ELTE TTK
Matematika Bsc Szakdolgozat

Intervallumgráf-színezések

Gosztonyi Balázs
témavezető: Gyárfás András

2009. május

Tartalomjegyzék

Kivonat

Ebben a dolgozatban intervallumgráfok, illetve azok hipergráf reprezentációinak színezésével kapcsolatos kérdésekről lesz szó. Először is bevezetjük a duzzasztás módszerét, mely alkalmas lehet a fentiek vizsgálatára. Ennek illusztrálására alternatív bizonyítást adunk Gallai alaptételére, mely szerint egy egyenesen vett $\mathcal{I}$ intervallum-hipergráfra $q(\mathcal{I}) = \omega(\mathcal{I})$.
Ezután ismertetjük Karapetian tételét, mely szerint egy körön vett $\mathcal{I}$ intervallum-hipergráfra (ív-hipergráfra) $q(\mathcal{I}) \leq \lfloor \frac{3\omega(\mathcal{I})}{2} \rfloor$. Megmutatjuk, hogy az egyenlőtlenség éles. Megvizsgáljuk, hogy ilyen hipergráfokra mit ad a duzzasztás módszere. Megmutatjuk, hogy az egyeneshez hasonlóan a körön a rögzített ω mellett maximálisra duzzasztott $\mathcal{I}$ nyílt intervallum-hipergráfok az intervallum-végpontok kivételével a kör minden pontját $\omega(\mathcal{I})$-szer fedik. Ez mutat egy utat Karapetian tételének esetleges új bizonyítására.
Az utolsó fejezetben az egyenesen vett intervallum-hipregráfok mohó színezéséről lesz szó. A mohó algoritmus hatékonyságára vonatkozó legfrissebb eredményt, mely szerint egy egyenesen vett $\mathcal{I}$ intervallum-hipergráfot a mohó algoritmus legfeljebb $8\omega(\mathcal{I}) - 3$ színnel színez, a már megjelent bizonyítások felhasználásával, de további egyszerűsítésekkel közöljük. Ezután megvizsgáljuk, hogyan használható a duzzasztás módszere a mohó algoritmus hatékonyságának vizsgálatára. Végül általánosítjuk a duzzasztás módszerét és ezt Gyárfás A. és Lehel J. egy lemmájának segítségével mutatjuk be.

1. Bevezető

1.1. Definíciók

Ebben a dolgozatban speciális hipergráfokról és azok metszetgráfjainak tulajdonságairól lesz szó. Egy $\mathcal{H}$ *hipergráfon* egy olyan $(V, \mathcal{E})$ párt értünk, ahol V (a $\mathcal{H}$ alaphalmaza) tetszőleges halmaz és $\mathcal{E}$ (a $\mathcal{H}$ élhalmaza) a V részhalmazainak tetszőleges multihalmaza. A továbbiakban $\mathcal{E}$-t halmazként fogjuk kezelni, vagyis úgy képzeljük, hogy $\mathcal{E}$ elemei valójában V indexelt részhalmazai, így azonos részhalmazok is lehetnek $\mathcal{E}$ különböző elemei. Mi csak véges hipergráfokkal fogunk foglalkozni, vagyis feltesszük, hogy $|\mathcal{E}|$ véges (V ettől még lehet végtelen halmaz).
Egy $\mathcal{H}$ hipergráf *metszetgráfján* azt a G egyszerű gráfot értjük, melynek csúcsai a $\mathcal{H}$ élei, és két csúcsát él köti össze, ha a hozzájuk tartozó $\mathcal{H}$-beli élek metszik egymást.
Egy $\mathcal{H}$ hipergráf éleinek egy $\mathcal{W}$ részhalmaza *klikk*, ha elemei páronként metszik egymást. Legyen $\omega(\mathcal{H})$ (vagy egyszerűen ω) a hipergráf legnagyobb klikkjének elemszáma. Egy hipergráf *megengedett élszínezésén* az élhalmazának olyan $\mathcal{A}_i (i \in I)$ diszjunkt színosztályokra való felosztását értjük, hogy $\forall i \in I$-re $\mathcal{A}_i$ elemei páronként diszjunkt élek. Legyen $q(\mathcal{H})$ (vagy egyszerűen q) az ahhoz szükséges színosztályok minimális száma, hogy $\mathcal{H}$-nak megengedett éleszínezését készítsük.
Az *intervallum-hipergráf* nevet többféle hipergráf-család gyűjtőneveként fogjuk használni. Az elnevezés a szakirodalomban általában olyan hipergráfra vonatkozik, melynek alaphalmaza $\mathbb{R}$ és élei az $\mathbb{R}$ zárt intervallumai. További változatokat a későbbiekben fogunk definiálni.
Mi elsősorban intervallum-hipergráfok színezései és maximális klikkmérete közötti összefüggésekkel fogunk foglalkozni. Vegyük észre, hogy a színezések, q illetve ω olyan objektumok a hipergráfon, melyek a metszetgráfján is definiálhatóak volnának. Így tehát kérdéseinket tisztán gráfelméleti kérdésekké is átfogalmazhatnánk. Lehetséges megközelítés volna, hogy karakterizáljuk az intervallumgráfokat, vagyis az olyan gráfokat, melyek előállnak egy intervallum-hipergráf metszetgráfjaként, majd ezeket a gráfokat vizsgáljuk. Ilyen karakterizációk ismertek ([4], [3], [14]), ámde mégsem ezt az utat fogjuk választani. Ugyanis ezek a karakterizációk nem kényelmesek, ráadásul az intervallumgráfok reprezentációja intervallum-hipergráfként nem is egyértelmű. Érdekes módon az intervallumgráfok vizsgálatához gyakran a nem egyértelmű hipergráf-reprezentációjuk vizsgálatán keresztül vezet könnyebb út.
A későbbiekben szükségünk lesz egy egyszerű észrevételre:
Egy *egyenesen vett zárt intervallum-hipergráf* legyen olyan hipergráf, melynek alaphalmaza $\mathbb{R}$ és élei az $\mathbb{R}$ valódi, zárt intervallumai. Egy *egyenesen vett nyílt intervallum-hipergráf* legyen olyan hipergráf, melynek alaphalmaza $\mathbb{R}$ és élei az $\mathbb{R}$ valódi, nyílt intervallumai. A következő lemma azt mondja ki, hogy e két fogalom a mi céljaink szempontjából ekvivalens.

1.1. Lemma. *Minden egyenesen vett $\mathcal{I}$ zárt intervallum-hipergráfhoz létezik egy $\mathcal{I}'$ nyílt intervallum-hipergráf, hogy $\mathcal{I}$ és $\mathcal{I}'$ metszetgráfja izomorf. És for-*

dítva, minden egyenesen vett $\mathcal{I}$ nyílt intervallum-hipergráfhoz létezik egy $\mathcal{I}'$ zárt intervallum-hipergráf, hogy $\mathcal{I}$ és $\mathcal{I}'$ metszetgráfja izomorf.

Megjegyzés: Természetesen sokkal erősebb ekvivalencia is igaz, mint hogy a metszetgráfok izomorfak, de nekünk ennyi is elég.

Bizonyítás: Vegyünk először egy $\mathcal{I}$ zárt intervallum-hipergráfot. Ebből nyilván kaphatunk egy nyílt intervallum-hipergráfot, ha $\mathcal{I}$ intervallumainak egyszerűen elhagyjuk a végpontjait. Mivel $\mathcal{I}$ elemei valódi zárt intervallumok voltak, így valódi nyílt intervallumokat kapunk. Az intervallumrendszer metszetgráfja csak akkor változik, ha $\mathcal{I}$-nek volt két intervalluma, melyek csak végpontjukban metszették egymást. Így elegendő olyan $\mathcal{J}$ zárt intervallum-hipergráfot mutatni, melynek szintén azonos a metszetgráfja $\mathcal{I}$-vel, és bármely két intervalluma valódi intervallumban metszi egymást. Ilyet pedig könnyű megadni: $\mathbb{R}$ azon pontjait, melyek egy $\mathcal{I}$-beli intervallum végpontjai, nyújtsuk meg egy szakasszá, és amely $\mathcal{I}$-beli intervallumok tartalmazták a pontot, $\mathcal{J}$-ben az egész szakaszt tartalmazzák, míg amely $\mathcal{I}$-beli intervallumok nem tartalmazták a pontot, $\mathcal{J}$-ben a szakasz egyetlen pontját se tartalmazzák. Látható, hogy $\mathcal{J}$ megfelel a kívánalmainknak, intervallumainak végpontjait elhagyva megfelelő $\mathcal{I}'$ nyílt intervallum-hipergráfot kapunk.
Vegyünk most egy $\mathcal{I}$ nyílt intervallum-hipergráfot. Az előzőekhez nagyon hasonlóan járunk el: ha minden $\mathcal{I}$-beli intervallumhoz hozzávennénk a végpontját, zárt intervallum-hipergráfot kapnánk. A metszetgráf csak akkor változik, ha két egymást nem metsző $\mathcal{I}$-beli intervallumnak volt közös végpontja. Viszont ha a fent említett módon az $\mathcal{I}$-beli intervallumok végpontjait szakaszokká nyújtjuk, akkor a kapott $\mathcal{J}$ hipergráfban már nem lesz két nem metsző intervallum, melyeknek közös egy végpontja. $\mathcal{J}$ intervallumaihoz végpontjaikat hozzávéve megfelelő $\mathcal{I}'$ nyílt intervallum-hipergráfot kapunk.

$\square$

Megjegyzés: Ugyanilyen módon megmutatható, hogy a balról zárt, jobbról nyílt intervallumokból álló hipergráfok sem lényegesen különbözőek, és annak sincs jelentősége, hogy zárt intervallum-hipergráf esetén kikötjük-e, hogy valódi intervallumokból álljon, vagy megengedjük az egypontú intervallumokat.

1.2. A duzzasztás módszere

Ebben a dolgozatban két intervallumgráfokkal kapcsolatos problémával fogunk foglalkozni, és többek között azt fogjuk megvizsgálni, hogy egy bizonyos módszer, melyet duzzasztásnak fogunk nevezni, hogyan használható ezen problémák kezelésére. Korábbi megjegyzésünkhöz illeszkedik a jelenség: intervallumgráfokkal kapcsolatos kérdéseket szeretnénk megválaszolni, de a módszer, amellyel ezeket megközelítjük, csak hipergráfokon működik. Hiába karakterizálnánk az

intervallumgráfokat, nem világos, hogy a módszert hogyan lehetne gráfokra alkalmazni.
A duzzasztás módszere az egyes problémáknál különbözőképp jelenik meg, így minden alkalommal definiálni kell, hogy mit értünk pontosan alatta. Ugyanakkor a módszer különböző formáit közös vezérelv köti össze. Egy $\mathcal{I}$ intervallum-hipergráfot kezdjünk el módosítani bizonyos korlátok között. Ez a korlát leggyakrabban az, hogy ω ne változzon, vagy hogy ω ne nőjön. Az mindenképpen lényeges, hogy a korlát csak a metszetgráftól függjön. A módosítást pedig úgy végezzük, hogy tetszés szerint kiválasztjuk $\mathcal{I}$ egy intervallumát, és annak egyik végpontját. Ha ez egy bal végpont, akkor elkezdjük csökkenteni, ha jobb végpont, akkor növelni. Az intervallum végpontját addig toljuk, ameddig ezt a korlátok megengedik.
Ahhoz, hogy ezen végpont kitolhatóságának legyen egy egyértelmű határa, el kell vetnünk a megszokott, zárt intervallum-hipergráfokat. Ugyanis egy végpontot csak akkor nem tudhatunk tovább kitolni, ha ezzel megsértenénk az előre megadott korlátot, ehhez pedig meg kell változnia a metszetgráfnak, vagyis a duzzasztott intervallumnak egy olyan intervallumot kell metszenie, amit korábban nem metszett. Márpedig egy zárt intervallum-hipergráf bármely intervallumát bármely végpontjánál lehet egy kicsit tovább duzzasztani, hogy ne metsszen új intervallumot.
Szerencsére az 1.1. lemmából tudjuk, hogy dolgozhatunk nyílt intervallum-hipergráfokkal.

