Leíró halmazelmélet
szakdolgozat

Vidnyánszky Zoltán
Matematika BSc

Témavezető: Komjáth Péter
egyetemi tanár

Számítógéptudományi Tanszék
Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Budapest, 2009.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A halmazelmélet precíz axiómarendszerének megszületése és a valós számok definiálása óta tekintélyes elmélet fejlődött ki a számegyenes speciális részhalmazainak vizsgálatára. Luzin 1912-ben látta be a következő jól ismert tételt:

1.1. Tétel. *Minden Lebesgue-mérhető* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *függvény relatíve folytonos egy pozitív mértékű halmazra megszorítva.*

Hasonló jellegű tételt bizonyított H. Blumberg 1922-ben, ez tetszőleges függvény sűrű halmazra való folytonos megszorításáról szól. A továbbiakban számos eredmény született arra nézve, hogy mennyire kell egy valós függvénynek szépnek lennie. A Sierpiński-Zygmund függvény egy későbbi negatív eredmény a kérdés megválaszolást illetően. Itt ugyanis (ahogy azt majd látni fogjuk) egy olyan függvény lett konstruálva, mely semelyik $\mathfrak{c}$ számosságú halmazon sem folytonos. A forszolás módszerével lehetőség nyílt állítások ZFC-től való függetlenségének bizonyítására. U. Abraham, M. Rubin, S. Shelah igazolták, hogy a Sierpiński-Zygmund függvény konstrukciója tovább nem erősíthető, vagyis olyan függvény léte ZFC-ből nem következhet, mely minden nem megszámlálható halmazon nem folytonos. Ezen eredmények mutatják, hogy a számegyenes és a sík részhalmazainak természetes tulajdonságai is jól vizsgálhatóak halmazelméleti eszközöket alkalmazva. Célunk a differenciálhatóság, folytonosan differenciálhatóság tekintetében hasonló jellegű kérdések megválaszolása.

A dolgozat felépítése a következő. Először betekintést nyerünk ismert leíró halmazelméleti eredményekbe, a később felhasznált tételek egy részét bizonyítjuk. A második részben rátérünk a "kis" halmazokkal kapcsolatos eredmények részletezésére, a kontinuum-hipotézist, Martin axiómáját, CPA-t és SOCA-t alkalmazva ZFC-vel konzisztens valós függvénytani eredményeket látunk be. A már ismert állítások függetlenségét nem bizonyítjuk, de néhány alapvető fogalmat definiálunk, melyek szorosan kapcsolódnak a forszolással. Számos kisebb lemma igazolásán kívül belátjuk a következő állításokat:

1.1. Állítás. *Egy olyan síkbeli halmaz, amely minden vízszintes vagy függőleges tengelyen értelmezett folytonosan differnciálható függvény grafikonját megszámlálható sok pontban metszi,* (s_0)*-beli.*

1.2. Állítás. *Ha (ZFC+SOCA+MA)⇒(Minden nem megszámlálható halmazon értelmezett Lipschitz függvény differenciálható egy nem megszámlálható halmazon), akkor (ZFC+SOCA+MA)⇒(nincs olyan* $\aleph_1$ *számosságú halmaz a síkon, amely minden vízszintes vagy függőleges tengelyen értelmezett* *folytonosan differenciálható függvény grafikonját megszámlálható sok pontban metszi.)*

A dolgozatban található néhány konkrét példa is állításaink élességének megmutatása céljából.

1.1. Jelölések

A jelöléseink alapvetően hagyományosak. A valós számok halmazát $\mathbb{R}$-rel jelöljük, $|\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$. Ha $A \subset \mathbb{R}$ $C(A)$, $D(A)$, $C^1(A)$ stb. jelöli az A-n értelmezett relatíve folytonos, differenciálható, folytonosan differenciálható stb. függvények halmazát megfelelően. A differenciálhatóságnál mindig használjuk, hogy A minden pontja torlódási pontja, ha félreértésre nem ad okot, akkor A-t elhagyhatjuk. Egy f függvény A-ra való megszorítását $f|A$-val jelöljük. Az A halmaz lezártját $\overline{A}$, belsejét int(A), f értelmezési tartományát dom(f), értékkészletét ran(f) jelöli. $\mathcal{M}$ jelöli az első kategóriájú, $\mathcal{N}$ pedig a Lebesgue-nullmértékű halmazok rendszerét $\mathbb{R}$-ben. ω és $\mathbb{N}$ jelöli a természetes számok halmazát, melyet egyben a diszkrét topológiával topologikus térnek is tekintünk. Ennek megfelelően ω^ω és 2^ω a szorzattopológiával rendelkező topologikus terek, $2^\omega = \mathfrak{C}$, vagyis a Cantor halmaz. Ha X tetszőleges halmaz, κ pedig számosság, akkor $[X]^{<\kappa} = \{A : A \subset X, |A| < \kappa\}$, analóg módon $[X]^{\kappa} = \{A : A \subset X, |A| = \kappa\}$. X hatványhalmazát $\mathcal{P}(X)$ jelöli.

2. Lengyel terek, Borel halmazok

Az alábbiakban bevezetünk néhány, a lengyel terekkel kapcsolatos fogalmat illetve alpvető tételeket látunk be. Számos kimondott tétel bizonyítása megtalálható [1]-ben, a részletes elméletet [2] tartalmazza.

2.1. Definíció. *Egy topologikus teret lengyelnek hívunk, ha metrizálható, teljes és szeparábilis.*

2.2. Definíció. *Egy topologikus térben a nyílt halmazok által generált σ-algebra elemeit Borel halmazoknak nevezzük, a Borel halmazok rendszerét $\mathcal{B}(X)$-szel jelöljük.*

2.3. Definíció. *Legyen X lengyel tér. Ekkor azon halmazokat, melyek előállnak $\cap_{n\in\omega} G_n$ alakban, ahol $G_n \subset X$ nyílt, G_δ halmazoknak nevezzük.*

2.4. Definíció. *Legyen X lengyel tér. Egy $P \subset X$ halmazt perfektnek mondunk, ha zárt és minden pontja torlódási pontja.*

A perfekt halmazoknak egy nevezetes tulajdonsága, hogy egy nemüres perfekt halmaz $\mathfrak{c}$ számosságú.

2.1. Lengyel tér lengyel alterei

A következőkben belátunk néhány hasznos és önmagában is érdekes állítást lengyel terekről.

2.1. Állítás. *Lengyel tér G_δ altere is lengyel.*

BIZONYÍTÁS. Először megmutatjuk, hogy egy teljes metrikus tér G_δ alterén a topológia kompatibilis egy teljes metrikával. Legyen $H \subset X$ G_δ, ahol X teljes metrikus tér. Ekkor $H = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, a G_n halmazok nyíltak. Most legyen $F_n = X \setminus G_n$, $d(x, F) = inf\{d(x, y) : y \in F\}$. Most definiáljuk a következő metrikát H-n: $d'(x, y) = d(x, y) + \sum_n min\{2^{-n-1}, |1/d(x, F_n) - 1/d(y, F_n)|\}$. Ez a metrika "szétnyújtja" H pontjait, most belátjuk, hogy teljes és kompatibilis a topológiával. A kompatibilitáshoz elég annyit beltáni, hogy bármely d-vel értelmezett gömb tartalmaz d'-vel értelmezettet, ez a definícióból viszont következik. Legyen $(x_n) \in H$ Cauchy sorozat a d' metrikára nézve. Ekkor, mivel $d(x, y) \leq d'(x, y)$ ezért X-ben konvergens is a sorozat. Legyen a torlódási pontja x. Belátjuk, hogy $x \in H$. A sorozat Cauchy volta miatt az $1/d(x_n, F_m)$ sorozat (mint valós számok sorozata) is Cauchy minden m-re. De akkor $x \notin F_m$ teljesül, hiszen egyébként $1/d(x_n, F_m) \to \infty$ volna. Így beláttuk, hogy az így kapott metrikával a tér teljes. Másrészt általában is igaz, hogy egy szeparábilis metrikus tér altere szeparábilis, hiszen ha S megszámlálható sűrű halmaz H pedig az altér, akkor minden pontjához és minden $n \in \mathbb{N}^+$-hoz válasszunk egy $x_{s,n} \in H$-t (ha van ilyen), hogy $d(x_{s,n}, s) < 1/n$. $\{x_{s,n} : s \in S, n \in \mathbb{N}^+\}$ nyilván megszámlálható, legyen $y \in H$. Mivel S sűrű, ezért van olyan $r \in S$, hogy $d(y, r) < \epsilon$. Legyen $1/(n + 1) \leq \epsilon/2 < 1/n$, mivel $d(y, r) < 1/n$, ezért van $x_{r,n} \in H$ a kiválasztott halmazból, hogy $d(r, x) < 1/n$, tehát $d(y, x) < 2/n$. Tehát $\{x_{s,n} : s \in S, n \in \mathbb{N}^+\}$ sűrű H-ban. Ezzel beláttuk, hogy lengyel tér G_δ altere is lengyel. ∎

Megjegyzés. Az állítás visszafelé is igaz, nevezetesen, egy lengyel tér altere pontosan akkor lengyel, ha G_δ. Ez az alábbi tény következménye.

2.2. Állítás. *Legyen $f : A \to Y$ folytonos függvény, ahol $A \subset X$, X metrikus Y pedig teljes metrikus. Ekkor van olyan G_δ H halmaz $A \subset H \subset \overline{A}$, melyre kiterjeszthető folytonosan.*

Bizonyítás. Minden $n \in \mathbb{N}^+$-ra és minden $x \in A$-ra van olyan δ_x, hogy $y \in A$ és $d_X(x, y) < \delta_x$ esetén $d_Y(f(x), f(y)) < 1/n$. Tekintsük a $G_n = \{z : z \in \overline{A}, \exists x \in A, d(z, x) < \delta_x\}$ halmazokat. Ekkor $\cap_n G_n = H$, $y \in H \setminus A$. Legyen $x_m \in A$, $x_m \to y$. Belátjuk, hogy $f(x_m)$ Cauchy sorozat. Legyen $\epsilon > 0$ rögzített. Ekkor $1/n < \epsilon/2$-ra, mivel $y \in G_n$, ezért $\exists x \in A$, hogy $d_X(x, y) < \delta_x$. Tehát van olyan m_0, hogy $m \geq m_0$ esetén $d_X(x, x_m) < \delta_x$, azaz $d_Y(f(x_m), f(x_l)) < 2/n$, ha $m, l \geq m_0$. Így a függvényértékek Cauchy sorozatot alkotnak. Legyen ekkor $f'(y) = \lim_{x \to y} f(x)$, a limesz létezik, hiszen Y teljes. Az így kiterjesztet függvény folytonos lesz, hiszen ha $y_k \to y$ amint $k \to \infty$, $y_k, y \in H$, akkor mindegyik y_k-hoz választható olyan $x_k \in A$, hogy $d_Y(f(x_k), f(y_k)) < \epsilon$ minden $\epsilon > 0$-ra. De tudjuk, hogy $f(x_k) \to f(y)$, tehát elég nagy k-ra $d_Y(f(y), f(x_k)) < 2\epsilon$. Ezzel beláttuk a folytonosságot. ∎

2.1. Következmény. *Teljes metrikus tér teljesen metrizálható altere G_δ.*

Bizonyítás. Legyen X a tér, $A \subset X$ teljes altere. Ekkor $f = id_A : A \to A$. Most az előző állítás miatt van olyan $A \subset H \subset \overline{A}$, H G_δ, hogy f kiterjeszthető H-ra folytonosan. De ez a kiterjesztés nem lehet más mint $id_X|H : H \to A$. Ekkor $H \subset A$, tehát $H = A$, így A G_δ. ∎

2.3. Állítás. *Legyen X metrikus tér, Y pedig teljes metrikus. $A \subset X$ tesző-leges, $f : A \to Y$, $f|A$ egyenletesen folytonos. Ekkor f kiterjeszthető $\overline{A}$-ra folytonosan (speciálisan az egész X-re is).*

Bizonyítás. A bizonyítás menete hasonló 2.2 bizonyításához. Elég itt is belátni, hogy ha $x \in \overline{A}$, akkor bármely $x_n \to x$ $n \to \infty$-re $f(x_n)$ Cauchy. Ehhez pedig legyen $\epsilon > 0$ rögzített. Az egyenletes folytonosság miatt van olyan δ, hogy $d_X(x, y) < \delta$ esetén $d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon$. Ekkor van olyan n_0, hogy $n, m \geq n_0$ esetén $d_X(x_n, x_m) < \delta$ $d_Y(f(x_n), f(x_m)) < \epsilon$. Beláttuk, hogy Cauchy sorozatot alkotnak. Innen a bizonyítás teljesen analóg. ∎

A következő állítás jellemzést ad a lengyel terek számosságáról.

