ha $[a_1, a_2] \xrightarrow{f} [a_1, a_2]$, akkor $f$-nek van fixpontja $[a_1, a_2]$-n.*

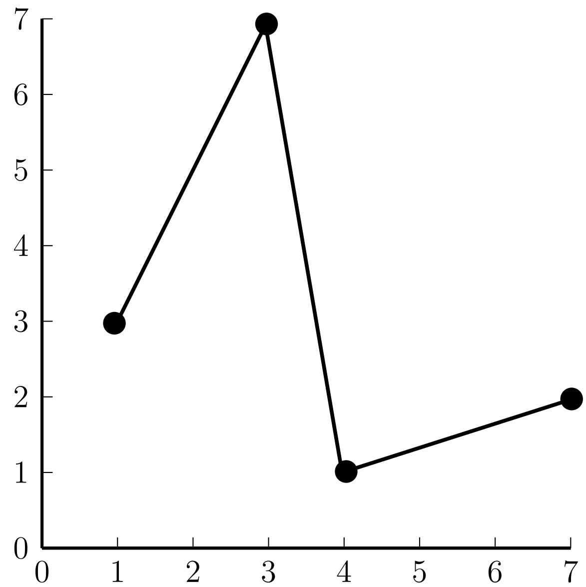
*Bizonyítás.* Legyen $b_1, b_2 \in [a_1; a_2]$ és $f(b_i) = a_i$, $i = 1, 2$. Ekkor $f(b_1) - b_1 \leq 0 \leq f(b_2) - b_2$. Legyen $g(x) := f(x) - x$, ekkor az előző alapján $g(x)$ pozitív és negatív értékeket is felvesz, és a Bolzano—Darboux-tétel következményeként létezik $x \in [b_1, b_2]$, amire $g(x) = f(x) - x = 0$, azaz $f(x) = x$. □

## 3.2. Körök

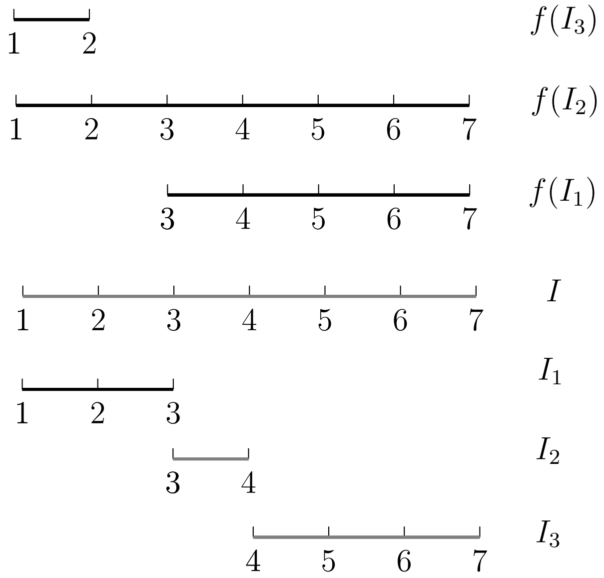
### Markov-gráfok

**3.4. Definíció.** *Legyen $I$ részintervallumainak egy halmaza $\mathcal{I} := \{I_1, I_2, ..., I_n\}$ olyan, hogy $\mathrm{Int}(I_i) \cap \mathrm{Int}(I_j) = \emptyset$, azaz a részintervallumok belseje egymásba nem nyúló. Tekintsük azt az irányított gráfot, melynek csúcsai az $I_i$ intervallumok, és akkor mutat él $I_l$-ből $I_k$-ba, ha $I_l \xrightarrow{f} I_k$. Ezt a gráfot Markov-gráfnak nevezzük.*

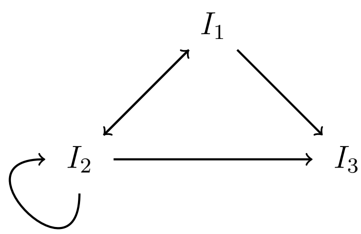
**3.5. Példa.** *Legyen $I$ az $[1,7]$ intervallum, ennek egymásba nem nyúló részintervallumai pedig $I_1 = [1,3]$, $I_2 = [3,4]$, $I_3 = [4,7]$. Legyen $f : I \to I$ leképezés, melyre $f(I_1) = [3,7]$, $f(I_2) = [1,7]$, $f(I_3) = [1,2]$. Az alábbi ábra mutat egy ilyen függvényt, alatta pedig az intervallumok, ami alatt pedig a fedési relációkat szemléltető Markov-gráf található.*




1. ábra. Egy, a 3.5. Példa intervallumainak megfelelő függvény.




2. ábra. Intervallumok fedési relációja.




3. ábra. Fedések Markov-gráfja.

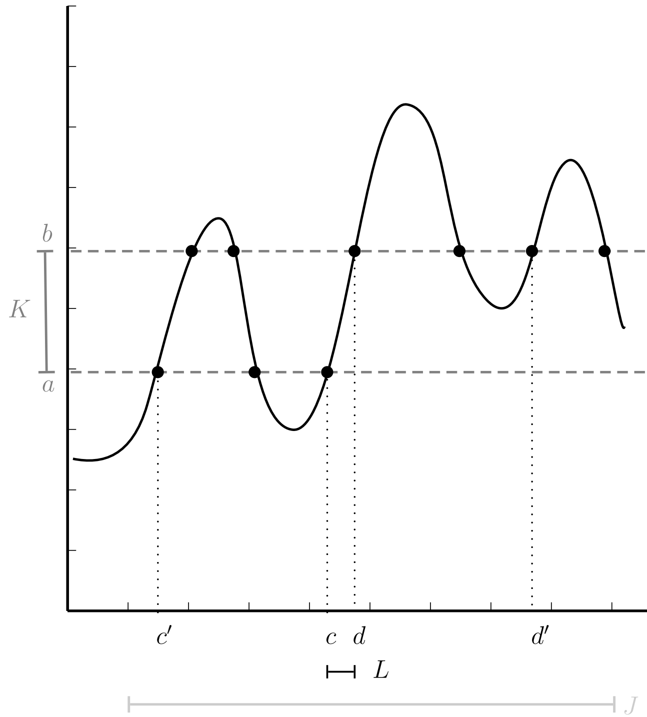
**3.6. Lemma.** *Tegyük fel, hogy* $J, K \subset I$ *intervallumok,* $K$ *zárt és* $J \to K$*, ekkor létezik* $L \subset J$*, amire* $f(L) = K$*, azaz* $L \rightarrowtail K$*.*

*Bizonyítás.* Legyen $K = [a, b]$. Mivel $J \to K$, ezért léteznek $c', d' \in J$ pontok, amelyekre teljesül, hogy $f(c') = a$ és $f(d') = b$. Feltehető, hogy $c' < d'$ és legyenek

$$c := \max\{x \in [c', d'] : f(x) = a\},$$

$$d := \min\{x \in [c, d'] : f(x) = b\}.$$

Ekkor $L = [c, d]$ esetén $L$ olyan, hogy $f(L) = K$. □




4. ábra. 3.6. Lemma bizonyításához.

**3.7. Lemma.** *(útvonal lemma) Ha $J_0, ..., J_{n-1}$ korlátos és zárt intervallumok, továbbá $J_0 \xrightarrow{f} ... \xrightarrow{f} J_{n-1} \xrightarrow{f} J_0$ egy n-hosszú kör a Markov-gráfban, akkor létezik egy periodikus $x$ pont, ami végigköveti a kört, azaz $f^i(x) \in J_i$ minden $0 \leq i < n$-re és $f^n(x) = x$.*

*Bizonyítás.* A 3.6 Lemma értelmében létezik egy korlátos és zárt intervallum $K_{n-1} \subset J_{n-1}$, amire $K_{n-1} \rightarrowtail J_0$.

Ekkor $J_{n-2} \to K_{n-1}$ és így létezik $K_{n-2} \subset J_{n-2}$, amire $K_{n-2} \rightarrowtail K_{n-1}$.

Indukcióval beláthatjuk, hogy $K_i \subset J_i$ $(0 \leq i < n)$ korlátos és zárt intervallumokra teljesül, hogy

$$K_0 \rightarrowtail K_1 \rightarrowtail ... \rightarrowtail K_{n-1} \rightarrowtail J_0.$$

Bármely $x \in K_0$-ra teljesül, hogy $f^i(x) \in K_i \subset J_i$ $(0 \leq i < n)$ és $f^n(x) \in J_0$.

Mivel $K_0 \subset J_0 = f^n(K_0)$, azaz $K_0 \xrightarrow{f^n} K_0$. A 3.3 Lemma szerint $f^n$-nek van fixpontja $K_0$-ban. □

Szeretnénk biztosítani, hogy ha $x \in Per_n(f)$, akkor az alapperiódusa pontosan $n$ legyen és nem az $n$ egy valódi osztója.

**3.8. Példa.** *Vegyük a következő* 2*-hosszú kört:* $[-1,0] \underset{f}{\overset{f}{\leftrightarrows}} [0,+1]$*.* $f(x) = -2x$ *esetén egyetlen pont követi csak végig a kört, a 0, ami valójában fixpont (1 periódusú pont).*

**3.9. Definíció.** *Azt mondjuk, hogy egy* $J_0 \xrightarrow{f} ... \xrightarrow{f} J_{n-1} \xrightarrow{f} J_0$ *intervallumok köre* ***elemi****, ha minden azt követő periodikus pontnak az alapperiódusa* $n$*.*

Ezzel az elnevezéssel és a 3.7 Lemmával, az alábbi állítást fogalmazhatjuk meg.

**3.10. Állítás.** *Egy elemi* $J_0 \xrightarrow{f} ... \xrightarrow{f} J_{n-1} \xrightarrow{f} J_0$ *körnek létezik* $x \in J_0$ *periodikus pontja, melynek alapperiódusa* $n$ *és végigköveti a kört.*

Mostanra indokolttá válik, hogy mutassunk egy kényelmes feltételt, annak bizonyítására, hogy egy ciklus elemi.

**3.11. Lemma.** *Egy* $J_0 \xrightarrow{f} ... \xrightarrow{f} J_{n-1} \xrightarrow{f} J_0$ *ciklus elemi, ha a ciklusban nem szerepelnek* $J_0$ *végpontjai, azaz a* $J_0$ *intervallum egyik végpontja sem periodikus* $n$ *szerint, és* $\mathrm{Int}(J_0) \cap \bigcup_{i=1}^{n-1} J_i = \emptyset$*, azaz* $\mathrm{Int}(J_0)$ *diszjunkt minden* $J_1, ..., J_{n-1}$ *intervallumtól.*

**3.12. Megjegyzés.** *A lemma* $n > 1$ *esetén érdekes, hiszen minden 1 hosszú ciklus triviálisan elemi.*

*Bizonyítás.* Ha egy $x$ végigmegy a cikluson, akkor $x \in \mathrm{Int}(J_0)$, mivel $x$ nem lehet végpontja $J_0$-nak.

