Morita-ekvivalencia

Szakdolgozat

Nagy Levente

Témavezető:
Ágoston István
Algebra és Számelmélet Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2009

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

A szakdolgozat témája a Morita-ekvivalencia, mely fogalom először Morita [5] cikkében jelent meg. Az elmélet központi kérdése, hogy mikor létezik az R és S gyűrűk modulusainak kategóriái között kategória-ekvivalencia. A választ Morita tétele szolgáltatja, amiből az derül ki, hogy egy "jó" tulajdonságokkal bíró P R-S-bimodulus létezése szükséges és elégséges feltétele a kategóriák ekvivalenciájának. Mint látni fogjuk, számos modulus- és gyűrűfogalom Morita-invariáns, azaz egy modulus, illetve gyűrű akkor és csak akkor rendelkezik vele, ha a modulus ekvivalenciánál vett képe, illetve az ekvivalens gyűrű is. Egy tulajdonság Morita-invarianciájának ismerete akkor tud kifejezetten hasznos lenni, ha egy vizsgálandó gyűrűről belátjuk, hogy Morita-ekvivalens egy már jól ismert vagy könnyebben tanulmányozható gyűrűvel, amiről már tudjuk vagy egyszerűen beláthatjuk, hogy rendelkezik-e a tulajdonsággal.

A szakdolgozat a következőképpen épül fel:
A 2. és 3. fejezetben található egy rövid összefoglaló a szükséges modulus-, gyűrű- és kategóriaelméleti fogalmakról. Csak a legszükségesebbek szerepelnek, valamint bizonyos állítások is csak kimondásra kerülnek, hivatkozva a bizonyításra.
A 4. fejezetben szerepel a Morita-ekvivalencia vizsgálata. Megismerjük a kezdeti lépések megtételéhez szükséges ϕ és θ leképezéseket, melyek használatával bővebb információt nyerünk az ekvivalenciát létesítő funktorokról és a modulusok, illetve a funktornál vett képeik egyes tulajdonságainak megőrződéséből. Ezután következnek a fő tételek és következményeik.
Az 5. fejezetben folytatjuk a Morita-invariáns modulus- és gyűrűtulajdonságok taglalását. Látni fogjuk, hogy egy modulusnak és az ekvivalenciánál vett képének részmodulus-hálója izomorf, ugyanez igaz a gyűrűk ideálhálójára is. Szerepelni fog, hogy a kommutatív gyűrűk Morita-ekvivalenciájából az izomorfiájuk is következik. A fejezetben szereplő további eredmények a tulajdonságok kategóriaelméleti definiálhatóságának kihasználásából származnak.
A 6. fejezetben mutatunk egy példát gyűrűk egy olyan osztályára (ezek a szemiperfekt gyűrűk), amiben minden gyűrűhöz létezik egy (izomorfizmus erejéig) egyértelmű gyűrű (a szemiperfekt gyűrű bázisgyűrűje), amivel az Morita-ekvivalens, sőt, két szemiperfekt gyűrű akkor és csak akkor Morita-ekvivalens, ha a bázisgyűrűik izomorfak.
A szakdolgozat írása során nagyrészt az [1] könyvre, kisebbrészt a [3] könyvre támaszkodtam.

Ezúton is szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Ágoston Istvánnak, aki értékes ötleteivel és megjegyzéseivel segített a szakdolgozat elkészítésében.

2. fejezet

Gyűrűk és modulusok

Ebben a fejezetben röviden ismertetjük a szakdolgozatban később használt fogalmakat. Bizonyos állításokat nem bizonyítunk, egyrészt terjedelmi okok miatt, másrészt nem szeretnénk túlságosan eltávolodni a szakdolgozat központi témájától. Az érdeklődő olvasó minden részletet megismerhet [1]-ből.

2.1. Gyűrűk

Feltételezzük, hogy az olvasó ismeri a gyűrűk és modulusok elméletének alapjait. A következő megállapodásokat tesszük: gyűrű alatt mindig egységelemes gyűrűt értünk. Az egységelemet 1-gyel jelöljük, illetve 1_R-rel, ha ki akarjuk hangsúlyozni, hogy az R gyűrű egységeleme. A részgyűrű definíciójába beleértjük, hogy az egységelem is benne van a részgyűrűben. Ha S részgyűrű, akkor ezt így jelöljük: $S \leq R$, illetve ha valódi részgyűrű, akkor $S < R$. Ha I az R gyűrű egy ideálja, akkor azt így jelöljük: $I \lhd R$. Ha R és S gyűrűk izomorfak, akkor $R \cong S$-t írunk. Ha a gyűrűben a szorzás kommutatív, akkor a gyűrűt kommutatív gyűrűnek nevezzük.

2.1.1. Definíció: *Egy R gyűrű R^{op} oppozitgyűrűje az a gyűrű, melynek alaphalmaza és additív struktúrája megegyezik R-ével, de az $(r_1, r_2) \to r_1 * r_2$ szorzást a következőképpen definiáljuk: $r_1 * r_2 = r_2 r_1$. Könnyű meggondolni, hogy ezzel a szorzással R^{op} gyűrűt alkot.*

2.2. Modulusok

Ismertnek feltételezzük a bal és jobb oldali modulus, részmodulus, modulushomomorfizmus definícióját. A bal ill. jobb oldali modulusokat a következőképpen jelöljük: ${}_RM$ ill. M_R (esetleg elhagyva az alsó indexeket). Modulus alatt mindig unitális és általában bal oldali modulust értünk, ha nem, akkor arra külön felhívjuk a figyelmet.

2.2.1. Példák:

a) Legyen R egy gyűrű. R egy bal (jobb) oldali R-modulus lesz, ha M-nek R additív csoportját választjuk és R hatása nem más, mint a gyűrűbeli szorzás balról (jobbról). Az így kapott modulust R bal oldali (jobb oldali) reguláris modulusának nevezzük és ${}_RR$-rel (R_R-rel) jelöljük. Könnyen látható, hogy ${}_RR$ (R_R) részmodulusai az R bal-(jobb-)ideáljai.

b) Ha a gyűrű helyett egy k testet veszünk, akkor a modulusok nem mások, mint a k feletti vektorterek.

c) Minden M bal oldali R-modulus tekinthető egy jobb oldali R^{op}-modulusnak (és fordítva), hiszen ha adott $ra = b$, akkor $a * r$ is legyen b.

d) Legyen $I \lhd R$. Mind I és R/I tekinthető R-modulusnak a nyilvánvaló hatással.

2.2.2. Definíció: *Legyen R gyűrű, M bal oldali R-modulus, ekkor az $Ann_R(M) = \{r \in R : rm = 0 \ \forall m \in M\text{-re}\}$ halmaz ideál, melyet M annulátor-ideáljának nevezünk.*

2.2.3. Definíció: *Legyenek M_α-k R-modulusok, ahol α végigfut egy I indexhalmazon. M_α-k direkt szorzatán azt az M modulust értjük, melyre léteznek olyan $\pi_\alpha : M \longrightarrow M_\alpha$ homomorfizmusok, melyek teljesítik a következőt: tetszőleges N modulusra és $f_\alpha : N \longrightarrow M_\alpha$ homomorfizmusokra egyértelműen létezik egy $f : N \longrightarrow M$ homomorfizmus, hogy $f_\alpha = \pi_\alpha f$. Jelölése: $\prod_I M_\alpha$, illetve K^I, ha $M_\alpha = K$ minden α-ra.*

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dl, "f_\alpha"'] \arrow[d, "f"] \\ M_\alpha & M \arrow[l, "\pi_\alpha"] \end{tikzcd}$$

2.2.4. Definíció: *Legyenek M_α-k R-modulusok, ahol α végigfut egy I indexhalmazon. M_α-k direkt összegén azt az M modulust értjük, melyre léteznek olyan $i_\alpha : M_\alpha \longrightarrow M$ homomorfizmusok, melyek teljesítik a következőt: tetszőleges N modulusra és $f_\alpha : M_\alpha \longrightarrow N$ homomorfizmusokra egyértelműen létezik egy $f : M \longrightarrow N$ homomorfizmus, hogy $f_\alpha = f i_\alpha$. Jelölése: $\sum_I M_\alpha$, illetve $K^{(I)}$, ha $M_\alpha = K$ minden α-ra.*

$$\begin{tikzcd} M_\alpha \arrow[r, "i_\alpha"] \arrow[dr, "f_\alpha"'] & M \arrow[d, "f"] \\ & N \end{tikzcd}$$

Közismert, hogy az előbb definiált direkt szorzat fogalma megegyezik a "szokásos" direkt szorzat fogalmával: vesszük az M_α-k Descartes-szorzatának elemeit, és ezeken az elemeken koordinátánként végezzük a műveleteket. A direkt összeg pedig megegyezik a Descartes-szorzat véges sok nem-nulla tagot tartalmazó elemeivel, a műveleteket itt is koordinátánként végezve.

2.2.5. Definíció: *Legyenek G,C és M R-modulusok.*
Azt mondjuk, hogy G generálja M-et, ha van olyan I halmaz, amelyre létezik egy $g : G^{(I)} \longrightarrow M$ epimorfizmus.
Egy G R-modulust generátornak nevezünk, ha minden M R-modulust generál.
Azt mondjuk, hogy C kogenerálja M-et, ha van olyan I halmaz, amelyre létezik egy $c : M \longrightarrow C^I$ monomorfizmus.
Egy C R-modulust kogenerátornak nevezünk, ha minden M R-modulust kogenerál.

Az előbbi fogalmakkal kapcsolatban vegyük észre a következőt: ha $r \in R$ annulálja G-t, akkor G minden direkt összegét is. Ha G generálja M-et, akkor izomorf $G^{(I)}$ egy faktormodulusával, vagyis r M-et is annulálja, tehát $Ann_R(G) \subseteq Ann_R(M)$. Hasonlóan meggondolható, hogy $Ann_R(C) \subseteq Ann_R(M)$.

2.2.6. Állítás: *M akkor és csak akkor hűséges R-modulus, ha M kogenerálja ${}_RR$-et. Ebből következik, hogy M akkor és csak akkor hűséges modulus, ha kogenerálja a végesen generált projektív modulusokat.*

Bizonyítás: [1] 8.22. Proposition. □

2.2.7. Definíció: *Legyen M egy R-modulus. Azt mondjuk, hogy M végesen generált, ha léteznek olyan $m_1, \dots, m_k$ M-beli elemek, hogy minden $m \in M$ előáll $r_1 m_1 + \cdots + r_k m_k$ alakban, alkalmas $r_1, \dots, r_k \in R$ elemekre.*

A későbbiekben szükségünk lesz a végesen generáltság egy (egyszerűen belátható) ekvivalens jellemzésére, mely így fogalmazható meg:

2.2.8. Állítás: *Egy M R-modulus akkor és csak akkor végesen generált, ha részmodulusok minden olyan M_α ($\alpha \in I$) családjára, melyre $M = \sum_I M_\alpha$, létezik olyan $J \subseteq I$ véges részhalmaz, hogy $M = \sum_J M_\alpha$.*

Az előző állítás hálóelméleti nyelven azt mondja, hogy M akkor és csak akkor végesen generált, ha M kompakt elem a részmodulus-hálójában.

2.2.9. Definíció: *Egy P R-modulust progenerátornak nevezünk, ha végesen generált, projektív generátor.*

2.2.10. Definíció: *Legyenek M,N és L R-modulusok, $f : L \longrightarrow M$ és $g : M \longrightarrow N$ homomorfizmusok. Az*

$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$$

sorozat egzakt M-nél, ha $Ker(g) = Im(f)$. Az alábbi diagramot rövid egzakt sorozatnak nevezzük, ha egzakt L-nél,M-nél és N-nél.