2.4. Állítás. *(Cantor-Bendixson) Minden lengyel tér előáll mint egy perfekt és egy megszámlálható halmaz diszjunkt úniója.*

Bizonyítás. Legyen $P = \{x : \text{ha } x \in U, \text{ U nyílt, akkor } |U| > \aleph_0\}$ Belátjuk, hogy $M = X \setminus P$ megszámlálható. Mivel egy szeparábilis metrikus tér M_2 is, ezért $y \in M$ esetén van olyan bázisnyílt is, amely megszámlálható és eleme y. Minden M-beli elemhez rendeljük hozzá ezt a nyíltat. Ekkor egy nyílt legfeljebb megszámlálható sok ponthoz lett hozzárendelve, hisz maga is megszámlálható. Tehát $|M| = \aleph_0$. Elég azt igazolni, hogy P perfekt. Ha $p \in \overline{P}$, akkor van $p_n \to p$ sorozat, hogy $p_n \in P$. Ekkor p tetszőleges U nyílt környezetében van $p_n \in U$, akkor viszont U nem megszámlálható. Tehát $P = \overline{P}$. Másrészt mivel M megszámlálható, ezért $p \in P$-re és $p \in U$ nyíltra $P \supset U \setminus M$ nem megszámlálható. Így p P-nek torlódási pontja. Tehát P perfekt. ■

2.2. Következmény. *Egy lengyel tér megszámlálható vagy $\mathfrak{c}$ számosságú.*

2.2. A Borel halmazok regularitási tulajdonságai

2.5. Definíció. *Legyen X lengyel tér, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Az $\mathcal{A}$ halmazosztály perfekt halmaz tulajdonságú (PHT), ha minden $A \in \mathcal{A}$ vagy $|A| \leq \aleph_0$ vagy van $P \subset A$, ahol P nemüres perfekt.*

2.6. Definíció. *Legyen $A \subset X$. Azt mondjuk, hogy A Baire tulajdonságú (BT), ha van olyan $U \subset X$ nyílt, hogy $U \Delta A \in \mathcal{M}$, vagyis első kategóriájú.*

2.1. Tétel. *Lengyel térben a Borel halmazok rendszere rendelkezik a perfekt halmaz tulajdnosággal, minden Borel halmaz Baire tulajdonságú, a számosságuk pedig $\mathfrak{c}$.*

A tétel bizonyítása teljes a következő fejezetben lesz, egyelőre az alábbi állítást bizonyítjuk.

2.5. Állítás. *Lengyel térben minden nem megszámlálható Borel halmaz tartalmaz perfektet, vagyis a Borel halmazok rendszere PHT.*

Bizonyítás. Azt fogjuk belátni, hogy lengyel térben minden Borel halmaz előáll mint valamely lengyel tér folytonos bijekció általi képe. Ebből már következik az állítás, hisz ha a Borel nem megszámlálható, akkor a hozzá tartozó lengyel tartalmaz nemüres perfektet, ennek képe pedig perfekt.

A fenti állítás alapján kapjuk, hogy a nyílt halmazok maguk is lengyel teret alkotnak a megfelelő metrikával. Belátjuk hogy $\{A : A \subset X, \exists Y, f$

folytonos bijekció $f(Y) = A$, Y lengyel$\}$ tartalmazza a Borel halmazokat. Legyen $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ olyan páronként diszjunkt halmazrendszer, melyre $f_i(Y_i) = A_i$, valamely Y_i lengyel térre, legyen d_i a megfelelő metrika. Ekkor van olyan is, melyre $sup\{d_i'(x,y) : x, y \in Y_i\} \leq 1$. Most legyen (Y,d) olyan lengyel tér, mely az Y_i-terek diszjunkt uniója és $x \in Y_i, y \in Y_j$ -re $d(x,y) = d_i'(x,y)$, ha $i = j$ és 1 egyébként. Ekkor Y nyilván lengyel és $\cup_i A_i$ előáll Y folytonos képeként. Most A_i olyan mint fent, de nem feltétlenül diszjunkt. Legyen $Y = \prod_{i=1}^{\infty} Y_i$, ez a tér is lengyel. Ekkor az $F = \{(y_1, y_2, ..) : (y_1, y_2..) \in Y, f_1(y_1) = f_2(y_2) = ..\}$ zárt, hiszen zárt halmazok metszete, tehát lengyel. Most az $f((y_1, y_2, ..)) = f_1(y_1)$ függvény folytonosan és bijektíven ráképezi F-et $\cap_i A_i$-re.

2.1. Lemma. *Legyen X olyan topologikus tér, melyben minden zárt halmaz G_δ. Ekkor a Borel halmazok rendszere megegyezik a nyíltakat tartalmazó olyan legszűkebb halmazrendszerrel, amely megszámlálható diszjunkt unióra és megszámlálható metszetre zárt.*

Ezt a technikai jellegű lemmát felhasználva kapjuk az állítást.

Megjegyzés. Van olyan halmaz $A \subset \mathbb{R}$-ben, melyre sem A, sem $\mathbb{R} \setminus A$ nem tartalmaz perfekt halmazt (ezek a Bernstein halmazok). Ehhez soroljuk fel az $\mathbb{R}$-beli perfekt halmazokat (nyilván $\mathfrak{c}$ sok van, hiszen zárt halmazokról van szó), és az $\alpha < 2^\omega$-adik lépésben válasszunk egy $x_\alpha, y_\alpha \in P_\alpha \setminus \{x_\beta, y_\beta : \beta < \alpha\}$, hogy $x_\alpha \neq y_\alpha$. Ez megtehető, mivel a levont halmazok számossága $< 2^{\aleph_0}$. Most $A = \{x_\alpha : \alpha < 2^\omega\}$ nem tartalmazhat nemüres perfektet, hisz bármelyikben van y_α. Hasonlóan $\mathbb{R} \setminus A$ sem.

3. Analitikus halmazok

3.1. Projektív hierarchia

3.1. Definíció. *Legyen X lengyel tér. Ekkor az $A \subset X$ halmaz analitikus, ha van olyan Y lengyel tér és f folytonos függvény, hogy $f : Y \to X$ és $f(Y) = A$. Az analitikus halmazok rendszerét az X lengyel térben $\Sigma_1^1(X)$ jelöli.*

A Borel halmazokat osztályozhatjuk transzfinit úton is, a következőképp. Legyen X lengyel tér. Σ_1^0 az X-beli nyíltak halmaza Π_1^0 a zártaké. Ezután indukcióval definiálunk minden $\xi < \omega_1$ rendszámra $\Sigma^0_\xi = \{\cap_{i=0}^\infty A_i : A_i \in \Pi^0_{\xi_1}$ valamely $\xi_1 < \xi\}$, valamint $\Pi^0_\xi = \{X \setminus A : A \in \Sigma^0_\xi\}$.

3.1. Állítás. $\mathcal{B} = \bigcup_{\xi<\omega_1} \Sigma^0_\xi = \bigcup_{\xi<\omega_1} \Pi^0_\xi$.

Bizonyítás. Belátjuk hogy a jobb oldalon álló két unió (melyek nyilván megegyeznek) σ-algebra. Először is, komplementerképzésre nyilván zárt, másrészt legyen $H_n \in \bigcup_{\xi<\omega_1} \Sigma^0_\xi$, $n \in \mathbb{N}$. Ekkor minden n-re van olyan ξ_n, hogy $H_n \in \Sigma^0_{\xi_n}$. Mivel ω_1 reguláris, így van olyan $\xi < \omega_1$, hogy $H_n \in \Sigma^0_\xi$ minden n-re. De Σ^0_ξ zárt megszámlálható unióra. Így beláttuk, hogy σ-algebra, tehát $\mathcal{B} \subset \bigcup_{\xi<\omega_1} \Sigma^0_\xi$. A másik irányú tartalmazás egyszerűbb, transzfinit indukcióval látszik. ∎

3.1. Következmény. *Ha X nem megszámlálható lengyel, akkor* $|\mathcal{B}(X)| = \mathfrak{c}$.

A Borel hierarchia általánosítható analitikus halmazokra. Legyen $\Sigma^1_1(X)$ azon halmazok összessége, melyek előállnak mint Borel halmazok folytonos képei. Definiáljuk most általában Σ^1_{i+1} halmazokat, mint Π^1_i halmazok folytonos képei, $\Pi^1_i = \{X \setminus A : A \in \Sigma^1_i\}$ $i < \omega$-ra. Az így definiált halmazok összességét projektív halmazoknak nevezzük. A következő állítás mutatja, hogy a Σ^1_1-re adott két különböző definíció ekvivalens.

3.2. Állítás. *Legyen X lengyel tér,* $A \subset X$*. Ekvivalensek:*

1. *A analitikus*
2. *Van olyan Y lengyel tér, és B Borel, hogy* $B \subset X \times Y$ *és* $A = proj_X(B)$
3. *Van olyan* $F \subset X \times \omega^\omega$ *zárt, hogy* $A = proj_X(B)$.

Bizonyítás. A 3. ⇒ 2. ⇒ 1. implikáció nyilványaló. Most tegyük fel, hogy A analitikus. Ekkor van olyan Y lengyel, f folytonos, hogy $f(Y) = A$. Másrészt ismert, hogy minden lengyel tér előáll ω^ω folytonos képeként, legyen $g : \omega^\omega \to Y$ ilyen leképezés. Ekkor $f(g(\omega^\omega)) = A$. Legyen $F = \{(f(g(y)), y) : y \in \omega^\omega\} \subset X \times \omega^\omega$. A kompozíció folytonossága miatt F zárt, így beláttuk az 1. ⇒ 3. implikációt. ∎

3.2. Szuszlin operáció

Most az analitikus halmazokat teljesen más formában fogjuk előállítani.

3.2. Definíció. *Legyen $P_s \subset X$ halmazok egy rendszere, ahol $s \in [\omega]^{<\omega}$. Ekkor a Szuszlin operáció ezen halmazrendszerekből a*

$$\mathcal{AS} = \bigcup_{x \in \omega^\omega} \bigcap_n P_{x|n}$$

halmazt állítja elő, ahol $x|n$ jelöli x első n koordinátáját.

3.1. Tétel. *Legyen (X,d) lengyel tér. Egy $A \subset X$ halmaz pontosan akkor analitikus, ha $A = \mathcal{A}_s\mathcal{F}_s$, ahol F_s zárt halmazok rendszere.*

Bizonyítás. Ha $A = \mathcal{A}_s\mathcal{F}_s$, akkor tekintsük a következő $P \subset \omega^\omega \times X$ halmazt: $P = \{(x,y) : \forall n(y \in P_{x|n})\}$. Ekkor $Proj_X(P) = \bigcup_x \bigcap_n P_{x|n} = A$, valamint P Borel. Így A analtikus. Visszafelé, ha most A analitikus, akkor van Y lengyel tér, és f folytonos $f : Y \to X$, hogy $f(Y) = A$. Tudjuk, hogy minden lengyel tér előáll mint ω^ω folytonos képe, ezért van olyan $g : \omega^\omega \to X$ folytonos, hogy $g(\omega^\omega) = A$. Legyen $s \in \omega^{<\omega}$, $G_s = \{x \in \omega^\omega : \exists n \in \omega, x|n = s\}$. Definiáljuk most a $F_s = \overline{g(G_s)}$ halmazokat. Legyen $x \in \bigcap_n F_{y|n}$, $y \in \omega^\omega$, így van olyan $x_n \in g(G_{y|n})$ minden $n \in \omega$-re sorozat, hogy $d(x, x_n) < 2^{-n}$. Legyen y_n olyan, hogy $g(y_n) = x_n$. Ekkor $y_n \to y$, másrészt, mivel g folytonos, és $diam(G_{y|n}) \to 0$, ezért $diam(F_{y|n}) \to 0$, így $\bigcap_n F_{y|n} = x$ teljesül zártságuk miatt. Ismét a folytonosságot használva $x = f(y)$. Így $A = \bigcup_x \bigcap_n F_{x|n}$. ■

3.3. Analitikus halmazok regularitási tulajdonságai

Az alábbi tételek mutatják, hogy milyen viszonyban állnak egymással lengyel térben a Borel és Σ_1^1 halmazok.