Minden $i \in \{1, ..., n-1\}$ esetén $f^i(x) \notin \mathrm{Int}(J_0)$, mert $f^i(x) \in J_i$, ami diszjunkt $\mathrm{Int}(J_0)$-tól. Emiatt $f^i(x)$ nem veheti fel az $x$ értéket semelyik $i \in \{1, ..., n-1\}$ esetén sem, így nem lehet $f(x)$-nek $i$ szerint periodikus pontja. Feltevésünk szerint viszont $f^n(x) = x$, azaz $n$ az $x$ pont alapperiódusa, mert az a legkisebb $n \in \mathbf{N}$, amire az egyenlőség teljesül. □

## 3.3. Kényszerített fedések

Tegyük fel, hogy az $x$ pont periodikus és a pályája $\mathcal{O} = \{x, f(x), ..., f^{n-1}(x)\}$. Az $x$ pont $n$ szerint alapperiodikus, így $f^n(x) = x$. Ennek alapján a következő elnevezéseket vezetjük be.

**3.13. Definíció.** ***$\mathcal{O}$-intervallumnak*** *nevezünk egy korlátos és zárt intervallumot, melynek végpontjai* $\mathcal{O}$*-ból kerülnek ki.*

**3.14. Definíció.** *Azt mondjuk, hogy az* $I, J$ $\mathcal{O}$*-intervallumok* $f$*-fedése* ***$\mathcal{O}$-kényszerített****, ha* $J \subset [x_{\min}, x_{max}]$*, ahol* $x_{\min} := \min\{f(I \cap \mathcal{O})\}$ *és* $x_{max} := max\{f(I \cap \mathcal{O})\}$*.*

**3.15. Megjegyzés.** *Mivel $f$ folytonos, és teljesül a Bolzano—Darboux- tétel, ezekből következik, hogy $I \to J$.*

**3.16. Definíció.** *$\mathcal{O}$-intervallumok egy köre $\mathcal{O}$-kényszerített, ha a Markov-gráfban minden irányított él egy $\mathcal{O}$-kényszerített f-fedési relációnak felel meg.*

Ezen a ponton eljutottunk oda, hogy a szemléletes Markov-gráfokat és az absztraktabb periodikus pályákat össze tudjuk kapcsolni. A Markov-gráf egy $n$-köre, egy $n$ hosszúságú gráfelméleti kört jelent. A későbbiekben, ha $\mathcal{O}$ $n$-köréről beszélünk, akkor olyan intervallumok Markov-gráfjának köréről beszélünk, amely intervallumok végpontjai $\mathcal{O}$ pontjai közül kerülnek kiválasztásra a fenti definíciók érvényben maradása melllett.

# 4. Štefan-sorozatok

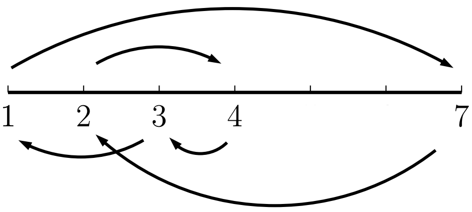
Az [1] alapján, Štefan-sorozatok bevezetésével bizonyítjuk Sarkovszkij tételét, így több kisebb tételből rakhatjuk össze a 2.2. Tétel bizonyítását. Létezik olyan bizonyítás is, ami nem használ Štefan-sorozatokat, ilyen található például a [2]-ben.

## 4.1. Štefan-sorozatok

Legyen továbbra is $f$ egy folytonos leképezés $f : I \to J$, $I, J \subset \mathbb{R}$ intervallumokon. Legyen adott $f$ egy pályája $m \geq 2$ esetén egy $m$-kör, jelöljük ezt a pályát $\mathcal{O}$-val, azaz $\mathcal{O}$ egy $m$ pontból álló halmaz: $\mathcal{O} = \{y_0, ..., y_{m-1}\}$, ahol $f(y_{m-1}) = y_0$ és $\forall i$-re $y_i$ alapperiódusa $m$.

**4.1. Definíció.** *Legyen $p$ az $\mathcal{O}$ legnagyobb pontja, amire teljesül, hogy $f(p) > p$, továbbá legyen $q$ az első $p$-nél nagyobb pont. $\mathcal{O}$ középpontja a $c := \frac{p+q}{2}$ pont. Adott $x \in \mathcal{O}$ esetén $\mathcal{O}_x$-szel jelöljük az orbit azon pontjait, amik az $[x, c]$ intervallumba esnek. Egy $x \leq p$ esetén $\mathcal{O}_x = \mathcal{O} \cap [x, p]$ és $x \geq q$ esetén $\mathcal{O}_x = \mathcal{O} \cap [q, x]$. Azt mondjuk, hogy $x \in \mathcal{O}$ oldalt vált, ha $c$ az $x$ és $f(x)$ közé esik.*

**4.2. Példa.** *$\mathcal{O} = \{1,7,2,4,3\}$ esetén $p = 2$, hiszen $f(2) = 4 > 2$, $q = 3$, emiatt $c = 2,5$. $\mathcal{O}_1 = \{1,2\}$, $\mathcal{O}_7 = \{3,4,7\}$, stb. A 4 kivételével, az összes többi pont oldalt vált, mivel $2,5 < 3(= f(4)) < 4$.*




5. ábra. Példa egy 5-hosszú pályára.

**4.3. Definíció.** *Az $(x_0, x_1, ..., x_n) \subset \mathcal{O}$ sorozatot Štefan-sorozatnak hívjuk, ha teljesülnek rá a következők:*

**(S1)** $\{x_0, x_1\} = \{p, q\}$,

**(S2)** *$x_0, x_1, ..., x_n$ pontok alternálnak a $c$ középpont körül és az $(x_{2k})$ illetve $(x_{2k+1})$ szigorúan monoton távolodnak $c$-től,*

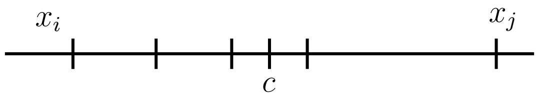
**(S3)** *Ha $1 \leq j \leq n-1$, akkor $x_j$ oldalt vált és $x_{j+1} \in \mathcal{O}_{f(x_j)}$,*

**(S4)** *$x_n$ nem vált oldalt.*

**4.4. Megjegyzés.** *Tehát ezt az $n+1$ darab pontot a $m$ elemű orbit pontjai közül választjuk ki. Azaz a Štefan-sorozat nem más, mint egy pálya néhány pontjának alternatív sorrendje.*

**4.5. Megjegyzés.** *A 4.1. Definíció értelmében az $x_{j+1} \in \mathcal{O}_{f(x_j)}$ azt jelenti, hogy $x_j < c$ esetén $c < x_{j+1} \leq f(x_j)$, és $c > x_{j+1} \geq f(x_j)$, ha $x_j > c$. Az $(S2)$ pontból következik, hogy az $x_0, x_1, ...x_n$ pontok különbözőek. Az $(S1)$ és $(S4)$ pontokból következik, hogy $n \geq 2$ és így $m \geq 3$, azaz az $\mathcal{O}$ pálya legalább háromelemű és a Štefan-sorozat legalább kételemű.*

**4.6. Megjegyzés.** *Szó esik c-től való távolságról, ami alatt azt értjük, hogy $x_i$ távolabb esik $x_j$-től, ha több sorozatelem van c és $x_i$ között, mint c és $x_j$ között.*




6. ábra. $x_i$ távolabb van $c$-től, mint $x_j$.

Štefan-sorozatok segítségével alkossuk meg a [6]-ban található Markov-gráfot.

Adott $(x_0, x_1, ..., x_n)$ Štefan-sorozat esetén definiáljuk a következő $\mathcal{O}$-intervallumokat:

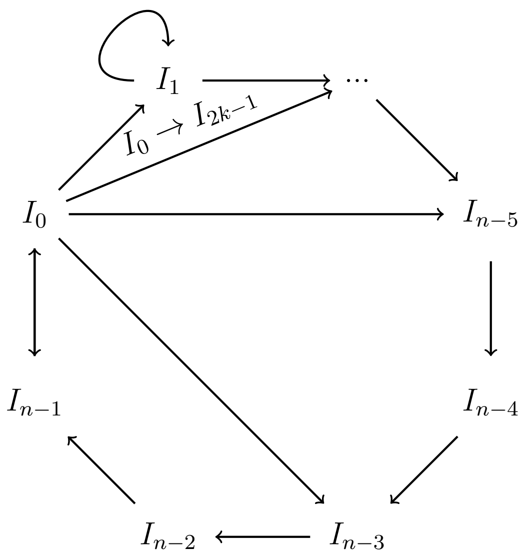
Minden $1 \leq j < n$-re legyen $I_j$ az a legrövidebb intervallum, ami tartalmazza az $x_0, x_1$ és $x_j$ pontokat. Továbbá legyen $I_0$ az az intervallum, amelynek végpontjai $x_n$ és $x_{n-2}$. (S2)-ből következik, hogy $\text{Int}(I_0) \cap I_j = \emptyset$ minden $1 \leq j < n$-re.

**4.7. Állítás.** *Ha a fenti módon definiáljuk az $I_j$ intervallumokat, akkor a Markov-gráfjukra az alábbi állítások lesznek érvényesek.*

**(1)** $I_1 \to I_1$ *és* $I_0 \to I_1$,

**(2)** $I_1 \to I_2 \to ... \to I_{n-1} \to I_0$,

**(3)** $I_0 \to I_{n-1}, I_{n-3}, I_{n-5}, ...$




*Bizonyítás.* (1) Erősebb állítást látunk be; $I_j \to I_1$ $(j = 0, 1, ..., n-1)$, ami úgy is megfogalmazható, hogy minden $f(I_j)$ tartalmazza az $x_0$ és az $x_1$ pontokat. A definíció (S2) és (S3) pontjaiból következik, hogy $I_j$ $(j = 1, ..., n-1)$ intervallumok végpontjai a $c$ középpont két különböző oldalára esnek. Ezzel szemben $I_0$ végpontjai azonos oldalon helyezkednek el, de csak az egyik vált oldalt, a másik nem ($x_n$ nem vált oldalt, és $x_n \in \mathrm{Mar}(I_0)$ a definícióink szerint). Bármely $j$ esetén $f(I_j)$ tartalmaz pontot $c$ mindkét oldaláról és (S1), illetve $c$ definiálásának értelmében tartalmazza az $x_0$ és $x_1$ pontokat is.

(2) Ehhez elég belátni, hogy $1 \leq j < n-1$-re $f(I_j)$ tartalmazza az $x_0, x_1$ és $x_{j+1}$ pontokat. (1)-ből már tudjuk, hogy $x_0, x_1 \in f(I_j)$. Mivel $f(x_j) \in f(I_j)$, ebből következik, hogy $\mathcal{O}_{f(x_j)} \subset f(I_j)$. Az előbbiből és (S3)-ból következik, hogy $x_{j+1} \in f(I_j)$.