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

A könnyű látni, hogy a következő diagram pontosan akkor egzakt, ha f injektív:

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M,$$

míg az alábbi egzaktsága g szürjektivitásával ekvivalens:

$$M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0.$$

2.2.11. Definíció: *Legyenek M,N és P R-modulusok, és $g : P \longrightarrow N$. P-t M-projektívnek nevezzük, ha minden $f : M \longrightarrow N$ szürjektív homomorfizmushoz létezik olyan $\overline{g} : P \longrightarrow M$, hogy $g = f\overline{g}$.*

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, dashed, "\overline{g}"'] \arrow[d, "g"] & \\
M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

P projektív, ha minden M modulusra M-projektív.

2.2.12. Definíció: *Legyenek M,N és Q R-modulusok, és $j : N \longrightarrow Q$. Q-t M-injektívnek nevezzük, ha minden $f : N \longrightarrow M$ injektív homomorfizmushoz létezik olyan $\overline{j} : M \longrightarrow Q$, hogy $j = \overline{j}f$.*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j"] & M \arrow[dl, dashed, "\overline{j}"] \\
 & Q &
\end{tikzcd}$$

Q injektív, ha minden M modulusra M-injektív.

2.2.13. Definíció: *Azt mondjuk, hogy az R gyűrű bal-Artin (jobb-Artin), ha a balideáljaira (jobbideáljaira) teljesül a minimumfeltétel. R-et bal-Noethernek (jobb-Noethernek) nevezzük, ha a balideáljaira (jobbideáljaira) teljesül a maximumfeltétel. R Artin-gyűrű, ha egyszerre bal- és jobb-Artin. R Noether-gyűrű, ha bal- és jobb-Noether egyszerre.*

2.2.14. Definíció: *Legyen M egy R-modulus. M Artin-féle, ha a részmodulusaira teljesül a minimumfeltétel. M Noether-féle, ha a részmodulusaira teljesül a maximumfeltétel.*

A későbbiekben vizsgálni fogunk bizonyos gyűrűtulajdonságokat, ezek során szükségünk lesz a következő két állításra, melyek egy R gyűrű bal-Artinságára (bal-Noetherségére) adnak ekvivalens feltételt. Csak az egyiket bizonyítjuk, a második bizonyítása szinte szó szerint megegyezik az elsővel.

2.2.15. Állítás: *Egy R gyűrűre az alábbiak ekvivalensek:*
a) R bal-Artin
b) minden végesen generált R-modulus Artin.

Bizonyítás: Ha R bal-Artin, akkor definíció szerint ${}_RR$ Artin-modulus és ${}_RR^n$ is az. Ha ${}_RM$ végesen generált modulus, akkor ${}_RR^n$ vagyis egy Artin-modulus homomorf képe, így M is Artin. ${}_RR$ végesen generált R-modulus, ami a feltétel szerint Artin, azaz R bal-Artin. □

2.2.16. Állítás: *Egy R gyűrűre az alábbiak ekvivalensek:*
a) R bal-Noether
b) minden végesen generált R-modulus Noether.

2.2.17. Definíció: *Legyen M R-modulus. M endomorfizmusai az összeadásra és kompozícióra, mint szorzásra nézve gyűrűt alkotnak. Ennek a gyűrűnek az oppozitgyűrűjét nevezzük M endomorfizmusgyűrűjének és $End({}_RM)$-mel jelöljük.*

Legyen $e \in R$ egy nem-nulla idempotens elem, azaz $e^2 = e$. Az ere alakú elemek az R-beli műveletekre nézve gyűrűt alkotnak, melynek egységeleme az e. Ezt a gyűrűt a továbbiakban eRe-vel jelöljük.

2.2.18. Állítás: *Tekintsük Re-t (az e által generált balideált R-ben), mint R-modulust. Ekkor $eRe \cong End({}_RRe)$.*

Bizonyítás: Egy ere elemhez rendeljük azt a $\phi(ere)$ endomorfizmust, melyre $\phi(ere)(se) = sere$. □

2.2.19. Definíció: *Legyen M egyszerre bal oldali R- és jobb oldali S-modulus. Azt mondjuk, hogy M R-S-bimodulus (jelölésben: ${}_RM_S$), ha minden $r \in R$, $s \in S$ és $m \in M$-re $(rm)s = r(ms)$.*

2.2.20. Példa:

a) Tekintsünk egy M R-modulust. Tudjuk, hogy ekkor $End_R(M)$ is gyűrű. Ilyenkor M tekinthető a következő módon egy R-$End_R(M)$-bimodulusnak: rm már adott és $m\phi := \phi(m)$. A bimodulusság feltétele teljesül, mert $(rm)\phi = \phi(rm) = r\phi(m) = r(m\phi)$.

Ha az M bimodulust mint bal oldali R-modulust vizsgáljuk, akkor egy S-beli elemmel való jobbról szorzás ${}_RM$ egy endomorfizmusa lesz, azaz létezik egy $\rho : S \longrightarrow End({}_RM)$ gyűrűhomomorfizmus. Hasonlóan egy r-rel való balról szorzás M_S egy endomorfizmusa lesz, azaz itt is létezik egy $\lambda : R \longrightarrow End(M_S)$ homomorfizmus.

2.2.21. Definíció: *Ha a fenti λ és ρ homomorfizmusok injektívek, akkor ${}_RM_S$-t hűséges bimodulusnak nevezzük. Szürjektív λ és ρ esetén kiegyensúlyozott bimodulusról beszélünk. Ha mindkettő izomorfizmus, akkor hűséges kiegyensúlyozott bimodulusnak hívjuk. Adott M R-modulust kiegyensúlyozottnak nevezzük, ha ${}_RM_{End({}_RM)}$ kiegyensúlyozott bimodulus.*

A következő három állítás és bizonyítása megtalálható [1]-ben: ezek a 17.7.,17.8 és 17.9. Proposition-k (ebben a sorrendben).

2.2.22. Állítás: *Legyen ${}_RQ_S$ hűséges kiegyensúlyozott bimodulus. A következők ekvivalensek:*
a) ${}_RQ$ generátor
b) Q_S végesen generált és projektív.

2.2.23. Állítás: *Egy ${}_RG$ modulus akkor és csak akkor generátor, ha ${}_RG$ kiegyensúlyozott és hű modulus, valamint $G_{End({}_RG)}$ végesen generált és projektív.*

2.2.24. Állítás: *Legyen P egy projektív R-modulus. Ekkor a következők ekvivalensek:*
a) P generátor
b) minden egyszerű R-modulushoz létezik olyan A halmaz, hogy az előáll, mint $P^{(A)}$ homomorf képe.

2.3. Projektív fedés

Tudjuk, hogy minden modulus egy projektív modulus homomorf képe, azonban egyes M modulusokra több is igaz: létezik P projektív modulus és $f : P \longrightarrow M$ szürjektív leképezés, amely "minimális" egy bizonyos értelemben.

2.3.1. Definíció: *Legyen M egy R-modulus és K M egy részmodulusa. K-t kicsinek hívjuk, ha minden L részmodulusra, melyre $K + L = M$, akkor $L = M$. Jelölése: $K \ll M$.*

2.3.2. Állítás: *Egy szürjektív $f : M \longrightarrow N$ leképezés magja akkor és csak akkor kicsi, ha minden $h : H \longrightarrow M$ homomorfizmusra, ha fh szürjektív, akkor h is az.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy fh szürjektív és legyen $m \in M$. Ha belátnánk, hogy $Ker(f) + Im(h) = M$, akkor $Ker(f)$ kicsisége miatt $Im(h) = M$ lenne, vagyis h szürjektív. Az fh szürjektivitása miatt létezik olyan $x \in H$, hogy $fh(x) = f(m)$, vagyis $f(m - h(x)) = 0$, amiből $m - h(x) \in Ker(f)$ és $m \in Ker(f) + Im(h)$.
A másik irányhoz legyen $L \leq M$ olyan részmodulus, melyre $Ker(f) + L = M$. Válasszuk h-nak az L beágyazását M-be. fh epimorfizmus lesz: minden $n \in N$ előáll $f(m)$ alakban, de az L-re tett feltétel szerint létezik $k \in Ker(f)$ és $l \in L$, hogy $m = k + l$. Ekkor $n = f(m) = f(k + l) = f(k) + f(l) = f(l)$. A feltétel miatt h epimorfizmus, vagyis L beágyazása M-be szürjektív, így $L = M$. $\square$

2.3.3. Definíció: *Legyen M egy R-modulus. A (P, p) párt M projektív fedésének nevezzük, ha P projektív R-modulus és a $p : P \longrightarrow M$ szürjektív leképezés magja kicsi.*

A projektív fedés minimális abban az értelemben, hogy P bármely L valódi részmodulusára a $p\mid_L$ megszorítás nem epimorfizmus: jelöljük ι-val L beágyazását P-be. Ha $p\mid_L = p\iota$ epimorfizmus lenne, akkor **2.3.2. Állítás** miatt ι is epimorfizmus lenne, ami ellentmondás.

2.4. Tenzorszorzat és Hom

A fejezet hátralevő részében legyen M R-S-bimodulus, N bal oldali S-T-bimodulus és U R-T-bimodulus. Ekkor definiálhatjuk $M \otimes N$ tenzorszorzatot, mely egy R-T-bimodulus lesz.
Egy $f : M \times N \longrightarrow U$ halmazleképezést egyensúlyozottnak nevezünk, ha teljesülnek a következő feltételek minden $m_1, m_2 \in M$, $n_1, n_2 \in N$, $r \in R$, $s \in S$, $t \in T$-re:

$$
\begin{gathered}
f(m_1 + m_2, n) = f(m_1, n) + f(m_2, n) \\
f(m, n_1 + n_2) = f(m, n_1) + f(m, n_2) \\
f(ms, n) = f(m, sn) \\
f(rm, n) = rf(m, n) \\
f(m, nt) = f(m, n)t
\end{gathered}
$$

2.4.1. Definíció: *M és N $({}_RM_S) \otimes ({}_SN_T)$-vel jelölt tenzorszorzata az az R-T-bimodulus, melyre létezik egy olyan $\tau : M \times N \longrightarrow ({}_RM_S) \otimes ({}_SN_T)$ egyensúlyozott leképezés, hogy ha adott egy $f : M \times N \longrightarrow U$ egyensúlyozott leképezés, akkor egyértelműen létezik $\overline{f} : ({}_RM_S) \otimes ({}_SN_T) \longrightarrow U$ R-T-bimodulus-homomorfizmus, melyre $f = \overline{f}\tau$.*

$$
\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "f"] & M \otimes N \arrow[dl, dashed, "\overline{f}"] \\
U &
\end{tikzcd}
$$

Bizonyítás nélkül állítjuk, hogy a tenzorszorzat létezik és izomorfizmus erejéig egyértelmű. A későbbiekben fel fogjuk használjuk a következőt:

2.4.2. Állítás: *Legyen M R-modulus és tekintsük az R gyűrűt R-R-bimodulusnak. Ekkor $({}_RR_R) \otimes ({}_RM) \cong M$, mint R-modulusok.*

Bizonyítás: Az az $f : R \times M \longrightarrow M$ leképezés, melyre $f(r, m) = rm$, egyensúlyozott és így egy R-modulus-homomorfizmust indukál $({}_RR_R) \otimes ({}_RM)$-ből M-be. Ennek inverze lesz az $m \mapsto 1 \otimes m$ modulushomomorfizmus. $\square$

Legyenek M és N R-modulusok. Ekkor $Hom_R(M, N)$ (általában) csak egy Abel-csoport (vagyis $\mathbb{Z}$-modulus). Ezt a következőképpen általánosíthatjuk: ha M egy R-S-bimodulus és N egy bal oldali R-modulus, akkor

a, $Hom_R({}_RM, {}_RN)$ bal oldali S-modulus lesz a következőképpen: $(sf)(m) := f(ms)$, ahol $m \in M$,$s \in S$ és $f \in Hom_R({}_RM, {}_RN)$.

b, $Hom_R({}_RN, {}_RM)$ jobb oldali S-modulus lesz a következőképpen: $(fs)(n) := f(n)s$, ahol $n \in N$,$s \in S$ és $f \in Hom_R({}_RN, {}_RM)$.