3.2. Tétel. *Legyen X nem megszámlálható lengyel tér. Ekkor $\mathcal{B}(X) \neq \Sigma_1^1(X)$.*

3.3. Tétel. *(Luzin Szeparációs tétel) Legyen X lengyel tér, $A, B \subset X$ diszjunkt analitikusak. Akkor van egy $C \in \mathcal{B}(X)$, hogy $A \subset C$ és $C \cap B = \emptyset$, vagyis C szeparálja a két halmazt.*

3.2. Következmény. *Ha X lengyel, akkor $\mathcal{B}(X) = \Sigma_1^1(X) \cap \Pi_1^1(X)$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $A \in \Sigma_1^1(X) \cap \Pi_1^1(X)$. Ekkor a fenti tételt alkalmazva A-ra és $X \setminus A$-ra van olyan C Borel, hogy $C \supset A$ és $C \cap X \setminus A = \emptyset$. Tehát $C = A$, azaz A Borel. A másik irányú tartalmazás nyilvánvaló. ∎

Most az analitikus függvénygrafikonokról szóló fontos tételt látjuk be.

3.3. Állítás. *Legyenek X, Y lengyel terek, $f : X \to Y$. f grafikonja pontosan akkor analitikus $X \times Y$-ban, ha Borel.*

Bizonyítás. Az egyik irány nyilványaló. Most legyen $A \subset Y$ Borel. Ekkor $f^{-1}(A) = proj_X((A \times X) \cap graf(f))$, így nyilván analitikus lesz. Másrészt $f^{-1}(A) = X \setminus proj_X(((Y \setminus A) \times X) \cap graf(f))$ így ko-analitikus is. Ekkor viszont Borel. Azaz f-nél minden Borel halmaz őse Borel. Most tekintsük a $h : X \times Y \to Y \times Y$ lekepézest $h(x, y) = (f(x), y)$-ként definiálva. Ha $G \subset Y \times Y$ nyílt, akkor előáll mint megszámlálható sok nyílt tégla egyesítése, ezek ősképe pedig Borel. Akkor minden Borel halmaz h szerinti őse Borel, speciálisan $\Delta = \{(y, y) : y \in Y\}$ zárt halmazé is. $h^{-1}(\Delta) = \{(x, f(x)) : x \in X\} = graf(f)$ is Borel. ∎

Az analitikus halmazok a fentieken felül a Borelekhez hasonlóan számos regularitási tulajdonsággal rendelkeznek.

3.3. Definíció. *Egy $H \subset X$, X mérhető tér, univerzálisan mérhető, ha minden σ-véges Borel mérték szerint mérhető.*

3.4. Tétel. *Legyen X lengyel tér. Ekkor $A \in \Sigma_1^1(X)$ esetén*

1. *A univerzálisan mérhető*
2. *Ha $|A| > \aleph_0$, akkor A tartalmaz perfekt halmazt*
3. *A Baire tulajdonságú*

Bizonyítás. Csak 2. bizonyítjuk. Ennél általánosabb állítást látunk be. Legyen $f : X \to Y$ folytonos, X, Y lengyel, f(X) nem megszámlálható. Ekkor tartalmaz perfektet. Ehhez legyen $H \subset X$ olyan, hogy $f|H$ bijektív. Ekkor nyilván $|H| > \aleph_0$. Most mivel lengyel térben vagyunk, ezért Tekintsük $H^\star = \{x : x \in H, \forall U$ nyílt $x \in U$-ra $|U \cap H| > \aleph_0\}$. Könnyű látni most, hogy $H^\star$ nem megszámlálható, ez abból következik, hogy $H^\star \setminus H$ megszámlálható, hasonlóan a Cantor-Bendixson tétel bizonyításában található indokláshoz. Legyen most $s \in 2^{<\omega}$ sorozat. Ekkor definiáljuk a B_s zárt gömböket a következőképp:

- B_s zárt gömb, melynek középpontja $H^\star$-beli
- $B_{s,i} \subset B_s$, ahol $i \in \{0,1\}$
- $f(B_{s,0}) \cap f(B_{s,1}) = \emptyset$
- $diam(B_{t|n}) \to 0$ midőn $n \to \infty$, minden $t \in 2^\omega$-ra.

1. és 2. megtehető mivel $H^\star$ minden pontja torlódási pontja, 3. pedig a folytonosságnak köszönhető. Ekkor ez egy perfekt séma, így az $\bigcup_t \bigcap_n B_{t|n}$ halmaz homeomorf 2^ω-val. Másrészt f rajta folytonos és injektív, tehát a kompaktság miatt homeomorfizmus, azaz $f(X)$ tartalmaz egy perfekt halmazt. ∎

Megjegyzés.

1. A tételből látszik, hogy minden Borel is BT. Ez direkt úton is egyszerűen látszik, abból a könnyen bizonyítható tényből, hogy a BT halmazok σ-algebrát alkotnak. Viszont a BT halmazok halmaza ennél sokkal tágabb, még azt a legszűkebb σ-algebrát is tartalmazzák, amely zárt a Szuszlin operációra.

2. Van olyan lengyel térbeli halmaz amely nem rendelkezik BT-vel. Ha A BT, akkor $\mathbb{R}\backslash A$ vagy A nem első kategóriájú. Tegyük fel, hogy $X\backslash A$ az. Most $\mathbb{R}\backslash A$ is rendelkezik a BT-vel, hisz $(X\backslash A)\Delta(X\backslash U)$ első kategóriájú, hasonlóképp $(X \setminus U)\Delta(int(X \setminus U))$-hoz. Ekkor legyen $(X \setminus A)\Delta G \subset F$, ahol F első kategóriájú, zárt, így $H = U \setminus F$ G_δ, valamint $A \setminus H \subset F$, tehát $X \setminus A$ vagy A tartalmaz egy második kategóriájú G_δ halmazt, amely tartalmaz perfektet. Azt viszont tudjuk hogy ez nem teljesül minden A-ra és $X \setminus A$-ra.

Annál, hogy Σ^1_1 PHT több valamivel több is igaz.

3.5. Tétel. *Bármely analitikus halmaz előáll mint $\aleph_1$ sok Borel uniója vagy metszete.*

3.3. Következmény. *Bármely Σ^1_2 halmaz előáll mint $\aleph_1$ sok Borel uniója.*

Bizonyítás. A tételből következik, hogy minden Π_1^1 halmaz előáll mint $\aleph_1$ Borel uniója vagy metszete. Ekkor a Σ_2^1 halmazok a ko-analitkusak folytonos képei, azaz előállnak mint $\aleph_1$ Borel halmaz uniójának folytonos képe, azaz mint a képek uniója. De a képek Σ_1^1-beliek, így bármely Σ_1^1 halmaz előáll, mint $\aleph_1^2 = \aleph_1$ sok Borel uniója. ■

3.4. Következmény. *Tegyük fel, hogy $\omega_1 < 2^\omega$. Ekkor lengyel térben Π_1^1 valamint Σ_2^1 is PHT.*

Ez a tény abból következik, hogy mindkét esetben van $\aleph_1$ Borel, amely uniójaként előáll. Ekkor valamelyik nem megszámlálható, hisz $\omega * \omega_1 = \omega_1$, tehát tartalmaz perfekt halmazt.

4. Nevezetes σ-ideálok

4.1. Definíció. *Legyen X topologikus tér. Ekkor $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(X)$ ideál, ha $A, B \in \mathcal{I}$ esetén $A \cup B \in \mathcal{I}$ valamint $C \subset A$, akkor $C \in \mathcal{I}$. $\mathcal{I}$ σ-ideál, ha ideál és zárt a megszámlálható unióra, azaz $A_n \in \mathcal{I}$, akkor $\cup_{n\in\omega} A_n \in \mathcal{I}$*

Ezentúl mindig fel fogjuk tenni, hogy $X \notin \mathcal{I}$, hisz egyébként $\mathcal{P}(X) = \mathcal{I}$.

4.1. Példa. *σ-ideált alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben a Lebesgue-nullmértékű vagy az első kategóriájú halmazok. Ezeket $\mathbb{R}$-ben $\mathcal{N}_n$-nel illetve $\mathcal{M}_n$-nel jelöljük megfelelően, n=1 esetén az indexelést elhagyjuk. Mivel σ-ideálok metszete is σ-ideál, így egy topologikus térben tetszőleges halmazrendszerre értelmezhető az általa generált σ-ideál, ez nem más, mint az azt tartalmazó σ-ideálok metszete.*

4.1. Állítás. *Egy $\mathcal{A}$ halmazrendszer által generált σ-ideál éppen az $\mathcal{A}$-elemeiből álló megszámlálható uniók részhalmazainak halmaza.*

Mi elsősorban $\mathbb{R}^n$-beli σ-ideálokkal fogunk foglalkozni. Jelölje a vízszintes vagy függőleges tengelyen értelmezett folytonos, differenciálható, stb. függvények grafikonjai által generált σ-ideált $\mathbb{R}^2$-ben $C \cup (C)^{-1}$, $D^1 \cup (D^1)^{-1}$, stb.

Fontos helyet foglalnak el a σ-ideálok vizsgálatában az alábbiakban definiált számosságinvariánsok.

4.2. Definíció. *$cov(\mathcal{I})$=$min\{\kappa : \exists \mathcal{A}, |\mathcal{A}| = \kappa, \mathcal{A} \subset \mathcal{I}, \bigcup \mathcal{A} = X\}$,
$non(\mathcal{I})$=$min\{\kappa : A, |A| = \kappa, A \notin \mathcal{I}\}$*

$cof(\mathcal{I})$=$min\{\kappa : \exists\mathcal{A}, |\mathcal{A}| = \kappa,\ \mathcal{A} \subset \mathcal{I}$ *és* $(\forall B \in \mathcal{I})(\exists A \in \mathcal{A})(B \subset A)\}$
$add(\mathcal{I})$=$min\{\kappa : \exists\mathcal{A}, |\mathcal{A}| = \kappa, \mathcal{A} \subset \mathcal{I}, \bigcup\mathcal{A} \notin \mathcal{I}\}$

A következő állítás ezen számosságinvariánsok általános tulajdonságairól szól.

4.2. Állítás. *Legyen X topologikus tér, $\mathcal{I}$ σ-ideál olyan, hogy $[X]^{<\omega} \subset \mathcal{I}$. Ekkor teljesülnek:*
$add(\mathcal{I}) \leq cov(\mathcal{I}) \leq cof(\mathcal{I})$, valamint
$add(\mathcal{I}) \leq non(\mathcal{I}) \leq cof(\mathcal{I})$.

BIZONYÍTÁS. $add(\mathcal{I}) \leq cov(\mathcal{I})$ és $add(\mathcal{I}) \leq non(\mathcal{I})$ hisz $X \notin \mathcal{I}$ illetve az X pontjai $\mathcal{I}$-beliek. $cov(\mathcal{I}) \leq cof(\mathcal{I})$, mivel $X \subset \bigcup\mathcal{I}$, amely része a kofinális halmazok uniójának. Most pedig, ha $\mathcal{A} \subset \mathcal{I}$ kofinális, akkor válasszuk $H \subset X$-et olyannak, hogy $H \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ mindegyik $A \in \mathcal{A}$-ra. Ekkor $|H| \leq cof(\mathcal{I})$, de $H \notin \mathcal{I}$ hiszen egyébként volna $\mathcal{A}$-bel őt majoráló. ∎

4.1. A Cichoń diagram

Most megvizsgáljuk, hogy $\mathcal{M}$ és $\mathcal{N}$ esetében ezen számosságinvariánsokról mi mondható.

4.3. Definíció. *Legyen most*

$$\mathfrak{b} = min\{|F| : F \subset \omega^\omega, \nexists g \in \omega^\omega, \forall f \in F f \leq^\star g\}$$

$$\mathfrak{d} = min\{|F| : F \subset \omega^\omega, \forall g \in \omega^\omega \exists f \in F, g \leq^\star f\}$$

Ahol $f \leq^\star g$, ha van olyan $n_0 \in \omega$, hogy $\forall n \geq n_0$-ra $f(n) \leq g(n)$.