(3) Ehhez elég belátnunk, hogy $f(I_0)$ tartalmazza az $x_0, x_1$ továbbá az $x_{n-1}, x_{n-3}$, $x_{n-5}, ...$ pontokat, amik ellenkező oldalon vannak, mint az $x_n$. Az előzőekből már tudjuk, hogy $x_0, x_1 \in f(I_0)$. Konstrukciónk szerint $x_{n-2} \in I_0$, és (S3)-ból tudjuk, hogy $f(x_{n-2})$ legalább olyan távol van $c$-től, mint $x_{n-1}$. Az $x_{n-1}$ pont pedig távolabb van $c$-től, mint $x_{n-3}, x_{n-5}, ...$ az (S2)-beli monotonitás miatt. Ebből a két megállapításból már következik, hogy $x_{n-1}, x_{n-3}, ... \in f(I_0)$. □

A következő típusú körök fordulnak elő a Markov-gráfban:

**(K1)** $I_1 \to I_1$, ahol $l = 1$,

**(K2)** $I_0 \to I_{n-(l-1)} \to I_{n-(l-2)} \to ... \to I_{n-2} \to I_{n-1} \to I_0$, ahol $l$ páros és $l \leq n$,

**(K3)** $I_0 \to I_1 \to I_1 \to ... \to I_1 \to I_2 \to ... \to I_{n-1} \to I_0$, ahol $r > 1$ ismétlődése van $I_1$-nek és emiatt $l = n - 1 + r$.

**4.8. Állítás.** *Tegyük fel, hogy $\mathcal{O}$ $m$-körének létezik $n$-hosszú Štefan-sorozata. Ha $m \triangleright l$, akkor $f$-nek van $\mathcal{O}$-kényszerített elemi $l$-köre, amiből következik, hogy van legalább $l$-hosszú alapperiódusa.*

*Bizonyítás.* $m \triangleright l$ esetén három eset áll fenn.

- $l = 1$ esetén a $(K1)$ típusú kör 1-hosszúságú, így a kör biztosan elemi.
- Ha $l$ páros és $l \leq n$, akkor $(K2)$ típus alapján van $l$-hosszúságú kör.
- Ha $l \geq n$ és $l \neq m$ ($m$-hosszú kört már az eredti $m$ alapperiódusú pontok kiválasztásával kapunk), akkor $(K3)$ típusú kör található, ahol $r = l - n + 1$ az $I_1 \to I_1$ hurokél ismétlésszáma a körben.

Az $I_i$ intervallumok definiálásából következik, hogy $\mathrm{Int}(I_0) \cap I_j = \emptyset$, ha $1 \leq j < n$. Ha meg tudjuk mutatni, hogy a kört nem követi végig $I_0$ egyik végpontja sem, akkor a 3.11. Lemmából következik, hogy az intervallumok köre elemi. Nem tudjuk, pontosan mik $I_0$ végpontjai, ezért lássuk be azt, hogy semelyik $x \in \mathcal{O}$ pont sem követi végig az intervallumok $l$-hosszú körét. A $(K2)$ típusú körökre ez a kritérium teljesül, hiszen a hosszúsága $l \leq n < m$, és bármely $x \in \mathcal{O}$ pontnak az alapperiódusa $m$. A $(K3)$ típusú körökre pedig azért teljesül, mert vagy $l < m$ (erre is jó az előbbi érvelés), vagy ha $l > m$, akkor $r = l - n + 1 \geq m + 1 - n + 1 \geq 3$ ismétlődése van az $I_1$ intervallumnak a körben. Ha $m = 3$, akkor ezek a 3 alapperiódusú pontok nem mehetnek végig egy (a háromszori $I_1$-en kívül) különböző intervallumokból álló körön. Ha pedig $m \neq 3$, azaz nincsen 3 alapperiódusú pont $\mathcal{O}$-ban, akkor ellentmondásra jutunk, mert hurokéleken ismételten végigmenő pontok 3-szerint periódikusak. Mindezeket egybevéve, a 3.11. Lemma értelmében $f$-nek van $\mathcal{O}$-kényszerített elemi $l$-köre, azaz létezik $l$-szerint periodikus pontja is. □

## 4.2. Štefan-sorozatok konstruálása

Ha minden $m$-kör pontjaiból ki tudnánk választani egy Štefan-sorozatot, akkor a 4.8. Állításból következne Sarkovszkij tételének bizonyítása is. Ebben a fejezetben, [1] felépítését követve, azt fogjuk belátni, hogy a Štefan-sorozatok létezésének útjába csak az körülmény állhat, ha egy kör minden pontja oldalt vált.

**4.9. Állítás.** *Ha egy körnek legalább* 1 *pontja nem vált oldalt, akkor létezik a kör pontjaiból álló Štefan-sorozat.*

*Bizonyítás.* Legyen $\mathcal{O}$ egy $m$-kör, ahol $m \geq 2$. A 4.1. Definíció alapján ennek a körnek megadhatóak $p, q$ és $c$ pontjai. Definiáljunk egy $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}$ halmazt, ami álljon azokból az $x \in \mathcal{O}$ pontokból, amelyek oldalt váltanak (ezek biztosan nem lehetnek egy Štefan-sorozat befejező elemei, hiszen azok nem váltanak oldalt). Legyen $M$ az a leghosszabb $\mathcal{O}$-intervallum, ami tartalmazza $[p, q]$-t és minden $\mathcal{O}$-beli pontja oldalt vált. Ez alapján $\mathcal{O} \cap M$ az a halmaz, ami azokból az $x \in \mathcal{O}$ pontokból áll, melyekre $\mathcal{O}_x$ összes pontja oldalt vált. Tehát $\mathcal{S}$ azokból az $x \in \mathcal{O} \cap M$ pontokból áll, amelyeket $f$ az $\mathcal{O}_x$ bármely pontjánál távolabb visz $c$-től. Ezzel ekvivalensen $x \in \mathcal{O} \cap M$ benne van $\mathcal{S}$-ben, ha $\mathcal{O}_{f(\omega)} \subset \mathcal{O}_{f(x)}$ $\forall \omega \in \mathcal{O}_x$. Vegyük észre, hogy $p, q \in \mathcal{S}$.

Definiáljunk egy $\sigma : \mathcal{S} \to \mathcal{O}$ leképezést, ez a függvény fogja meghatározni, hogy mely pontokból fog állni a Štefan-sorozat, és azok a pontok milyen sorrendben követik majd egymást. Tegyük fel, hogy $\sigma(x) \in \mathcal{O}_{f(x)}$, mivel $x \in M$ biztosítja, hogy $x$ és $\sigma(x)$ a $c$ különböző oldalán helyezkednek el.

**(1)** Ha $f(x) \notin M$, azaz az $x$ következő iteráltja már nem esik bele a leghosszabb oldaltváltó intervallumba, akkor $\sigma(x)$-nek választhatjuk $\mathcal{O}_{f(x)}$ bármely pontját, ami nem vált oldalt, ez esetben $\sigma(x) \notin \mathcal{S}$ (azaz sorozatbefejező pont).

**(2)** Ha $f(x) \in M$, akkor $\sigma(x)$ legyen az a pont $\mathcal{O}_{f(x)}$-ből, amit $f$ a $c$-től lehető legtávolabbra képez, ekkor $f(\mathcal{O}_{f(x)}) \subset \mathcal{O}_{f(\sigma(x))}$. Ez esetben $\sigma(x) \in \mathcal{S}$, hiszen $\sigma(x) \in [c, f(x)] \subset M$, amely $M$ halmaznak minden eleme oldalt vált.

Megjegyezzük, hogy $x$ és $\sigma(x)$ ellenkező oldalon vannak, azaz $\sigma^2(x)$ a (2)-es esetben azonos oldalra kerül mint $x$.

**4.10. Lemma.** *Ha létezik olyan $x \in \mathcal{S}$, amire $\sigma^2(x) \in \mathcal{O}_x$, akkor $\mathcal{O}$ minden pontja oldalt vált.*

*Bizonyítás.* Legyen $x, y := \sigma(x), z := \sigma(y) = \sigma^2(x)$ mind eleme $\mathcal{S}$-nek, így $\sigma^2(x)$ létezik és benne van $\mathcal{O}_x$-ben.
A fenti (2) megállapítás is igaz lesz $\sigma(x)$-re és $\sigma^2(x)$-re, mivel

$$f(\mathcal{O}_{f(x)}) \subset \mathcal{O}_{f(\sigma(x))} = \mathcal{O}_{f(y)} \text{ és}$$

$$f(\mathcal{O}_{f(y)}) \subset \mathcal{O}_{f(\sigma(y))} = \mathcal{O}_{f(z)}.$$

Mivel $z = \sigma^2(x) \in \mathcal{O}_x$ és $x \in \mathcal{S}$, ezért

$$\mathcal{O}_{f(z)} \subset \mathcal{O}_{f(x)}.$$

A fenti tartalmazásból következik, hogy $\mathcal{O}_{f(x)} \cup \mathcal{O}_{f(y)}$ $f$ által önmagára képződik le. Feltevésünk szerint $f$ ciklikusan permutálja $\mathcal{O}$ pontjait, az egyetlen nem üres $f$-invariáns részhalmaza $\mathcal{O}$-nak, így maga $\mathcal{O}$. Ezért $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{f(x)} \cup \mathcal{O}_{f(y)}$, de mivel $x$ és $y \in \mathcal{S}$, ezért minden pont oldalt vált. $\square$

A bizonyítás befejezéséhez feltesszük, hogy $\mathcal{O}$-nak van olyan pontja, ami nem vált oldalt és ebből már következni fog egy Štefan-sorozat létezése. Használjuk ehhez az előző lemma tagadását. Ebből következik hogy nem teljesülhet egyszerre, hogy $\sigma(p) = q$ és $\sigma(q) = p$. Válasszuk ezért $\{x_0, x_1\}$-nek a $\{p, q\}$ pontokat úgy, hogy $x_2 := \sigma(x_1) \neq x_0$ és $x_{i+1} := \sigma(x_i)$. Így megmutathatjuk a Štefan-sorozat tulajdonságait, lássuk be ezeket most tételesen.

(S1) igaz, hiszen $\{x_0, x_1\} = \{p, q\}$-nak választottuk.

(S2) belátásához vegyük észre, hogy az egymást követő pontok a $c$ különböző oldalain vannak, hiszen $c$ az $x$ és a $\sigma(x)$ közé esik. Már csak azt kell belátnunk, hogy az egymást követő pontok monoton távolodnak $c$-től. $x_0, x_1$ választásunk biztosítja, hogy $x_2 \notin \mathcal{O}_{x_0}$. Ezek után a 4.10. Lemmából tudjuk, hogy $x_{i+2} = \sigma^2(x_i) \notin \mathcal{O}_{x_i}$, azaz $x_{i+2}$ távolabb van $c$-től, mint $x_i$. Vegyük észre, hogy a sorozat igazából két diszjunkt sorozatból áll. Mivel a sorozat elemei egy $n$ elemű véges halmazból kerülnek ki, ezért a sorozatnak van utolsó eleme. Ez az utolsó elem legyen $x_n$, ami $\sigma$ definiálásából adódóan nem vált oldalt (ez biztosítja az (S4) tulajdonságot).