2.4.3. Állítás: *Minden M (bal oldali) R-modulusra $Hom_R({}_RR, {}_RM) \cong {}_RM$.*

Bizonyítás: Legyen $f \in Hom_R({}_RR, {}_RM)$ egy homomorfizmus. Könnyen ellenőrizhető, hogy az a $\phi : Hom_R({}_RR, {}_RM) \longrightarrow {}_RM$ leképezés, melyre $\phi(f) := f(1)$, izomorfizmus lesz. $\square$

3. fejezet

Kategóriaelmélet

Ez a fejezet a kategóriaelmélet leglényegesebb, később felhasználásra kerülő fogalmait tartalmazza. Szó lesz kategóriákról, funktorokról, természetes transzformációról és adjungált funktorokról (a teljesség igénye nélkül). A Morita-ekvivalencia vizsgálatának középpontjában a különböző gyűrűk feletti modulusok kategóriái és ilyen kategóriák közötti funktorok állnak, ezek néhány fontos tulajdonságát is ismertetjük. Részletes tárgyalást a [4] könyvben találhatunk.

3.1. Kategóriák

3.1.1. Definíció: Kategória. *Egy $\mathcal{C}$ kategória a következőkből áll:*

a) az objektumok $Ob(\mathcal{C})$ osztálya

b) minden $A, B \in Ob(\mathcal{C})$-re egy $hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ halmaz, mely elemeit az A-ból B-be menő morfizmusoknak nevezzük

Ezekre a következő tulajdonságok érvényesek:

1) minden $A, B, C \in Ob(\mathcal{C})$-re és minden $f \in hom_{\mathcal{C}}(A, B)$-re és $g \in hom_{\mathcal{C}}(B, C)$-re létezik egy $h \in hom_{\mathcal{C}}(A, C)$ morfizmus, melyet f és g kompozíciójának nevezünk és gf-fel jelöljük

2) minden $A \in Ob(\mathcal{C})$-re létezik egy $id_A \in hom_{\mathcal{C}}(A, A)$ morfizmus, melyet identitásnak hívunk.

3) A morfizmusok kompozíciója (ha értelmezve van) asszociatív, azaz $h(gf) = (hg)f$

4) minden $f \in hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ morfizmusra $f id_A = id_B f = f$ teljesül.

3.1.2. Példák:

a) $\mathcal{S}et$ kategória: objektumai tetszőleges halmazok és a morfizmusok pedig a halmazok közötti leképezések.

b) $\mathcal{G}rp$ kategória: objektumai a csoportok, a morfizmusok pedig a csoport-homomorfizmusok.

c) $\mathcal{A}b$ kategória: objektumai az Abel-csoportok, morfizmusai a csoport-homomorfizmusok.

d) $\mathcal{R}ing$ kategória: objektumai a gyűrűk, a morfizmusok a gyűrű-homomorfizmusok.

e) ${}_R\mathcal{M}od$ ($\mathcal{M}od_R$) kategória: objektumai az R gyűrű feletti bal (jobb) oldali modulusok, morfizmusai a modulusok közötti homomorfizmusok.

f) $\mathcal{C}^{op}$ kategória: objektumai $\mathcal{C}$ objektumai, azonban a morfizmusok irányt váltanak, azaz minden $f \in hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ morfizmusnak megfelel egy $f^{op} \in hom_{\mathcal{C}^{op}}(B, A)$ morfizmus, továbbá a kompozíció sorrendje is megváltozik: $(gf)^{op} = f^{op}g^{op}$. Ezt a kategóriát a $\mathcal{C}$ kategória duális kategóriájának nevezzük.

3.1.3. Definíció: *Egy $f : A \longrightarrow B$ morfizmust izomorfizmusnak nevezünk, ha létezik olyan $g : B \longrightarrow A$ morfizmus, melyre $fg = id_B$ és $gf = id_A$. (Könnyű belátni, hogy g egyértelmű, ha létezik, és így jogos a $g = f^{-1}$ jelölés)*

Egy $f : B \longrightarrow C$ morfizmus mono, ha bármely két különböző $g, h : A \longrightarrow B$ morfizmusra $fg \neq fh$.

Egy $f : B \longrightarrow C$ morfizmus epi, ha bármely két különböző $g, h : C \longrightarrow D$ morfizmusra $gf \neq hf$.

Megjegyezzük, hogy a modulusok kategóriájában a monomorfizmusok pont az injektív leképezések, az epimorfizmusok pedig a szürjektív leképezések.

3.2. Funktorok

3.2.1. Definíció: Kovariáns funktor *Legyen $\mathcal{C}$ és $\mathcal{D}$ két kategória. Egy $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ kovariáns funktoron a következőt értjük: minden $A \in Ob(\mathcal{C})$ objektumhoz hozzárendelünk egy $F(A) \in Ob(\mathcal{D})$ objektumot és minden $f \in hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ morfizmushoz egy $F(f) \in hom_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$ morfizmust, úgy hogy, $F(id_A) = id_{F(A)}$ és $F(gf) = F(g)F(f)$ teljesüljön.*

3.2.2. Megjegyzések:

a, Érdemes megjegyezni, hogy egy F funktor a *hom*-halmazok között egy halmazleképezést létesít, ennek egy speciális esetét később még használni fogjuk.

b, Ha adottak $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ és $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ funktorok, akkor értelmezhetjük ezek $GF : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ kompozícióját a természetes módon: $GF(A) = G(F(A))$ és $GF(f) = G(F(f))$.

3.2.3. Definíció: Kontravariáns funktor *Legyen $\mathcal{C}$ és $\mathcal{D}$ két kategória. Egy $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ kontravariáns funktoron a következőt értjük: minden $A \in Ob(\mathcal{C})$ objektumhoz hozzárendelünk egy $F(A) \in Ob(\mathcal{D})$ objektumot és minden $f \in hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ morfizmushoz egy $F(f) \in hom_{\mathcal{D}}(F(B), F(A))$ morfizmust, úgy hogy, $F(id_A) = id_{F(A)}$ és $F(gf) = F(f)F(g)$ teljesüljön.*

Egy $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ kontravariáns funktor úgy is felfogható, mint egy kovariáns funktor $\mathcal{C}$ duális kategóriájából $\mathcal{D}$-be. *A továbbiakban funktor alatt mindig kovariáns funktort értünk, egy funktor kontravariáns volta külön jelezve lesz.*

3.2.4. Definíció: *Egy $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funktorról azt mondjuk, hogy hűséges (teljes), ha minden $A, B \in Ob(\mathcal{C})$-re az $F : hom_{\mathcal{C}}(A, B) \longrightarrow hom_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$ halmazfüggvény injektív (szürjektív).*

3.2.5. Példák:

a, Minden $\mathcal{C}$ kategóriához létezik az $id_{\mathcal{C}}$ identitás-funktor, mely minden objektumhoz és morfizmushoz önmagát rendeli.

b, Egy olyan funktort, mely egy kategória bizonyos struktúráját "elfelejti" (nem meglepő módon) felejtő funktornak nevezünk. Egy algebrai struktúrákból álló kategóriából $\mathcal{Set}$-be menő felejtő funktor lehet az, ha minden struktúrához hozzárendeljük a tartóhalmazát, a morfizmusokra pedig mint halmaz-leképezésekre tekintünk.

3.3. Természetes transzformációk

Legyen adott egy $\mathcal{C}$ kategória, $A, B \in Ob(\mathcal{C})$ objektumok. Egy $f \in hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ morfizmust így is jelölhetünk:

$$A \xrightarrow{f} B$$

Nézzük a következő diagramot, ahol $A, B, C, D \in Ob(\mathcal{C})$ objektumok és f_i-k, illetve g_i-k a megfelelő morfizmusok. Azt mondjuk, hogy a diagram kommutatív, ha $g_1 f_1 = g_2 f_2$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & B \arrow[d, "g_1"] \\ C \arrow[r, "g_2"'] & D \end{tikzcd}$$

3.3.1. Definíció: *Legyenek F és G funktorok egy $\mathcal{C}$ kategóriából $\mathcal{D}$-be. Azt mondjuk, hogy $\mu : F \Rightarrow G$ természetes transzformáció F és G között, ha minden $A \in Ob(\mathcal{C})$ objektumhoz hozzárendel egy $\mu_A \in hom_{\mathcal{D}}(F(A), G(A))$ morfizmust, úgy, hogy minden $A, B \in Ob(\mathcal{C})$-re és $f \in hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ morfizmusra az alábbi diagram kommutatív legyen:*

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(B) \\ {\scriptstyle\mu_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mu_B} \\ G(A) & \xrightarrow[G(f)]{} & G(B) \end{array}$$

Ha minden μ_A izomorfizmus is, akkor μ-t természetes izomorfizmusnak nevezzük és így jelöljük: $\mu : F \cong G$

3.3.2. Definíció: *Egy $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funktort kategória-ekvivalenciának hívunk, ha létezik olyan $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funktor, melyre $FG \cong id_{\mathcal{D}}$ és $GF \cong id_{\mathcal{C}}$.*
Ha két kategória között létezik kategória-ekvivalencia, akkor a két kategóriát ekvivalensnek mondjuk.

Bizonyítás nélkül megemlítünk egy tételt, mely szükséges és elégséges feltételt ad egy F funktor kategória-ekvivalencia voltának eldöntésére: ([2] Proposition 1.3)

3.3.3. Tétel: *Legyen $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funktor. F akkor és csak akkor kategória-ekvivalencia, ha F hűséges, teljes és minden $D \in Ob(\mathcal{D})$-re létezik olyan $C \in Ob(\mathcal{C})$, hogy $F(C)$ és D között létezik izomorfizmus $\mathcal{D}$ kategóriában.*

3.4. Adjungált funktorok

Tekintsünk egy $\mathcal{C}$ kategóriát, $A, A', B \in Ob(\mathcal{C})$. Legyen $f : A \to A'$, ekkor f-hez definiálhatjuk $f^* : hom_{\mathcal{C}}(A', B) \to hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ halmaz-leképezést a következőképpen: ha $\phi \in hom_{\mathcal{C}}(A', B)$, akkor $f^*(\phi) = \phi f$. Hasonlóképpen értelmezhető $f_* : hom_{\mathcal{C}}(B, A) \to hom_{\mathcal{C}}(B, A')$ leképezés: ha $\psi \in hom_{\mathcal{C}}(B, A)$, akkor $f_*(\psi) = f\psi$.

3.4.1. Definíció: *Az $L : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ és $R : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funktorok adjungáltak, ha minden $A \in Ob(\mathcal{C})$-re és $B \in Ob(\mathcal{D})$-re létezik egy $\tau = \tau_{AB}$ bijekció $hom_{\mathcal{D}}(L(A), B)$ és $hom_{\mathcal{C}}(A, R(B))$ között, ami természetes A-ban és B-ben a következő értelemben: ha $f : A \to A'$ és $g : B \to B'$, akkor a következő diagram kommutatív:*

$$\begin{array}{ccccc} hom_{\mathcal{D}}(L(A'), B) & \xrightarrow{Lf^*} & hom_{\mathcal{D}}(L(A), B) & \xrightarrow{g_*} & hom_{\mathcal{D}}(L(A), B') \\ \downarrow{\scriptstyle\tau} & & \downarrow{\scriptstyle\tau} & & \downarrow{\scriptstyle\tau} \\ hom_{\mathcal{C}}(A', R(B)) & \xrightarrow{f^*} & hom_{\mathcal{C}}(A, R(B)) & \xrightarrow{Rg_*} & hom_{\mathcal{C}}(A, R(B')) \end{array}$$

Azt mondjuk, hogy (L, R) egy adjungált pár, az L funktor az R bal-adjungáltja és az R funktor L jobb-adjungáltja.