Megjegyzés. Tekintsük ω^ω-ban a kompakt halmazok által generált σ-ideált. Legyen $\mathcal{S}$. Akkor $non(\mathcal{S}) = add(\mathcal{S}) = \mathfrak{b}$ és $cov(\mathcal{S}) = cof(\mathcal{S}) = \mathfrak{d}$. Ez abból következik, hogy ω^ω-ban egy halmaz pontosan akkor σ-kompakt, vagyis $\mathcal{S}$-beli, ha van őt $\leq^\star$ értelemben majoráló elem. Ha tehát $F \subset \mathcal{S}$ olyan, hogy $|F| = add(\mathcal{S})$ és $\bigcup F \notin \mathcal{S}$, akkor a definíció miatt $|F| = \mathfrak{b}$. A többi állítás is hasonlóan látszik. A Cichoń diagram így jellemzi $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{S}$-hez kapcsolódó számosságinvariánsokat.

4.1. Tétel. *Teljesülnek*

- $cov(\mathcal{N}) \leq non(\mathcal{M}) \leq cof(\mathcal{M}) \leq cof(\mathcal{N}) \leq 2^{\aleph_0}$
- $\aleph_1 \leq add(\mathcal{N}) \leq add(\mathcal{M}) \leq cov(\mathcal{M}) \leq non(\mathcal{N})$
- $add(\mathcal{M}) = min\{\mathfrak{b}, cov(\mathcal{M})\}$, *valamint* $cof(\mathcal{M}) = max\{\mathfrak{d}, non(\mathcal{M})\}$
- *Természetesen* $add(\mathcal{N}) \leq cov(\mathcal{N})$, $non(\mathcal{N}) \leq cof(\mathcal{N})$ *és* $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{d}$.

Ezen felül ezeket az egyenlőtlenségeket teljesítve bárhogyan is rendelünk a 10 számosságinvariánshoz $\aleph_1$*-et illetve* $\aleph_2$*-t, van olyan ZFC modell, amelyben azokat az értékeket veszik fel. Ez a Cichoń diagram. Ez utóbbi állítás bizonyítása megtalálható [5]-ben.*

Megjegyzés. Az egyenlőtlenségek egy része a fent bizonyított állítás következménye. Másrészt $\mathcal{I}$=$\mathcal{N}$-ről tujduk, hogy bármely nullmértékű halmaznak van G_δ burka, mely szintén nullmértékű. Tekintsük tehát $G_\delta \cap \mathcal{N}$-t, ez nyilván $\mathfrak{c}$ számosságú, és megfelel a kívánalmaknak, azaz cof($\mathcal{N}$)-re megkaptuk a kívánt felső becslést. Hasonlóan az $F_\sigma \cap \mathcal{M}$-et tekintve, legyen $M \in \mathcal{M}$. Ekkor $M = \cup_{n=1}^{\infty} S_n$, ahol S_n sehol sem sűrű. Tehát $\overline{S}_n$ sehol sem sűrű. Akkor $M \subset \cup_{n=1}^{\infty} \overline{S}_n$, amely nyilván F_σ. Most belátjuk, hogy $\mathbb{R}$ előáll mint egy nullmértékű és egy első kategóriájú halmaz uniója. Legyen (r_n) a racionális számok egy felsorolása. Most $G_m = \cup_n (r_n - 2^{-(n+m)}, r_n + 2^{-(n+m)})$. Ekkor G_m nyílt és sűrű. Legyen $N = \cap_m G_m$. Ekkor G_m sűrű G_δ így komplementere első kategóriájú, viszont $\lambda(N) \leq \lambda(G_m) \leq 2^{-m}$ minden m-re, tehát $\lambda(N) = 0$. Ebből a tényből következik, hogy $cov(\mathcal{N}) \leq non(\mathcal{M})$, hisz legyen most $\mathbb{R} = N \cup M$, $M \cap N = \emptyset$, ahol $N \in \mathcal{N}$, $M \in \mathcal{M}$, S pedig olyan, hogy $S \notin \mathcal{M}$, $|S| = non(\mathcal{M})$. Ekkor $S + N = \{x + y : x \in S, y \in N\}$-re $\mathbb{R} \subset S + N$, ugyanis ha $p \in \mathbb{R} \setminus (S + N)$, akkor $p - S \cap N = \emptyset$, azaz $p - S \subset M$, akkor viszont p-S amely S-nek egy eltoltja első kategóriájú volna, amely ellentmond a feltételnek. Tehát $\mathbb{R}$ lefedhető N $|S|$ sok eltoltjával, így $cov(\mathcal{N}) \leq non(\mathcal{M})$. Hasonlóan látszik, hogy $cov(\mathcal{M}) \leq |S| = non(\mathcal{N})$. A többi egyenlőtlenséget a következőkben tárgyalt lemma felhasználásával igazolhatjuk.

4.4. Definíció. *Legyen P részbenrendezett halmaz. Ekkor cof(P) a legkisebb kofinális részhalmaz számossága, míg add(P) a legkisebb nem korlátos halmazé.*

4.5. Definíció. *P,Q tetszőleges részbenrendezett halmazokra az* $f : P \to Q$ *rendezéstartó injekciót Tukey-beágyazásnak nevezzük, ha bármely korlátos halmaz őse korlátos.*

4.3. Állítás. *Tegyük fel, hogy létezik f Tukey-beágyazás P és Q között. Ekkor* $add(Q) \leq add(P)$ *és* $cof(P) \leq cof(Q)$.

BIZONYÍTÁS. $add(P) \geq add(Q)$ nyilvánvaló, hisz ha $S \subset P$ nem korlátos, akkor f(S) sem lehet az, mert akkor $f^{-1}(f(S)) \supset S$ is az volna, speciálisan S is. Most legyen $S \subset Q$ kofinális. Minden $s \in S$ a $\{q : q \in Q, q \leq s\}$ korlátos, így $f^{-1}(\{q : q \in Q, q \leq s\})$ is az, legyen a korlátja p_s. Ekkor $\{p_s : s \in S\}$ kofinális. Legyen ugyanis $p \in P$ tetszőleges. Ekkor $f(p) \leq r$ valamely $r \in S$. Így $p \in f^{-1}(\{q : q \in Q, q \leq s\})$, azaz $p \leq p_r$. ∎

A lemmát használva elég belátni, hogy van $\mathcal{N} \to \mathcal{M}$ illletve $\mathcal{M} \to \mathcal{S}$ Tukey-beágyazás, amiből már következik a maradék egyenlőtlenség, persze ez meglehetősen nehéz.

5. Az IS-halmazok és tulajdonságaik

5.1. $\mathcal{IS}$ halmazok definíciója

5.1. Definíció. *Legyen* $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}^m$ σ*-ideál. Egy H halmazt* $\mathcal{IS}_\kappa$ *halmaznak nevezünk, ha minden* $A \in \mathcal{I}$*-re* $|A \cap H| \leq \aleph_0$*, de* $|H| = \kappa > \aleph_0$.

5.1. Állítás. *Tegyük fel, hogy* $[X]^{<\omega} \subset \mathcal{I}$

1. *Ha van valamely* κ*-ra* $\mathcal{IS}_\kappa$ *halmaz, akkor* $\kappa \leq cov(\mathcal{I})$ *és* $add(\mathcal{I}) = non(\mathcal{I}) = \aleph_1$.

2. *Legyen* $\mathcal{I}$ *tetszőleges* σ*-ideál* $|X| = \mathfrak{c}$*. Ekkor az* $\mathcal{IS}$ *halmazok* σ*-ideált alkotnak.*

3. *Tegyük fel, hogy* $cof(\mathcal{I}) = \aleph_1$*. Ekkor van* $\mathcal{IS}_{\aleph_1}$ *halmaz.*

BIZONYÍTÁS.

1. Ha $\kappa > cov(\mathcal{I}) = \lambda$ teljesülne, akkor volna olyan $\mathcal{I}$-beli, amely legalább κ pontban metszené H-t, másrészt nyilván $H \notin \mathcal{I}$, sőt minden $G \subset H$ nem megszámlálhatóra $G \notin \mathcal{I}$ igaz.

2. Nyilvánvaló.

3. Legyen $\mathcal{A} \subset \mathcal{I}$ kofinális halmazrendszer, ennek egy felsorolása $(A_\alpha)_{\alpha<2^\omega}$, $A_\alpha \in \mathcal{A}$. Transzfinit rekurzióval megadunk egy halmazt, mely teljesíti a feltételt. Legyen $\alpha < 2^\omega$-ra $x_\alpha \in X \setminus (\cup_{\beta<\alpha} A_\beta \cup \{x_\beta : \beta < \alpha\})$. Ilyet mindig választhatunk, hisz $\cup_{\beta<\alpha} A_\beta \cup \{x_\beta : \beta < \alpha\}$ megszámlálható sok $\mathcal{I}$-beli halmaz uniója, mivel $|\{x_\beta : \beta < \alpha\})| = \aleph_0$, így maga is $\mathcal{I}$-beli. Ekkor $H = \{x_\alpha : \alpha < 2^\omega\}$-ra $|H| = \aleph_1$, legyen $B \in \mathcal{I}$. A kofinalitás miatt $\exists A_\alpha \in \mathcal{A}$, hogy $B \subset A_\alpha$. Ekkor $B \cap H \subset A_\alpha \cap H \subset \{x_\beta : \beta < \alpha\}$, amely halmaz megszámlálható. Tehát $|B \cap H| = \aleph_0$ ∎

Jelölje most az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ differenciálható görbék képeinek halmaza által generált σ-ideált $\mathcal{D}_{2,1}$.

5.2. Állítás. *cov*$(D^1 \cup (D^1)^{-1}) \geq$*cov*$(\mathcal{D}_{2,1}) \geq$ *cov*$(\mathcal{N}) > \aleph_0$.

Bizonyítás. Elég belátni, hogy bármely differenciálható görbe képhalmaza nullmértékű, hiszen ebből következik az állítás. Ennél többet bizonyítunk.

5.1. Lemma. *Legyen $\gamma : I \to \mathbb{R}$ differenciálható és $H \subset I$, melyre $x \in H$ esetén $|\gamma'(x)| \leq c$ valamely c konstansra. Ekkor $\overline{\lambda}(f(H)) \leq k(c\overline{\lambda})^2(H)$, ahol k H-tól független konstans.*

Ekkor rögzített $\epsilon > 0$-ra $\forall x \in H$ van olyan $\delta > 0$, hogy $|x - y| < \delta$ esetén $|\gamma(x) - \gamma(y)| < (1 + \epsilon)c|x - y|$. Az intervallumokat a hozzájuk tartozó pontokkal indexeljük. Ekkor az így kapott intervallumrendszerből konstruálható olyan az eredeti intervallumok részintervallumainak megszámlálható rendszere, melyre a többször fedett pontok halmazának mértéke kisebb mint az erdeti mérték konstansszorosa, valamint az intervallumok uniója megegyezik az eredeti unióval[1]. Most legyen G nyílt olyan, hogy $H \subset G$ és $\lambda(G) \leq \overline{\lambda}(H) + \epsilon$. Ekkor messük el a fent említett intervallumrendszert G-vel, az így kapott rendszer legyen $\mathcal{G}$. Ha $I_{x_0} \in \mathcal{G}$, akkor $\gamma(I_{x_0}) \subset \{z : |z - f(x_0)| < (1+\epsilon)c\lambda(I)\}$ valamely $x_0 \in I_1$-re. Becsüljük meg $\lambda(\gamma(\bigcup \mathcal{G})$-t. $\lambda(\gamma(\bigcup \mathcal{G})) = \lambda(\gamma(\bigcup_x I_x)) \leq \sum_x \lambda(\gamma(I_x))$, amelyre nyilván igaz, hogy

$$\sum_x \lambda(\gamma(I_x)) \leq \sum_x \lambda(\{z : |z - f(x)| < (1+\epsilon)c\lambda(I_x)\}) = \pi(1+\epsilon)^2 \sum_x (c\lambda(I_x))^2$$