(S3)-hoz elég észrevennünk, hogy $\forall j < n$-re $x_j \in \mathcal{S} \subset M$, ami miatt tudjuk, hogy $x_j$ oldalt vált, és mivel $x_{j+1} = \sigma(x_j)$, $\sigma(x_j)$-t pedig úgy definiáltuk, hogy $\sigma(x_j) \in \mathcal{O}_{f(x_j)}$, így $x_{j+1} \in \mathcal{O}_{f(x_j)}$. □

A 4.8. Állításból és a 4.9. Állításból következik a Sarkovszkij-tétel egyik alapesetével ekvivalens állítás.

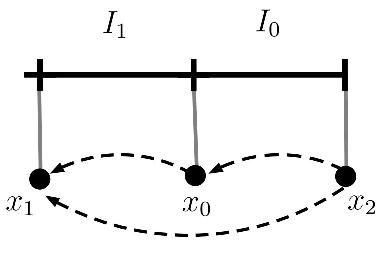
**4.11. Állítás.** *Ha $\mathcal{O}$ egy $m$-kör, $m \geq 2$, tartalmaz olyan $x \in \mathcal{O}$ pontot, ami nem vált oldalt, akkor $\forall l \lhd m$ esetén létezik elemi $\mathcal{O}$-kényszerített $l$-kör, ami $\mathcal{O}$-intervallumokból áll, amiből következik, hogy $\mathcal{O}$ egy $l$-kör is.*

# 5. Példák

Ebben a fejezetben két példán szemléltetjük a köröket az intervallumleképezéseken. Továbbá két konkrét esetben belátjuk a Sarkovszkij-tétel állítását is. Az itt szereplő példákon túl további két eset található [1]-ben.

## 5.1. A 3-kör

Ha $\mathcal{O}$ egy 3-kör, akkor az $\mathcal{O} = \{x_0, x_1, x_2\}$ pálya pontjaira a következő összefüggések teljesülnek: $f(x_0) = x_1, f(x_1) = x_2, f(x_2) = x_0$, ebből értelemszerűen $f^3(x_0) = x_0$. Azt, hogy az $f$ függvény melyik pontot melyik pontba viszi, az alábbi ábrán szemléltetjük.




7. ábra. A 3-kör.

Az ábrán kettő $\mathcal{O}$-intervallumot látunk, $I_0$-t és $I_1$-et. Az $I_0$ intervallum végpontjai, ahogyan azt a Štefan-sorok konstruálásánál is láttuk, az $x_2$ és az $x_0$ pontok, az

$I_1$ intervallum végpontjai pedig az $x_0$, $x_1$ pontok. A leképezés $I_1$ végpontjait a legszélére, az $x_1$, $x_2$ pontokba viszik, ebből következik, hogy az $I_1 \to I_1$ és az $I_1 \to I_0$ is $\mathcal{O}$-kényszerített fedési reláció, hiszen $I_1 \subset f(I_1)$ és $I_0 \subset f(I_1)$. Mivel $I_0$ végpontjai $I_1$ végpontjaiba mentek, $I_1 \subset f(I_0)$, ezért az $I_0 \to I_1$ fedési reláció is fennáll. Abból a tényből, hogy $I_1 \to I_1$ és a 3.3. Lemmából következik, hogy $I_1$-nek van $f$ szerint vett fixpontja.

$I_1$ végpontjai nem követhetik az $I_1 \to I_0 \to I_1$ kört, hiszen e pontok alapperiódusa 3, és egy pontnak, ami az előbbi kört követi az alapperiódusa 1 vagy 2. Mivel az $I_0$ intervallum végpontjai nem követik a kört, $I_0$ és $I_1$ diszjunktak, ezért a 3.11. Lemma értelmében kell lennie az $I_1 \to I_0 \to I_1$ 2-kört végigkövető 2 periódusú pontnak.

Az orbitnak és emiatt $I_0$ egyik végpontjának sincsen három egymást követő iteráltja, ami az $I_1$ intervallumba esne. A 3.11. Lemma értelmében így a következő kör elemi:

$$I_0 \to I_1 \to I_1 \to I_1 \to ... \to I_1 \to I_1 \to I_0.$$

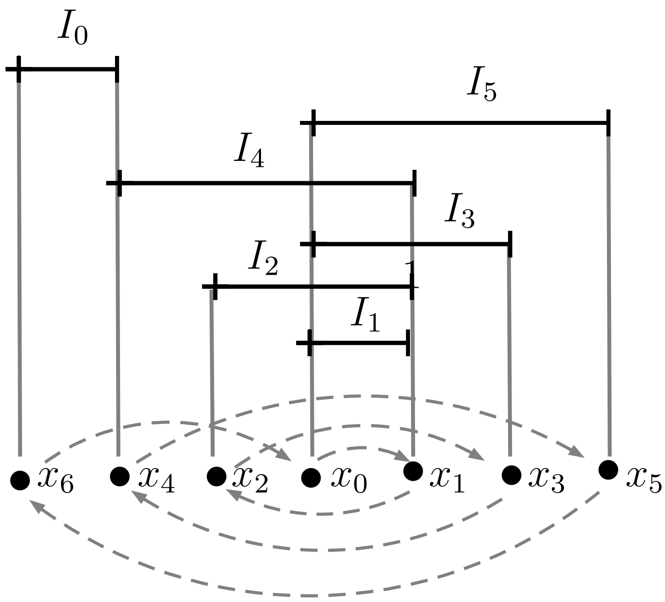
Amennyiben az $I_1 \to I_1$ hurokélt $l-1$-szer ismételtük, akkor $l > 3$ esetén $f$-nek minden $l$-re létezik $l$-szerint periodikus pontja.

Ez nem jelent mást, mint amit a Sarkovszkij-tétel kimond, ha egy intervallum leképezésnek létezik 3-szerint periodikus pontja, akkor $\forall n \in \mathbb{N}$-re is létezik $n$-szerint periodikus pontja.

## 5.2. A 7-kör

Legyen a 7-körünk olyan, mint amilyet az alábbi ábrán szemléltetünk. Az előző példához hasonlóan $x_i$ a Štefan-sorozat $i$-edik eleme.

Legyen megint $I_1 = [x_0, x_1]$, és a többi $I_i$ $\mathcal{O}$-intervallum pedig az ábra szerinti.




8. ábra. A 7-kör.

Az így kapott $\mathcal{O}$-kényszerített fedési relációkat a következő Markov-gráffal szemléltetjük.

$$\begin{tikzcd}
 & I_1 \arrow[loop above] \arrow[r] & I_2 \arrow[dr] & \\
I_0 \arrow[ur] \arrow[rrr] \arrow[dr, leftrightarrow] & & & I_3 \arrow[dl] \\
 & I_5 & I_4 \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

9. ábra. A 7-kör Markov-gráfja.

Ebben a gráfban a következő körök találhatóak:

- $I_1 \to I_1$ (1-hosszú kör),
- $I_0 \to I_5 \to I_0$ (2-hosszú kör),
- $I_0 \to I_3 \to I_4 \to I_5 \to I_0$ (4-hosszú kör),
- $I_0 \to I_1 \to I_2 \to I_3 \to I_4 \to I_5 \to I_0$ (6-hosszú kör),

- $I_0 \to I_1 \to I_1 \to ... \to I_1 \to I_2 \to I_3 \to I_4 \to I_5 \to I_0$ (3 vagy több $I_1 \to I_1$ ismétlés esetén az összes 7 vagy annál hosszabb kör előáll).

Ha az összes fent jelölt típusú körről belátjuk, hogy elemiek, akkor belátjuk, hogy léteznek $1, 2, 4, 6, 7, 8, 9,...$ szerint periodikus pontok is.

Az $I_1 \to I_1$ kör biztosan elemi, hiszen 1-hosszú.

A többi kör is elemi lesz, mivel teljesülnek rájuk a 3.11. Lemma feltételei; $\mathrm{Int}(I_0) \cap I_j = \emptyset$, ha $1 \leq j \leq 5$ és $I_0$ egyik végpontja sem követi végig a kört. Ez a 3-kör esetéhez hasonló érvelés miatt teljesül, mivel az $x_6, x_4$ pontoknak 7 az alapperiódusa.

Az 5 különböző alaptípusú körre a gráfban mind beláttuk, hogy elemiek és rendre $1, 2, 4, 6, 7$-hosszúak vagy 7-nél is hosszabbak, azaz léteznek $l$-szerint periodikus pontok $\forall l \triangleleft 7$-re.

# 6. A Sarkovszkij-tétel bizonyítása

A 4.11. Állítás tárgyalja a Sarkovszkij-tétel azon esetét, amikor van olyan pont, ami nem vált oldalt. A teljes bizonyításhoz be kell lássuk azt az esetet is, amikor $\mathcal{O}$ minden pontja oldalt vált, ezt [1] és [2] felépítését követve tesszük.

Azokban a körökben, ahol minden pont oldalt vált, tulajdonképpen az egész kör két darab diszjunkt kör uniójából áll, amik fele olyan hosszú körök $f^2$-re nézve.

**6.1. Állítás.** *Egy $m$-körnek $\forall l \lhd m$ esetén van $\mathcal{O}$-kényszerített elemi $l$-köre is, ami $\mathcal{O}$-intervallumokból áll.*

*Bizonyítás.* Az állítást $m$-re vett teljes indukcióval látjuk be.

$m = 1$-re igaz, mert nem létezik $l \lhd 1$.

Tegyük fel hogy minden $m$-nél kisebb egész számra igaz már az állítás. Legyen $\mathcal{O}$ egy $m$-kör, ha van pontja, ami nem vált oldalt, akkor a 4.4. állításból következik, hogy létezik $l$-köre. Ha minden pont oldalt vált, akkor legyen $L := \min \mathcal{O}$ és $R := \max \mathcal{O}$. Ekkor a 4.1. definíció alapján $\mathcal{O}_L$ azokból az $\mathcal{O}$-beli pontokból áll, amik $c$-től balra helyezkednek el, $\mathcal{O}_R$ pedig a $c$-től jobbra eső pontokat tartalmazza. Mivel $f$ megcseréli ezeket a halmazokat, azaz $\mathcal{O}_R$-t $\mathcal{O}_L$-be viszi és viszont, ezért $f$ egy bijekció $\mathcal{O}_R \leftrightarrows \mathcal{O}_L$ között, amiből következik, hogy elemszámuk egyenlő és így $m$ páros.

Mivel $m$ páros, ezért a dolgozat elején bemutatott duplázódási tulajdonságból következik, hogy $l \lhd m$ akkor és csak akkor, ha $l = 1$ vagy $l = 2k$, ahol $k \lhd \frac{m}{2}$. Ezért azt kell megmutatnunk, hogy $f$-nek kell lennie elemi 1-körének, továbbá elemi $\mathcal{O}$-kényszerített $2k$-körének is minden $k \lhd \frac{m}{2}$ esetén.