Megjegyzés: Valójában bizonyos szempontból kényelmesebb lenne balról zárt, jobbról nyílt intervallum-hipergráfokkal foglalkozni, egyes állítások szebbek volnának ebben az esetben. Ugyanakkor egyéb kényelmi szempontok miatt mégis maradunk a nyílt intervallum-hipergráfoknál.

Nyílt intervallum-hipergráfoknál azonban még mindig felléphet egy probléma: mi történik, ha egy intervallum végpontját a végtelenségig tolhatjuk az egyik irányba, a korlát átlépése nélkül. Az egyik lehetőségünk az volna, hogy megengedjük a végtelen intervallumokat is. A másik, és mi most válasszuk ezt, hogy mivel csak véges élszámú intervallum-hipergráfokkal foglalkozunk, a teljes intervallumrendszert lefedhetjük egy (a, b) nyílt intervallummal. Mondhatjuk tehát azt, hogy a hipergráf alaphalmaza legyen csak az (a, b) intervallum. Így egy intervallumot egy végpontjánál duzzasztva bizosan létezik szélső helyzet, méghozzá vagy valamelyik másik intervallum egy végpontja, vagy az a, b pontok valamelyike.
Miután egy végpontot kitoltunk a lehető legmesszebb, válasszunk újra intervallumot, annak egy végpontját, és most ezt toljuk ki. Ezt a lépést ismételgessük addig, amíg már egyetlen intervallumot sem tudunk tovább duzzasztani. Ilyen helyzet biztosan létrejön véges sok duzzasztás után, hiszen új végpont sosem keletkezik, így minden intervallumot legfeljebb véges sokszor duzzaszthatunk. A módszer egy intervallum-hipergráfból egy - a megadott korlátok között - maximálisra duzzasztott intervallum-hipergráfot készít, mely persze függhet a duzzasztási lépések sorrendjének megválasztásától.

Hogyan használható a módszer intervallumgráfokra vonatkozó állítások vizsgálatára? A duzzasztás korlátait úgy kell megszabni, hogy ha a kérdéses állítás teljesül egy duzzasztási lépés után, akkor előtte is teljesülnie kelljen. Így elegendő eldönteni, hogy az állítás a maximálisra duzzasztott intervallum-hipergráfokra teljesül-e. Ezek után vizsgálni kell az adott korlátok mellett maximálisra duzzasztott intervallum-hipergráfok tulajdonságait. Ha elegendően szép tulajdonságokat fedezünk fel, akkor pedig leegyszerűsödött körülmények között megkísérelhetjük az állítás eldöntését.
Illusztrációként következzék itt egy közismert állítás Gallai-féle (megemlítve itt: [8]) illetve a duzzasztás módszerével kapott bizonyítása.

1.2. Tétel. *Minden $\mathcal{I}$ egyenesen vett intervallum-hipergráfra $q(\mathcal{I}) = \omega(\mathcal{I})$.*

BIZONYÍTÁS: (Gallai) Vegyünk az egyenesen egy $\mathcal{I}$ zárt intervallum-hipergráfot. Mivel $q(\mathcal{I}) \geq \omega(\mathcal{I})$ nyilvánvaló, elegendő a fordított egyenlőtlenséget belátni. Rendezzük $\mathcal{I}$ intervallumait bal végpontjuk szerinti növekvő sorrendbe. Ebben a sorrendben haladva minden intervallumot helyezzünk azon $\mathcal{A}_i$ színosztályba, melyre i a legkisebb megengedett index. Így $\mathcal{I}$ egy megengedett színezését kapjuk. Jelölje a használt színek számát p. Ekkor legyen az $f \in \mathcal{A}_p$ intervallum bal végpontja a. Az f intervallumot azért helyeztük az $\mathcal{A}_p$ színosztályba mert metsz minden kisebb indexű $\mathcal{A}_i$ színosztályból egy elemet, melyeket korábban színeztünk ki. Ezen $p-1$ intervallum bal végpontja a-tól balra van, és metszik f-et, így tartalmazzák az a pontot. Az f intervallummal együtt tehát legalább p intervallum tartalmazza a-t, vagyis $p \leq \omega(\mathcal{I})$. Így $q(\mathcal{I}) \leq p \leq \omega(\mathcal{I})$.

□

BIZONYÍTÁS: (A duzzasztás módszerével) Vegyünk az (a, b) intervallumon egy $\mathcal{I}$ nyílt intervallum-hipergráfot. Most duzzasszuk maximálisra ω rögzítése mellett. A kapott intervallum-hipergráfot nevezzük $\mathcal{I}'$-nek. Duzzasztás közben ω nem változott, q csak nőhetett, így elég $\mathcal{I}'$-ről belátni, hogy ω színnel színezhető.
Az egyenes intervallum-hipergráfjai Helly-tulajdonságúak, azaz minden klikk elemeinek van közös pontja. Ugyanis vegyük a klikk elemeinek végpontjai közül a legjobbra eső bal végpontot (a az f bal végpontja) és legbalra eső jobb végpontot (b a g jobb végpontja). Mivel f és g metszik egymást, a szigorúan balra esik b-től, így a kettő közötti pontok a klikk elemeinek közös pontjai. Így ω leolvasható abból, hogy az intervallum-hipergráfban egy pont legfeljebb hányszor van lefedve.
Így könnyen látható, hogy a maximálisra duzzasztott $\mathcal{I}'$ hipergráf intervallumai (a, b) *minden egyes pontját* ω-szor fedik, kivéve az $\mathcal{I}'$ intervallumainak végpontjait. Hiszen ha lenne $p \in (a, b)$ pont, mely nem végpont és kevesebb mint ω-szor van lefedve, akkor vehetjük a tőle balra eső első jobb végpontot, vagy a tőle jobbra eső első bal végpontot. A kettő közül az egyik létezik, hiszen van olyan pont, ami ω-szor van lefedve, vagyis többször mint p. Legyen mondjuk a_1 a p-től

jobbra eső első bal végpont, méghozzá az f intervallum bal végpontja. Ekkor p és a_1 között minden pont kevesebb mint ω-szor van lefedve. Ez lehetetlen, hiszen akkor f-et duzzaszthatnánk a_1 végpontjánál egészen p-ig, pedig $\mathcal{I}'$-t már maximálisra duzzasztottuk.
Ez viszont azt jelenti, hogy (a, b) minden pontja ugyanannyi intervallumnak bal végpontja, mint jobb végpontja. Így $\mathcal{I}'$ intervallumait könnyedén ki tudjuk színezni ω színnel: vegyünk egy intervallumot, melynek balvégpontja a, ezt helyezzük az $\mathcal{A}_1$ színosztályba. Ha jobb végpontja nem b, akkor jobb végpontja egyben egy másik intervallum bal végpontja, ezt is helyezhetjük $\mathcal{A}_1$-be. És ezt folytatjuk, amíg eljutunk b-ig. Így lényegében egy teljes réteget kiszíneztünk, a végpontok kivételével minden pontot $\mathcal{I}'\backslash\mathcal{A}_1$ intervallumai pontosan $\omega - 1$-szer fednek le. Ekkor újból elindulunk a-tól, és kiszínezünk egy réteget. Ezt ismételve $\mathcal{I}'$-nek egy megengedett színezését kapjuk ω színnel.

□

Megjegyzés: Még látványosabb az eredmény, ha azt is észrevesszük, hogy ha duzzasztáskor két intervallum végpontja összeér, akkor őket össze is olvaszthatjuk egy intervallummá. Ekkor q csak nőhet, és ω nem változik a Helly-tulajdonság miatt. Az így kapott intervallum-hipergráf intervallumai minden pontot ω-szor fednek, és végpont nem lehet (a, b)-n belül, így végülis egyszerűen az (a, b) intervallum ω különböző példányát kapjuk. Ez pedig triviálisan színezhető ω színnel.

Mire jó ez az új bizonyítás, ha nem egyszerűbb mint az eredeti? Azt mutatja meg, hogy mi lehet a duzzasztás módszerének az erőssége megengedett színezéssel kapcsolatos problémáknál. Duzzasztás után az intervallumok a végpontjaiknál általában éppen érintkeznek további intervallumokkal. Ekkor természetesen adódik, hogy érintkező intervallumokat érdemes lehet azonos színűre színezni. A maximálisra duzzasztott hipergráfokon tehát esetleg könnyebb lehet jó sorrendet találni az intervallumok kiszínezésére.

2. Intervallum-hipergráfok a körön

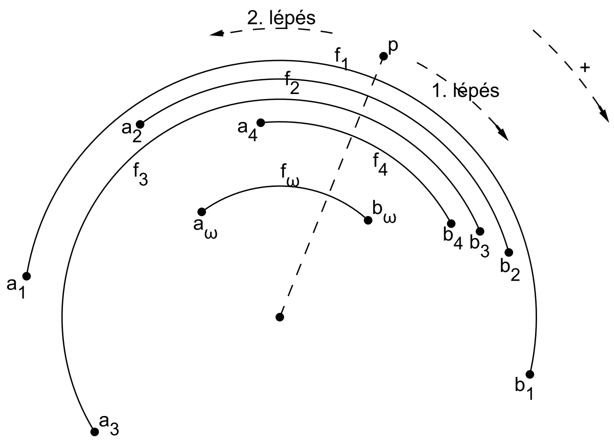
Ebben a fejezetben *körön vett intervallum-hipergráfokról (ív-hipergráfokról)* lesz szó. A V alaphalmaz most legyen a K kör, az éleket pedig úgy kapjuk, hogy kiválasztjuk K két (esetleg megegyező) pontját, és az általuk meghatározott két (esetleg elfajuló) körív egyikét. Attól függően, hogy az ívek a végpontjaikkal együtt alkotják-e a hipergráf éleit, beszélhetünk a körön vett *nyílt, zárt*, illetve *félig nyílt-félig zárt* intervallum-hipergráfokról. Az 1.1. lemmában leírtakhoz nagyon hasonló módon láthatjuk, hogy ezek a hipergráf-típusok metszetgráfjaikat tekintve ekvivalens fogalmak. Nyílt intervallum-hipergráf esetén az üres halmazt nem tekintjük intervallumnak. Ugyanakkor mind nyílt, mind zárt intervallum-hipergráfnál beszélhetünk *teljes intervallumról*, mikor a két végpont egybeesik és a teljes kör, illetve nyílt intervallumok esetén egy pont kivételével a teljes kör alkotja a hipergráf egy élét.
A kört irányítsuk az óra járásával megegyezően. Ez alapján az intervallumok kezdőpontját nevezzük *a-végpontnak*, végpontját pedig *b-végpontnak*. Ezt az elnevezést jelölésben is követni fogjuk.
A körön vett intervallum-hipergráfok vizsgálatának egy fontos szempontja, hogy miben térnek el az egyenesen vett intervallum-hipergráfoktól. Hiszen jól látható, hogy előbbi az utóbbinak lényegében általánosítása: minden egyenesen vett intervallumrendszert "beágyazhatunk" a körbe. A két osztály közötti hasonlóságok és különbségek jó összefoglalását találhatjuk itt: ([9]). Most csak egy fontos hasonlóságot és egy különbséget említenék: Az egyenesen és a körön is ω meghatározásra létezik gyors, hatékony algoritmus ([5]). Így persze az 1.2. tétel miatt az egyenesen q is jól meghatározható algoritmikusan. Ugyanakkor a körön q meghatározása NP-nehéz probléma ([6]).
Ezek után nem meglepő, hogy az 1.2. tétel nem igaz a körön, ellenpélda az a zárt intervallum-hipergráf, melynek öt élét egy körbe írt ötszög csúcsai határozzák meg. Tudunk-e esetleg valamilyen összefüggést megadni mégis q és ω között körön vett intervallum-hipergráfok esetén? A fejezet hátralévő részét ennek a kérdésnek szenteljük.
Először mutatunk egy tételt, melyet Tucker sejtett meg ([17]) és Karapetian bizonyított be ([10]). Ezután megmutatjuk, hogy a tételben szereplő egyenlőtlenség éles. Végül megvizsgáljuk, hogy a duzzasztás módszere milyen eredményt ad körön vett intervallum-hipergráfokra többek között abban a reményben, hogy ez előkészítheti a 2.1. tétel egy alternatív bizonyítását.