Ekkor

$$\pi(1+\epsilon)^2 \sum_x (c\lambda(I_x))^2 \leq \pi(1+\epsilon)^2 c^2 (\sum_x \lambda(I_x))^2 \leq K_1 \pi(1+\epsilon)^2 c^2 (\overline{\lambda}(H) + \epsilon)^2$$

[1] Ez az ún. Besicovitch tétel

Így azt kapjuk, hogy $\overline{\lambda}(\gamma(H)) \leq K_1\pi(1+\epsilon)^2c^2(\overline{\lambda}(H)+\epsilon)^2$ minden $\epsilon > 0$-ra teljesül tehát $\epsilon \to 0$ esetén, $\overline{\lambda}(\gamma(H)) \leq kc^2(\overline{\lambda}(H))^2$. ■

Most pedig legyen $H_n = \{x : |\gamma'(x)| < n\}$. Tudjuk, hogy $\cup_1^\infty H_n = I$ és H_n mérhető, hiszen γ' Borel. Legyen $\epsilon > 0$ rögzített, $\lambda(H_n) = a_n$, $a_n \neq 0-ra$ legyen $m > n^2a_n/\epsilon$. Van olyan H_n^k diszjunkt m elemű partíciója H_n-nek, hogy $\lambda(H_n^k) = \lambda(H_n)/m$. Most

$$\lambda(\gamma(H_n)) \leq \sum_{k=1}^{m} \lambda(\gamma(H_n^k)) \leq \sum_{k=1}^{m} n^2\lambda^2(H_n^k) = n^2\lambda^2(H_n)/m < \epsilon$$

Ez teljesül minden ϵ-ra így mindegyik $\gamma(H_n)$ nullmértékű, tehát $\gamma(I)$ is. Így minden korlátos intervallum képe nullmértékű, azaz egész $\mathbb{R}$ képe is. ■

5.1. Következmény. *(CH) 5.1 és 5.2 miatt van olyan $\mathfrak{c}$ számosságú halmaz, amely minden differenciálható görbét megszámlálható sok pontban metsz. Többet is állíthatunk, nevezetesen, hogy van olyan is, mely minden első kategóriájút vagy nullmértékűt is megszámlálható sok pontban metsz, hiszen CH esetén $cof(\mathcal{M}) = cof(\mathcal{N}) = \mathfrak{c}$. A kettőt egyszerre pedig nyilván nem követelhetjük meg, hisz a sík is felbontható egy első kategóriájú és egy nullmértékű halmaz uniójára. (4.1)*

Megjegyzés. A tétel hasonlóan látható be Lipschitz görbékre is. Más a helyzet folytonos görbékkel, hiszen ismert konstrukció a Peano-görbe, amely ráképezi $\mathbb{R}$-et $\mathbb{R}^2$-re. Ez könnyen látszik a következőkből. Van folytonos $2^\omega \to 2^\omega \times 2^\omega$, például ha $s \in 2^\omega$, akkor legyen $f(s) = ((s)_{2i}, (s)_{2i+1})$. Másrészt a Cantor függvény ráképezi 2^ω-t az egységintervallumra. Ezek kompozícióját véve kapunk egy $2^\omega \to I \times I$ folytonos ráképezést. A Tietze-tétel miatt ez kiterjed folytonosan I-re. Ha csak folytonos függvényeket és azok inverzeit engedjük meg, akkor a következő a helyzet.

5.3. Állítás. *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos. Ekkor $graf(f) \in \mathcal{M}_2$.*

Bizonyítás. A folytonosság miatt $graf(f)$ zárt, így ha nem volna első kategóriájú a síkon, akkor tartalmazna nyílt halmazt. Ez pedig nyilván nem teljesül. Így beláttuk azt is hogy $cov(C \cup (C)^{-1}) \leq cov(\mathcal{M})$. ■

Most ebből az is látszik, hogy (CH) esetén van a síkon $(C \cup (C)^{-1})S_\mathfrak{c}$ halmaz, hisz ha a bővebb ideálra van ilyen, akkor a szűkebbre is szükségképp. Látni fogjuk, hogy van olyan ZFC modell, ahol ez nem igaz.

Kérdés. Van-e egyéb összefüggés $\mathcal{I}S_\kappa$ számosságú halmaz létezése esetén κ és a többi számosságinvariáns között?

5.2. Analitikus $\mathcal{I}S_{\mathfrak{c}}$ tulajdonságú halmazok

Természetes kérdés, hogy egy nem megszámlálható halmaz, amely rendelkezik a $(C^1 \cup (C^1)^{-1})S_{\mathfrak{c}}$-tulajdonsággal, mennyire lehet "szép"? Erre próbálunk válaszolni a következőkben. Az erről szóló általunk belátott állításhoz azonban szükség van néhány nevezetes tételre.

5.1. Tétel. *Legyen $P \subset \mathbb{R}$ perfekt, $f : P \to \mathbb{R}$ folytonos. Ekkor van olyan $Q \subset P$ nemüres perfekt, hogy $f|Q$ deriváltja minden pontban létezik (véges vagy végtelen).*

5.2. Tétel. *(Luzin-Novikov) Legyenek X, Y lengyel terek, $P \subset X \times Y$ Borel, $\forall x$-re $\{y : (x, y) \in P\}$ megszámlálható. Ekkor $\exists P_n, n \in \omega$, hogy $\bigcup_{n\in\omega} P_n = P$, ahol P_n Borelek és $|P_n \cap \{(x_0, y) : y \in Y\}| \leq 1$ minden rögzített $x_0 \in X$-re.*

5.3. Tétel. *(Whitney kiterjesztési tétel) Legyen $A \subset \mathbb{R}^n$ zárt, α multiindex és minden $\overline{x}, \overline{y} \in A$-ra teljesül, hogy*

$$D^\alpha(\overline{x}) = \sum_{|\beta| \leq m-|\alpha|} \frac{D^{\alpha+\beta} f(\overline{y})}{\beta!} (\overline{x} - \overline{y})^\beta + R_\alpha(\overline{x}, \overline{y})$$

ahol $R_\alpha \to 0$ egyenletesen $o(|\overline{x} - \overline{y}|^{m-|\alpha|})$ rendben $\overline{x}, \overline{y} \to a$ esetén. Ekkor van olyan $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény, hogy $F|A = f$, $D^\alpha F|A = D^\alpha|f$ és $F \in C^m(\mathbb{R}^n)$.

5.2. Lemma. *Legyen $f : P \to \mathbb{R}$ differenciálható P-n, P perfekt. Ekkor van olyan C^1-beli függvény, amely megegyezik vele egy $Q \subset P$ perfekt halmazon.*

Bizonyítás. Tekintsük az

$$S_{n,k} = \{x \in P : |\frac{f(y) - f(x)}{y - x} - f'(x)| \leq 1/n, ha|y - x| \leq 1/k, y \in P \setminus \{x\}\}$$

Ekkor mindegyik $S_{n,k}$ Borel, rögzített n-re $P = \cup_{k=1}^\infty S_{n,k}$. A Cantor függvény konstrukciójához hasonlóan létezik olyan ϕ homeomorfizmus, hogy $1 < \lambda(\phi(P))$. Így $\phi(S_{n,k})$ Borel, tehát mérhető. Minden n-re válasszunk egy olyan k_n-et, hogy $\lambda(\phi(S_{n,k_n})) > \lambda(\phi(P)) - 1/2^n$ teljesüljön. Ekkor $\lambda(\phi(\cap_{n=1}^\infty S_{n,k_n}) = \lambda(\cap_{n=1}^\infty \phi(S_{n,k_n})) > 0$. Speciálisan $\cap_n S_{n,k_n}$ nem megszámlálható és Borel, tehát tartalmaz Q nemüres perfektet. Erről viszont $f|Q$ kiterjeszthető $\mathbb{R}$-re a Whitney kiterjesztési tétel miatt. ∎

5.3. Lemma. *Legyen $f : P \to \mathbb{R}$ Borel, P nemüres perfekt. Ekkor létezik folytonos megszorítása perfekt halmazra.*

BIZONYÍTÁS. Hasonlóan igazolható mint az előző tétel azzal a különbséggel, hogy

$$S_{n,k} = \{x \in P : |f(y) - f(x)| \leq 1/n, ha|y - x| \leq 1/k, y \in P\}$$

halmazokat használjuk, melyek f Borel mérhetősége miatt Borelek. ■

5.4. Állítás. *Legyen H $(C^1 \cup (C^1)^{-1})S_{\geq \aleph_1}$ halmaz. Ekkor H nem lehet analitikus.*

BIZONYÍTÁS. Azt fogjuk belátni, hogy ebben az esetben van vagy a függőleges vagy a vízszintes tengelyen értelmezett folytonosan differenciálható függvény, mely H-t kontinuum számosságú halmazban metszi. Mivel H analitikus és nem megszámlálható, ezért tartalmaz perfekt halmazt, legyen ez H'. H' minden függőleges egyenest megszámlálhatós sok pontban metsz (hiszen már H is), tehát a Luzin-Novikov tétel szerint van Borel uniformizációja, tehát létezik olyan $A \subset \mathbb{R}$ és $f : A \to \mathbb{R}$ Borel, hogy $A = proj(H')$, és $f(A) \subset H$. Így az is látszik, hogy $|A| = \mathfrak{c}$, hisz A zárt (feltehető, hogy H' korlátos, tehát kompakt így folytonos képe is az) és nem megszámlálható (különben H is az volna), tehát tartalmaz nemüres perfekt halmazt, legyen ez P. Ekkor $\exists Q \subset P$ nemüres perfekt, hogy $f|Q$ folytonos. Ekkor a fenti tétel szerint van olyan $R \subset Q$ melyen f deriváltja létezik. Mivel f Borel, ezért f' is az. Ha az $\{x : x \in R,\ f'(x) = \infty\}$ nem megszámlálható, akkor tartalmaz perfektet (hisz Borel). Szorítsuk meg erre f-et, és legyen $g = f^{-1}$, erre már teljesül, hogy $g' \equiv 0$, egy perfekt halmazon. Hasonlóan $-\infty$ esetén. Tehát feltehető, hogy f egy olyan P perfekten értelmezett, melyen f' mindenütt véges. Mivel Borel, ezért van perfektre való folytonos megszorítása, legyen ezen halmaz P_1. Ekkor viszont a fent igazolt lemma $f|P_1$-re alkalmazható azaz létezik egy olyan $h \in C^1(I)$, hogy $h|P_1 = f|P_1$. ■

5.5. Állítás. *($\neg CH$) Ha H-ról ezen felül még azt is feltesszük, hogy $|H| > \aleph_1$, akkor Σ^1_2 sem lehet.*

BIZONYÍTÁS. Az állítás bizonyításában H-ról csak azt használtuk, hogy tartalmaz perfekt halmazt. Azaz megkaptuk, hogy bármely síkbeli perfekt halmazt tartalmazó halmazhoz van olyan egyik vagy másik tengelyen értelmezett függvény mely kontinuum sok pontban metszi. ■

Egy erősebb következtetést is levonhatunk, ha használjuk a következő nehéz tételt.

5.2. Definíció. *Legyen X lengyel tér, $A \subset X$ K_σ, ha $A = \cup_{n\in\omega} K_n$, ahol kompakt.*

5.4. Tétel. *(Arsenin, Kunugui) Legyen X mérhető tér, Y pedig lengyel, $P \subset X \times Y$ Borel és minden P_x szekciója K_σ. Ekkor van Borel uniformizációja, vagyis olyan Borel részhalmaza, melynek minden szekciója legfeljebb 1 elemű.*

5.3. Definíció. *Legyen X topologikus tér. Ekkor egy H halmazról azt mondjuk, hogy $\in (s_0)$ vagy Marczewski-null, ha minden $P \subset X$ perfektre van $Q \subset P$ perfekt, hogy $Q \cap H = \emptyset$.*

5.6. Állítás. *Ha $X \subset \mathbb{R}^2$ és X $(C^1 \cup (C^1)^{-1})S_{\geq\aleph_1}$, akkor $X \in (s_0)$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy van olyan P nemüres, hogy minden perfekt részhalmaza metszi X-et. P-nek minden szekciója K_σ, így van Borel uniformizációja. P vetülete nem lehet megszámlálható, hisz akkor $|P \cap X| \leq \aleph_0$ teljesülne, ugyanis P minden (x, P_x) szekciója legfeljebb megszámlálható sok pontban metszi X-et. Tehát P-nek a P' Borel uniformizációja $|P| > \aleph_0$ speciálisan tartalmaz nemüres perfekt halmazt. Legyen ez Q. Mivel $Q \subset P$, ezért $Q \cap X \neq \emptyset$. Ha $|Q \cap X| \leq \aleph_0$ volna, akkor $Q \setminus X$ nem megszámlálható Borel lenne, így tartalmazna X-től diszjunkt perfektet. Másrészt van vagy egy C^1-beli függvény vagy egy $(C^1)^{-1}$-beli f, melyre $R \subset graf(f) \cap Q$, ahol R nemüres perfekt. De akkor $|R \cap X| > \aleph_0$, azaz $|graf(f) \cap X| > \aleph_0$. Ez ellentmondás. Tehát $X \in (s_0)$. ∎

Megjegyzés. Lengyel térben $[X]^{<2^\omega} \subset (s_0)$. Ez azért igaz, mert egy perfekt halmaz tartalmaz 2^ω sok diszjunkt nemüres perfektet. Ha $|S| < 2^\omega$, akkor S nem metszheti mindegyiket. Így $S \in (s_0)$. Ezen felül ezzel beláttuk, hogy van olyan modell, amelyben (s_0) tartalmaz $\mathfrak{c}$ számosságú halmazokat. Valójában ez ZFC-ben is teljesül.