Az elemi 1-körhöz vegyük a középső $[p, q]$ intervallumot, mivel $p = \max \mathcal{O}_L$ és $q = \min \mathcal{O}_R$.

A $2k$-hosszú kör megtalálásához használjuk ki az indukciós feltevésünket és azt a korábbi megállapításunkat, hogy $\mathcal{O}_L$ és $\mathcal{O}_R$ $\frac{m}{2}$-hosszú körök $f^2$-re nézve. Alkalmazzuk $\mathcal{O}_R$-re az indukciós feltevésünket (megtehetjük hiszen $\frac{m}{2} < m$), ebben az esetben $f^2$-re néve létezik $\mathcal{O}_R$-kényszerített $k$-köre az $\mathcal{O}_R$ intervallumoknak minden $k \lhd \frac{m}{2}$ esetén. Akkor leszünk készen az indukcióval, ha meg tudjuk mutatni, hogy $f$-re nézve ezek $2k$-hosszú körök.

Ehhez vegyük a következő elemi $k$-kört:

$$(*)\ I_0 \xrightarrow{f^2} I_1 \xrightarrow{f^2} I_2 \xrightarrow{f^2} \dots \xrightarrow{f^2} I_{k-1} \xrightarrow{f^2} I_0.$$

Legyen $I_i'$ a legrövidebb zárt intervallum ami tartalmazza $f(I_i \cap \mathcal{O}) \subset \mathcal{O}_L$-t. Ezzel értelemszerűen az $I_i'$-k $\mathcal{O}$-intervallumok és a definiálásukból adódóan fenáll köztük az $I_i \xrightarrow{f} I'_i$ $\mathcal{O}$-kényszerített $f$-fedési reláció minden $0 \leq i < k$-ra. Írjunk minden $I_j \xrightarrow{f^2} I_{j+1}$ helyébe $I_j \xrightarrow{f} I'_j \xrightarrow{f} I_{j+1}$-et, és lássuk be hogy az így kapott "lánc" egy elemi $\mathcal{O}$-kényszerített $2k$-kör $f$-re nézve. Szemléletesen:

$$(**)\ I_0 \xrightarrow{f} I'_0 \xrightarrow{f} I_1 \xrightarrow{f} I'_1 \xrightarrow{f} I_2 \xrightarrow{f} I'_2 \xrightarrow{f} \dots \xrightarrow{f} I_{k-2} \xrightarrow{f} I'_{k-2} \xrightarrow{f} I_{k-1} \xrightarrow{f} I'_{k-1} \xrightarrow{f} I_0.$$

Ahhoz hogy belássuk, hogy ez egy $\mathcal{O}$-kényszerített kör, először meg kell mutatnunk hogy az $I'_i \xrightarrow{f} I_{i+1}$, $f$-fedések $\mathcal{O}$-kényszerítettek. Mivel $I_i \xrightarrow{f^2} I_{i+1}$ egy $\mathcal{O}_R$-kényszerített fedési reláció, ezért léteznek $a_i, b_i \in I_i \cap \mathcal{O}_R$ pontok, amikre az $f^2(a_i)$ és $f^2(b_i)$ által határolt zárt intervallum tartalmazza $I_{i+1}$-et. Ekkor $a'_i := f(a_i)$ és $b'_i := f(b_i)$, amik $I'_i \cap \mathcal{O}$-ban vannak és az $f(a'_i) = f^2(a_i)$, illetve $f(b'_i) = f^2(b_i)$ végpontú intervallum tartalmazza $I_{i+1}$-et. Tehát az $f$ leképezés az $a'_i, b'_i \in I'_i \cap \mathcal{O}$ pontokat rendre az $f^2(a_i)$, $f^2(b_i)$ pontokba viszi, amelyek által határolt intervallum tartalmazza $I_{i+1}$-et, azaz a $I_{i+1} \subset f(I'_i)$ tartalmazás fennáll, így $I'_i \xrightarrow{f} I_{i+1}$ is $\mathcal{O}$-kényszerített.

Végül belátjuk, hogy a $(**)$ jelű kör elemi. Tegyük fel, hogy $x$ egy periodikus pont, ami végigmegy a $(**)$ körön. Ekkor ez periodikus pontja $f^2$-nek is, ami végigmegy az elemi $(*)$ körön és $f^2$-re nézve $k$-hosszú alapperiódusa van, $f^{2k}(x) = x$. Ezért $k$ db pontja az $f$ pályájának $\mathcal{O}_R$-ben található.

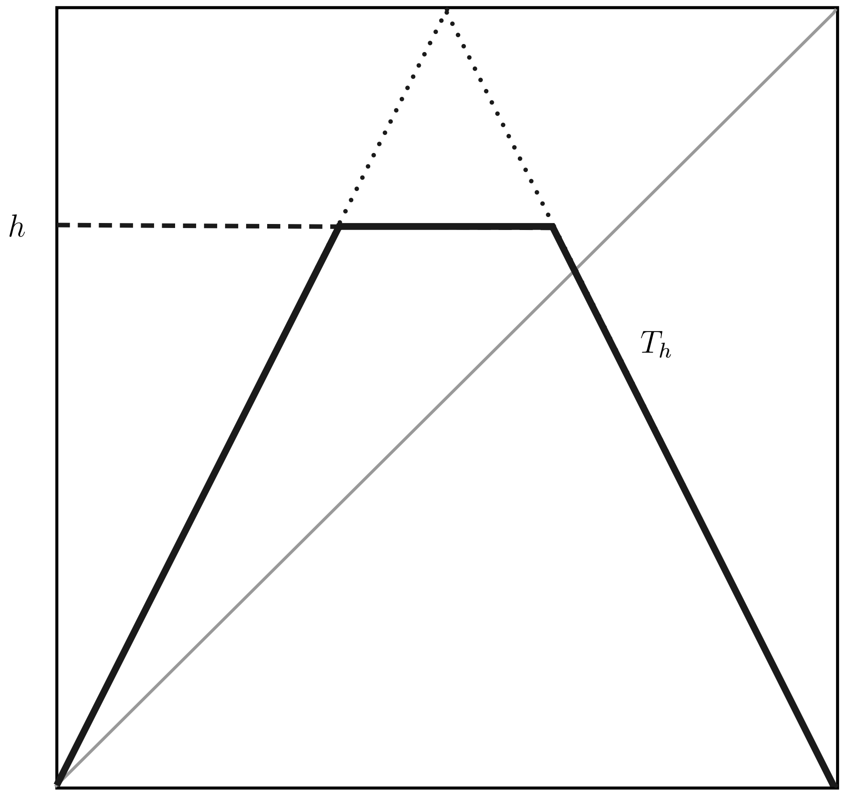
Mivel $(**)$ intervallumai alternálnak a jobb és bal oldalak között, ezért $x$ iteráltjai is felváltva esnek $c$-től jobbra vagy balra. Így a másik $k$ db iterált $\mathcal{O}_L$-ben található és $f$ teljes pályája összesen $2k$-hosszú. Ebből következik, hogy $x$-nek van $2k$ hosszú periódusa $f$-re nézve és a $(**)$ kör ezáltal elemi.

□

# 7. Sarkovszkij másik tétele

Mutatunk [1] alapján egy szép bizonyításvázlatot a 2.3. Tételre, ami azt mondja ki, hogy a Sarkovszkij-rendezés minden végszelete valójában egy önmagára képező folytonos leképezés periódusainak halmaza. Ilyen leképezések a következőkben definiált $h$-paraméterű csonka sátorfüggvények.

Legyen $h \in [0,1]$, $T_h : [0,1] \to [0,1]$ pedig olyan csonka sátorfüggvény, amire $T_h(x) = \min(h, 1 - 2 \cdot |x - \frac{1}{2}|)$.




10. ábra. Csonka sátorfüggvény.

A következő általános megállapításokat tehetjük erről a függvénycsaládról:

(a) $T_1$-nek kettő darab fixpontja van, a 0 és a $\frac{2}{3}$ pontok. De $T_1$-nek van egy 3-köre is $\{\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}\}$, amiből már tudjuk a 2.2. Tétel miatt, hogy minden más természetes számra is létezik periódusa.

(b) $T_h$ minden $\mathcal{O} \subset [0,h)$ köre egy kör $T_1$-ben is, és $T_1$ minden $\mathcal{O} \subset [0,h)$ köre $T_h$-nak is köre.

Kiemelendő, hogy $h$ három szerepet is betölt a bizonyításban; egyrészt $h$ a paraméter, másrészt $h$ a $T_h$ függvény maximuma, harmadrészt pedig egy pálya egy pontja. A bizonyítás kulcsa, hogy definiáljunk egy függvényt, $h(m) := \min\{\max \mathcal{O} : \mathcal{O}$ egy $m$-köre $T_1$-nek$\}$, minden $m \in \mathbb{N}$ esetén. Írhatunk min-t inf helyett, mert $T_1$-nek $\forall m$-re véges sok $m$-szerint periodikus pontja van ($T_1^k$ grafikonjának $2^k$ fixpontja van). Adott $m$-re ugyanaz a pont se nem szerepelhet különböző $m$-körökben, se nem fordulhat elő más $m'$-kör maximumaként, így $h(m)$ injektív leképezés. Ezzel a függvénnyel és a $(b)$ állítással a következő megállapítások tehetőek.

(c) $T_h$-nak akkor és csak akkor van $\mathcal{O} \subset [0, h)$ $l$-köre, ha $h(l) < h$.

(d) $h(m)$ pályája $T_{h(m)}$-nek egy $m$-köre, és minden más köre $T_{h(m)}$-nek a $[0, h(m))$ intervallumban fekszik.

A $(d)$ megállapításból és a 2.2. Tételből következik, hogy ha $l \lhd m$, akkor $T_{h(m)}$-nek van egy $l$-köre, ami a $[0, h(m))$ intervallumba esik, $(c)$-ből pedig következik, hogy $h(l) < h(m)$. Mivel az implikáció visszafelé is igaz, ezért

(e) $h(l) < h(m)$ akkor és csak akkor, ha $l \lhd m$.

A $(c)$, $(d)$, illetve $(e)$ állításokat összevetve láthatjuk, hogy bármely $m \in \mathbb{N}$-re $T_{h(m)}$ periodikus pontjainak halmaza egy $\mathcal{F}_m$ (ahol $m \neq 2^k$) típusú végszelete a Sarkovszkij-rendezésnek. Az üres halmaz mint végszelet előáll például az $f(x) = x+1$ függvény periodikus pontjaiként.

Már csak a kettőhatványokból álló, $\mathcal{F}_{2^k}$ típusú végszeletekhez kell leképezést találjunk. Ehhez legyen $h(2^\infty) := \sup_k h(2^k)$, így $h(2^\infty) > h(2^k)$ minden $k \in \mathbb{N}$-re, az $(e)$ megállapítás miatt. A $(c)$ miatt pedig $T_{h(2^\infty)}$-nek van $2^k$-köre.