2.1. Karapetian tétele

2.1. Tétel. *Egy K körön vett $\mathcal{I}$ intervallum-hipergráfra* $q \leq \lfloor \frac{3}{2}\omega \rfloor$

Bizonyítás: ([10]) Ezúttal érdemes feltenni, hogy $\mathcal{I}$ intervallumai zártak. Feltehető, hogy $\mathcal{I}$-ben nincs egy pontból álló intervallum, és teljes intervallum sem. Utóbbit azért tehetjük fel, mert egy teljes intervallum elhagyásával q és ω is eggyel csökken, így ha az elhagyás utáni hipergráfra megmutatjuk a $q \leq \lfloor \frac{3}{2}\omega \rfloor$ összefüggést, akkor tudhatjuk, hogy ez az elhagyás előtti hipergráfra

is igaz. Az is feltehető, hogy $\exists p \in K$ pont mely ω $\mathcal{I}$-beli intervallum belsejébe esik. Ugyanis ha ilyen nem létezik, akkor K egy olyan ívén, aminek pontjait $\mathcal{I}$ legfeljebb $\omega - 1$-szer fedi és nem esik bele végpont, $\mathcal{I}$-hez hozzávehetünk elegendő egyforma, kicsi intervallumot. Így q nem csökken, és nem keletkezik ω-nál nagyobb klikk, mert ezen kicsi intervallumok bármelyike csak $\omega - 1$ másik intervallumot metsz.
Rendezzük $K \backslash \{p\}$ pontjait p-ből indulva óra járása szerint. Legyen a p-t fedő ω intervallum halmaza $\mathcal{F} = \{f_1, ..., f_\omega\}$, ahol a sorszámozás b-végpontok szerinti csökkenő sorrendben történik, azaz $f_i = [a_i, b_i]$ és $b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_\omega$. Most megadunk egy algoritmust, mely $\mathcal{I}$ intervallumait két lépésben színezi ki.



1. Lépés: Itt $r = \lfloor \frac{\omega}{2} \rfloor$ színt fogunk használni, vagyis egyes intervallumokat az $\mathcal{A}_i$ $(i = 1...r)$ színosztályokba sorolunk, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup .. \cup \mathcal{A}_r$. $\mathcal{I} \backslash \mathcal{F}$ intervallumait a-végpontjuk szerinti növekvő sorrendben vizsgáljuk. A soronkövetkező intervallumot a legkisebb indexű megengedett színosztályba soroljuk, ha van ilyen, és átugorjuk, ha nincs.

2.1. Észrevétel. *Ha $[a, b] \in \mathcal{I} \backslash (\mathcal{F} \cup \mathcal{A})$ akkor az a pontot legalább r különböző $\mathcal{A}$-beli intervallum fedi.*

Megjegyzés: Mikor a 2.1. észrevételt egy intervallumra szeretnénk alkalmazni, különösen figyelni kell arra, hogy az intervallum biztosan nem $\mathcal{F}$-beli-e. Az, hogy nem $\mathcal{A}$-beli, az általában természetesen fog adódni, mert csak olyan intervallumra próbáljuk majd alkalmazni, melyet az 1. lépésben nem színeztünk ki.

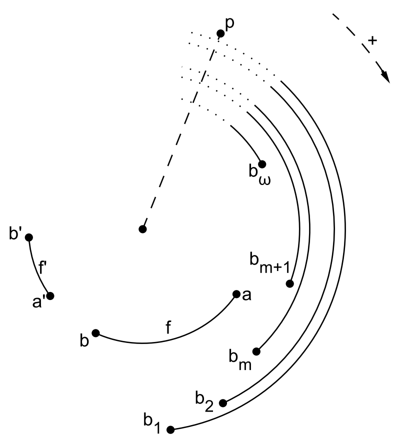
2. lépés: Itt a $\mathcal{B}_j$ $(j = 1...\omega)$ színosztályokat fogjuk használni, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup .. \cup \mathcal{B}_\omega$. Legyen először is $f_j \in \mathcal{B}_j$. Ezután $\mathcal{I} \backslash (\mathcal{F} \cup \mathcal{A})$ intervallumait b-végpontjuk szerinti csökkenő sorrendben vizsgáljuk. A soronkövetkező intervallumot a legkisebb még megengedett j indexű $\mathcal{B}_j$ osztályba soroljuk, ha van ilyen. Ha valamely intervallumra nincs megengedett szín, akkor viszont az algoritmus azonnal leáll.

A két lépés együttesen legfeljebb $\omega + r = \omega + \lfloor \frac{\omega}{2} \rfloor = \lfloor \frac{3}{2}\omega \rfloor$ színt használ. Elegendő tehát belátni a következő lemmát:

2.2. Lemma. *A 2. lépés $\mathcal{I} \backslash \mathcal{A}$ minden intervallumát kiszínezi.*

Ehhez először egy technikai lemmát bizonyítunk.

2.3. Lemma. *Tegyük fel, hogy a 2. lépés azért ér véget, mert egy $f = [a, b]$ intervallumhoz nincs megengedett színosztály. Tegyük fel, hogy $b_m \geq a$ még teljesül de $b_{m+1} < a$. Ekkor minden $j \in [1, m]$-re és minden $f' = [a', b'] \in \mathcal{B}_j \backslash \{f_j\}$-re $a' \in f$*



Bizonyítás: (2.3. lemma)
Tegyük fel, hogy létezik a lemmának ellentmondó f' intervallum. Mivel f'-t kiszíneztük, de f-nél elakadt az algoritmus, ezért $b' > b$. Mivel f' nem metszheti f_j-t, $a' > a$. És az indirekt feltevés szerint $a' \notin f$ így $a' > b$. Így megtehetjük, hogy azt a lemmának ellentmondó f' intervallumot választjuk, melyre a' a lehető legkisebb, azaz a lehető legközelebb esik b-hez.

A 2.1. észrevétel szerint a-t legalább r különböző $\mathcal{A}$-beli elem fedi, valamint $f_1, ..., f_m$ és persze maga f. De K egyetlen pontját sem fedheti ω-nál több intervallum, így $\omega > r + m$. Legyen $k = \omega - m - r$, melyre tehát $k > 0$.
Minden $i \in [m + 1, \omega]$-ra kiválasztható olyan $f'_i \in \mathcal{B}_i$, melyre $b \in f'_i$, hisz f-et nem tudtuk a $\mathcal{B}_i$ színosztályba sorolni. Ezeket az intervallumokat osszuk két részre:

$$\mathcal{D} = \{f'_i | a' \in f'_i, i \in [m + 1, \omega]\}, \ \mathcal{D}' = \{f'_i | a' \notin f'_i, i \in [m + 1, \omega]\}$$

A felosztás haszna, hogy $\mathcal{D}'$ elemei biztosan nem $\mathcal{F}$-beliek, hisz b-végpontjuk b és a' közé esik, míg f_i b-végpontja $i \in [m+1, \omega]$ esetén a-nál kisebb. Így alkalmazható D' elemeire a 2.1. észrevétel. Előbb azonban alkalmazzuk a 2.1. észrevételt f'-re, melyről feltettük a lemma állításában, hogy nem f_j. Tehát a'-t fedi r $\mathcal{A}$-beli intervallum, valamint D elemei és f' maga (ez csupa különböző elem a színosztályok miatt). Így $r + |D| + 1 \leq \omega \leq 2r + 1$, vagyis $|D| \leq r$. Legyen $|D| = r - k_1$, ahol $k_1 \geq 0$.
Azt állítjuk, hogy $k_1 < m$. Vizsgáljuk ugyanis azt az a^* pontot, melyre $[a^*, b^*] \in \mathcal{D}' \cup \{f\}$ és a^* a lehető legnagyobb, azaz a legközelebb esik b-hez (ezek az intervallumok mind tartalmazzák b-t). Az $[a^*, b^*]$ intervallumra alkalmazható a 2.1. észrevétel, hisz D' elemei és f sem $\mathcal{F}$-beli. Ezt az a^* pontot tehát lefedik $\mathcal{D}'$ elemei, f, valamint r különböző $\mathcal{A}$-beli intervallum. Ha $k_1 \geq m$ lenne, akkor ez összesen

$$|\mathcal{D}'| + 1 + r = (\omega - m) - (r - k_1) + 1 + r \geq \omega + 1$$

intervallum volna, ami lehetetlen.
Most az $[1, m]$ indexhalmazt osszuk ketté: Legyen I azon $[1, m] \setminus \{j\}$-beli i indexek halmaza, melyekre van a'-t fedő $\mathcal{B}_i$-beli elem, J pedi a többi. Azt állítjuk, hogy $|I| \leq k_1$. Ugyanis a'-t fedi az I indexhalmazhoz tartozó színosztályok egy-egy eleme, $\mathcal{D}$ elemei, f'-re alkalmazva a 2.1. észrevételt r darab $\mathcal{A}$-beli elem, valamint f' maga. Ezek mind különböző elemek a színosztályaik miatt. Ha $|I| > k_1$ teljesülne, ez összesen

$$|I| + (r - k_1) + r + 1 = (|I| - k_1) + 2r + 1 > 2r + 1 \geq \omega$$

intervallum volna, ami lehetetlen. Így $|I| \leq k_1$ és $|J| = m - |I| \geq m - k_1 > 0$.
1. eset: Minden $i \in J$-re van $\mathcal{B}_i$-nek b-t fedő eleme. Ekkor ezek az elemek, valamint $\mathcal{D}'$ elemei és f mind fedik b-t. Vegyük azt az a^* pontot, melyre $[a^*, b^*]$ az előbbiek valamelyike, és a^* kisebb b-nél, de azon belül a lehető legnagyobb. Ekkor $[a^*, b^*]$ nem lehet $\mathcal{F}$-beli, erre szolgált J definíciója: azt ugyanis tudjuk, hogy $\mathcal{D}'$ elemei és f nem $\mathcal{F}$-beliek. Ha pedig $[a^*, b^*] \in \mathcal{B}_i$, ahol $i \in J$, akkor J definíciója miatt b^* a b és a' pontok közé esik, a^* pedig választásának szabálya szerint b-nél kisebb. A $[a^*, b^*]$ ekkor nem tartalmazza p-t, vagyis nem $\mathcal{F}$-beli, alkalmazható rá a 2.1. észrevétel.
Így a^*-ot fedi minden $i \in J$-re egy $\mathcal{B}_i$ beli elem, $\mathcal{D}'$ elemei, f, valamint r különböző $\mathcal{A}$-beli elem, ami összesen

$$|J| + |D'| + r + 1 \geq (m - k_1) + ((\omega - m) - (r - k_1)) + r + 1 = \omega + 1$$

intervallum, ez lehetetlen.
2. eset Van egy olyan $j_0 \in J$ index, hogy b-t nem fedi $\mathcal{B}_{j_0}$-beli elem. Legyen j_0 a legnagyobb index amely rendelkezik ezzel a tulajdonsággal. Legyen a j_0-nál nagyobb J-beli indexek száma u. Ekkor b-t fedi ezeknek az indexeknek megfelelő u intervallum, valamint D' elemei és f. Ugyanúgy válasszuk ki ezek közül $[a^*, b^*]$-ot, mint az 1. esetben. Ekkor a^*-ra ugyanúgy alkalmazható a 2.1. észrevétel. Milyen intervallumok fedik még a^*-ot?