Ha megpróbáljuk a σ-ideált csökkenteni, akkor biztosan találunk $\mathcal{I}S$-tulajdonságú halmazt.

5.7. Állítás. *Van olyan $P \subset \mathbb{R}$ halmazon értelmezett folytonos függvény, melynek grafikonja $(D^2 \cup (D^2)^{-1})S$ tulajdonságú.*

Előbb használjuk a következő függvényt.

5.8. Állítás. *Van olyan h_0 $\mathbb{R}$-en értelmezett függvény, melynek deriváltja mindenütt folytonos, és létezik hozzá egy $P \subset \mathbb{R}$ nemüres perfekt halmaz, amelyen $h_0'|P = \infty$.*

BIZONYÍTÁS. Legyen C egy tetszőleges perfekt, sehol sem sűrű halmaz [2,3)-ban, amelynek eleme 2. Az f_0 függvény pedig olyan, hogy $f_0(x) = x^{-2}$, ha $0 < x < 1$, $f_0(x) = d(C, x)$, ha $x \leq 1$. Ekkor nyilván folytonos $(0, \infty)$-n és $f_0|C = 0$. Legyen $f = \int_1^x f_0(s)ds$. Ekkor $f = 1 - 1/x$, ha $x \in (0, 1)$, egyébként $f' = f_0$. Világos, hogy f szigorúan monoton. Legyen $h_0 = f^{-1}$. Mivel f folytonos és injektív, ezért f(C) zárt, sőt perfekt. Másrészt $h_0'(f(C)) = \infty$. ∎

BIZONYÍTÁS. (5.7) Legyen most $h(x) = \int_0^x h_0(s)ds$. Látható, hogy h monoton növő. $h' = h_0$, tehát $h''|P = \infty$. Legyen $g = h^{-1}$, ekkor $g \in C^1$. $g'(x) = 1/h_0(g(x))$, így g' is differenciálható. Most

$$g''(x) = -(h'(g(x)))^{-2}h''(g(x))g'(x) = -h''(g(x))(g'(x))^3$$

Tehát $(h^{-1})''|h(f(C)) = -\infty$. Legyen f tetszőleges kétszer differenciálható függvény. Ekkor ha a $\{x : f(x) = h(x)\}$ halmaznak van torlódási pontja, akkor ott $f''(x) = \infty$. Hasonlóan a másik tengelyen értelmezett függvény sem metszheti végtelen sok pontban. ∎

Ilyen függvényre egy másik konstrukció található [9]-ben, a fent tárgyalt Ciesielskitől való [3].

6. Martin axiómája és következményei

6.1. Alapvető definíciók, motiváció

6.1. Definíció. *Egy $(P, \leq)$ párt kényszerképzetnek nevezünk, ha $\leq$ egy részbenrendezés P-n, azaz ha $p \leq q$ és $q \leq p$, akkor $q = p$, valamint $r \leq q$, $q \leq p$ akkor $r \leq p$.*

6.2. Definíció. *Ha P kényszerképzet, $p, q \in P$ kompatibilisek, ha van közös kiterjesztésük vagyis olyan $r \in P$, hogy $r \leq p$ és $r \leq q$.*

6.3. Definíció. *Egy $D \subset P$ halmazt sűrűnek mondunk P-ben, ha $\forall p \in P$ $\exists q \in D$, hogy $q \leq p$.*

6.4. Definíció. *A $G \subset P$ halmazt filternek nevezzük, ha*

- *$p, q \in G$-re $\exists r \in G$, hogy $r \leq p$ és $r \leq q$*
- *$p \in G$ és $p \leq q$ esetén $q \in G$ teljesül.*

Ehhez kapcsolódik a következő tétel.

6.1. Tétel. *(Rasiowa-Sikorski) Legyen $(P, \leq)$ tetszőleges kényszerképzet, (D_i) megszámlálható sok sűrű halmaz. Ekkor van olyan G filter, amely mindegyiket elmetszi.*

Bizonyítás. $p_0 \in D_0$. Mivel D_1 sűrű ezért van $p_1 \in D_1$, hogy $p_1 \leq p_0$. Indukcióval folytatva ezt az eljárást $i \in \omega$-ra kapunk egy p_i-t, hogy $p_{i+1} \leq p_i$ és $p_i \in D_1$. Ekkor legyen $G = \{p : \exists i \in \omega, p \geq p_i\}$. Ekkor G nyilván elmetszi az összes D_i-t és felfelé zárt. Ha most $r, q \in G$ akkor létezik minimális i és j, hogy $p_i \leq r$, $p_j \leq q$. Ekkor viszont $p_{max(i,j)}$ mindkettő alatt van. ■

A Rasiowa-Sikorski tétel erősebb változatai is bizonyíthatóak, ellenben az a feltétel, hogy megszámlálható sok sűrűt metszünk nem hagyható el, ezt az alábbi állítás mutatja.

6.1. Állítás. *Tekintsűk a P kényszerképzetet, melynek elemei a $f : \omega \to \omega_1$ képező parciális függvények, $|dom(f)| < \omega$. $f \leq g$, ha $dom(g) \subset dom(f)$, és $f|dom(g) = g$. Ekkor nincs olyan $G \subset P$ filter mely bármely sűrű P-beli halmazt elmetszene.*

Bizonyítás. Legyen $f \in P$. Ekkor van olyan $g, h \leq f$, hogy g és h inkompatibilisek. Ez világos, hiszen $dom(p) = n$ valamely $n \in \omega$, legyen ekkor $q|n = p$ és $q(n) = 0$, $q'|n = p$, $q'(n) = 1$. Ekkor q és q' p alatt van, de nem kompatibilisek. Tegyük fel ekkor hogy G filter, válasszunk minden $p \in P$-re két alatta lévő inkompatibilis elemet. Ekkor mivel inkompatibilisek ezért közülük G legfeljebb egyet tartalmaz. Legyen D azok halmaza melyeket nem tartalmaz. Ekkor $G \cap D = \emptyset$, másrészt D nyilván sűrű. ■

Megjegyzés. A 6.1 alatt definiált kényszerképzetben több is igaz, nevezetesen hogy van ω_1 sűrű, amelyet nem metszhet el egyetlen filter sem. Tekintsük ugyanis minden $\alpha \in \omega_1$-re a $D_\alpha = \{f : \alpha \in ran(f)\}$. Ekkor nyilván minden D_α sűrű, másrészt ha G filter, akkor $f = \bigcup G$ egy függvényt definiál, hisz bármely két elem kompatibilis, így ha valamely $i \in \omega$-ra $g, h \in G$ ott értelmes, akkor kompatibilitásuk miatt $g(i) = h(i)$. De $G \cap D_\alpha \neq \emptyset$, tehát $\alpha \in ran(f)$ $\forall \alpha \in \omega_1$. De akkor f ráképezné ω valamely részhalmazát ω_1-re. Ezzel beláttuk hogy ilyen filter nem lehet. Egyes speciális kényszerképzetekben mégis konzisztens, hogy megszámlálhatónál több sűrű halmazt elmetsző filter is van.

6.5. Definíció. *Egy P kényszerképzet teljesíti a κ-antilánc feltételt, ha nincs benne κ különböző páronként inkompatibilis elem. Ha $\kappa = \omega_1$ akkor ω_1-antilánc feltétel helyett megszámlálható antilánc feltételesnek mondjuk (a továbbiakban MAF-os).*

6.6. Definíció. *Martin axiómája κ-ra (MA_κ). Legyen P egy MAF-os kényszerképzet, $\mathcal{F}$ P-beli sűrű halmazok κ számosságú rendszere. Ekkor van olyan G filter, amely mindegyiket elmetszi.*

6.7. Definíció. *Martin axiómája (MA). MA_κ teljesül minden $\kappa < 2^\omega$*

6.2. Tétel. *(Martin-Solovay) Ha ZFC-nek van modellje, akkor van olyan is, amelyben a kontinuum tetszőlegesen nagy és minden $\kappa < 2^\omega$-ra igaz MA_κ.*

Az MA-val kapcsolatos irodalom megehetősen kiterjedt. Az alapvető állítások megtalálhatóak [6]-ban és [7]-ben.

6.2. Állítás. *MA_κ következménye, hogy add($\mathcal{N}$) $\geq \kappa$ és add($\mathcal{M}$) $\geq \kappa$, vagyis κ "kicsi" halmaz uniója is kicsi.*

Bizonyítás. Legyen P_ϵ olyan kényszerképzet, amely az ϵ-nál kisebb mértékű nyílt halmazok rendszeréből áll. $U \leq V$, ha $V \subset U$. Ekkor ez egy MAF-os kényszerképzet: legyen adott ω_1 P_ϵ-beli halmaz. Van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $\lambda(U) + 1/n < \epsilon$ ω_1 nyíltra. Tekintsük ezek rendszerét. Belátjuk, hogy van köztük két kompatibilis. Bármely U nyílt halmazhoz van olyan $U' \subset U$ nyílt, racionális végpontú intervallumokból álló halmaz, melyre $\lambda(U' \setminus U) < 1/n$. Ilyen U'-ből megszámlálható sok van, tehát van olyan U,V a fent említett rendszerben, hogy $U' = V'$. Ekkor $U \cup V = U \cap (V \setminus V')$. Tehát $\lambda(U \cup V) \leq \lambda(U) + 1/n < \epsilon$ Így U,V kompatiblisek.

Legyen X_α $\alpha < \kappa$ olyan, hogy $\lambda(X_\alpha) = 0$. Ekkor $D_\alpha = \{U \in P_\epsilon : X_\alpha \subset U\}$, a D_α halmazok sűrűek, hiszen $U \in P_\epsilon$-ra van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $\lambda(U) + 1/n < \epsilon$, másrészt létezik $G \supset X_\alpha$, hogy $\lambda(G) < 1/n$, G nyílt. Ekkor $G \cup U \in D_\alpha$ és $G \cup U \leq U$. Legyen $\mathcal{G}$ olyan generikus filter, amely mindegyik D_α-halmazt metszi. Tekintsük az $Y = \bigcup \mathcal{G}$ halmazt. Most $\lambda(Y) \leq \epsilon$ teljesül a kompatibilitás miatt.

A második állítás igazolásához felhasználjuk a következő, önmagában is érdekes következményét MA-nak.