Tegyük fel, hogy $T_{h(2^\infty)}$-nek létezik $m$-köre, ahol $m$ nem kettőhatvány, ekkor 2.2. Tétel szerint kell hogy legyen egy $2m$-köre is. De mivel az $m$- és $2m$-körök diszjunktak egymástól, legalább az egyiknek bele kell esnie a $[0, h(2^\infty))$ intervallumba, és $(c)$ illetve $(e)$ állítás szerint valamely $k \in \mathbb{N}$ értékre a $[0, h(2^k))$ intervallumba is.

# 8. Konkrét példafüggvények

Láttuk, hogy a Sarkovszkij-tétel megfordítása is igaz, azaz ha egy $\mathcal{F}_m \subset \mathbb{N}$ halmaz végszelete a Sarkovszkij-rendezésnek, akkor létezik olyan $f : I \to I$ intervallumot önmagára képező leképezés, aminek periodikus pontjai pontosan $p \in \mathcal{F}_m$ szerint periodikusak.

Ilyen függvényeknek csak a létezését láttuk be, ezért a következő fejezetben azt tűzzük ki célul, hogy konkrét függvényeket mutassunk, amiknek ha van $p$-periódusuk, akkor $s \rhd p$ esetén ne legyen $s$-szerint vett periodikus pontjuk (Sarkovszkij tételéből tudjuk, hogy $p \triangleright l$ esetén $l$-szerint vett periodikus pontja biztosan létezik). [3]-ban szerepelnek a megfelelő függvények konstrukciói, ezeket egészítettem ki több, szemléletes ábrával.

**8.1. Tétel.** *Minden $p$ pozitív egész szám esetén létezik $f_p : I_p \to I_p$ folytonos leképezés $I_p$-ről önmagára, aminek van $p$ alapperiódusú pontja, de $s \triangleright \ldots \triangleright p$ esetén nincsen $s$ alapperiódusú pontja (ahol $s$ tetszőleges $p$-nél Sarkovszkij-nagyobb szám).*

*Bizonyítás.* A bizonyítás egy konstruktív bizonyítás lesz, amelyben (már a 2.1. Tétel bizonyításában bevezetett) három csoportra mutatunk megfelelő függvényeket. A három csoportunk:

(A) páratlan periódusok,

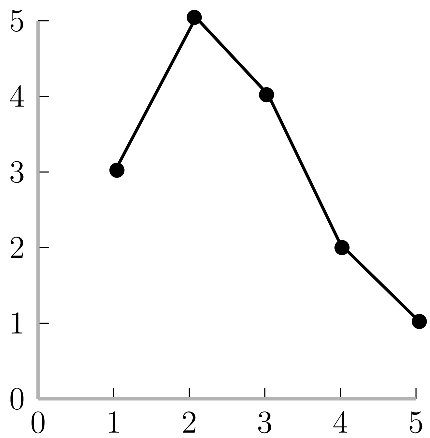
(B) $2^k\cdot$ páratlan periódusok,

(C) $2^m$, azaz a kettőhatvány szerinti periódusok.

## 8.1. (A) eset: páratlan periódusok

### 8.1.1. Példa

Olyan $f_5$ leképezést szeretnénk készíteni, aminek van 5-szerint periodikus pontja, de nincs 3-szerinti. Legyen ekkor $f_5 : [1, 5] \to [1, 5]$ és vegye fel a következő értékeket a következő helyeken: $f_5(1) = 3$, $f_5(2) = 5$, $f_5(3) = 4$, $f_5(4) = 2$, $f_5(5) = 1$, továbbá minden $[n, n + 1]$ intervallumon legyen $f_5$ lineáris. A következő ábra szemlélteti ezt a függvényt.




11. ábra. Az $f_5$ függvény grafikonja.

Első észrevételünk, hogy az $1, 2, 3, 4, 5$ pontok egyikének sincsen 3-hosszú periódusa, hiszen mindegyik pont egy 5-hosszú körön van.

Az ügyes konstrukcióból következik, hogy

$$f_5^3([1,2]) = [2,5],\ f_5^3([2,3]) = [3,5] \text{ és } f_5^3([4,5]) = [1,4],$$

ami azt jelenti, hogy $f_5^3$-nak nincsen fixpontja az $[1,2], [2,3]$ és $[4,5]$ intervallumokon. De ezekkel még nem fedtük le a teljes $[1,5]$ intervallumot, kimaradt a [3,4] intervallum, nem véletlenül. Mivel $f_5^3([3,4]) = [1,5]$, ezért van két olyan pont: $a, b \in [3,4]$, amire teljesül, hogy $f_5^3(a) = 3$ és $f_5^3(b) = 4$.

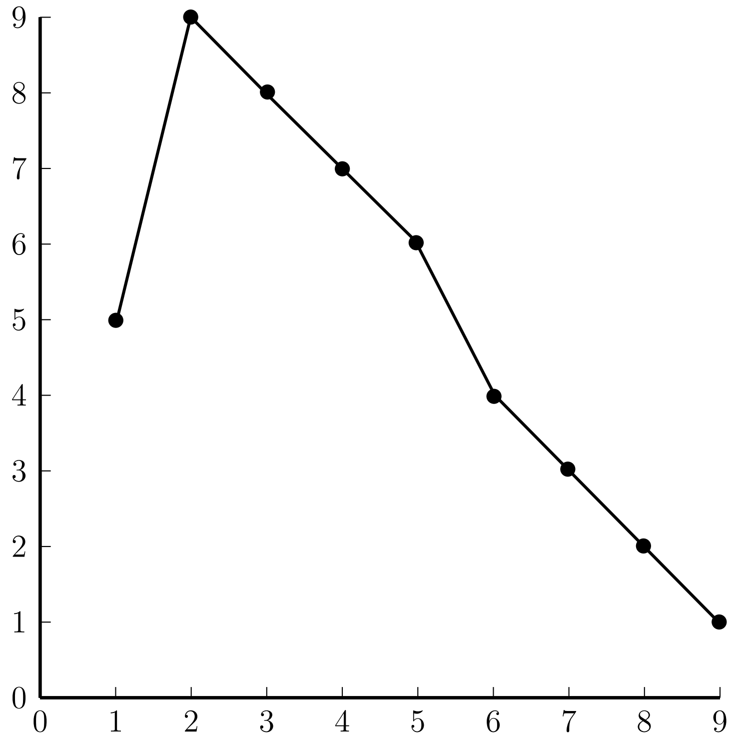
Definiáljuk a következő leképzést, $h : [1,5] \to \mathbb{R}$, ahol $h(x) = x - f_5^3(x)$. Ekkor $h(a) \geq 0$ és $h(b) \leq 0$, továbbá a Bolzano—Weierstrass-tétel szerint kell lennie egy $p \in [3,4]$ pontnak, amire $h(p) = 0$ vagyis $f_5^3(p) = p$.

Megmutatjuk, hogy $p$ csak az $f$ egyetlen fixpontja lehet. Mivel $p \in [3,4]$, ezért $f_5(p) \in [2,4]$. Ha $f_5(p) \in [2,3]$, akkor $f_5^2(p) \in [4,5]$, de akkor $p = f_5^3(p) \in [1,2]$, ami nem igaz, tehát $f_5(p) \in [3,4]$. Ebből következik, hogy $f_5^2(p) \in [2,4]$, de megint csak, ha $f_5^2(p) \in [2,3]$ lenne, akkor $p = f_5^3(p) \in [4,5]$, ami ismét ellentmondásra vezet. Mindezeket egybevéve $p, f_5(p)$ és $f_5^2(p)$ mind a $[3,4]$ intervallumba esnek. A $[3,4]$ intervallumban az $f_5(x) = 10 - 2x$ függvénynek egyetlen fixpontja van, az $x^* = \frac{10}{3}$, továbbá $f_5^3(x) = 30 - 8x$-nek is $x^* = \frac{10}{3}$ az egyetlen fixpontja. Így $p = x^* = \frac{10}{3}$, amiből következik, hogy $f_5$-nek nincs 3-szerint periodikus pontja, mivel $p$ hiába fixpontja a harmadik iteráltnak (ami a 3-szerint periodikussággal lenne ekvivalens), ha $f_5$-nek fixpontja lévén az alapperiódusa 1.

### 8.1.2. Általános eset

Az előző példa után általánosíthatjuk a fenti konstrukciót, amivel olyan függvényeket állíthatunk elő, melyeknek van $2n+1$-szerint, de nincsen $2n-1$-szerint vett periodikus pontjuk.

Legyen ez a leképezés a következőképpen definiálva, $f : [1, 2n+1] \to [1, 2n+1]$ és az adott hozzárendelt értékek a következők: $f(1) = n+1$, $f(2) = 2n+1$, $f(3) = 2n$, $f(4) = 2n-1$, ..., $f(n) = n+3$, $f(n+1) = n+2$, $f(n+2) = n$, $f(n+3) = n-1$, ..., $f(2n) = 2$, $f(2n+1) = 1$.




12. ábra. Az $f_{2n+1}$ függvény grafikonja $n = 4$ esetén.

Kettő helyen történik váratlan dolog a függvénnyel, egyrészt $f(2)$-ben veszi fel a maximumát, másrészt $f(n+1)$-ről $f(n+2)$-re nem az előtte és utána megszokott $-1$-es meredekséggel, hanem $-2$-vel lép le.

Az első megállapításunk, hogy az értelmezési tartomány minden egész pontjának a periódusa $2n+1$. Ehhez tekintsük az 1 pont pályáját.

$$1 \xrightarrow{f} n+1 \xrightarrow{f} n \xrightarrow{f} n \xrightarrow{f} n+2 \xrightarrow{f} n-1 \xrightarrow{f} n+3 \xrightarrow{f} n-2 \xrightarrow{f} ... \xrightarrow{f} 2n \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{f} 2n+1$$

Ennek a körnek az 1-en kívül kettő darab $n$-hosszú monoton részsorozata van, egy növő $(n+2, n+3, n+4, ..., 2n+1)$ és egy csökkenő $(n+1, n, n-1, n-2, ..., 2, 1)$, ezek biztosítják, hogy az összesen $2n+1$-hosszú körben valóban legyen $2n+1$-hosszú alapperiódusa $f$-nek az egész számokra nézve.

Már csak azt kell megmutatnunk, hogy nincsen $2n-1$ alapperiódusú pont az $[1, 2n+1]$ intervallumban.