$[a^*, b^*]$ akár J-beli indexű intervallum, akár $\mathcal{D}'$-beli intervallum, mindenképp egy $\mathcal{B}$-beli, j_0-nál nagyobb indexű színosztályba soroltuk. Ha pedig $[a^*, b^*] = f$, akkor egyáltalán nem kapott színt. Mindenesetre színezésekor $\mathcal{B}_{j_0}$ nem megengedett színosztály volt. Így $[a^*, b^*]$-ot metszi egy $g \in \mathcal{B}_{j_0}$ elem. J definíciója miatt $a' \notin g$, j_0 definíciója miatt $b \notin g$, vagyis g a b és a' által határolt két ív valamelyikébe kell essen. Ha g a rendezés szerint teljes egészében b és a' közé esne, akkor ugyanúgy ellentmondana a lemmának, mint f' de a-végpontja közelebb lenne b-hez, ami lehetetlen. Így g a másik, p-t tartalmazó íven fekszik. De mivel $[a^*, b^*]$-ot metszi, ezért b-végpontja b-nél kisebb. Viszont b-nél kisebb b-végpontú intervallumot a 2. lépésben nem színeztünk, csak $\mathcal{F}$ elemeit. Így $g = f_{j_0}$, azaz f_{j_0} metszi $[a^*, b^*]$-ot, méghozzá úgy, hogy $b_{j_0} > a^*$. Így az $f_i (i = 1...\omega)$ intervallumok számozásának sorrendje miatt $b_i > a^* (i = 1...j_0)$. Tehát a^*-ot fedi $f_1, f_2, ..., f_{j_0}$ is, összesen tehát legalább $j_0 + u + ((\omega - m) - (r - k_1)) + r + 1$ intervallum. Vegyük észre, hogy $j_0 + u \geq |J|$, hisz J-ben u olyan index van, mely j_0-nál nagyobb. Így az a^*-ot fedő intervallumok száma legalább

$$|J| + ((\omega - m) - (r - k_1)) + r + 1 \geq (m - k_1) + ((\omega - m) - (r - k_1)) + r + 1 = \omega + 1$$

Ellentmondásra jutottunk. Ezzel a 2.3. lemmát beláttuk.

□

2.2. Észrevétel. *A 2.3. lemmából következik, hogy a $\mathcal{B}_j$ $(j \in [1, m])$ színosztályoknak legfeljebb két eleme van. Ugyanis f_j után esetleg még választhatunk bele egy g_j intervallumot, de ez a lemma miatt tartalmazza b-t. Így ezután már csak olyan intervallumot választhatnánk $\mathcal{B}_j$-be, melynek b-végpontja b-nél kisebb. Ilyen intervallumokat viszont már nem színeztünk ki a 2. lépésben.*

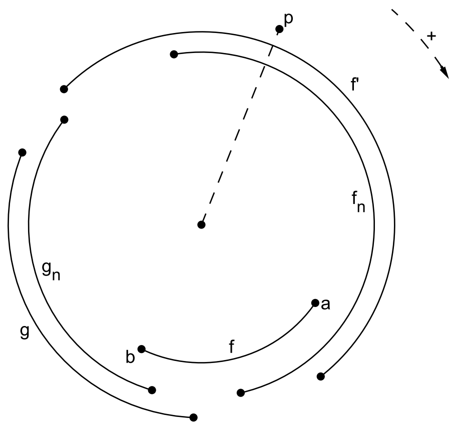
Bizonyítás: (2.2. lemma) Tegyük fel tehát, hogy $f = [a, b]$-nél elakad a 2. lépés. Definiáljuk m-et úgy, mint a 2.3. lemmában, és megint válasszunk $i \in [m+1, \omega]$-ra $f_i' \in \mathcal{B}_i$-t, ami fedi b-t. Legyen $\mathcal{H}_{m+1} = \{f, f_\omega', f_{\omega-1}', ..., f_{m+1}'\}$. Ekkor $\mathcal{H}_{m+1}$ elemei páronként metszik egymást, hisz mind tartalmazzák b-t. Most csökkenő indexekkel rekurzívan definiálni fogjuk a $\mathcal{H}_i$ $(i = m, m-1, ..., 1)$ halmazokat, az előzőt mindig egy intervallummal bővítve. Ha $\mathcal{H}_i$-t már definiáltuk, akkor legyen $\mathcal{H}_{i-1} = \mathcal{H}_i \cup \{f_{i-1}\}$ ha f_{i-1} minden $\mathcal{H}_i$-beli elemet metsz. Egyébként legyen $\mathcal{H}_{i-1} = \mathcal{H}_i \cup \{g_{i-1}\}$ ahol g_{i-1} a $\mathcal{B}_{i-1}$ színosztályba f_{i-1} után beválasztott elem. (Ilyen g_{i-1} elem létezik, hiszen ha f_{i-1} nem metszi a $\mathcal{H}_i$ valamely elemét, azt az elemet egy másik $\mathcal{B}_{i-1}$-beli intervallumnak kell metszenie a színezés szabályai szerint.

Állítás: $\mathcal{H}_i$ elemei páronként metszik egymást $i = (m, m-1, ..., 1)$-re is.

Legyen n a legelső, azaz a legnagyobb index, amire nem teljesül az állítás. Ekkor nyilván $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}_{n+1} \cup g_n$ és g_n nem metszi $\mathcal{H}_{n+1}$ valamely f' elemét.

Legyen $\mathcal{H} = \mathcal{H}_n \cap \{g_m, g_{m-1}, ..., g_n\}$. Ezek az elemek a 2.2. észrevételben elmondottak miatt mind tartalmazzák b-t. Azt pedig eddig is tudtuk, hogy $\mathcal{H}_{m+1}$ elemei tartalmazzák b-t. Speciálisan tehát g_n metszi $\mathcal{H}$ és $\mathcal{H}_{m+1}$ minden elemét.

Ebből következik, hogy f', amit g_n nem metsz, $\mathcal{F}$-beli kell legyen, méghozzá $f_m, f_{m-1}, ..., f_{n+1}$ valamelyike.
Mivel $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}_{n+1} \cup \{g_n\}$, ezért egy $g \in \mathcal{H}_{n+1} \backslash \mathcal{F}$ elem nem metszi f_n-et. Most vizsgáljuk meg f' és g viszonyát.



f', mely $\mathcal{F}$-beli, nem metszi g_n-et, így f' a-végpontja nagyobb g_n b-végpontjánál. g b-végpontja viszont kisebb g_n b-végpontjánál: Ugyanis g-t $\mathcal{B}_n$-nél magasabb indexű színosztályba soroltuk, de mivel f_n-et nem metszi, így a 2.2. észrevétel miatt csak g_n akadályozhatta meg, hogy g-t $\mathcal{B}_n$-be soroljuk. Ez azt jelenti, hogy g_n-et előbb színeztük ki, mint g-t, vagyis g_n b-végpontja nagyobb, mint g-é. Így tehát f' a-végpontja nagyobb, mint g b-végpontja.
Másrészről megmutatjuk, hogy f' b-végpontja kisebb, mint g a-végpontja: f' indexe $\mathcal{F}$-ben nagyobb, mint n, hiszen $\mathcal{H}_{n+1}$-beli. Így f' b-végpontja kisebb, mint f_n-é. De g nem metszi f_n-et, így g a-végpontja nagyobb, mint f_n b-végpontja.
Egybevéve tehát az jött ki, hogy f' és g nem metszik egymást. De mindkettő $\mathcal{H}_{n+1}$-beli, aminek elemei páronként metszik egymát. Ez ellentmondás, vagyis az állítást beláttuk.
Tehát $\mathcal{H}_1$ elemei páronként metszik egymást. De $|\mathcal{H}_1| = \omega + 1$, ami lehetetlen. Így beláttuk a 2.2. lemmát, és ezzel a 2.1. tételt.

□

A következő tétel azt mondja ki, hogy a 2.1. tételben szereplő egyenlőtlenség éles.

2.4. Tétel. *Minden $k \in \mathbb{N}^+$-ra létezik a körön olyan nyílt intervallum-hipergráf (és így zárt is), melyre $\omega = k$ és $q = \lceil \frac{3k-1}{2} \rceil$.*

Bizonyítás: Osszuk fel a K kört $3k-1$ egyenlő hosszú nyílt ívre. Az $\mathcal{I}$ hipergráf élei legyenek a k szomszédos ív és a megfelelő közbülső végpontok

együttese által alkotott intervallumok. Az ilyen intervallumok száma $3k-1$. Mivel egy intervallum $2k-2$ másikat metsz, melyek olyan párokba rendezhetőek, hogy egy pár két eleme diszjunkt, így $\omega \leq 1 + \frac{2k-2}{2} = k$. És mivel egy kis ív belső pontját k intervallum tartalmazza, ezen k intervallum klikket alkot, így $\omega = k$.
Most vizsgáljuk az intervallumokat a következő sorrendben: Induljunk ki egy osztópontból és vegyük azt az f_1 intervallumot, aminek ez az a-végpontja. Az f_1 intervallum b-végpontja legyen az f_2 intervallum a-végpontja. Ilyen módon sorbavéve az intervallumokat, könnyen látható, hogy minden intervallum sorra kerül. Ilyen sorrendben haladva két egymást követő intervallum mindig diszjunkt, így $\mathcal{I}$-t ki tudjuk színezni $\lceil \frac{3k-1}{2} \rceil$ színnel. Másrészről $\mathcal{I}$-ben nincs 3 páronként diszjunkt intervallum, így bármilyen megengedett színezésben egy színosztály legfeljebb 2 elemű, így a színek száma legalább $\lceil \frac{3k-1}{2} \rceil$. Tehát $q = \lceil \frac{3k-1}{2} \rceil$.

□

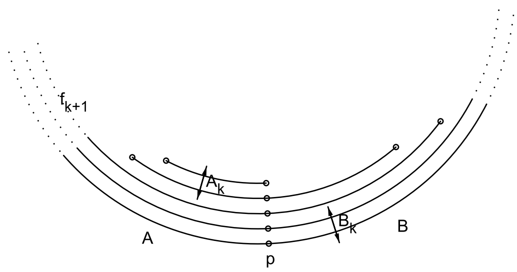
2.2. A duzzasztás módszere a körön

A duzzasztás módszere az 1. fejezetben leírtakhoz nagyon hasonlóan definiálható körön vett nyílt intervallum-hipergráfokra. A különbség az, hogy bal és jobb végpont helyett most a- és b-végpontok szerepelnek és hogy egy intervallum duzzasztása attól is elakadhat, hogy két végpontja összeér, vagyis az intervallum teljes.
A 2.1. tétel az 1.2. tétel körön vett analógiája, így bizonyításakor próbálkozhatunk a duzzasztás módszerének analóg alkalmazásával is. Vegyünk egy tetszőleges nyílt intervallum-hipergráfot a körön. Duzzasszuk ezt maximálisra ω rögzítése mellett. Duzzasztás közben ω tehát nem változik, q pedig csak nőhet, így elég volna a tételt maximálisra duzzasztott intervallumrendszerekre belátni. Milyenek ezek az intervallumrendszerek? Mint említettük, a körön vett intervallum-hipergráfokkal kapcsolatban az egyik legfontosabb kérdés, hogy mennyire hasonlítanak az egyenes intervallum-hipergráfjaira. Az 1.2. tétel duzzasztás módszerével készített bizonyításából kiderül, hogy az egyenesen a maximálisra duzzasztott hipergráfok a végpontok kivételével az alaphalmaz minden pontját ω-szor fedik. Ugyanakkor az ottani egyszerű gondolatmenet a körön megbukik, hiszen a körön vett intervallum-hipergráfok általában nem Helly-tulajdonságúak. (Könnyen mutatható példa, hogy még maximálisra duzzasztott intervallum-hipergráfok sem feltétlenül Helly-tulajdonságúak.)
Meglepő módon a következő két tétel mégis szép eredményeket ad.