Adjungált funktorokra a következő részben látunk majd példát.

3.5. Modulusok kategóriái

Ezen szakdolgozat szempontjából legfontosabb kategória egy gyűrű feletti bal illetve jobb oldali modulusok kategóriája. A Morita-ekvivalencia tárgyalásakor fontos szerepet kapnak a köztük menő funktorok és ezek tulajdonságai, a nekünk szükségeseket tárgyaljuk itt. Elmondható itt is, hogy csak az állításokat mondjuk ki, a téma részletes tárgyalása megtalálható [1] könyv §20. részében.

Legyenek R és S gyűrűk, $F : {}_R\mathcal{Mod} \to {}_S\mathcal{Mod}$ funktor, M és N R-modulusok. Tudjuk, hogy F a hom-halmazok között egy halmazleképezés és $Hom_R(M,N)$ Abel-csoport. Ez az Abel-csoport struktúra a modulusok kategóriájának egy olyan fontos tulajdonsága, hogy érdemes csak olyan funktorokkal foglalkozni, mely erre a struktúrára tekintettel van.

3.5.1. Definíció: *F kovariáns funktort additív kovariáns funktornak nevezzük, ha minden M,N R-modulusra az $F : Hom_R(M,N) \longrightarrow Hom_S(F(M),F(N))$ leképezés Abel-csoport homomorfizmus, azaz $F(f+g) = F(f) + F(g)$ minden $f, g \in Hom_R(M,N)$-re.*
(F kontravariáns funktor akkor additív, ha minden M,N R-modulusra az $F : Hom_R(M,N) \longrightarrow Hom_S(F(N),F(M))$ leképezés Abel-csoport homomorfizmus.)

Modulusok kategóriái közötti funktorok esetén kivétel nélkül feltesszük, hogy a funktor additív.

A legfontosabb példát additív funktorokra a tenzor és Hom-funktorok szolgáltatják.

3.5.2. Állítás: *Rögzítsünk egy M R-S-bimodulust. Ekkor a következők igazak:*
a) $Hom_R({}_RM_S,-) : {}_R\mathcal{Mod} \to {}_S\mathcal{Mod}$ additív, kovariáns funktor,
b) $Hom_R(-,{}_RM_S) : {}_R\mathcal{Mod} \to \mathcal{Mod}_S$ additív, kontravariáns funktor,
c) $({}_RM_S) \otimes - : {}_S\mathcal{Mod} \to {}_R\mathcal{Mod}$ additív, kovariáns funktor,
d) $- \otimes ({}_RM_S) : \mathcal{Mod}_R \to \mathcal{Mod}_S$ additív, kovariáns funktor.

3.5.3. Állítás: *Legyenek R,S és T gyűrűk. Tekintsük az ${}_R\mathcal{Mod}$ és az ${}_S\mathcal{Mod}$ kategóriákat, legyenek $F, F' : {}_R\mathcal{Mod} \to {}_S\mathcal{Mod}$ funktorok, $\eta : F \Rightarrow F'$ természetes transzformáció és végül ${}_RM_T$, ${}_RN_T$ bimodulusok egy $f : M \longrightarrow N$ bimodulus-homomorfizmussal. Ekkor a $F(M)$,$F'(M)$ és $F(N)$ S-T-bimodulusok lesznek, továbbá a következők bimodulus-homomorfizmusok:*

$$F(f) : {}_SF(M)_T \longrightarrow {}_SF(N)_T$$
$$\eta_M : {}_SF(M)_T \longrightarrow {}_SF'(M)_T$$

3.5.4. Állítás: *Legyen $f : {}_RM_S \longrightarrow {}_RN_S$ egy bimodulus-homomorfizmus. Ekkor a következők természetes transzformációk:*

$$\eta : Hom_R({}_RN_S,-) \Rightarrow Hom_R({}_RM_S,-),\ \text{ahol } \eta_L = Hom_R(f,L),$$
$$\nu : Hom_R(-,{}_RM_S) \Rightarrow Hom_R(-,{}_RN_S),\ \text{ahol } \nu_L = Hom_R(L,f),$$
$$\Phi : - \otimes ({}_RM_S) \Rightarrow - \otimes ({}_RN_S),\ \text{ahol } \Phi_L = L \otimes f.$$

3.5.5. Állítás: *Legyen M egy R-S-bimodulus. Ekkor minden ${}_RL$ R-modulusra és ${}_SN$ S-modulusra a következő Abel-csoport izomorfizmus teljesül:*

$$Hom_R(({}_RM_S) \otimes ({}_SN),\ {}_RL) \cong Hom_S({}_SN, Hom_R({}_RM_S, {}_RL)),$$

vagyis $({}_RM_S)\otimes-$ bal-adjungáltja $Hom_R({}_RM_S,-)$-nek és ez utóbbi pedig jobb-adjungáltja az előbbinek.

Bizonyítás: Legyen $\phi : ({}_RM_S) \otimes ({}_SN) \longrightarrow_R L$ egy homomorfizmus, $n \in N$ és $m \in M$. Ekkor legyen ϕ képe az a $\overline{\phi} : {}_SN \longrightarrow Hom_R({}_RM_S, {}_RL)$ leképezés, melynek egy $n \in N$ elemnél vett képe a következő leképezés: $\overline{\phi}(n)(m) := \phi(m \otimes n)$. $\square$

3.5.6. Állítás: *Legyen M egy R-S-bimodulus. Ekkor minden ${}_RL$ R-modulusra és N_S S-modulusra a következő Abel-csoport izomorfizmus teljesül:*

$$Hom_R({}_RL, Hom_S(N_S,\ {}_RM_S)) \cong Hom_S(N_S, Hom_R({}_RL,\ {}_RM_S)).$$

Bizonyítás: Legyen $\phi :_R L \longrightarrow Hom_S(N_S,\ {}_RM_S)$ homomorfizmus, $n \in N$ és $l \in L$. Ekkor ϕ $\overline{\phi} : N_S \longrightarrow Hom_R({}_RL,\ {}_RM_S)$ képét egy $n \in N$ elemnél a következőképpen definiálva, ellenőrizhető, hogy izomorfizmust kapunk: $\overline{\phi}(n)(l) = \phi(l)(n)$. $\square$

3.5.7. Állítás: *Legyen M egy R-S-bimodulus. Ekkor minden ${}_RL$ R-modulusra és ${}_SN$ S-modulusra létezik egy*

$$\eta : Hom_R({}_RL,\ {}_RM_S) \otimes ({}_SN) \longrightarrow Hom_R({}_RL,\ ({}_RM_S) \otimes ({}_SN))$$

homomorfizmus, ami izomorfizmus, ha ${}_RL$ egy végesen generált projektív modulus.

3.5.8. Állítás: *Legyen M egy R-S-bimodulus. Ekkor minden ${}_RL$ R-modulusra és N_S S-modulusra létezik egy*

$$\theta : (N_S) \otimes Hom_R({}_RM_S,\ {}_RL) \longrightarrow Hom_R(Hom_S(N_S,\ {}_RM_S),_R L)$$

homomorfizmus, ami izomorfizmus, ha N_S egy végesen generált projektív modulus.

4. fejezet

Morita-ekvivalencia

4.1. Bevezetés

4.1.1. Definíció: Morita-ekvivalencia *Legyenek R és S gyűrűk. Azt mondjuk, hogy R és S Morita-ekvivalensek, ha az* ${}_R\mathcal{Mod}$ *és* ${}_S\mathcal{Mod}$ *kategóriák ekvivalensek. Jelölésben:* $R \approx S$.

A továbbiakban legyenek R és S ekvivalens gyűrűk, $F : {}_R\mathcal{Mod} \to {}_S\mathcal{Mod}$ és $G : {}_S\mathcal{Mod} \to {}_R\mathcal{Mod}$ a kategória-ekvivalenciák, M, M' (baloldali) R-modulusok, N, N' (baloldali) S-modulusok, η illetve τ a természetes izomorfizmusok GF és $id_{{}_R\mathcal{Mod}}$ illetve FG és $id_{{}_S\mathcal{Mod}}$ között.

$$\begin{array}{ccc} GF(M) & \xrightarrow{GF(f)} & GF(M') \\ {\scriptstyle\eta_M}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\eta_{M'}} \\ M & \xrightarrow[f]{} & M' \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} FG(N) & \xrightarrow{FG(g)} & FG(N') \\ {\scriptstyle\tau_N}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\tau_{N'}} \\ N & \xrightarrow[g]{} & N' \end{array}$$

Ezek segítségével definiáljuk a ϕ_{MN} és θ_{MN} leképezéseket, melyek a későbbiekben fontos szerepet fognak játszani. Legyen $\gamma \in Hom_S(N, F(M))$, ekkor $\eta_M G(\gamma)$ egy homomorfizmus $G(N)$ és M között.

$$N \xrightarrow{\gamma} F(M)$$

$$\Downarrow$$

$$G(N) \xrightarrow{G(\gamma)} GF(M) \xrightarrow{\eta_M} M$$

Legyen $\phi_{MN} : Hom_S(N, F(M)) \longrightarrow Hom_R(G(N), M)$ az a leképezés, melyre $\phi_{MN}(\gamma) = \eta_M G(\gamma)$. Ha $\delta \in Hom_S(F(M), N)$, ekkor $G(\delta)\eta_M^{-1}$ egy homomorfizmus M és $G(N)$ között.

$$F(M) \xrightarrow{\delta} N$$

$$\Downarrow$$

$$M \xrightarrow{\eta_M^{-1}} GF(M) \xrightarrow{G(\delta)} G(N)$$

Legyen $\theta_{MN} : Hom_S(F(M), N) \longrightarrow Hom_R(M, G(N))$ az a leképezés, melyre $\theta_{MN}(\delta) = G(\delta)\eta_M^{-1}$. τ segítségével is definiálhatunk a fentiekhez hasonló leképezéseket, erre azonban nem lesz szükségünk.

4.1.2. Állítás: *Minden* M,M' *R-modulusra az* $F : Hom_R(M, M') \longrightarrow Hom_S(F(M), F(M'))$ *leképezés Abel-csoport izomorfizmus, az* $F : End({}_RM) \longrightarrow End({}_SF(M))$ *leképezés pedig gyűrűizomorfizmus. Továbbá* $F(f)$ *mono(epi) akkor és csak akkor, ha* f *mono(epi).*

Bizonyítás: Mivel F additív funktor, ezért triviális, hogy homomorfizmus lesz mindkét esetben. Vegyük a következő $H : Hom_S(F(M), F(M')) \longrightarrow Hom_R(M, M')$ leképezést, ami egy $g \in Hom_S(F(M), F(M'))$ homomorfizmushoz $\eta_{M'}G(g)\eta_M^{-1}$-t rendeli.

$$\begin{tikzcd}
F(M) \arrow[r, "g"] & F(M') \arrow[d, phantom, "\Downarrow"] \\
 & {} \\
GF(M) \arrow[r, "G(g)"] & GF(M') \arrow[d, "\eta_{M'}"] \\
M \arrow[u, "\eta_M^{-1}"] \arrow[r, "H(g)"'] & M'
\end{tikzcd}$$

Nyilván H is Abel-csoport homomorfizmus, sőt izomorfizmus is. Legyen $H(g) = 0$ valamilyen g-re, mivel η izomorfizmus, ezért $G(g) = 0$, ebből következik, hogy $FG(g)$ is 0. De FG természetesen izomorf $id_{_S\mathcal{Mod}}$-sel, így $g = 0$, azaz H injektív.
Ha $f \in Hom_R(M, M')$, akkor $F(f)$ H-nál vett képe f lesz: $HF(f) = \eta_{M'}GF(f)\eta_M^{-1} = f$ a természetes izomorfizmus definíciójából, azaz H szürjektív is. Láttuk már, hogy $HF(f) = f$.
Ha $g \in Hom_S(F(M), F(M'))$, akkor $FH(g) = F(\eta_{M'})GF(g)F(\eta_M^{-1}) = g$, így F nem más, mint H inverze, azaz F szintén izomorfizmus.
Az, hogy F gyűrűizomorfizmus, hasonlóan látható be.
Tegyük fel, hogy $f \in Hom_R(M, M')$ mono. Legyen $F(f)h = 0$ (ahol $h \in Hom_S(N, F(M))$) és alkalmazzuk G-t: $GF(f)G(h) = 0$. Ebből következik, hogy $G(h) = 0$, amire most F-et alkalmazva kapjuk, hogy $FG(h) = 0$, amiből $h = 0$. A fordított irányban tegyük fel, hogy $fk = 0$ ($k \in Hom_R(M'', M)$). Alkalmazva GF-et: $GF(f)GF(k) = 0$ és mivel a feltétel miatt $GF(f)$ mono, ezért $GF(k) = 0$, amiből $k = 0$. $\square$

4.2. Adjungáltság

A most következő lemma az F és G funktorok közötti fontos kapcsolatra világít rá: (F, G) és (G, F) adjungált párok. Ennek a fontos ténynek az egyik alkalmazása, hogy egy $_R\mathcal{Mod}$-beli (kommutatív) diagram átvihető egy $_S\mathcal{Mod}$-beli (kommutatív) diagrammá.