Kezdjük az $[1, 2]$ intervallum vizsgálatával, amit ha $2n-1$-szer iterálunk, a következő láncot kapjuk:

$$[1,2] \xrightarrow{f} [n+1, 2n+1] \xrightarrow{f} [1, n+2] \xrightarrow{f} [n, 2n+1] \xrightarrow{f}$$

$$\xrightarrow{f} [1, n+3] \xrightarrow{f} [n-1, 2n+1] \xrightarrow{f} ... \xrightarrow{f} [1, 2n] \xrightarrow{f} [2, 2n+1].$$

Ezt megvizsgálva, láthatjuk, hogy $[1,2) \cap f^{2n-1}([1,2]) = \emptyset$, azaz az $[1, 2]$ intervallum nem tartalmaz fixpontot $f^{2n-1}$-re nézve, így nincsen $2n-1$-szerint periodikus pont az $[1, 2]$ intervallumon belül. Ezek után megmutatjuk, hogy az $[n+1, n+2]$ intervallumon kívül az összes többi szomszédos, egész pont közötti $[j, j+1]$ intervallum hasonlóan viselkedik.

Minden esetben megmutatható, hogy a $[j, j+1]$ intervallumok iteráltjai közt felbukkan az $[1, 2]$ intervallum, amiről az előbb láttuk be, hogy nincs $2n-1$-szerint periódusa, így a $[j, j+1]$ pontjainak sem lehet $2n+1$-szerint periódusa.

Ami kimaradt, az az $[n+1, n+2]$ intervallum. Vegyük észre, hogy $f([n+1, n+2]) = [n, n+2]$. Ezt felhasználva tekintsük $x \in [n+1, n+2]$ esetén a következő két esetet:

1. eset: $f^k(x) \in [n+1, n+2]$ minden $k \in \mathbb{Z}^+$-re. Ekkor, mivel $|f'| > 1$ az $[n+1, n+2]$ intervallumon, $x$ fixpontja $f$-nek.

2. eset: $f^k(x) \notin [n+1, n+2]$ valamely $k \in \mathbb{Z}^+$-re, akkor $f^k(x) \in [n, n+1]$, és ez visszavezet a korábbi megfigyelésünkre, miszerint ebben az esetben $f^l \in [1, 2]$ valamelyik $l > k$-edik iteráltra.

Mind a két eset konklúziója az, hogy az $[n+1, n+2]$ intervallumban nem található $2n-1$ alapperiódusú pont, így az egész $[1, 2n+1]$ intervallumban nincsen $2n-1$-szerint periodikus pont.

## 8.2. (B) eset: $2^k \cdot$ páratlan periódusok

Keressünk olyan függvényeket, amelyeknek van $2^k \cdot (2n+1)$-szerint periodikus pontja, de nincsen $2^k \cdot (2n-1)$-szerint, bármely $k \in \mathbb{N}$-re.

**8.2. Lemma.** *$f(x) = mx+b$ típusú lineáris függvénynek, ahol $m \neq \{-1, +1\}$, egyetlen fixpontja van $\mathbb{R}$-en, az $x^* = \frac{b}{1-m}$. Továbbá az $x^*$ pontot tartalmazó intervallumok bármelyikén értelmezve, $x^*$ fixpontja $\forall i$-re az $f^i(x)$ iteráltfüggvénynek is.*

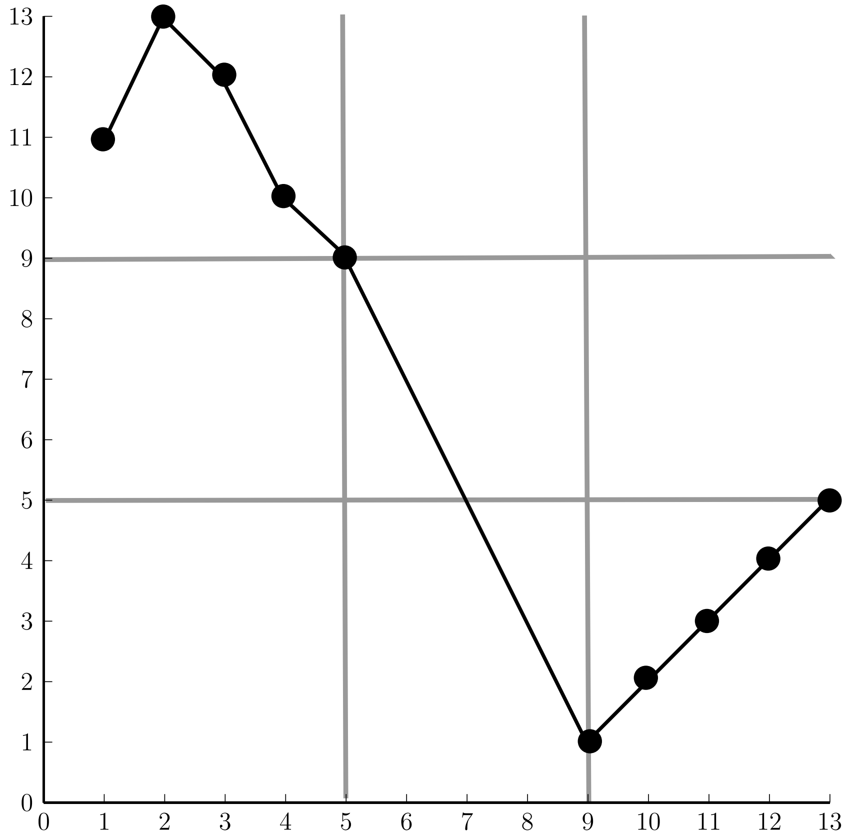
*Bizonyítás.* A bizonyítás triviális. □

### 8.2.1. Példa

Az előző eset példájához hasonlóan keressünk $2 \cdot 5$-szerint periodikus leképzést, amiben nincsen $2 \cdot 3$-szerint periodikus pont. Legyen $f_5 : [1,5] \to [1,5]$ az előző példában használt függvény és ezt bővítsük a következőképpen:

$$g_5(x) = \begin{cases} f_5(x) + 8 & \text{, ha } x \in [1,5] \\ x - 8 & \text{, ha } x \in [9,13]. \end{cases}$$

Az $[5,9]$ intervallumon pedig legyen lineáris, úgy hogy $g_5(x)$ a teljes értelmezési tartományon folytonos legyen (kössük össze a végpontjait egy egyenessel).




13. ábra. A $g_5(x)$ függvény, $f_5(x)$ "duplája".

Nevezzük a $g_5$ függvényt $f_5$ ”duplájának”. Első megfigyelésünk, hogy az $1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11, 12, 13$ pontok egyike sem 6-periódusú, mindegyik egy 10-hosszú körön helyezkedik el, tehát ezeknek a pontoknak az alapperiódusa 10. Ezenfelül, ha $x \in [1, 5]$, akkor $g(x) \in [9, 13]$, és ezáltal $g_5^2(x) = f_5(x)$. Az előző esetből már tudjuk, hogy $f_5$-nek nincsen 3-szerint periodikus pontja, ebből következik, az $[1, 5]$ intervallumon nem lehet $g_5$-nek 6-szerint periodikus pontja, hiszen itt nem létezik olyan $y$, melyre $g_5^6(y) = f_5^3(y) = y$. Mivel $g_5([9, 13]) = [1, 5]$, ezért az előbbi érvelést alkalmazva, a $[9, 13]$ intervallumon sincsen 6-szerint periodikus pontja $g_5(x)$-nek.

Már csak az $[5, 9]$ intervallumon kell belátnunk, hogy nincs benne 6 alapperiódusú pont.

Mivel $g_5(x)$ lineáris az $[5, 9]$ intervallumon és teljesülnek rá a 8.2. Lemma feltételei, így könnyen ki is számítható, hogy egyetlen egy fixpont van, a $p = \frac{19}{3}$, ami fixpontja a $g_5, g_5^2, g_5^3, g_5^4, g_5^5, g_5^6$ függvényeknek is, azaz $p = \frac{19}{3}$ hiába fixpontja az összes iteráltnak, igazából csak 1 alapperiódusú pont, így nincsen 6 szerint periodikus pontja a $g$-nek az $[5, 9]$ intervallumon.

Ezáltal az egész $[1, 13]$ intervallumon sincsen 6-szerint periodikus pontja, amellett hogy beláttuk, hogy vannak 10-szerint periodikus pontok.

### 8.2.2. Általános eset

Olyan függvényt konstruálunk, aminek van $2 \cdot (2n + 1)$-szerint, de nincsen $2 \cdot (2n - 1)$-szerint vett periodikus pontja.

A kiindulási alapot az (A) esetben használt $f : [1, 1 + h] \to [1, 1 + h]$ függvény szolgáltatja, aminek létezik $2n + 1$-szerint, de nem létezik $2n - 1$-szerint periodikus pontja.

Az $f(x)$ függvény duplája a következő $g : [1, 1 + 3h] \to [1, 1 + 3h]$ függvény lesz:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) + 2h & \text{, ha } x \in [1, 1 + h] \\ x - 2h & \text{, ha } x \in [1 + 2h, 1 + 3h]. \end{cases}$$

A középső $[1+h, 1+2h]$ intervallumon pedig definiáljuk $g(x)$-et úgy, hogy lineáris legyen, paraméteresen $g(x) = -2x + 4(1 + h)$, ha $x \in [1 + h, 1 + 2h]$.

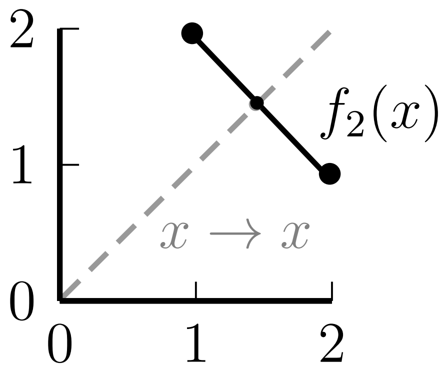
Az ilyen duplázást $k$-szor ismételve állíthatjuk elő azokat a függvényeket, amiknek van $2^k \cdot (2n + 1)$-szerint vett periodikus pontja, de nincsen $2^k \cdot (2n - 1)$-szerint vett periodikus pontja.

## 8.3. (C) eset: Kettőhatvány szerinti periódusok

### 8.3.1. Példa

Mutassunk olyan függvényt, aminek van 2-szerint periodikus pontja, de nincsen 4-szerint.

Legyen $f_2 : [1, 2] \to [1, 2]$ a következő függvény, $f_2(x) = -x + 3$.

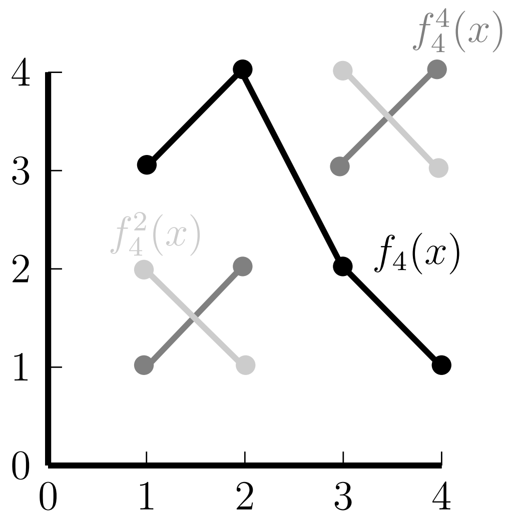



14. ábra. Az $f_2(x)$ függvény és az identitás függvény.