2.5. Tétel. *A K körön egy rögzített ω mellett maximálisra duzzasztott nyílt intervallum-hipergráf az intervallumok végpontjai kivételével a kör minden pontját ugyanannyiszor fedi.*

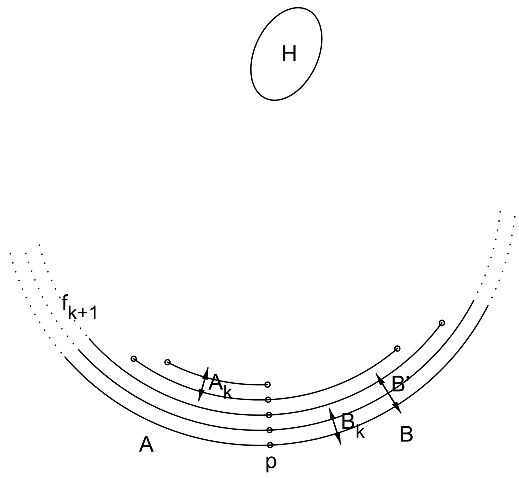
Bizonyítás: Vegyünk egy maximálisra duzzasztott $\mathcal{I}$ nyílt intervallum-hipergráfot K-n. Feltehető, hogy az intervallumrendszerben nincs teljes intervallum. Ugyanis egy ilyen intervallum elhagyása illetve felvétele nem változtat

azon, hogy az intervallum-hipergráf maximálisra duzzasztott vagy sem, illetve azon, hogy az intervallum-végpontok kivételével minden pont ugyanannyiszor van-e lefedve.
Elegendő bebizonyítani, hogy K minden p pontja ugyanannyi $\mathcal{I}$-beli intervallumnak a-végpontja, mint b-végpontja. Tegyük fel, hogy valamely $p \in K$-ra nem ez a helyzet. Legyen $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$ azon intervallumok halmaza, melyeknek a-végpontja p, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{I}$ azon intervallumok halmaza, melyeknek b-végpontja p. Mivel $\mathcal{I}$-ben nincs teljes intervallum $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \varnothing$. Tegyük fel tehát, hogy $|\mathcal{A}| > |\mathcal{B}|$. Nyilván $|\mathcal{B}| > 0$, hiszen különben $\mathcal{I}$ nem lenne maximálisra duzzasztott, egy $f \in \mathcal{A}$ intervallumot a-végpontjánál duzzaszthatnánk anélkül hogy ω növekedne.



Mivel $\mathcal{A}$ elemeinek a-végpontja közös, a tartalmazás segítségével rendezhetjük őket, az egyforma intervallumok sorrendjét tetszőlegesen megválasztva. Az ábrákon a szűkebb intervallumok legyenek beljebb, és így is fogunk rájuk hivatkozni. Hasonlóképpen járhatunk el $\mathcal{B}$ elemeinél. Jelölje f_i az $\mathcal{A}$ belülről számított i-edik elemét, $\mathcal{A}_i$ az $\mathcal{A}$ legbelső i eleméből álló halmazt. Jelölje g_j a B kívülről (!) számított j-edik elemét, $\mathcal{B}_j$ a $\mathcal{B}$ legkülső j eleméből álló halmazt.
A bizonyítás fő gondolata a következő: vegyük a legnagyobb olyan k természetes számot, melyre igaz, hogy $\mathcal{A} \backslash \mathcal{A}_k$ minden eleme metszi $\mathcal{B}_k$ minden elemét. Persze meg kell mutatni, hogy k jól definiált. Nem üres halmaznak vesszük a maximumát, hiszen $k = 0$-ra a feltétel teljesül: $\mathcal{A} \backslash \mathcal{A}_0$ elemei metszik $\mathcal{B}_0$ minden elemét, hiszen $\mathcal{B}_0 = \varnothing$. És k nem lehet akármilyen nagy, felső korlátja $|\mathcal{B}|$.

Vizsgáljuk most az $f_{k+1} \in \mathcal{A}$ intervallumot. Ez az intervallum létezik, hiszen $k + 1 \leq |\mathcal{A}|$. (Itt és csak itt használjuk ki indirekt feltevésünket, miszerint $|\mathcal{A}| > |\mathcal{B}|$.) Miért nem duzzaszthatjuk tovább az a-végpontjánál? Nem lehet, hogy azért, mert már teljes intervallum, hisz feltettük, hogy $\mathcal{I}$ nem tartalmaz ilyet. Tehát azért nem bővíthetjük f_{k+1}-et, mert akkor ω növekedne. Kell legyen egy ω elemű klikk, mely f_{k+1}-et nem tartalmazza, f_{k+1} nem metszi minden elemét, de ha a-végpontjánál kicsit tovább duzzasztanánk, már metszené. A klikk $\mathcal{B}$-be eső részét jelöljük $\mathcal{B}'$-vel, a maradékot pedig $\mathcal{H}$-val. Ekkor $|\mathcal{H}| + |\mathcal{B}'| = \omega$. Milyen halmaz lehet $\mathcal{B}'$? Ha $g_j \in \mathcal{B}'$, akkor $\mathcal{B}$ minden tőle kívülre eső intervalluma is $\mathcal{B}'$-beli. Hisz ha valamely $m < j$ esetén $g_m \notin \mathcal{B}'$ teljesülne, akkor



$\mathcal{H} \cup \mathcal{B}' \cup \{g_m\}$ is klikk lenne, hisz g_m bővebb, mint g_j, a klikk elemszáma pedig $\omega + 1$ lenne, ami lehetetlen. Így $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ legkülső néhány intervalluma. Ugyanakkor $\mathcal{B}'$-nek kell legyen olyan eleme, amit f_{k+1} nem metsz, hiszen f_{k+1}-et a-végpontjánál kicsit duzzasztva metsz új elemet $\mathcal{H} \cup \mathcal{B}'$-ből, de ez csak $\mathcal{B}'$-beli lehet. Viszont k definíciója miatt f_{k+1} metszi $\mathcal{B}_k$ minden elemét, így $\mathcal{B}'$-nek van $\mathcal{B}_k$-nál beljebb eső eleme. Összefoglalva tehát $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_{k'}$, ahol $k' > k$. Ezen k' fog ellentmondani annak, hogy k maximális.
Most vizsgáljuk $\mathcal{H}$-t. Az előbbiek alapján $\mathcal{H}$ egy klikk és $|\mathcal{H}| = \omega - k'$. $\mathcal{H}$ minden eleme metszi f_{k+1}-et, hiszen f_{k+1}-et a-végpontjánál kicsit duzzasztva csak $\mathcal{B}'$ elemei közül tud újakat metszeni. De $\mathcal{A} \backslash \mathcal{A}_k$ elemei közül f_{k+1} a legszűkebb, így $\mathcal{H}$ elemei mind metszik $\mathcal{A} \backslash \mathcal{A}_k$ minden elemét. (Lehetnek közös elemek is.)
Vegyük észre, hogy $\mathcal{H}$ elemei metszik $\mathcal{B}_k$ elemeit és k definíciója miatt $\mathcal{A} \backslash \mathcal{A}_k$ elemei metszik $\mathcal{B}_k$ elemeit, így $(\mathcal{A} \backslash \mathcal{A}_k) \cup \mathcal{H} \cup \mathcal{B}_k$ klikket alkot. Mekkora az elemszáma? $|\mathcal{H} \cup \mathcal{B}_k| = \omega - k' + k$, hiszen $\mathcal{H}$ és $\mathcal{B}_k$ diszjunkt. Mivel $|(\mathcal{A} \backslash \mathcal{A}_k) \cup \mathcal{H} \cup \mathcal{B}_k| \leq \omega$ kell legyen, így $\mathcal{A} \backslash \mathcal{A}_k$-nak legfeljebb $k' - k$ eleme lehet $\mathcal{H} \cup \mathcal{B}_k$-n kívül. De $\mathcal{A} \backslash \mathcal{A}_k$ és $\mathcal{B}_k$ diszjunkt, így $\mathcal{A} \backslash \mathcal{A}_k$-nak $\mathcal{H}$-n kívül is legfeljebb $k' - k$ eleme lehet. Mivel $\mathcal{H}$ elemei mind metszik $\mathcal{B}_{k'}$ elemeit, így $\mathcal{A} \backslash \mathcal{A}_k$-nak legfeljebb $k' - k$ olyan eleme lehet, ami nem metszi $\mathcal{B}_{k'}$ minden elemét. Vagyis $\mathcal{A}$-nak legfeljebb k' olyan eleme lehet, ami nem metszi $\mathcal{B}_{k'}$ minden elemét. Márpedig $\mathcal{A}$ elemei belülről kifelé egyre bővebbek, így $\mathcal{A}$-nak csak a legbelső k' eleme lehet olyan, ami nem metszi $\mathcal{B}_{k'}$ minden elemét. Vagyis $\mathcal{A} \backslash \mathcal{A}_{k'}$ elemei mind metszik $\mathcal{B}_{k'}$ minden elemét. Ez ellentmond annak, hogy k maximális ilyen volt.

$\square$

Ezután természetesen adódik a kérdés, hogy hányszor lehetnek lefedve a K kör pontjai egy maximálisra duzzasztott $\mathcal{I}$ intervallum-hipergráf intervallumai által? Lehet hogy ez a szám függ attól, hogy milyen sorrendben duzzasztottuk fel $\mathcal{I}$ intervallumait? A válasz erre is meglepően egyszerű, és ez ráadásul az eddigiekből már könnyen megmutatható.

2.6. Tétel. *A K körön egy rögzített ω mellett maximálisra duzzasztott $\mathcal{I}$ intervallum-hipergráf az intervallumok végpontjai kivételével a kör minden pontját ω-szor fedi.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $\mathcal{I}$ maximálisra duzzasztott intervallum-hipergráf, mely az intervallumok végpontjai kivételével a K kör minden pontját Δ-szor fedi, ahol $\Delta < \omega(\mathcal{I})$. Legyen f egy kis intervallum a körön, mely $\mathcal{I}$ semelyik intervallumának végpontját nem tartalmazza. Ekkor f az $\mathcal{I}$ rendszernek legfeljebb Δ elemét metszi, így $\mathcal{I}' = \mathcal{I} \cup \{f\}$-ben a legnagyobb klikk mérete továbbra is $\omega(\mathcal{I})$. Duzzasszuk most $\mathcal{I}'$-t maximálissá továbbra is megtartva ω-t. A kapott intervallum-hipergráf legyen $\mathcal{I}''$. Mivel $\mathcal{I}$ maximális volt, $\mathcal{I}'$ duzzasztásakor csak f-et bővíthetjük. Hol akadunk el? A 2.5. tételből tudjuk, hogy $\mathcal{I}''$-ben is minden pont (a végpontok kivételével) ugyanannyiszor van lefedve, így f-nek teljes intervallummá kell bővülnie. De ekkor $\mathcal{I}''$ pontosan egy teljes intervallummal több $\mathcal{I}$-nél, így $\omega(\mathcal{I}'') = \omega(\mathcal{I}) + 1$. Ez pedig lehetetlen.