4.2.1. Lemma: *Legyenek R és S ekvivalens gyűrűk. Minden M,M' R-modulusra, N,N' S-modulusra, $f : M \longrightarrow M'$ és $g : N \longrightarrow N'$ homomorfizmusra*

$$\phi = \phi_{MN} : Hom_S(N, F(M)) \longrightarrow Hom_R(G(N), M)$$
$$\theta = \theta_{MN} : Hom_S(F(M), N) \longrightarrow Hom_R(M, G(N))$$

Abel-csoport izomorfizmusok, sőt, természetesek mindkét változójukban. Speciálisan, ha $\gamma : N \longrightarrow F(M)$, $\gamma' : G(N) \longrightarrow M$,$\delta : F(M') \longrightarrow N'$ és $\delta' : M' \longrightarrow G(N')$, akkor a következők teljesülnek:

$$\phi(F(f)\gamma g) = f\phi(\gamma)G(g),$$
$$\theta(g\delta F(f)) = G(g)\theta(\delta)f$$
$$\phi^{-1}(f\gamma' G(g)) = F(f)\phi^{-1}(\gamma')g$$
$$\theta^{-1}(G(g)\delta' f) = g\theta^{-1}(\delta')F(f)$$

Továbbá $\phi(\gamma)$ akkor és csak akkor mono(epi) ha γ mono(epi) valamint $\theta(\delta)$ akkor és csak akkor mono(epi), ha δ mono(epi).

Bizonyítás: A **4.1.2. Állítás** szerint $G : Hom_S(F(M), N) \longrightarrow Hom_R(GF(M), G(N))$ izomorfizmus. Mivel η_M izomorfizmus, ezért $Hom_R(\eta_M, G(N)) : Hom_R(GF(M), G(N)) \longrightarrow Hom_R(M, G(N))$

is izomorfizmus, azaz θ_{MN} két izomorfizmus kompozíciója, így szintén izomorfizmus.
$\phi_{M'N}(F(f)\gamma g) = \eta_{M'}G(F(f)\gamma g)$ definíció szerint, folytatva $\eta_{M'}G(F(f)\gamma g) = \eta_{M'}GF(f)G(\gamma)G(g) = \eta_{M'}GF(f)\eta_M^{-1}\eta_M G(\gamma)G(g) = f\phi_{MN}(\gamma)G(g)$. A további három egyenlőséget is hasonlóan lehet bizonyítani, ezeket nem részletezzük.
Ezen összefüggések közül az elsőből, illetve a másodikból következik,hogy az izomorfizmusok természetesek mindkét változójukban, ϕ-re a két diagram a következőképpen néz ki:

$$\begin{array}{ccc} Hom_S(N,F(M)) & \xrightarrow{F(f)_*} & Hom_S(N,F(M')) \\ \downarrow{\scriptstyle \phi_{MN}} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_{M'N}} \\ Hom_R(G(N),M) & \xrightarrow[f_*]{} & Hom_R(G(N),M') \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Hom_S(N',F(M)) & \xrightarrow{g^*} & Hom_S(N,F(M)) \\ \downarrow{\scriptstyle \phi_{MN'}} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_{MN}} \\ Hom_R(N',M) & \xrightarrow[G(g)^*]{} & Hom_R(N,M) \end{array}$$

Az első diagram kommutativitása a $\phi(F(f)\gamma g) = f\phi(\gamma)G(g)$ egyenlőségből $g = id$ választással, a második diagramé pedig az $f = id$ választással következik.
Tegyük fel, hogy γ mono. Ekkor $\phi(\gamma) = \eta_M G(\gamma)$ akkor és csak akkor mono, ha $G(\gamma)$ mono, mivel η_M izomorfizmus. De $G(\gamma)$-ról már tudjuk, hogy akkor és csak akkor mono, ha γ is az. A másik három állítás bizonyítása is így történik, ezeket sem részletezzük. $\square$

4.3. Invariáns modulus-tulajdonságok

4.3.1. Állítás: *Legyenek R és S Morita-ekvivalens gyűrűk, F és G a kategóriák közötti ekvivalenciák.*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

akkor és csak akkor egzakt, ha

$$0 \longrightarrow F(M') \xrightarrow{F(f)} F(M) \xrightarrow{F(g)} F(M'') \longrightarrow 0$$

egzakt. Azaz F (és hasonlóan G) egzakt funktorok.

Bizonyítás: Az alábbi diagram kommutatív és könnyen látható, hogy az egyik sor akkor és csak akkor egzakt, ha a másik is az:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & GF(M') & \xrightarrow{GF(f)} & GF(M) & \xrightarrow{GF(g)} & GF(M'') & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \eta} & & \downarrow{\scriptstyle \eta} & & \downarrow{\scriptstyle \eta} & & \\ 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Ezt felhasználva a feltétel elégségessége már a szükségességből következik a G funktor alkalmazásával. Legyen

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

egzakt. Tudjuk, ha f mono és g epi, akkor $F(f)$ mono és $F(g)$ epi. Ha $gf = 0$, akkor $0 = F(gf) = F(g)F(f)$, így $Im(F(f)) \leq Ker(F(g))$. Már csak $Ker(F(g)) \leq Im(F(f))$ kell. Nézzük a $\iota : Ker(F(g)) \longrightarrow F(M)$ beágyazást és alkalmazzuk rá $g\phi$-t valamint a **4.2.1. Lemma** egyik speciális esetét: $g(\phi(\iota)) = \phi(F(g)\iota) = \phi(0) = 0$. Ezek szerint $Im(\phi(\iota)) \leq Ker(g) = Im(f)$. Ezt és f mono voltát kihasználva létezik olyan $\gamma : G(K) \longrightarrow M'$ leképezés, hogy $\phi(\iota) = f\gamma$.

$$\begin{tikzcd} G(K) \arrow[r, "\phi(\iota)"] \arrow[dr, dashed, "\gamma"'] & M \\ & M' \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

$\phi^{-1} - t$ és **4.2.1. Lemmát** alkalmazva kapjuk, hogy $\iota = \phi^{-1}(f\gamma) = F(f)\phi^{-1}(\gamma)$, vagyis $Im(\iota) \leq Im(F(f))$ és definíció szerint $Ker(F(g)) = Im(\iota)$, így készen vagyunk. $\square$

4.3.2. Állítás: *Legyen $F : {}_R\mathcal{Mod} \to {}_S\mathcal{Mod}$ kategória-ekvivalencia, M,M_α R-modulusok. Ekkor*
a) $M = \prod_I M_\alpha \Longleftrightarrow F(M) = \prod_I F(M_\alpha)$
b) $M = \sum_I M_\alpha \Longleftrightarrow F(M) = \sum_I F(M_\alpha)$

Bizonyítás: a) Tegyük fel, hogy $M = \prod M_\alpha$. Ha N egy S-modulus és adott minden α-ra adott egy $g_\alpha : N \longrightarrow F(M_\alpha)$ homomorfizmus. Alkalmazva ϕ-t kapjuk a $\phi(g_\alpha) : G(N) \longrightarrow M_\alpha$ homomorfizmusokat és az M-re tett feltevés miatt egyértelműen létezik olyan $f : G(N) \longrightarrow M$, hogy $\phi(g_\alpha) = p_\alpha f$. Ha az utóbbira alkalmazzuk ϕ^{-1}-t, akkor $g_\alpha = \phi^{-1}(p_\alpha f) = F(p_\alpha)\phi^{-1}(f)$, ahol a második egyenlőség a **4.2.1. Lemma** miatt igaz. Ebből kapjuk, hogy minden α-ra igaz, hogy $\phi^{-1}(f)$ az egyetlen olyan homomorfizmus, melyre $g_\alpha = F(p_\alpha)\phi^{-1}(f)$, azaz $F(M) = \prod_I F(M_\alpha)$.
Most legyen $F(M) = \prod_I F(M_\alpha)$. Ha K R-modulus és minden α-ra adott egy $k_\alpha : K \longrightarrow M_\alpha$ homomorfizmus, akkor ezekre alkalmazva F-et, kapunk $F(K)$-ból induló homomorfizmusokat $F(M_\alpha)$-kba, így egyértelműen létezik olyan $f : F(K) \longrightarrow F(M)$, melyre $F(k_\alpha) = F(p_\alpha)f$. Tudjuk F-ről, hogy izomorfizmus a hom-halmazok között, ezért egyértelműen létezik olyan $\overline{g} : K \longrightarrow M$, mellyel $k_\alpha = p_\alpha \overline{g}$. $\square$

4.3.3. Állítás: *Legyenek R és S ekvivalens gyűrűk, F és G a kategória-ekvivalenciák, M,M' és U R-modulusok.*
a) M N-projektív (N-injektív)$\Longleftrightarrow$ $F(M)$ $F(N)$-projektív ($F(N)$-injektív),
b) M projektív (injektív) $\Longleftrightarrow$ $F(M)$ projektív (injektív),
c) M generálja (kogenerálja) N-et $\Longleftrightarrow$ $F(M)$ generálja (kogenerálja) $F(N)$-et,
d) M generátor (kogenerátor) $\Longleftrightarrow$ $F(M)$ generátor (kogenerátor),
e) M végesen generált $\Longleftrightarrow$ $F(M)$ végesen generált,
f) M progenerátor $\Longleftrightarrow$ $F(M)$ progenerátor,
g) $f : M \longrightarrow N$ epimorfizmus nélkülözhető $\Longleftrightarrow$ $F(f) : F(M) \longrightarrow F(N)$ nélkülözhető,
h) $p : P \longrightarrow M$ projektív fedés $\Longleftrightarrow$ $F(p) : F(P) \longrightarrow F(M)$ projektív fedés.