6.1. Lemma. *(MA_κ) Legyen $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$, ahol $|X| = \aleph_0$, $|\mathcal{A}|, |\mathcal{B}| \leq \kappa$. Tegyük fel, hogy bárhogyan választva $B \in \mathcal{B}$-t és $A_1, ..A_n \in \mathcal{A}$-t, $|B \setminus (\cup_{j=1}^{n} A_j)| = \aleph_0$. Ekkor van olyan $M \subset X$, hogy minden $A \in \mathcal{A}$-ra $M \cap A$ véges, de minden $B \in \mathcal{B}$-re $M \cap B$ és $B \setminus M$ is végtelen.*

Legyen tehát S_α $\alpha < \kappa$ sehol sem sűrű halmazok rendszere. (G_n) bázis nyíltak egy olyan felsorolása, ahol minden elem végtelen sokszor fordul elő. $A_\alpha = \{n : G_n \cap S_\alpha \neq \emptyset\}$, $B_n = \{m : G_m \subset G_n\}$. Ekkor teljesül a lemma állítása, hiszen $B_n \setminus \cup_{j=1}^{l} A_{\alpha_j}$, mert minden nyíltban van olyan bázisnyílt, amely véges sok sehol sem sűrű mindegyikét elkerüli. Legyen $M \subset \omega$ a lemmában elmített tulajdonságú halmaz. $H_k = \bigcup\{G_i : i \in M, i > k\}$. Ekkor H_k komplementere sehol sem sűrű, hisz $M \cap B_m$ végtelen.

$$\bigcup S_\alpha \subset \bigcup\{\mathbb{R} \setminus H_k : k \in \omega\}$$

teljesül, mivel $A_\alpha \cap M$ véges, így elég nagy k-ra $H_k \cap S_\alpha = \emptyset$. Azaz κ sok sehol sem sűrű halmaz unióját lefedtük megszámlálható sok sehol sem sűrűvel. Ezzel beláttuk az állítást, mivel egy első kategóriájú halmaz előáll mint megszámlálható sok sehol sem sűrű uniója. ∎

6.1. Következmény. *(MA) van olyan $\mathfrak{c}$ számosságú halmaz, amely minden nullmértékűt kevesebb mint $\mathfrak{c}$ sok pontban metsz.*

6.2. Baldwin tétele

S. Baldwin az alábbinál erősebb következményét látta be Martin axiómájának [10], [12].

6.3. Állítás. *(MA) Legyen $f : X \to \mathbb{R}$ függvény, $|X| = \aleph_1$. Ekkor $\exists X_n$ $n \in \omega$ partíciója X-nek, hogy $f|X_n$ folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $D \subset \mathbb{R} \setminus X$ megszámlálható sűrű. Legyen

$$S = \{(a_i, b_i) \times (c_i, d_i) : a_i, b_i, c_i, d_i \in D \cup \{\infty, -\infty\}, \mathbb{R} \setminus D \subset \bigcup (a_i, b_i)\}$$

(a_i, b_i) diszjunkt nyílt intervallumok. Ekkor legyen $\mathcal{S}$ az ilyen téglalaprendszerek halmaza. Ekkor tekintsük a következő kényszerképzetet:

$$R = \{\langle A, S \rangle : A \in [X]^{<\omega}, f|A \subset S, S \in \mathcal{S}\}$$

A rendezés pedig legyen olyan, hogy $\langle A, S\rangle \leq \langle B, T\rangle$, ha $B \subset A$ valamint ha $\cup S \subset \cup T$. Legyen $\mathcal{S}_k = \{S : S \in \mathcal{S}, |a_i - b_i|, |c_i - d_i| \leq 1/k$, ha $(a_i, b_i) \cap (-k, k) \neq \emptyset\}$. Ekkor tekintsük ezen kényszerképzet önmagával vett megszámlálható szorzatát, úgy hogy a szorzat elemeinek "koordinátái" véges sok kivétellel $\langle \emptyset, \{\mathbb{R}^2\}\rangle$. Legyen az így kapott kényszerképzet P a lexikografikus rendezéssel. Ekkor P MAF-os, mivel a téglák véges részhalmazainak halmaza megszámlálható (hiszen D is az), ha pedig $p, q \in P$-ben $S_i = R_i$, akkor automatikusan kompatibilisek, így $\aleph_1$ elem között van két kompatibilis. Most tekintsük az alábbi halamzokat:

$$D_x = \{p : x \in \cup_{i=1}^{\infty} A_i^p\}$$

$$E_{i,n} = \{p : S_i^p \in \mathcal{S}_n\}$$

Azt állítjuk, hogy ezek sűrűek P-ben. Legyen $p \in P$, $p_l = \langle \emptyset, \{\mathbb{R}\}\rangle$, ha $l \geq k$, valamely k-ra. Ekkor legyen $p'_i = p_i$, ha $i \neq k$ és $p'_k = \langle x, \{\mathbb{R}^2\}\rangle$. Ekkor $p \geq p'$ és $p' \in D_x$. Elég belátni, hogy $E_n = \{q : q \in R, S_q \in \mathcal{S}_n\}$ sűrű R-ben. Legyen $q \in R$ tetszőleges. Legyen $\{e_k : e_k \in D \cap (-n-1, n+1), |e_k - e_{k+1}| \leq 1/k\}$. és legyenek a_i az S_q-beli téglák osztópontjai. Tekintsük ezen ponthalmazok unióját, eszerint osztva $\cup S$-et egy új $S' \in \mathcal{S}_n$ téglahalmazt kapunt, melyre $\langle A, S'\rangle \leq q$. Legyen most $G \subset P$ generikus filter, legyen $\langle A_\alpha^j, S_\alpha^j\rangle$ G j. koordinátában előforduló R-beli elemek. Ekkor mivel D_x sűrű, ezért valamely j-re $x \in \cup_\alpha A_\alpha^j$ teljesül bármely $x \in X$-re. Másrészt, ha $\epsilon > 0$, $x \in A_\beta^j$, teszőleges, akkor, mivel $E_{j,n} \cap G \neq \emptyset$, tehát $\exists \langle A, S\rangle \in G_j$, hogy, $S \in \mathcal{S}_n$, n-et $\epsilon > 1/n$ és $n > |x|$ választva. Ekkor $\langle B, T\rangle \leq \langle A, S\rangle, \langle A_\beta^j, S_\beta^j\rangle$, azaz $x \in B$, és $(x, f(x)) \in (a_i, b_i) \times (c_i, d_i)$, tehát $|c_i - d_i| < 1/n$. Mivel bármely két G_j-beli elem kompatibilis, ezért $y \in \cup_\alpha A_\alpha^j$ esetén ha $y \in (a_i, b_i)$, akkor $|f(y) - f(x)| \leq |c_i - d_i| < 1/n$. Tehát $f| \cup_\alpha A_\alpha^j$ folytonos x-ben. ■

7. CPA

A CPA vagyis a Covering Property Axiom egy olyan független állítás, amely lengyel terek perfekt részhalmazainak rendszereiről szól. A CPA függetlenségét és a 7.1-t K. Ciesielski és J. Pawlikowski látták be [3]. Ezen axiómának (és változatainak) számos alkalmazása ismert. Az általunk használt verzióhoz szükség van számos technikai jellegű definícióra.

7.1. Definíció. *Legyen A egy megszámlálható rendszámhalmaz. Legyen* $\Phi_{prism}(A)$ *azon* $f : \mathfrak{C}^A \to \mathfrak{C}^A$ *folytonos injekciók halmaza, melyekre teljesül, hogy*

$f(x)|\alpha = f(y)|\alpha$ pontosan akkor ha $x|\alpha = y|\alpha$ minden $\alpha \in A$-ra és $x, y \in \mathfrak{C}$-re.

7.2. Definíció. *Legyen most $\mathbb{P}_A = \{ran(f) : f \in \Phi_{prism}(A)\}$. Definiáljuk ezen felül, hogy $\Phi_{prism} = \bigcup_{0<\alpha<\omega_1} \Phi_{prism}(a)$. Egy X lengyel térben legyen $\mathcal{F}_{prism}(X)$ azon folytonos injekciók halmaza melyek értelmezési tartománya $\mathbb{P}_{\omega_1}$-beli. Most egy $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ halmazrendszert $\mathcal{F}_{prism}$-sűrűnek mondunk, ha*

$$\forall f \in \mathcal{F}_{prism}(X) \exists g \in \mathcal{F}_{prism}(X), hogy (g \subset f, ran(g) \in \mathcal{E})$$

7.3. Definíció. *CPA_{prism}: $\aleph_2 = \mathfrak{c}$ és ha X lengyel tér $\mathcal{E}$ pedig egy $\mathcal{F}_{prism}$ sűrű halmazrendszer, akkor van olyan $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}$, hogy $|\mathcal{E}_0| \leq \aleph_1$ és $|X \setminus \cup \mathcal{E}_0| \leq \aleph_1$.*

7.1. Tétel. *(K. Ciesielski, J. Pawlikowski) CPA_{prism}-ből következik, hogy $\mathbb{R}^2$ előáll mint $\aleph_1$ sok függőleges vagy vízszintes tengelyen értelmezett C^1-beli függvény grafikonja.*

Ennél gyengébb állítást bizonyított Steprans [8]-ban, jelesül azt, hogy van olyan model, amelyben $\aleph_1$ véges vagy végtelen értékűen differenciálható függvény grafikonjával, vagy annak elforgatottjával lefedhető a sík.
A fenti állítás a lemma következménye.

7.1. Lemma. *Legyen $0 < \alpha < \omega_1$. Ekkor minden $h : \mathfrak{C}^\alpha \to \mathbb{R}^2$ folytonos injekcióhoz van olyan $E \in \mathbb{P}_\alpha$, hogy $h(E)$ kiterjeszthető valamelyik tengelyen értelmezett folytonosan differenciálható függvénnyé.*

Bizonyítás. (Tétel) Legyen $\mathcal{E}$ azon $P \subset \mathbb{R}^2$ perfekt halmazok rendszere, melyek kiegészíthetőek egy fent említett típusú függvény grafikonjává. Ekkor $\mathcal{E}$ $\mathcal{F}_{prism}$ sűrű, tehát van egy $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}$, hogy $|\mathcal{E}_0| \leq \aleph_1$ és $|\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup \mathcal{E}_0| \leq \aleph_1$. Ekkor válasszunk minden kimaradt ponthoz egy folytonosan differenciálható függvényt, melynek grafikonja fedi. Ekkor az $\mathcal{E}_0$-beli perfektekhez tartozó függvényekkel és a később kiválasztottakkal lefedtük $\mathbb{R}^2$-et. ■

Megjegyzés. Bármely $\mathfrak{c}$ számosságú ponthalmazhoz van olyan folytonosan differenciálható görbe, sőt vízszintes vagy függőleges egyenesen értelmezett függvény, melynek grafikonja nem megszámlálható sok pontban metszi. Ez abból is következik, hogy bármely $\mathcal{E}_0$-beli halmaz egy $(C^1 \cup (C^1)^{-1})S_{\geq \aleph_1}$ halmaz megszámlálható sok pontban metsz. De metszete $\bigcup \mathcal{E}_0$-val legfeljebb $\aleph_1$

számosságú, másrészt $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup \mathcal{E}_0$ is az. Így számossága biztosan $\aleph_1$.

A fenti állítás egy változatát mi is beláttuk az IS-halmazokkal kapcsolatban. Ha most azt akarjuk igazolni, hogy konzisztens, hogy nincs $\mathcal{I}S_{\aleph_1}$-halmaz, úgy, hogy $\aleph_1 \neq \mathfrak{c}$ akkor differenciálható függvényekre CPA biztosan nem segít.

7.2. Tétel. *CPA_{prism} egyik következménye, hogy $cof(\mathcal{N}) = \aleph_1$.*

7.1. Következmény. *Van olyan $\aleph_1$ számosságú halmaz, amely minden nullmértékűt megszámlálható sok pontban metsz.*

Bizonyítás. 5.1. Állítás bizonyításával analóg módon, transzfinit indukcióval látszik. ∎

Annak konzisztenciája, hogy $I = \mathcal{M}$ vagy $\mathcal{N}$ esetén nincs ilyen halmaz abból következik, hogy van olyan modell, amelyben $non(\mathcal{N}) = cov(\mathcal{N}) = \aleph_2$ (pl. $MA_{\aleph_1}$ mellett), mivel ilyen értékekkel kielégíthető a Cichoń diagram. Szűkebb σ-ideálokra fogjuk vizsgálni a kérdést, megjegyezzük, hogy azt már láthattuk, hogy $(D^2 \cup (D^2)^{-1})S_{\aleph_2}$ halmaz létezik.

Megjegyzés. Nem nehéz olyan kényszerképzetet találni mellyel forszolva a kapott modellben $\aleph_1 < \mathfrak{c}$ és $\aleph_1$ sok Lipschitz görbe fedi a síkot. Az egész dolgozat során mindig vízszintes vagy függőleges tengelyen értelmezett függvényekkel való fedést vizsgáltunk.