□

Végül tehát kiderült, hogy a körön is igaz a maximálisra duzzasztott intervallum-hipergráfok ezen tulajdonsága. Ez alapján a körön egy maximálisra duzzasztott $\mathcal{I}$ intervallumrendszert a következőképp is reprezentálhatunk: Vegyünk egy $f_1^1 \in \mathcal{I}$ intervallumot. Ha nem teljes intervallum, akkor b-végpontja legalább egy másik $\mathcal{I}$-beli intervallum a-végpontja is, legyen egy ilyen f_2^1. Ezután f_2^1-nek vizsgáljuk a b-végpontját, ez általában ismét egy $\mathcal{I}$-beli intervallum a-végpontja, ez legyen f_3^1. Így folytatva csak úgy akadhatunk el, hogy egy $f_{k_1}^1$ intervallum b-végpontja megegyezik f_1^1 a-végpontjával. Ekkor az $\mathcal{F}_1 = \{f_1^1, f_2^1, ..., f_{k_1}^1\}$ intervallumhalmazt nevezhetjük egy *kötegnek*. Mivel az intervallumok sorbavételekor pont körbeértünk, az intervallum-végpontok kivételével K összes pontját az $\mathcal{F}_1$ köteg intervallumai valamilyen h_1 számszorosan fedik, h_1 az $\mathcal{F}_1$ köteg *vastagsága*. Általában persze $\mathcal{F}_1 \neq \mathcal{I}$, így újabb intervallumból kiindulva létrehozhatjuk az $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$,..., $\mathcal{F}_n$ kötegeket, melyek együtt kiadják az $\mathcal{I}$ intervallum-hipergráfot. Vegyük észre, hogy $h_1+h_2+...+h_n = \omega(\mathcal{I})$. Mint már említettük, ez arra lehet jó, hogy megad egy sorrendet amiben érdemes lehet $\mathcal{I}$ intervallumait színezni: Egy köteg intervallumait a fenti sorrendben vegyük, az egyes kötegeket pedig valamilyen, akár tetszőleges sorrendben. Igaz-e vajon hogy ilyen sorrendben mohón végezve a színezést mindig legfeljebb $\lfloor \frac{3\omega}{2} \rfloor$ színosztályra lesz szükség?
Egy közbenső kérdés a következő: Az nyilvánvaló, hogy az egyes kötegekre $h_i \leq \omega(\mathcal{F}_i)$, de vajon igaz-e, hogy $h_i = \omega(\mathcal{F}_i)$? Ha igaz volna, akkor az egyes kötegek külön-külön is maximálisra duzzasztott intervallum-hipergráfok volnának, és így elég volna az egyes kötegeket színezni.

3. A mohó algoritmus hatékonysága egyenesen vett intervallum-hipergráfokon

Ebben a fejezetben egyenesen vett intervallum-hipergráfok színezéséről lesz szó. A színezés egy természetes módja a *mohó algoritmus*, mely az intervallumokat valamilyen sorrendben véve a soronkövetkezőt mindig a legkisebb indexű megengedett színosztályba sorolja. Az 1.2. tétel bizonyításából tudjuk, hogy megfelelő (balvégpontok szerinti növekedő) sorrendben végezve a színezést, minimális, ω színosztályt használó színezést kapunk.
De mi a helyzet tetszőleges sorrend esetén? Adott ω mellett legfeljebb hány színt használ a mohó algoritmus, ha nem feltétlenül optimálisan választjuk meg a színezés sorrendjét? A kérdést motiválja, hogy a gyakorlatban ilyen jellegű problémák gyakran úgy merülnek fel, hogy valamilyen adott sorrendben kapunk intervallumokat, és azonnal kell hozzájuk színosztályt megjelölni.

MEGJEGYZÉS: Kierstead és Trotter ([11]) adott sorrendben érkező intervallumokra talált egy nem mohó algoritmust (On-line algoritmus), mely szintén azonnal megad egy színosztályt a soronkövetkező intervallumhoz, és összesen legfeljebb $3\omega-2$ színt használ. Mint látni fogjuk, ez tehát általában hatékonyabb a mohó algoritmusnál. Ugyanakkor a hozzárendelés szabálya bonyolultabb, mint a mohó algoritmus esetében.

A mohó algoritmus által nyert színezésekre Woodall ([19]) vezette be a következő elnevezéseket: Minden intervallumot tekintsünk egy *téglának*, a teljes, kiszínezett intervallumrendszert pedig egy *falnak*. A fal *szintjei* a színosztályok. A színek száma a fal *magassága*. Mivel megengedett színezésről van szó, egy szint téglái diszjunkt intervallumok. Azt, hogy a színezést mohó algoritmussal kaptuk, az fejezi ki, hogy a fal "megáll" abban az értelemben, hogy minden téglát minden alacsonyabb szinten *támaszt* egy másik tégla, vagyis tetszőleges intervallumhoz minden kisebb indexű színosztályban van őt metsző intervallum. Könnyen látható, hogy a falak fogalma egyenértékű a mohó algoritmusból kapott színezések fogalmával. Az ugyanis nyilvánvaló, hogy minden mohó színezés falat ad meg. Ugyanakkor minden falhoz létezik tégláinak olyan sorrendje, melyet követve a mohó színezés épp a falnak megfelelő színezést adja: például haladjunk szintenként alulról felfelé, egy szinten belül pedig tetszőleges sorrendben.
Új elnevezéseinkkel kérdésünk tehát, hogy rögzített ω mellett legfelejebb milyen magas fal készíthető.

MEGJEGYZÉS: Vegyük észre, hogy mint a színezés, a mohó színezés és így a fal is olyan fogalom, mely egy hipergráf metszetgráfján is definiálható. Az ebben a fejezetben tárgyalt kérdések tehát szintén gráfelméleti kérdésként is kezelhetőek volnának. Így most is hasznát vehetjük az 1.1. lemmának.

Ebben a fejezetben először bemutatjuk a legjobb ma ismert felső becslést. Ezután megnézzük, hogy ezen kérdés vizsgálatakor hogyan lehet segítségünkre a duzzasztás módszere. Végül általánosítjuk a duzzasztás módszerét, és ezt egy példán keresztül illusztráljuk.

3.1. Egy lineáris becslés

A célunk, hogy becslést adjunk a mohó algoritmus hatékonyságára, vagyis arra, hogy ω-tól függően legfeljebb milyen magas fal készíthető. Woodall ([19]) megfogalmazta a sejtést, hogy a szintek száma legfelejbb $c\omega$ valamilyen c konstanssal. Először azonban csak nemlineáris becsléseket sikerült adni: $c(\varepsilon)\omega^{1+\varepsilon}$ minden ε-ra ([18]) majd $6\omega log_2\omega$ (W. Just, leírva itt: [9]). Woodall sejtését először Kierstead bizonyította be ([12]), méghozzá $c = 40$-nel. Később az együtthatót sikerült lecsökkenteni 25.72-re ([13]). 2003-ban Pemmaraju, Raman és Varadarajan ([16]) egy teljesen új megközelítést dolgoztak ki, mely $c = 10$-re bizonyítja az állítást. Ezen módszeren kicsit javítva Brightwell, Kierstead és Trotter ([1]) $c = 8$-at is megmutatták, máig ez a legjobb ismert becslés. A bizonyítás kicsit más kontextusba helyezve és bizonyos szempontból leegyszerűsítve megtalálható itt: ([15]). Az alábbi bizonyítás e két utóbbi munka elemeiből és egyes további módosításokból állt össze.

Megjegyzés: A c konstansra alsó becslések is ismertek: 3, $\frac{4}{\sqrt{17}-3}$ ([19]), 4 ([18]),4.4 ([2]), $5-\varepsilon$ $(\forall\varepsilon > 0)$ (Gyárfás A. közlése alapján).

3.1. Tétel. *Egy egyenesen vett $\mathcal{I}$ intervallum-hipergráf intervallumait a mohó algoritmus legfeljebb $8\omega(\mathcal{I}) - 3$ színnel színezi.*

Bizonyítás: Legyen $\mathcal{I}$ egy egyenesen vett zárt intervallum-hipergráfból készült fal, ahol $\Phi(f)$ az $f \in \mathcal{I}$ intervallum szintje. A fal magasságát jelölje h. Legyen $T \subseteq \mathbb{R}$ az $\mathcal{I}$ intervallumainak véges lefogása, tehát $\forall f \in \mathcal{I}\ \exists t \in T$, hogy $t \in f$.
A következőkben definiálni fogunk egy algoritmust, az ún. Academic algoritmust, mely minden $t \in T$ ponthoz és minden $i \in \mathbb{Z}^+$ szinthez (ahol megengedjük, hogy $i > h$ legyen) az $\{A, B, C, D\}$ jegyek valamelyikét rendeli. Ezt a jegyet jelölje $s_t(i)$. Adott t re az $s_t := (s_t(i))_{i=1}^{\infty}$ sorozatot egy *oszlopnak* nevezzük. Az algoritmus a szinteken alulról felfelé haladva rekurzívan adja meg az $s_t(i)$ jegyeket. D-t a *bukás* jegyének fogjuk nevezni. Ha egy oszlopban valahol D szerepel, akkor tőle fölfelé mindig D szerepel. Ha $s_t(i) = D$, akkor azt mondjuk, hogy az s_t oszlop az i szinten *megbukik.* Ha s_t az i szinten nem bukik meg, akkor azt mondjuk, hogy az i szinten *átmegy.*
Ha $t_1 < t_2$ esetén s_{t_1} és s_{t_2} az i szinten átmennek, de minden $t_1 < t < t_2$-re s_t az i szinten megbukik, akkor azt mondjuk, hogy s_{t_1} és s_{t_2} az i szinten *szomszédok*, s_{t_1} az i szinten *megelőzi* s_{t_2}-t és s_{t_2} *követi* s_{t_1}-et. Világos, hogy egy oszlopnak egy szinten legfeljebb két szomszédja lehet.
Az Academic algoritmus $i = 1$-től kezdve a szinteken alulról felfelé halad. Egy i szinten belül a következő módon adja meg az $s_t(i)$ értékeket: Adunk egy feltételt, melyet ha egy adott t érték teljesít, $s_t(i)$ értékét A-nak választjuk. Minden

t értékre ellenőrizzük a feltételt. Csak azon t értékekre, melyekre nem teljesült, egy újabb feltételt ellenőrzünk, melynek teljesülése esetén $s_t(i)$ értékét B-nek választjuk. Azon t értékekre, melyekre az utóbbi feltétel sem teljesült, egy harmadik feltételt ellenőrzünk, melynek teljesülése esetén $s_t(i) = C$ egyébként $s_t(i) = D$.
A feltételek a következők:

- A **feltétel**: Ha s_t átmegy az $i-1$ szinten (vagy $i = 1$) és létezik $f \in \mathcal{I}$ intervallum, melyre $t \in f$ és $\Phi(f) = i$, akkor legyen $s_t(i) = A$.
- B **feltétel**: Ha s_t átmegy az $i-1$ szinten és valamely $j \leq i-1$-re az $s_t(j), s_t(j+1), ..., s_t(i-1)$ jegyeknek több mint $\frac{1}{4}$-e A, akkor legyen $s_t(i) = B$, méghozzá a $[j, i-1]$ szintek *alapján.* (Előfordulhat, hogy $s_t(i) = B$ több szinthalmaz alapján is.)
- C **feltétel**: Ha s_t átmegy az $i-1$ szinten, és ott van olyan szomszédja, mely az i szinten A jegyet kapott, akkor legyen $s_t(i) = C$. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a megfelelő szomszéd *segíti* s_t-t az i szinten. (Előfordulhat, hogy s_t-t két szomszédja is segíti.)

A feltételekből nyilvánvaló, hogy ha s_t megbukik egy szinten, akkor minden fölsőbb szinten is. Az is világos, hogy egy bizonyos szint fölött minden s_t megbukik, hiszen a h szint fölött már A jegyek nincsenek, így C jegyek sem lehetnek. És ha egy szint fölött nincsenek A jegyek, akkor egy bizonyos még magasabb szint fölött már B jegyek sem lehetnek, hiszen az A jegyek aránya kicsi lesz. Ezen kívül vegyük észre, hogy ha egy szinten s_t jegye A, akkor a következő 3 szinten is átmegy és jegye A vagy B, mert legalábbis a B feltétel biztosan teljesül. Szükségünk lesz arra is, hogy ha $s_t(i) = B$ a $[j, i-1]$ szintek alapján, akkor mivel definíció szerint az $s_t(j), s_t(j+1), ..., s_t(i-1)$ jegyeknek több mint $\frac{1}{4}$-e A, az $s_t(j), s_t(j+1), ..., s_t(i-1), s_t(i)$ jegyeknek még mindig legalább $\frac{1}{4}$-e A.