Bizonyítás: a) Tekintsük a következő diagramot:

$$\begin{tikzcd} & F(U) \arrow[d, "g"] & \\ F(M) \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & U \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "\theta(g)"] & \\ M \arrow[r, "\theta(f)"] & G(N) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

A szokásos trükköt alkalmazzuk, θ-val átvisszük a diagramot az R-modulusok kategóriájába, ahol már tudjuk, hogy U M-projektív, azaz egyértelműen létezik h és ezzel $g = \theta^{-1}(\theta(g)) = \theta^{-1}(\theta(f)h) = fF(h)$ a **4.2.1. Lemma** miatt. A fordított irány bizonyítása hasonlóan is történik, felhasználva, hogy $GF \cong 1_{{}_R\mathcal{Mod}}$.
b) Ez az a) következménye.
c) A direkt összegre (szorzatra) és az egzakt sorozatokra vonatkozó állítások következménye.
d) a c) pont következménye
e) A végesen generáltság **2.2.8. Állításbeli** jellemzését használjuk. Tegyük fel, hogy M végesen generált és $F(M) = \sum_I N_\alpha$. Ekkor $M \cong GF(M) = \sum_I G(N_\alpha)$ és a feltétel miatt létezik $J \subseteq I$ véges részhalmaz, melyre $M \cong GF(M) = \sum_J G(N_\alpha)$. Alkalmazva a G funktort kapjuk $F(M)$ egy véges direkt összeg felbontását.
f) a b),d) és az e) pont következménye
g) Felhasználjuk a **2.3.2. Állítást**. Tegyük fel, hogy f magja kicsi és legyen $g : N \longrightarrow F(M)$ olyan, hogy $F(f)g$ epimorfizmus. Alkalmazzuk erre ϕ-t: $\phi(F(f)g) = f\phi(g)$. Ez utóbbi szintén epimorfizmus, így f magjának kicsisége miatt $\phi(g)$ is epimorfizmus. Ekkor g is epimorfizmus, így

$F(f)$ magja is kicsi modulus.
h) az a) és g) rész következménye. □

4.4. Morita-ekvivalencia

4.4.1. Tétel: *Tegyük fel, hogy R és S ekvivalens gyűrűk, tekintsük az $F : {}_R\mathcal{Mod} \longrightarrow {}_S\mathcal{Mod}$ és $G : {}_S\mathcal{Mod} \longrightarrow {}_R\mathcal{Mod}$ kategória-ekvivalenciákat. Legyen $P := F({}_RR)$ és $Q := G({}_SS)$.*
Ekkor a következők teljesülnek:
a) ${}_SP_R$ és ${}_RQ_S$ hűséges kiegyensúlyozott bimodulusok
b) P_R,${}_SP$,Q_S és ${}_RQ$ progenerátorok
c) ${}_SP_R \cong Hom_S(Q,S) \cong Hom_R(Q,R)$ és ${}_RQ_S \cong Hom_R(P,R) \cong Hom_S(P,S)$
d) $F \cong Hom_R(Q,-)$ és $G \cong Hom_S(P,-)$
e) $F \cong (({}_SP_R) \otimes -)$ és $G \cong (({}_RQ_S) \otimes -)$

Bizonyítás: Legyen $p \in P$ és $r \in R$, jelöljük $\rho(r)$-rel az r-rel való jobb oldali szorzást, ez ${}_RR$ egy endomorfizmusa, így $F(\rho(r)) \in End_S(P)$. P baloldali S-modulus, a jobboldali R-modulus struktúrát pedig a következőképpen definiáljuk: $pr := F(\rho(r))(p)$, amivel P S-R-bimodulus lesz. Vegyük észre, hogy az $r \mapsto F(\rho(r))$ homomorfizmus R-ből $End({}_SP)$-be, ami két izomorfizmus kompozíciójaként áll elő: $R \cong End({}_RR)$ és $End({}_RR) \cong End({}_SF(R))$. Tehát $r \mapsto F(\rho(r))$ is izomorfizmus, vagyis $R \cong End({}_SP)$.
${}_SP$ progenerátor, mert egy progenerátor F-nél vett képe és használva a **2.2.23. Állítást**, ${}_SP$ kiegyensúlyozott modulus. Az előző két meggondolásból következik, hogy ${}_SP_R$ hűséges kiegyensúlyozott modulus. Használva a **2.2.22. Állítást** adódik, hogy P_R progenerátor. ${}_RQ$-ra hasonlóan láthatjuk be a b) pont állításait.
Legyen M R-modulus. Tudjuk, hogy a $\phi : Hom_S(S, F(M)) \longrightarrow Hom_R(G(S), M) = Hom_R(Q, M)$ leképezés Abel-csoport izomorfizmus, ami természetes az első változójában, ezért S-modulus-homomorfizmus is lesz (definiáljuk az $s \in S$ elemmel való szorzást úgy, mint egy $r \in R$ esetén és használjuk a **4.2.1. Lemma** összefüggéseit). Ezt felhasználva érvényesek a következő S-modulus-izomorfizmusok

$$F(M) \cong Hom_S(S, F(M)) \cong Hom_R(Q, M),$$

ezek mind természetesek M-ben, így $F \cong Hom_R(Q,-)$. Hasonlóan $G \cong Hom_S(P,-)$.
Alkalmazzuk ezeket a természetes izomorfizmusokat ${}_RR_R$-re és ${}_SS_S$-re:

$$\begin{aligned} {}_SP_R &= {}_SF(R)_R \cong Hom_R(Q,R) \\ {}_RQ_S &= {}_RG(S)_S \cong Hom_S(P,S). \end{aligned}$$

Mivel ${}_RQ_S$ hűséges kiegyensúlyozott bimodulus, ezért $Hom_S(Q,Q) \cong R$, $Hom_R(Q,Q) \cong S$ és a **3.5.6. Állítás** miatt igaz a következő:

$${}_SP_R \cong Hom_R(Q,R) \cong Hom_R(Q, Hom_S(Q,Q)) \cong Hom_S(Q, Hom_R(Q,Q)) \cong Hom_S(Q,S).$$

Hasonlóan ${}_RQ_S$-re:

$${}_RQ_S \cong Hom_S(P,S) \cong Hom_S(P, Hom_R(P,P)) \cong Hom_R(P, Hom_S(P,P)) \cong Hom_R(P,R).$$

Az utolsó pont állításaihoz használjuk a **3.5.8. Állítást** és a **2.4.3. Állítást**:

$$Hom_R(Q,-) \cong Hom_R(Hom_R(P,R),-) \cong ({}_SP_R) \otimes Hom_R(R,-) \cong ({}_SP_R) \otimes -$$

és hasonlóan $G \cong ({}_RQ_S) \otimes -$. □

4.4.2. Tétel: (Morita) *Legyenek R és S gyűrűk. Az $F : {}_R\mathcal{Mod} \longrightarrow {}_S\mathcal{Mod}$ és $G : {}_S\mathcal{Mod} \longrightarrow {}_R\mathcal{Mod}$ funktorok akkor és csak akkor inverz ekvivalenciák, ha létezik ${}_SP_R$ bimodulus, melyre ${}_SP$ és P_R progenerátorok, ${}_SP_R$ kiegyensúlyozott és $F \cong (({}_SP_R) \otimes -)$, $G \cong Hom_S(P,-)$. Ha az utóbbi feltételek* *teljesülnek, akkor* $Q := Hom_S(P,R)$*-re igaz, hogy* ${}_RQ_S$ *bimodulus,* ${}_RQ$ *és* Q_S *progenerátor és* $F \cong Hom_R(Q,-)$, $G \cong (({}_RQ_S) \otimes -)$.

Bizonyítás: A feltétel szükségessége az előző tételből következik. Az elégségességhez tegyük fel, hogy létezik ilyen ${}_SP_R$ és legyen M baloldali R-modulus, N baloldali S-modulus. Vizsgáljuk meg az FG és GF funktorokat:

$$FG(N) \cong ({}_SP_R) \otimes Hom_S(P,N) \cong Hom_S(Hom_R(P,P),N) \cong Hom_S(S,N) \cong N.$$
$$GF(M) \cong Hom_S(P,({}_SP_R) \otimes ({}_RM)) \cong Hom_S(P,P) \otimes ({}_RM) \cong ({}_RR_R) \otimes ({}_RM) \cong M.$$

Mindkét esetben az első izomorfizmus az F-re és G-re tett feltevések miatt, a második a **3.5.8.** ill. a **3.5.7. Állítás** miatt, a harmadik ${}_SP_R$ kiegyensúlyozottsága miatt, a negyedik a Hom és $\otimes$ egy jól ismert tulajdonsága miatt igaz. Ebből következik, hogy $FG \cong id_{{}_S\mathcal{Mod}}$ és $GF \cong id_{{}_R\mathcal{Mod}}$. □

4.4.3. Következmény: ${}_R\mathcal{Mod} \approx {}_S\mathcal{Mod}$ *akkor és csak akkor,ha* $\mathcal{Mod}_R \approx \mathcal{Mod}_S$.

Bizonyítás: Csak az első irányt bizonyítjuk, a második irány az első alkalmazásával könnyedén belátható. Morita tétele miatt létezik Q, hogy ${}_RQ_S$ kiegyensúlyozott bimodulus, ${}_RQ$ és Q_S progenerátorok. Ekkor ${}_{S^{op}}Q_{R^{op}}$ kiegyensúlyozott bimodulus, $Q_{R^{op}}$ és ${}_{S^{op}}Q$ progenerátorok. Morita tételét ismét alkalmazva kapjuk, hogy ${}_{R^{op}}\mathcal{Mod} \approx {}_{S^{op}}\mathcal{Mod}$, vagyis $\mathcal{Mod}_R \approx \mathcal{Mod}_S$. □

A Morita-ekvivalencia definíciójában a baloldali modulusok kategóriáinak ekvivalenciája volt a feltétel, így teljesen precízen baloldali Morita-ekvivalenciáról kellett volna eddig beszélnünk. Az előző következmény szerint azonban teljesen mindegy melyik oldali modulusokat vizsgáljuk, jogosan használhatjuk az oldalaktól független Morita-ekvivalencia elnevezést.

4.4.4. Következmény: *Ha* R *és* S *gyűrűk, akkor a következők ekvivalensek:*
a) $R \approx S$
b) létezik P_R *progenerátor, hogy* $S \cong End(P_R)$.
c) létezik ${}_RQ$ *progenerátor, hogy* $S \cong End({}_RQ)$.

Bizonyítás: a) $\Rightarrow$ b): Morita tételéből következik.
b) $\Rightarrow$ a): feltehető, hogy $S = End(P_R)$. A **2.2.23. Állítás** miatt, ha P_R generátor, akkor $S = End(P_R)$ felett végesen generált projektív és ${}_SP_R$ kiegyensúlyozott. A **2.2.22. Állításból** kapjuk, hogy ${}_SP$ generátor, így alkalmazható Morita tétele, azaz $R \approx S$.
Az a) $\Rightarrow$ c) és c) $\Rightarrow$ a) irányok bizonyítása hasonlóan történhet. □

Az előző következmény használatával triviális az alábbi:

4.4.5. Következmény: *Legyen* R *gyűrű és* P_R *egy progenerátor, ekkor* R *és* $S = End(P_R)$ *Morita-ekvivalensek.*

4.4.6. Következmény: *Legyen* R *gyűrű,* n *pozitív egész, ekkor* R *és* $M_n(R)$ *ekvivalensek.*

Bizonyítás: R_R^n modulus progenerátor és endomorfizmusgyűrűje $M_n(R)$. □

Természetes kérdés, hogy meg tudjuk-e határozni egy adott R gyűrűvel Morita-ekvivalens gyűrűket. Az eddigiek segítségével erre a kérdésre már könnyedén választ adhatunk:

4.4.7. Következmény: *Ha* R *és* S *ekvivalens gyűrűk, akkor létezik egy olyan* n *pozitív egész és* $e \in M_n(R)$ *idempotens elem, hogy* $S \cong eM_n(R)e$.

Bizonyítás: Az ekvivalencia miatt létezik P_R progenerátor, melyre $S \cong End(P_R)$. Mivel P_R projektív, ezért létezik létezik n pozitív egész, hogy $R_R^n = P_R \oplus P'$. Ha e az előző felbontásban a P_R-hez tartozó idempotens, akkor $S \cong End(P_R) = eEnd(R_R^n)e = eM_n(R)e$. □

5. fejezet

Invariáns tulajdonságok

Ebben a fejezetben a Morita-ekvivalenciára invariáns modulus- és gyűrűtulajdonságok kerülnek tárgyalásra. Általában vagy bizonyos részstruktúra-hálók izomorfiáját vagy a fogalmak kategóriaelméleti definiálhatóságát fogjuk felhasználni az invariancia bizonyítására. A fejezetben használt és eddig nem definiált fogalmak definíciói az A. **Függelékben** találhatóak.