Ennek az $f_2(x)$ függvénynek a fixpontja az $x = \frac{3}{2}$ pont, ezen kívül pedig az összes többi pont alapperiódusa 2, hiszen $f_2^2(x) = x$. Mivel nincsen olyan pont, aminek az alapperiódusa ne 1 vagy 2 lenne, ezért nincsen 4-szerinti periodikus pontja sem.

### 8.3.2. Példa

Olyan $f_4(x)$ függvényt keresünk, aminek van $2^2$-szerint periodikus pontja, de nincsen $2^3$-szerint vett periodikus pontja. Legyen ehhez $f_4 : [1,4] \to [1,4]$ olyan függvény, amire $f_4(1) = 3,\ f_4(2) = 4,$
$f_4(3) = 2,\ f_4(4) = 1$ és minden egész pont közötti intervallumon lineáris.




15. ábra. Az $f_4(x)$ függvény és iteráltjai.

Figyeljük meg, hova képezi le a függvény ezeket az intervallumokat. Az $f_4([1,2]) = [3,4]$ és az $f_4([3,4]) = [1,2]$. Ebből következik, hogy $f_4^2([1,2]) = [1,2]$ és $f_4^2([3,4]) = [3,4]$. Továbbá

$$f_4^2(x) = \begin{cases} -x+3 & \text{, ha } x \in [1,2] \\ -x+7 & \text{, ha } x \in [3,4], \end{cases}$$

$$f_4^4(x) = \begin{cases} x & \text{, ha } x \in [1,2] \\ x & \text{, ha } x \in [3,4]. \end{cases}$$

Az $f_4^2(x)$ iteráltfüggvény monoton csökken, míg az $f_4^4(x)$ monoton nő, és $f_4^4(x) = x$ minden $x \in [1,2] \cup [3,4]$ esetén.

Így minden pont alapperiódusa 4 az $[1,2] \cup [3,4]$ intervallumban, kivéve a $\frac{3}{2}$ és $\frac{7}{2}$ pontokat, melyek alapperiódusa 2, hiszen $f_4^2(x)$ fixpontjai; $f_4(x)$-nek pedig nincsen fixpontja a $[1,2] \cup [3,4]$ intervallumon.

Ha belátjuk, hogy a $[2,3]$ intervallumon sincsen 4-nél nagyobb alapperiódusú pont, akkor megfelelő példafüggvényt konstruáltunk.

Mivel $f_4([2,3]) = [2,4]$, ezért az előzőekhez hasonlóan azt vizsgáljuk, hogy egy $p \in [2,3]$ pont $f$-szerinti képe, $f_4(p)$ mely intervallumba esik. Ha $f_4^k(p) \in [1,2] \cup [3,4]$ valamely $k$-ra, akkor ennek a pontnak az orbitja tartalmaz egy 2− vagy egy 4−kört, így semmiképpen sem lehet az alapperiódusa 8.

Másik esetben egy $p \in [2,3]$ pontra $f_4^l(p) \in [2,3]$ minden $l \in \mathbb{N}$-re. Ekkor, mivel $f_4(x) = -2x+8$, ha $x \in [2,3]$ és nem is hagyják el az iteráltak ezt az intervallumot, az $f_4^8(x) = 256x - 680$ függvénynek egyetlen fixpontja van, az $x^* = \frac{8}{3}$ pont. De $x^* = \frac{8}{3}$ az $f_4(x)$-nek is fixpontja, tehát nem lehet az alapperiódusa 8.

Mindezeket egybevetve az egész $[1,4]$ értelemezési tartományon nincsen 4-nél nagyobb alapperiódusú pont.

### 8.3.3. Általános eset

Ahhoz, hogy olyan függvényt konstruálhassunk, melynek van $2^n$-szerint, de nincsen $2^{n+1}$-szerint periodikus pontja, fel kell használnunk a korábban használt $g(x)$ duplázófüggvényt és az előző $f_4(x)$ függvényt, amelynek volt $2^2$-szerint, de nem volt $2^3$-szerint periodikus pontja. Precízen $f_4(x)$ a következő függvény volt:

$$f_4(x) = \begin{cases} x+2 & \text{, ha } x \in [1,2] \\ -x+8 & \text{, ha } x \in [2,3] \\ -x+5 & \text{, ha } x \in [3,4]. \end{cases}$$

Ekkor $g_4(x)$, ami most $f_4(x)$ duplája, a következőképpen írható le:

$$g_4(x) = \begin{cases} f_4(x)+6 & \text{, ha } x \in [1,4] \\ x-6 & \text{, ha } x \in [7,10]. \end{cases}$$

A korábbi duplázófüggvényekhez hasonlóan $g_4 : [1,10] \to [1,10]$ és a $[4,7]$ intervallumon lineáris, úgy hogy az egész értelmezési tartományon folytonos legyen.

Ekkor $g_4(x)$-nek van $2 \cdot 2^2$-szerint vett periodikus pontja, de $2 \cdot 2^3$-szerint már nincsen.

Kiindulva az $f_4(x)$ függvényből, ismételt duplázófüggvényeket alkalmazva előállítható tetszőleges $n \in \mathbb{N}$-re olyan leképezés, ami $2^n$ szerint periodikus, de $2^{n+1}$ szerint már nem.

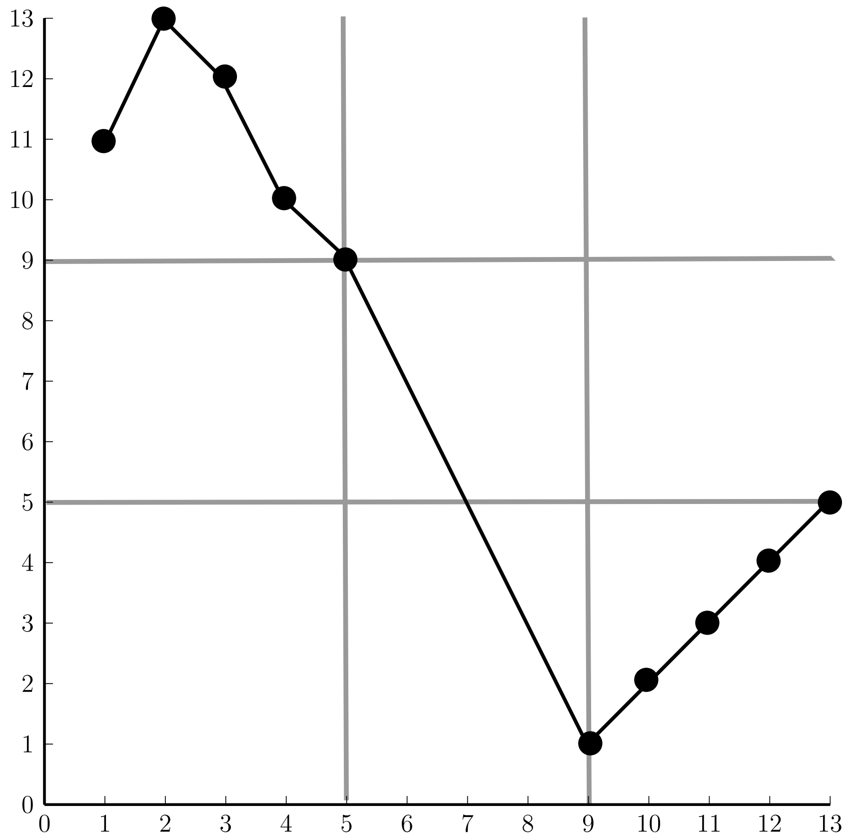
## 8.4. Speciális eset

A fenti három fő esettel már majdnem minden lehetőségre tudtunk példát mutatni, csak egy maradt még tisztázatlan. A (B) csoporton belül mutassunk olyan függvényt, amelynek még van $2^n \cdot 3$-szerint periodikus pontja, a nála Sarkovszkij nagyobb bármely $2^{n-1}\cdot$ *páratlan szám*-szerint már nincsen. A duplázófüggvények segítségével ez is belátható.

Legyen $f : [1,3] \to [1,3]$ olyan függvény, amelyre $f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 1$ és ezek közt a pontok közt lineáris. Az $1, 2, 3$ pontok ebben az esetben a függvény 3-szerint periodikus pontjai.

Duplázza ezt a következő $g(x)$ függvény:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) + 4 & \text{, ha } x \in [1,3] \\ x - 4 & \text{, ha } x \in [5,7]. \end{cases}$$




16. ábra. A $g(x)$ duplázó függvény grafikonja.

Az eddigiek mintájára $g(x)$-nek van $2 \cdot 3$-szerint periodikus pontja, de nincsen egyetlen pontja sem, amelynek alapperiódusa páratlan lenne.

A duplázást újra és újra ismételve kostruálhatunk $2^n \cdot 3$-szerint periodikus függvényeket, amelyeknek nincsen $2^{n-1}\cdot$ *páratlan szám*-hosszú periódusuk.

Az összes előforduló esetben mutattunk ezzel egy-egy folytonos függvényt, amelynek ha van $p$-szerint vett periódusa, akkor nincsen $s$-szerint vett periódusa semmilyen $s \triangleright p$ esetén. $\square$

# 9. Összefoglaló

A szakdolgozatban bevezettük a Sarkovszkij-rendezést, ami alapján ki lehetett mondani Sarkovszkij tételét, több különböző alakban is. Ezek arról szóltak, hogy egydimenziós folytonos leképezéseknek, adott periódusok létezése esetén, szükségszerűen milyen más további periódusoknak kell létezniük. Valamint, ha volt egy periódushosszokat tartalmazó halmazunk, beláttuk létezhet-e megfelelő periódusokkal rendelkező függvény, és ha igen, az utolsó fejezetben megmutattuk az eljárást, amivel ilyen függvények készíthetőek. A bizonyítások során Markov-gráfokat és Štefan-sorozatokat is használtunk.

# Hivatkozások

[1] Burns, Keith - Hasselblatt, Boris. ”A Natrual Direct Proof.” *The American Mathematical Monthly*, Vol. 118, No. 3: 229-244. 2011.

[2] Du, Bau-Sen. ”A Simple Proof of Sharkovsky's Theorem.” *The American Mathematical Monthly*, Vol. 111, No. 7: 595-599. 2004.

[3] Elaydi, Saber. ”On a Converse of Sharokvsky's Theorem.” *The American Mathematical Monthly*, Vol. 103, No. 5: 386-392. 2006.

[4] Ruette, Sylvie. *Chaos on the Interval.* Providence: *American Mathematical Society.* 2017.

[5] Sarkovszkij, A. N. ”On cycles and structure of a continuos mapping.” *Ukrain. Mat. Zh*, 17: 104-111. 1965.

[6] Skycak, Justin Paul. ”A Visual, Inductive Proof of Sharkovsky's Theorem.” http://www.justinmath.com/files/skycak-nd-sharkovsky.pdf