3.2. Lemma. *Minden $f \in \mathcal{I}$ intervallumra létezik $t \in T$, hogy s_t átmegy a $\Phi(f)$ szinten.*

Bizonyítás: Az állítást $\Phi(f)$-re vonatkozó indukcióval bizonyítjuk. Ha $\Phi(f) = 1$, akkor mivel T lefogó halmaz, $\exists t \in T$ melyre $t \in I$. Az Academic algoritmus definíciójából nyilvánvaló, hogy $s_t(1) = A$ és így s_t átmegy az 1 szinten.
Most tegyük fel, hogy valamely $f \in \mathcal{I}$ intervallum szintje alatt minden $g \in \mathcal{I}$ intervallumra teljesül a lemma feltétele, vagyis létezik $t \in T$, hogy s_t átmegy a $\Phi(g)$ szinten.
Ekkor egy belső indukcióval azt fogjuk megmutatni, hogy $\forall i \leq \Phi(f)$-re $\exists t \in T$, hogy $t \in f$ és s_t átmegy az i szinten. Az világos, hogy ha egy ilyen s_t átmegy az $\Phi(f) - 1$ szinten, akkor a $\Phi(f)$ szinten is. Tehát elég $i \leq \Phi(f) - 1$-ig vezetni az indukciót.
Ha s_t-t úgy tekintjük, hogy átmegy a 0 szinten $\forall t$-re, akkor ezt tekinthetjük az indukció kezdőlépésének, és innen már működni fog az indukciós lépés. Tegyük

fel, hogy valamely $i \leq \Phi(f) - 1$ esetén létezik $t \in T$, hogy s_t átmegy az $i-1$ szinten. Az ilyen t-k halmazát jelölje T_0. Mivel az i szint alacsonyabb, mint az f intervallum szintje, létezik $g \in \mathcal{I}$, mely az i szinten van és támasztja f-et. (Az egész bizonyításban itt és csak itt használjuk ki az alátámasztási tulajdonságot, vagyis hogy falról van szó.) A külső indukció feltevése teljesül g-re, hisz f-nél alacsonyabb szinten van, így létezik $t \in T$, hogy $t \in g$ és t átmegy az $i = \Phi(g)$ szinten. Az ilyen t-k halmaza legyen T_1.
Így T_0 elemei f-ben vannak, és átmennek az $i-1$ szinten, míg T_1 elemei g-ben vannak és még az i szinten is átmennek. Világos, hogy ha $T_0 \cap T_1 \neq \emptyset$, akkor a közös elem f-be esik és átmegy az i szinten, amivel az indukciós lépést beláttuk. Feltehetjük tehát, hogy $T_0 \cap T_1 = \emptyset$. Könnyen látható, hogy ekkor T_0 elemei nincsenek g-ben és T_1 elemei nincsenek f-ben. Mivel f és g intervallumok, ezért T_1 elemei mind kisebbek, vagy mind nagyobbak, mint T_0 elemei. Feltehetjük például az előbbit. Ekkor legyen t_1 a T_1 legnagyobb, t_0 a T_0 legkisebb eleme. Ekkor t_1 és t_0 az $i-1$ szinten szomszédok, hiszen f és g metszik egymást. Így s_{t_0}-ra az i szinten teljesül a C feltétel, tehát s_{t_0} az i szinten is átmegy. A belső indukciós lépést beláttuk, ezzel a külső indukciós lépést is, ezzel pedig a 3.2. lemmát.

□

A 3.2. lemma legfőbb következménye, hogy létezik $t \in T$, melyre s_t átmegy a h szinten, sőt korábbi észrevételünk miatt olyan is létezik, mely a $h+3$ szinten is átmegy. Rögzítsük t-t mostantól olyannak, hogy s_t a lehető legmagasabb szintig jusson el. Legyen ez a szint h', e fölött tehát minden oszlop megbukik. Az Academic algoritmus definíciója miatt az s_t oszlopban szereplő A jegyek száma (jelöljük a-val) felülről becsüli ω-t. Ekkor a tétel állításához elegendő belátni, hogy $\frac{h'}{8} \leq a$, ugyanis ekkor $h+3 \leq h' \leq 8a \leq 8\omega$. A bizonyítás hátralévő részében tehát ezt az egyenlőtlenséget igyekszünk belátni.
Jelölje az s_t oszlopban szereplő B jegyek számát b, a C jegyek számát pedig c (D jegy a h' szintig nem szerepel). Ekkor $h' = a + b + c$.
Becsüljük felülről először c-t. Az s_t oszlopban attól szerepelhet C egy szinten, hogy ott az s_t-t egy szomszédja segíti. Először becsüljük meg, hogy hányszor segítheti s_t-t olyan szomszédja, mely megelőzi. Nyilván ugyanez a becslés lesz érvényes azon szomszédokra, melyek követik. Osszuk fel a h' szintet szakaszokra aszerint, hogy éppen melyik oszlop előzi meg s_t-t. Elképzelhető, hogy a legfelső néhány szinten nincs s_t-t megelőző oszlop, ezeken a szinteken tehát s_t-t megelőző oszlop egyáltalán nem segítheti s_t-t. Nyilván azon szintek halmaza, ahol két oszlop szomszédos, egy intervallum, mely attól kezdődik el, hogy valamely köztes oszlop megbukik, és attól végződik, hogy a két szomszéd valamelyike megbukik. Tegyük fel, hogy valamely $t' < t$-re az $s_{t'}$ a $[j, i-1]$ szinthalmazon előzi meg s_t-t. Ekkor $s_{t'}$ az i szinten megbukott, tehát speciálisan a B feltétel nem teljesül, tehát speciálisan a $[j, i-1]$ szintek alapján $s_{t'}(i)$ nem lett B, tehát az $s_{t'}(j), s_{t'}(j+1), ..., s_{t'}(i-1)$ jegyeknek legfeljebb $\frac{1}{4}$-e A. De ez minden szakaszra teljesül, így az s_t oszlopot megelőző oszlopok segítségének köszönhető B-k száma s_t-ben legfeljebb $\frac{h'}{4}$. Ugyanez teljesül az s_t-t követő oszlopokra is,

összesen tehát $c \leq \frac{2h'}{4} = \frac{h'}{2}$, vagyis $a + b \geq \frac{h'}{2}$
Becsüljük most alulról az A-k arányát az A és B jegyek között. Válasszuk ki az s_t oszlop egyes szakaszait. Fölülről lefelé haladunk a h' szinttől. Az első szakasz a legfelső B jegytől kezdődjön, mely mondjuk az i szinten található (efölött csak C jegyek szerepelhetnek). Az $s_t(i)$ mondjuk a $[j, i-1]$ szinthalmaz alapján lett B. Az első szakasz álljon s_t-nek a $[j, i]$ szinteken található elemeiből, valamint ha a j szint alatt közvetlenül szerepel néhány A, ezeket is vegyük hozzá az első szakaszhoz. Az $[j, i]$ szinteken az A jegyek aránya korábbi megjegyzésünk alapján legalább $\frac{1}{4}$, így az esetleges A jegyek hozzávétele után is a szakaszban az A jegyek aránya legalább $\frac{1}{4}$. Ezután ismét haladjunk lefelé a szakasz aljától, amíg nem találunk újabb B-t s_t-ben (közben csak C jegyek szerepelhetnek), ahol a második szakasz kezdődik. A második szakaszt ugyanúgy jelöljük ki, mint az elsőt: a B jegy, azon szintek jegyei, amelyek alapján a B jegy keletkezett és még esetleg néhány A. És így tovább. Minden szakaszban az A jegyek aránya legalább $\frac{1}{4}$, így a szakaszokban együttesen is. Ugyanakkor a szakaszok csak C jegyeket hagytak ki, vagyis az összes A és B jegyet lefedik. Így az A és B jegyek között az A-k aránya legalább $\frac{1}{4}$. És mivel $a + b \geq \frac{h'}{2}$, így $a \geq \frac{h'}{8}$

□

3.2. A mohó algoritmus vizsgálata a duzzasztás módszerével

Ahhoz, hogy a duzzasztás módszerét alkalmazhassuk, mint korábban megjegyeztük, az egyenes helyett az (a, b) szakaszon vett nyílt intervallum-hipergráfokról érdemes beszélni. Milyen korlátok mellett végezhetnénk duzzasztást, hogy ezzel a mohó algoritmust tudjuk vizsgálni? Azt kéne kikötni, hogy az $\mathcal{I}$ nyílt intervallum-hipergráf egy konkrét mohó színezése a duzzasztás után is mohó színezés legyen. Más szóval egy fal tégláit akarjuk úgy duzzasztani, hogy továbbra is falat kapjunk.
Ehhez voltaképpen annyi kell, hogy egy intervallum duzzasztásakor ne metsszen vele egy szinten lévő intervallumot. Hiszen ez a feltétel biztosítja, hogy a szintek a felduzzasztott intervallum-hipergráfon is megengedett színezést adjanak meg. Az a tulajdonság, hogy ez a színezés mohó algoritmusból származtatható, vagyis hogy a fal "megáll", automatikusan megmarad. Hiszen ha az f intervallumot minden alsóbb szinten alátámasztotta egy intervallum, ez az f duzzasztásával nem változik. És ha f alátámaszott egy felsőbb szinten lévő g intervallumot, ez sem változik f duzzasztásával.
Ha egy fal magasságát akarjuk becsülni ω függvényében, akkor a duzzasztás korlátjává tesszük még azt is, hogy ω ne változzon (elég, hogy ne nőjön, hisz csökkenni nem tud). A fal magassága a duzzasztástól nem tud változni. Vegyük észre, hogy e két feltétel (egy szinten lévő intervallumok ne metsszék egymást, ω ne változzon) a metszetgráfra jellemző, így alkalmazható a duzzasztás módszere. Elég tehát ezen két feltétel mellett maximálisra duzzasztott falakat

vizsgálni.

3.3. Lemma. *A fenti feltételek mellett maximálisra duzzasztott intervallum-hipergráfok az (a, b) szakasz minden (az intervallum-végpontokon kívüli) pontját ω-szor fedik.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy a maximálisra duzzasztott $\mathcal{I}$ fal egy $p \in \mathbb{R}$ pontot (mely nem intervallum-végpont) kevesebb, mint ω-szor fed. Mint az 1.2. tétel második bizonyításában megmutattuk, $\mathcal{I}$ Helly-tulajdonságú, így van olyan $r \in \mathbb{R}$ pont, melyet ω-szor fed. Tegyük fel például, hogy $p < r$. Ekkor van olyan i szint, hogy a p pontot az i szinten nem fedi intervallum, de az i szinten p-től jobbra van intervallum. Az összes ilyen i szint összes ilyen intervalluma között vegyük azt az $f = (a_1, b_1)$ intervallumot, melyre a_1 a lehető legkisebb. Ekkor $\mathcal{I}$ intervallumai a p és a_1 közé eső pontokat is kevesebb, mint ω-szor fedik. Így f-et duzzaszthatjuk tovább a_1-nél. Ez lehetetlen, hisz $\mathcal{I}$ maximálisra duzzasztott falból indultunk ki.