5.1. Részmodulus- és ideálhálók

5.1.1. Jelölés: *Legyenek K és M baloldali R-modulusok, $K \leq M$. Ekkor a $K \hookrightarrow M$ beágyazást $\iota_{K \leq M}$-val jelöljük .*

5.1.2. Állítás: *Legyenek R és S Morita-ekvivalensek, F és G a kategória-ekvivalenciák, M baloldali R-modulus. Az a Λ_M-mel jelölt hálóleképezés, mely M minden K részmodulusának megfelelteti $Im(F(\iota_{K \leq M}))$-et, hálóizomorfizmus M és $F(M)$ részmodulus-hálói között.*

Bizonyítás: Egy $N \leq F(M)$ részmodulushoz rendeljük hozzá a $\Gamma_M(N) = Im(\phi(\iota_{N \leq F(M)}))$-t, ami M részmodulusa. Ekkor Λ_M és Γ_M rendezéstartóak és egymás inverzei, azaz hálóizomorfizmusok.
Legyen $K \leq L \leq M$. Írhatjuk, hogy $\iota_{K \leq M} = \iota_{L \leq M} \iota_{K \leq L}$, amire alkalmazva az F kovariánsa funktort: $F(\iota_{K \leq M}) = F(\iota_{L \leq M})F(\iota_{K \leq L})$, vagyis $\Lambda_M(K) \leq \Lambda_M(L)$.
Legyen $N \leq P \leq F(M)$. Ekkor $\iota_{N \leq F(M)} = \iota_{P \leq F(M)} \iota_{N \leq P}$. Erre ϕ-t alkalmazva és felhasználva **4.2.1.Lemmát**, $\phi(\iota_{N \leq F(M)}) = \phi(\iota_{P \leq F(M)} \iota_{N \leq P}) = \phi(\iota_{P \leq F(M)})G(\iota_{N \leq P})$, vagyis $\Gamma_M(N) \leq \Gamma_M(P)$.
Legyen $N := \Lambda_M(K)$. A **4.2.1. Lemmából** tudjuk, hogy $F(\iota_{K \leq M})$ mono (mert $\iota_{K \leq M}$ is az), így létezik olyan $\psi : F(K) \longrightarrow N$ izomorfizmus, hogy $F(\iota_{K \leq M}) = \iota_{N \leq F(M)} \psi$. Felhasználva a **4.2.1.Lemmában** bizonyított összefüggéseket: $\phi(\iota_{N \leq F(M)})G(\psi) = \phi(\iota_{N \leq F(M)} \psi) = \phi(F(\iota_{K \leq M})) = \iota_{K \leq M}$. $G(\psi)$ izomorfizmus, ezért $\Gamma_M(\Lambda_M(K)) = K$.
Hasonlóan érvelve, mint az előbb, létezik egy $\nu : G(N) \longrightarrow K$ izomorfizmus, melyre $\phi(\iota_{N \leq F(M)}) = \iota_{K \leq M} \nu$. Ekkor $\iota_{N \leq F(M)} = \phi^{-1}(\iota_{K \leq M} \nu) = F(\iota_{K \leq M}) \phi^{-1}(\nu)$. Mivel $\phi^{-1}(\nu)$ izomorfizmus, ezért $\Lambda_M(\Gamma_M(K)) = K$, amivel az állítás bizonyítása készen van. $\Box$

5.1.3. Állítás: *Legyenek R és S Morita-ekvivalens gyűrűk, F egy kategória-ekvivalencia, M bal oldali R-modulus. Ekkor:*

a) M egyszerű $\Longleftrightarrow F(M)$ egyszerű
b) M felbonthatatlan $\Longleftrightarrow F(M)$ felbonthatatlan
c) M féligegyszerű $\Longleftrightarrow F(M)$ féligegyszerű
d) M Artin $\Longleftrightarrow F(M)$ Artin
e) M Noether $\Longleftrightarrow F(M)$ Noether
f) M-nek létezik kompozíciólánca $\Longleftrightarrow F(M)$-nek létezik kompozíciólánca
g) M hűséges modulus $\Longleftrightarrow F(M)$ hűséges modulus

Bizonyítás: Mindegyik állítás a részmodulus-hálók izomorfiájából és a **4.3. Rész** állításaiból következik. A g) ponthoz használjuk fel **2.2.6. Állítást** is. □

Érdemes megjegyezni, hogy a fenti állítás szerint az R gyűrű balideál-hálója "csak" ${}_SF(R)$ részmodulus-hálójával lesz izomorf, S balideál-hálójával általában nem (például egy K testben nincs nemtriviális balideál, míg a vele Morita-ekvivalens $M_n(K)$ gyűrűben van). Ennek fényében akár meglepő is lehetne a következő állítás.

5.1.4. Állítás: *Legyenek R és S Morita-ekvivalens gyűrűk. R akkor és csak akkor bal-Artin, (bal-Noether), ha S is az. Hasonlóan, R akkor és csak akkor jobb-Artin (jobb-Noether), ha S is az. Ezekből már következik, hogy R akkor és csak akkor Artin, ha S is az.*

Bizonyítás: **2.2.15.(16.) Állításból** és az előzőből nyílvánvaló. □

5.1.5. Állítás: *Legyenek R és S Morita-ekvivalens gyűrűk. R akkor és csak akkor féligegyszerű, ha S is az.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy R féligegyszerű és N egy S-modulus. Ekkor $G(S)$ féligegyszerű, tehát előáll, mint egyszerű modulusok direkt összegeként. De ekkor $N \cong FG(N)$ is előáll egyszerű modulusok direkt összegeként (mivel F megtartja a direkt összeget és az egyszerűséget), azaz N féligegyszerű modulus és S féligegyszerű gyűrű. □

5.1.6. Állítás: *Legyen R és S Morita-ekvivalens gyűrűk, $F : {}_R\mathcal{Mod} \longrightarrow {}_S\mathcal{Mod}$ kategória-ekvivalencia, I ideál R-ben. Jelöljük $\Lambda(I)$-vel $Ann_S(F(R/I))$-t. Az a Λ hálóleképezés, mely minden I ideálnak megfelelteti $\Lambda(I)$-t, hálóizomorfizmus R ideálhálójából S ideálhálójába.*

Bizonyítás: Legyen J S-beli ideál és definiáljuk $\Gamma(J)$-t $Ann_R(G(S/J))$-nek! Belátjuk, hogy Λ és Γ rendezéstartóak és inverzei egymásnak, azaz valóban hálóizomorfizmusok.
Ha I_1 és I_2 ideál R-ben valamint $I_1 \subseteq I_2$, akkor létezik egy $R/I_1 \longrightarrow R/I_2$ epimorfizmus, amire F-et alkalmazva egy $F(R/I_1) \longrightarrow F(R/I_2)$ epimorfizmust kapunk. Ekkor egy $F(R/I_1)$-et annuláló elem $F(R/I_2)$-t is annulálja, vagyis $\Lambda(I_1) \subseteq \Lambda(I_2)$. Hasonlóan látható be, hogy Γ is rendezéstartó. $F(R/I)$ hűséges $S/\Lambda(I)$-modulus, így a **2.2.6. Állítás** miatt $F(R/I)$ kogenerálja $S/\Lambda(I)$-t, valamint $S/\Lambda(I)$ generálja $F(R/I)$-t. Ugyanakkor ezek érvényben maradnak akkor is, ha az előbbiekre S-modulusként tekintünk (egy $s \in S$ elem hatása legyen az $s + \Lambda(I)$-vel való szorzás). Ezekre a G funktort alkalmazva, kapjuk hogy R/I kogenerálja $G(S/\Lambda(I))$-t, valamint $G(S/\Lambda(I))$ generálja R/I-t. Felhasználva a (ko)generálás definíciója utáni észrevételt, adódik hogy $I = Ann_R(R/I) = Ann_R(G(S/\Lambda(I))) = \Gamma\Lambda(I)$. Hasonlóan $\Lambda\Gamma(J) = J$, amivel kész vagyunk. □

5.1.7. Állítás: *Legyenek R és S Morita-ekvivalens gyűrűk. A következő tulajdonságok Morita-invariánsak:*
a) az ideálokra teljesül a minimumfeltétel,
b) az ideálokra teljesül a maximumfeltétel,
c) egyszerű gyűrű.

Bizonyítás: Mindegyik állítás következik az R és S ideálhálójának izomorfiájából. □

5.2. Kommutatív gyűrűk

5.2.1. Állítás: *Legyen ${}_RM_S$ egy hűséges kiegyensúlyozott R-S-bimodulus. Ekkor $Z(R) \cong Z(S)$ és mindkettő izomorf M bimodulus-endomorfizmusainak E gyűrűjével.*

Bizonyítás: Legyen $z \in Z(R)$ és legyen $\phi(z)$ a z-vel való balról szorzás. Ekkor $\phi(z)$ M egy bimodulus-endomorfizmusa, mert az S elemeivel való szorzással a bimodulusok definíciója miatt, míg R elemeivel z centralitása miatt cserélhető fel. Tehát létezik egy $\phi : Z(R) \longrightarrow E$ gyűrű-homomorfizmus. Ez a ϕ leképezés injektív ill. szürjektív is lesz, mivel M hűséges ill. kiegyensúlyozott bimodulus. Hasonlóan $Z(S)$ is izomorf lesz E-vel, tehát $Z(R) \cong Z(S)$. □

5.2.2. Következmény: *Ha R és S Morita-ekvivalens gyűrűk, akkor $Z(R) \cong Z(S)$.*

Bizonyítás: Alkalmazzuk az előző állítást az ${}_SP_R$ bimodulusra. □

5.2.3. Következmény: *Morita-ekvivalens kommutatív gyűrűk izomorfak.*

5.3. Kategóriaelméleti definíciók

5.3.1. Állítás: *Legyenek R és S Morita-ekvivalens gyűrűk. A következő tulajdonságok Morita-invariánsak:*

a) öröklődőség,
b) öninjektivitás,
c) QF-gyűrűség,
d) bal perfektség,
e) primitív gyűrűség,
f) szemiprimitív gyűrűség.

Bizonyítás: a) Legyen R bal-öröklődő, N pedig egy projektív S-modulus, $N' \leq N$ részmodulus. Alkalmazva a G kategória-ekvivalenciát és felhasználva a korábbi állításokat: $G(N') \leq G(N)$ és $G(N)$ projektív. A bal-öröklődőség miatt $G(N')$ is projektív, erre F-et alkalmazva kapjuk, hogy $N' \cong FG(N')$ projektív, vagyis S is bal-öröklődő.
b) Tegyük fel, hogy R bal öninjektív. Ha N egy végesen generált projektív bal oldali S-modulus, akkor $F(N)$ végesen generált projektív bal oldali R-modulus, így injektív. De ekkor $GF(N) \cong N$ is injektív, azaz S bal öninjektív.
c) a b) pontot és a bal Noetherség invarianciáját felhasználva triviális.
d) Legyen R bal perfekt gyűrű, N pedig bal oldali S-modulus. A feltétel miatt $G(N)$ R-modulusnak létezik projektív fedése, felhasználva **4.3.3. Állítást** adódik, hogy $N \cong FG(N)$-nek is van projektív fedése, azaz S is bal perfekt gyűrű.
e),f) ha R-nek létezik hűséges egyszerű (féligegyszerű) bal oldali modulusa, akkor annak az F funktornál vett képe egy hűséges egyszerű (féligegyszerű) bal oldali S-modulus. □

5.3.2. Állítás: *Legyenek R és S Morita-ekvivalensek, M egy R-modulus. Ekkor $pd(M) = pd(F(M))$, továbbá $gl.dim(R) = gl.dim(S)$.*

Bizonyítás: Könnyen adódik abból, hogy az ekvivalenciák egzakt funktorok, a második egyenlőség pedig az első részből (és a definícióból). □

5.3.3. Állítás: *Legyenek R és S Morita-ekvivalens gyűrűk. Ekkor $K_0(R) \cong K_0(S)$, vagyis a gyűrűk K_0-csoportjai izomorfak.*

Bizonyítás: Tudjuk, hogy ha M végesen generált projektív R-modulus, akkor $F(M)$ végesen generált projektív S-modulus és fordítva, így az ilyenek izomorfiaosztályai kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetőek egymásnak. Az izomorfiaosztályok közötti művelet a direkt összeg, melyre igaz az $F(M_1 \oplus M_2) = F(M_1) \oplus F(M_2)$ összefüggés, vagyis a két kommutatív félcsoport izomorf. Könnyen látható, hogy ekkor a belőlük készített Grothendieck-csoportok is izomorfak, vagyis $K_0(R) \cong K_0(S)$. □

5.3.4. Megjegyzés: *Minden n természetes számra definiálható egy gyűrű K_n-csoportja (messze nem triviális módon) és ezekre is teljesülni fog, hogy Morita-ekvivalens gyűrűk K_n-csoportjai izomorfak lesznek.*

5.4. Ellenpéldák

Habár sok (fontos) fogalom Morita-invariáns, léteznek nem invariáns tulajdonságok is, ezekre mutatunk néhány példát.