$\square$

Egy fal magasságának becslésekor így feltehető, hogy a fal az intervallum-végpontokon kívül minden pontot ω-szor fed. Készítsünk például egy fal alapján a 3.1. tétel bizonyításához hasonló módon egy táblázatot. Oszlopai legyenek az (a, b) azon kis szakaszai, melyekre az $\mathcal{I}$ fal intervallumainak végpontjai osztják, sorai pedig a szintek. Egy cellába kerüljön 1, ha az (a, b) megfelelő szakaszán a megfelelő szinten található intervallum, és 0 ha nem. Ekkor a 3.3. lemma miatt $\frac{\omega}{h}$ becsléséhez (h a fal magassága) elegendő volna a táblázat összes elemének átlagát, vagyis a fal "sűrűségét" alulról becsülni.

3.3. A duzzasztás módszerének általánosítása

A duzzasztás módszerének természetes általánosítása következő: Adott egy intervallum-hipergráf és adottak megengedett transzformációs lépések, melyek egy intervallum-hipergráfból egy másikat csinálnak. Ilyen lépéseket tetszőleges sorrendben alkalmazunk a hipergráfra, egészen addig, amíg elakadunk. Természetesen meg kell mutatni, hogy akármilyen intervallum-hipergráfból indulunk ki és akárhogy választjuk a lépéseket, véges sok lépésben elakadunk.
Ha a megengedett lépéseket megfelelően választjuk meg, egy kérdés eldöntéséhez elegendő lehet az azon transzformációs lépésekre nézve szélsőséges hipergráfok vizsgálata. Szerencsés esetben ezekre a szélsőséges hipergráfokra szép tulajdonságok teljesülnek, melyek leegyszerűsítik a kérdés eldöntését.
Az (a, b) intervallumon vett nyílt intervallum-hipergráf duzzasztása esetében a megengett lépés az, hogy egy tetszőleges intervallum tetszőleges végpontját adott feltételek mellett maximálisan kitolhatjuk. Általánosságban beláttuk, hogy ha a feltételek csak a metszetgráf tulajdonságaira vonatkoznak, akkor a lépés értelmes, vagyis mindegyik intervallum mindegyik végpontja kitolásának

létezik maximuma, a duzzasztás pedig véges sok lépésben véget ér.
Az általános módszerre következzék egy példa, méghozzá egy lemma, melyet Gyárfás A. és Lehel J. ([7]) a mohó algoritmus hatékonyságának becslése céljából bizonyított be. Ehhez először szükségünk lesz néhány definícióra.
Legyen egy tetszőleges $\mathcal{H}$ hipergráfra $\nu(\mathcal{H})$ a $\mathcal{H}$ beli független, vagyis egymást páronként nem metsző élek maximális száma. Egy $\mathcal{I}$ fal $f \in \mathcal{I}$ intervallumára legyen f^+ azon intervallumokból álló hipergráf, melyeket f támaszt, vagyis amelyek metszik f-et és felsőbb szinten vannak. Egy $\mathcal{I}$ falat n-típusúnak nevezünk ($n \in \mathbb{Z}^+$), ha minden $f \in \mathcal{I}$ intervallumra $\nu(f^+) \leq n$.
Világos, hogy ahogy n nő, az n-típusú falak osztálya is bővül. Ugyanakkor érdekes módon a $\frac{h}{\omega}$ arány felső korlátja alsó becsléseihez konstruált összes "magas" fal 1-típusú. Gyárfás és Lehel lemmája lényegében azt mondja ki, hogy a felső korlát becsléseihez elegendő 3-típusú falakat vizsgálni:

3.4. Lemma. *Minden egyenesen vett nyílt intervallum-hipergráfból készült $\mathcal{I}$ falhoz létezik olyan $\mathcal{I}'$ 3-típusú fal, hogy magasságuk megegyezik, és $\omega(\mathcal{I}') \leq \omega(\mathcal{I})$.*

Bizonyítás: Az $\mathcal{I}$ hipergráfra a következő transzformációs lépést engedjük meg:
Vegyünk egy f intervallumot az i szinten, melyre $k := \nu(f^+) \geq 4$. Ekkor választhatóak $g_1, g_2, ..., g_k$ diszjunkt intervallumok f^+-ból. $\mathcal{I}$-t módosítsuk a $\mathcal{J}$ fallá a következő módon: vegyük ki az f intervallumot, és helyette ugyanarra a szintre helyezzük az $f \cap conv(g_1, g_2), f \cap g_3, f \cap g_4, ..., f \cap g_{k-2}, f \cap conv(g_{k-1}, g_k)$ intervallumokat, ahol *conv* konvex burkot jelent.
Ekkor $\mathcal{J}$ fal. Egyrészt az új intervallumok minden alsóbb szinten alá vannak támasztva, hiszen mindegyik tartalmazza a $g_2, g_3, ..., g_{k-1}$ intervallumok valamelyikét, melyeket $\mathcal{I}$-ben, így $\mathcal{J}$-ben is minden i alatti szinten alátámaszt egy intervallum. Másrészt f kicserélése egyetlen intervallum támasztását sem szünteti meg. Ugyanis ha volna f által alátámasztott, vagyis f^+-beli intervallum, mely az új intervallumok mindegyikétől diszjunkt, akkor az a $g_1, g_2, ..., g_k$ intervallumoktól is diszjunkt volna. Ez pedig lehetetlen, hiszen f^+-ban $g_1, g_2, ..., g_k$ maximális független rendszer. Világos, hogy $\omega(\mathcal{J}) \leq \omega(\mathcal{I})$.
Most azt mutatjuk meg, hogy $\mathcal{I}$-t ilyen transzformációs lépésekkel alakítva véges sok lépésben elakadunk. A lépések során új intervallum-végpont nem keletkezik. Így a rendszer intervallumai számának van egy fix felső korlátja. Márpedig egy lépés során a rendszer intervallumainak száma nő.
Így bármely $\mathcal{I}$ falból kiindulva véges sok lépésben elakadunk az $\mathcal{I}'$ falnál. A lépések során ω nem nőtt, így $\omega(\mathcal{I}') \leq \omega(\mathcal{I})$. Elakadni pedig csak akkor tudunk, ha $\mathcal{I}'$-ben nincs a lépésben szereplő f intervallum, vagyis olyan intervallum, melyre $\nu(f^+) \geq 4$. Így $\mathcal{I}'$ 3-típusú.

□

A transzformációkra nézve szélsőséges intervallum-hipergráfok módszere azonban egyszerre többféle transzformációs lépést is megenged. Így a 3.3. és a 3.4. lemmák eredményeit kombinálhatjuk:

3.5. Lemma. *Minden az (a, b) intervallumon vett nyílt intervallum-hipergráfból készült $\mathcal{I}$ falra létezik olyan $\mathcal{I}'$ fal, mely $\mathcal{I}$-vel azonos magasságú, $\omega(\mathcal{I}') \leq \omega(\mathcal{I})$, és 3-típusú, valamint az intervallum-végpontok kivételével az (a, b) minden pontját $\omega(\mathcal{I}')$-ször fedi.*

Bizonyítás: Vegyünk az (a, b) intervallumon egy tetszőleges nyílt intervallum-hipergráfból készült $\mathcal{I}$ falat. Engedjük meg most transzformációs lépésként egyrészt tetszőleges intervallum tetszőleges végpontjának maximális olyan kitolását, melytől ω nem változik és az intervallum nem metsz más, azonos szinten lévő intervallumot (*duzzasztás*). Másrészt engedjük meg a 3.4. lemma bizonyításában leírt módosítást (*csere*). Mint a 3.3. és a 3.4. lemma bizonyításában megmutattuk, e két lépés értelmes, falból falat csinál, a magasságon nem változtat és ω-t nem növeli.
Meg kéne mutatni, hogy e két fajta lépés tetszőleges sorozata véges sok lépésben elakad. Mindkét lépés olyan, hogy új végpont nem keletkezik, így most is van az intervallumok számának egy olyan felső korlátja, mely csak a kiindulási faltól függ. Ugyanakkor míg a duzzasztás nem változtatja az intervallumok számát, a csere növeli. Így lépések tetszőleges sorozatában csak véges sok csere szerepelhet. Az utolsó csere után tehát már csak duzzasztási lépés következhet. De mivel nem keletkezik új végpont, az utolsó csere után egy intervallumot csak véges sokszor duzzaszthatunk, így az utolsó csere után összesen is csak véges sok duzzasztás következhet. Tehát a transzformálási folyamat véges sok lépésben elakad az $\mathcal{I}'$ falnál.
Az $\mathcal{I}'$ falra már egyik fajta lépés sem alkalmazható, így mint a 3.3. és a 3.4. lemma bizonyításában megmutattuk, $\mathcal{I}'$ 3-típusú, és az intervallum-végpontok kivételével az (a, b) minden pontját $\omega(\mathcal{I}')$-ször fedi.

$\square$

A 3.5. lemma azt mutatta meg, hogy a $\frac{h}{\omega}$ arány tetszőleges falakra vonatkozó legkisebb felső korlátja megegyezik az olyan (a, b) intervallumon vett falakra vonatkozó legkisebb felső korlátjával, melyek 3-típusúak és az intervallum-végpontok kivételével (a, b) minden pontját ω-szor fedik. A felső korlát becsléséhez elég tehát ilyen falakat vizsgálni.

Hivatkozások

[1] G. R. Brightwell, H. A. Kierstead, W. T. Trotter, A note on first fit coloring of interval graphs, manuscript, (2003)

[2] M. Chrobak, M. Slusarek, On some packing problems related to dynamic storage algorithm, preprint, (1984)

[3] P. C. Gilmore and A. J. Hoffman, A characterization of comparability graphs and interval graphs, *Canadian J. Math.* **16** (1964), 539-548.

[4] D. R. Fulkerson and O. A. Gross, Incidence matrices with the consecutive 1's property, *Bull. Amer. Math. Soc.* **70** (1965), 681-684.

[5] F. Gavril, Algorithms on Circular Arc Graphs, *Networks* **4** (1974), 357-369.

[6] M. R. Garey, D. S. Johnson, G. L. Miller, C. H. Papadimitriou, The complexity of coloring circular arcs and chords, Technical Report, Bell Labs., Murray Hills, NJ, (1979)

[7] A. Gyárfás, J. Lehel, On a special Case of the Wall Problem, *Congressus Numerantium* **67** (1988), 167-174.

[8] A. Hajnal, J. Surányi, Über die Auflösung von Graphen in vollständige Teilgraphen, *Annales Univ. Sci. Budapest, Eötvös Sect. Math.* **1** (1958), 115-123.

[9] A. Gyárfás, Combinatorics of Intervals, *nincs publikálva*, (2007)

[10] I. A. Karapetian, On coloring circular arc graphs (Oroszul), *Dokl. Akad. Nauk Armjan. SSR* **5** (1980), 306-311.

[11] H. A. Kierstead, W. T. Trotter, An extremal problem in recursive combinatorics, *Congressus Numerantium* **33** (1981), 143-153.

[12] H. A. Kierstead, The Linearity of First-fit Coloring of Interval Graphs, *SIAM J. Disc. Math.* **1** (1988), 526-530.

[13] H. A. Kierstead, J. Qin, Coloring Interval Graphs with First-Fit, *Discrete Math.* **144** (1995), 47-57.

[14] C. G. Lekkerkerker and J. Ch. Boland, Representation of a finite graph by a set of intervals on the real line, *Fund. Math.* **51** (1962), 45-64.

[15] N. S. Narayanaswamy, R. Subhash Babu, A note on first-fit coloring of interval graphs, *Order*, **25** (2008), 49-53.

[16] S. V. Pemmaraju, R. Raman, K. Varadarajan, Buffer Minimization using Max-Coloring, preprint, (2003)

[17] A. Tucker, Applied Combinatorics, John Wiley, (1984)

[18] H. S. Witsenhausen, On Woodall's interval problem, *J. Combinatorial Theory Ser. A.* **21** (1976), 222-229.

[19] D. R. Woodall, Problem 4. in: Combinatorics, Proc. British Combinatorial Conference (1973) London Math. Soc. Lecture Notes 13, Cambridge U. Press, (1974), 202.