5.4.1. Ellenpéldák: *Legyen k test. Erre az alábbiak mind teljesülnek:*

a, kommutatív,
b, nullosztómentes,
c, integritási tartomány,
d, redukált gyűrű,
e, ferdetest,
f, lokális.

Jól ismert, hogy az $M_n(k)$ mátrixgyűrű a fenti tulajdonságok egyikével sem rendelkezik, így azok nem lehetnek Morita-invariánsak.

6. fejezet

Szemiperfekt gyűrűk

6.1. Szemiperfekt gyűrűk és bázisgyűrűik

6.1.1. Definíció: *Egy R gyűrűt szemiperfektnek nevezünk, ha $R/J(R)$ féligegyszerű és az idempotens elemek felemelhetők modulo $J(R)$, azaz minden $d + J(R) \in R/J(R)$ idempotenshez létezik egy olyan $e \in R$ idempotens, melyre $e + J(R) = d + J(R)$.*

A következő tétel további ekvivalens feltételek ad arra, hogy egy gyűrű mikor szemiperfekt. Habár alkalmazni fogjuk, nem bizonyítjuk, bizonyítása megtalálható [1]-ben (27.10. Proposition).

6.1.2. Tétel: *Egy R gyűrűre a következők ekvivalensek:*

a) R szemiperfekt.

b) R-ben létezik idempotensek egy olyan teljes, ortogonális $\{e_1, \ldots, e_n\}$ halmaza, melyre e_iRe_i lokális minden i-re.

c) Minden egyszerű R-modulusnak létezik projektív fedése.

d) Minden végesen generált R-modulusnak létezik projektív fedése.

Most már könnyedén belátható, hogy a szemiperfektség invariáns tulajdonság. Legyen ugyanis az R gyűrű szemiperfekt és S vele Morita-ekvivalens, N egy egyszerű S-modulus. Ekkor $G(N)$ egyszerű R-modulus és R szemiperfektsége, illetve az előző tétel c) pontja miatt $G(N)$-nek létezik projektív fedése. Alkalmazva a **4.3.3. Állítást**, $N \cong FG(N)$-nek is létezik projektív fedése, vagyis újra alkalmazható a c) pont, azaz S szemiperfekt.

6.1.3. Definíció: *Primitív idempotensnek nevezünk egy olyan $e \in R$ idempotens elemet, mely nem írható fel két nem-nulla, ortogonális idempotens elem összegeként.*
Egy M R-modulust primitívnek nevezünk, ha létezik olyan e primitív idempotens, melyre $M \cong Re$.

6.1.4. Definíció: *Gyűrűelemek egy $\{e_1, \ldots, e_n\}$ halmazát idempotensek egy bázishalmazának nevezünk, ha e_i-k olyan páronként ortogonális idempotens elemek, melyekre Re_i-k mind nem-izomorfak egymással és kiadják az összes primitív R-modulust.*

A következő állítás szerint, mely bizonyítása szintén megtalálható [1]-ben (27.6. Theorem), szemiperfekt gyűrűben létezik bázishalmaz és az Re_i modulusok halmazából is leolvasható, hogy idempotensek halmaza bázishalmaz-e.

6.1.5. Állítás: *Legyen R szemiperfekt gyűrű. Ekkor ortogonális, primitív idempotensek minden teljes halmaza tartalmaz egy bázishalmazt. Továbbá a következők ekvivalensek:*

a, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ bázishalmaz

b, Re_i-k a projektív, felbonthatatlan R-modulusok reprezentánsainak egy irredundáns halmazát alkotják.

6.1.6. Definíció: *Legyen R szemiperfekt gyűrű. Egy $e \in R$ idempotenst bázisidempotensnek nevezünk, ha $e = e_1 + \cdots + e_n$, ahol e_i-k primitív idempotensek egy bázishalmaza.*

6.1.7. Definíció: *Legyen R szemiperfekt gyűrű. Azt mondjuk, hogy S gyűrű R egy bázisgyűrűje, ha van olyan $e \in R$ bázisidempotens, hogy $S \cong eRe$.*

Tegyük fel, hogy $e = e_1 + \cdots + e_n$ és $f = f_1 + \cdots + f_n$ bázisidempotensek. Ekkor Re és Rf modulusok felbontását és a bázishalmaz definícióját felhasználva:

$$Re = Re_1 \oplus \cdots \oplus Re_n \cong Rf_1 \oplus \cdots \oplus Rf_n = Rf.$$

Ennek segítségével

$$eRe \cong End({}_R Re) \cong End({}_R Rf) \cong fRf.$$

Tehát az R-hez tartozó bázisgyűrű izomorfizmus erejéig egyértelmű.

6.1.8. Tétel: *Egy R szemiperfekt gyűrű Morita-ekvivalens a bázisgyűrűjével.*

Bizonyítás: Jelölje e a bázisidempotens elemet. Ekkor a **6.1.5. Állítás** és a **2.2.24. Állítás** miatt tudjuk, hogy Re progenerátor. $eRe \cong End({}_R Re)$, amire alkalmazva a **4.4.5. Következményt**, kapjuk a keresett állítást. □

Máshogy is le lehetne vezetni, de az előző tételből is következik, hogy az R-hez tartozó bázisgyűrű szemiperfekt, hiszen a Morita-ekvivalenciára nézve invariáns a szemiperfektség. Az előző állítás segítségével szemiperfekt gyűrűk ekvivalenciájára mondható egy új szükséges és elégséges feltétel.

6.1.9. Tétel: *R és S szemiperfekt gyűrűk akkor és csak akkor Morita-ekvivalensek, ha bázisgyűrűik izomorfak.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $R \approx S$ és $F : R \to S$ egy kategória-ekvivalencia. A **6.1.5. Állítás** és a **4.3.2. Állítás** miatt tudjuk, hogy $F(Re) = F(Re_1) \oplus \cdots \oplus F(Re_n)$, ahol az $F(Re_i)$-k összessége a projektív, felbonthatatlan S-modulusok reprezentánsainak egy irredundás halmazát alkotják. Ismét **6.1.5. Állítást** alkalmazva egy $f \in S$ bázisidempotensre, adódik $F(Re) \cong Sf$. A **4.1.2. Lemmát** alkalmazzuk ${}_R Re$ és ${}_S F(Re)$ modulusokra:

$$eRe \cong End({}_R Re) \cong End({}_S F(Re)) \cong fSf,$$

vagyis R és S bázisgyűrűi izomorfak.
Ha a bázisgyűrűk izomorfak, akkor nyilván Morita-ekvivalensek is. Az előző tétel miatt R és S Morita-ekvivalensek a bázisgyűrűikkel, így a tranzitivitás miatt $R \approx S$. □

A. Függelék

Definíciók

A.1. Modulusok

Féligegyszerű modulus: egy M R-modulus féligegyszerű, ha előáll egyszerű R-modulusok direkt összegeként.

Projektív feloldás: egy M R-modulus egy projektív feloldása olyan

$$\cdots \to P_n \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

egzakt sorozat, ahol P_i-k projektív modulusok.

Projektív dimenzió: egy M R-modulus projektív dimenziója az a legkisebb n egész szám, amelyre létezik egy

$$0 \to P_n \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

projektív feloldás. Ha nincs véges projektív feloldás, akkor ∞-nek definiáljuk. Jelölése: $pd(M)$.

A.2. Gyűrűk

Féligegyszerű gyűrű: Minden (bal oldali) R-modulus féligegyszerű.

Lokális gyűrű: egyetlen maximális balideálja van.

Öröklődő gyűrű: a gyűrű bal (jobb) öröklődő, ha a projektív bal (jobb) oldali R-modulusok részmodulusai projektívek. Öröklődő a gyűrű, ha bal és jobb öröklődő egyszerre.

Öninjektív gyűrű: az R gyűrű bal (jobb) öninjektív, ha minden végesen generált projektív bal (jobb) oldali modulus injektív. Öninjektív, ha mindkét oldalról öninjektív.

QF-gyűrű (kvázi-Frobenius gyűrű): bal öninjektív és bal Noether-gyűrű.

Bal perfekt gyűrű: minden bal oldali R-modulusnak létezik projektív fedése.

Primitív gyűrű: egy R gyűrűt bal (jobb) primitívnek nevezünk, ha létezik hűséges egyszerű bal (jobb) oldali modulusa.

Szemiprimitív gyűrű: egy R gyűrűt bal (jobb) szemiprimitívnek nevezünk, ha létezik hűséges féligegyszerű bal (jobb) oldali modulusa (ez ekvivalens azzal, hogy a gyűrű Jacobson-radikálja 0).

Redukált gyűrű: nincsen nem-nulla nilpotens eleme.

(Bal) Globális dimenzió: a bal oldali R-modulusok projektív dimenzióinak szuprémuma. Jelölése: $gl.dim(R)$

Gyűrű K_0-csoportja: vegyük a végesen generált projektív bal oldali R-modulusok izomorfia-osztályait. Ezek egy $(M,+)$ kommutatív félcsoportot alkotnak a direkt összegre, mint műveletre. Ekkor $K_0(R)$ legyen M Grothendieck-csoportja.
Ezt a következőképpen konstruálhatjuk meg: legyenek $m_1, m_2, n_1, n_2, l \in M$. Vezessük be $M \times M$-en a következő ekvivalencia-relációt: $(m_1, m_2) \sim (n_1, n_2)$, ha létezik olyan l, hogy $m_1 + n_2 + l = m_2 + n_1 + l$ ((m_1, m_2)-re formálisan $m_1 - m_2$-ként tekinthetünk). Az (m_1, m_2) és (n_1, n_2) ekvivalencia-osztályok összegét $(m_1 + n_1, m_2 + n_2)$ ekvivalencia-osztályának definiálva, $M \times M/\sim$ csoport lesz, ezt nevezzük M Grothendieck-csoportjának.

Irodalomjegyzék

[1] F.W. Anderson - K.R. Fuller: *Ring and Categories of Modules*, 2nd edition. Graduate Texts in Math., Vol. 13, Springer-Verlag, New York, 1992

[2] N. Jacobson: *Basic Algebra II.*, 2nd edition. W.H. Freeman and Company, New York, 1989

[3] T.Y. Lam: *Lectures on Modules and Rings*, Graduate Texts in Math., Vol. 189, Springer-Verlag, New York, 1999

[4] S. Mac Lane: *Categories for the Working Mathematician*, 2nd edition. Graduate Texts in Math., Vol. 5, Springer-Verlag, New York, 1998

[5] K. Morita: *Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition*, *Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku*, Sec. A 6 (1958), 83-142.