Kérdés. Változtat-e az $\mathcal{I}S$ halmazok létezésén vagy $cov(\mathcal{I})$-n, ha $\mathcal{I}$ a differenciálható, folytonosan differenciálható $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ görbék képei által generált σ-ideál?

8. SOCA

8.1. SOCA definíciója, következményei.

A feltett kérdések egy része megválaszolható a SOCA segítségével.

8.1. Definíció. *Legyen X topologikus tér. Ekkor jelölje $D(X) = X \times X \setminus \{(x,x) : x \in X\}$.*

8.2. Definíció. *Egy $U \subset D(X)$ szimmetrikus, nyílt halmazt félig nyílt színezésnek (Semi Open Coloring) hívunk, ezt FNS-nek rövidítjük.*

8.3. Definíció. *FNSA. Ha $|X| = \aleph_1$, X M_2, U FNS, akkor van egy olyan nem megszámlálható $A \subset X$, hogy $D(A) \subset U$ vagy $D(A) \cap U = \emptyset$.*

8.1. Tétel. *(Shelah, Abraham, Rubin [4]) FNSA+MA konzisztens.*

8.1. Állítás. *FNSA következményei az alábbi állítások:*
Legyen $X \subset \mathbb{R}^n$, $|X| = \aleph_1$.

1. *Legyen $h : X \to \mathbb{R}^m$ bijekció. Ekkor van olyan $A \subset X$ nem megszámlálható, hogy $h|A$ vagy $h^{-1}|h(A)$ Lipschitz.*

2. *Legyen $h : X \to \mathbb{R}$ bijekció, $n = 1$. Ekkor van olyan $A \subset X$ nem megszámlálható, hogy $h|A$ monoton.*

3. *(MA) Legyen $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor van olyan $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos, hogy $|\{x : h(x) = g(x)\}| = \aleph_1$.*

Bizonyítás.

1. Tekintsük az $Y = \langle x, h(x)\rangle$ halmazt $\mathbb{R}^{n+m}$-ben. Ekkor színezzük D(Y)-t a következőképp $c(\langle\langle x, h(x)\rangle, \langle y, h(y)\rangle\rangle) = 1$, ha $|h(x) - h(y)| < |x - y|$, 0 egyébként. Ez egy FNS hiszen szimmetrikus, és ha valamely $z \in D(Y)$-ra $c(z) = 1$, akkor ez igaz z-nek valamely környezetére is: $\exists \epsilon > 0$, hogy $|h(x) - h(y)| + \epsilon < |x - y|$, ha $\langle\langle x, h(x)\rangle, \langle y, h(y)\rangle\rangle$ $\epsilon/2$ sugarú környezetében lévő D(Y)-beli elemekre c 1-et ad. Tehát FNSA szerint van egy $A \subset Y$, hogy $c|A = 1$ vagy $c|A = 0$ és A nem megszámlálható. Így $c|A = 1$ esetén $x, y \in proj_{R^n}(A)$-ra $|h(x) - h(y)| < |x - y|$, hasonlóan a másik esetben h^{-1}-re.

2. Az állítás bizonyítása hasonló. Szintén tekintsük az $Y = \langle x, h(x)\rangle$ halmazt. A következő színezés megfelelő lesz: $c(\langle\langle x, h(x)\rangle, \langle y, h(y)\rangle\rangle) = 1$, ha $\frac{h(x)-h(y)}{x-y} > 0$. Ez egy FNS, amely szerint egyszínű halmazon h monoton. Ebből az állításból következik, hogy minden nem megszámlálható halmazon értelmezett függvény relatíve folytonos egy nem megszámlálható halmazra megszorítva.

3. **8.1. Lemma.** *(MA) Ha $X \subset \mathbb{R}$, $|X| = \aleph_1$, $B \subset X$ megszámlálható, akkor van olyan $S \subset X$, $|S| = \aleph_1$, hogy $\overline{S} \cap B = \emptyset$.*

   Bizonyítás. Tekintsük a következő kényszerképzetet, melynek elemei $\{A, (\langle b_i, n_i\rangle)_{i=1}^k\}$, ahol $A \in [(X \setminus B)]^{<\omega}$, $\{b_1, .., b_k\} \subset B$, különbözőek

$\{n_1,..,n_k\} \subset \mathbb{N}$, valamint teljesül, hogy $A \cap (\cup_{i=1}^k (b_i - 1/n_i, b_i + 1/n_i)) = \emptyset$. Ezeket rendezzük úgy, hogy $\{A, (\langle b_i, n_i \rangle)_{i=1}^k\} \leq \{B, (\langle c_i, m_i \rangle)_{i=1}^l\}$, ha $B \subset A$, $\{c_1,..,c_l\} \subset \{b_1,..,b_k\}$ és ha $b_i = c_j$, akkor $n_i \leq m_j$. Most a kényszerképzet MAF-os, hiszen $|[B \times \mathbb{N}]^{<\omega}| = \aleph_0$, $\{A, (\langle b_i, n_i \rangle)_{i=1}^k\}$ és $\{B, (\langle b_i, n_i \rangle)_{i=1}^k\}$ automatikusan kompatibilisek, $\{A \cup B, (\langle b_i, n_i \rangle)_{i=1}^k\}$-vel. Most tekintsűk ezen kényszerképzet önmagával vett megszámlálható szorzatát, ahol véges sok kivétellel minden koordináta $\{\emptyset\}$. Ez nyilván MAF-os, tekintsük a következő sűrű halmazrendszert: $D_x = \{q : x \in A^q\}$ $x \in X \setminus B$ valamint $E_{i,b} = \{q : b \in \{b_{i,1}^q, ..b_{i,l}^q\}\}$ minden $b \in B$-re. Ekkor D_x sűrű. Legyen most $(q)_i = p$, $p = \{A_p, \langle b_i^p, m_i^p \rangle : 1 \leq i \leq n\}$. Ha $b \neq b_i$, akkor van olyan olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $(b - 1/n, b + 1/n) \cap A_p = \emptyset$, hiszen A_p véges. Tehát $p' = \{A_p, \langle b_i^p, m_i^p \rangle, \langle b, n \rangle : 1 \leq i \leq n\}$-re $p' \leq p$. Így $E_{i,b}$ is sűrű. Ekkor van olyan generikus filter, amely mindegyiket elmetszi. Legyen ez $\mathcal{G}$. Ekkor $A_\alpha^i \in (q_\alpha)_i$, ahol $q_\alpha \in \mathcal{G}$. Most tekintsük $S_i = \cup_\alpha A_\alpha^i$-t. Mivel $\mathcal{G}$ mindegyik D_x-et metszi, ezért $\cup_{i=1}^\infty S_i = X \setminus B$. Másrészt a kompatibilitás miatt $\overline{S_i} \cap B = \emptyset$, hisz mindegyik koordinátában mindegyik B-beli elemnek van olyan környezete, mely diszjunkt mindegyik A_α^i-től. ∎

A 3. pontot pedig az első kettő segítségével bizonyítjuk. Van ekkor h-nak vagy h^{-1}-nek Lipschitz megszorítása. Ha h-nak van, akkor készen vagyunk, hiszen kiterjeszthető az egész $\mathbb{R}$-re. Tegyük fel most, hogy h^{-1} Lipschitz valamely $A \subset h(X)$ halmazra megszorítva. Ekkor van olyan $B \subset h^{-1}(A)$ nem megszámlálható, melyen h monoton, feltehetjük, hogy monoton növekvő. Terjesszük ki $\overline{B}$-re h-t mégpedig $h_1(x) = sup\{h(y) : y < x, y \in B\}$, ha van jobbról x-hez tartó sorozat, egyébként $h_1(x) = inf\{h(y) : x < y, y \in B\}$. Ekkor mint monoton függyény, h_1 megszámlálható sok pontot kivéve folytonos. Akkor van olyan $C \subset B$, $|C| = \aleph_1$, hogy $h_1 = h|C$ folytonos, valamint $\overline{C} \cap \{x : x \in \overline{B}, h_1$ x-ben szakad $\} = \emptyset$. Ez az előző lemma következménye, ha $X \cap \{x : x \in \overline{B}, x$ szakadási pont $\}$-ra és a szakadási pontokra alkalmazzuk. Mivel $\overline{C} \subset \overline{B}$, ezért $h|\overline{C}$ folytonos. Most pedig Tietze kiterjesztési tételét használva kapjuk meg a g függvényt. ∎

Megjegyzés. Azt is megkaptuk az előző bizonyítás során, hogy MA mellett egy tetszőleges (X,d) metrikus térben, melyre $|X| = \aleph_1$ és $D \subset X$ megszámlálható, akkor van olyan $F \subset X$, $|F| = |X|$ zárt, hogy $F \cap D = \emptyset$, ugyanis a 8.1. Lemma bizonyítása könnyen átvihető metrikus térre.

8.2. Állítás. *(CH) Van olyan* $\mathfrak{c}$ *számosságú halmaz és annak megszámlálható részhalmaza, melynek bármely* $\mathfrak{c}$*-s részhalmaza torlódik a megszámlálható halmazhoz.*

Bizonyítás. Legyen $D = \mathbb{Q}$, G_α $\alpha < 2^\omega$ az összes nyílt, melyre $\mathbb{Q} \subset G_\alpha$. Legyen $x_\alpha \in \bigcap_{\beta<\alpha} G_\beta \setminus \{x_\beta : \beta < \alpha\}$. A kivont halmaz megszámlálható, a kategóriatétel miatt pedig, mivel G_β mindenütt sűrű nyílt, ezért a metszetük reziduális, speciálisan nem megszámlálható. Ekkor $H = \{x_\alpha : \alpha < 2^\omega\}$ nem megszámlálható, és mivel $cf(\omega_1) = \omega_1$, ezért bármely H-beli nem megszámlálható részből kiválasztható olyan részsorozat, amely $\mathbb{Q}$ valamely pontjához konvergál. ∎

8.1. Következmény. *8.1 miatt konzisztens az is, hogy* $(CS_{\aleph_1})$ *halmaz sincs, azaz minden síkbeli nem megszámlálható halmazhoz van olyan folytonos függvény, amelynek grafikonja nem megszámlálható sok pontban metszi. Ezzel folytonos (valójában Lipschitz) függvényekre megválaszoltuk az előző fejezet végén feltett kérdést.*

Azt láttuk, hogy (CH) mellett nem feltétlenül van ilyen folytonos függvény. Azonban ennél több is igaz.

8.3. Állítás. *ZFC-ből következik, hogy van olyan függvény, amely semmilyen* $\mathfrak{c}$ *számosságú halmazra megszorítva nem folytonos.*

Bizonyítás. Legyen A_α $\alpha < 2^\omega$ a valós számok G_δ részhalmazainak egy felsorolása, $f^\alpha_\beta : A_\alpha \to \mathbb{R}$ folytonos függvények felsorolása, ezek számossága nyilván $\mathfrak{c}$ (hiszen egy megszámlálható sűrű halmazon megadva őket már egyértelműen meghatározottak). Ekkor tekintsük ezek összességét f_γ formában $\gamma < 2^\omega$. Legyen x_γ a valós számok felsorolása. Ekkor definiáljuk $g(x_\gamma)$-t úgy, hogy $g(x_\gamma) \in \mathbb{R} \setminus \{f_\delta(x_\gamma) : \delta < \gamma, x_\gamma \in dom(f_\delta)\}$. Így meg tudjuk választani, hiszen a kivont halmaz számossága kevesebb mint $\mathfrak{c}$. Tegyük fel, hogy van olyan $X \in [\mathbb{R}]^\mathfrak{c}$, hogy $g \in C(X)$. Ekkor 2.2. Állítás miatt van olyan g' és X' G_δ, hogy $X \subset X'$, $g'|X = g|X$, g' folytonos. Ekkor $g' = f_\delta$ valamely $\delta < 2^\omega$-ra. De akkor $|graf(g) \cap graf(g')| < \delta$. Ez ellentmondás, amivel beláttuk az állítást. Az ilyen függvényeket nevezzük Sierpiński-Zygmund függvényeknek. ∎

8.4. Állítás. *A fenti következmény nem igaz differenciálható függvényekre. Van olyan perfekt halmazon differenciálható függvény, melynek minden pontban végtelen a deriváltja.*

BIZONYÍTÁS. Az 5.8. Állítás bizonyításában pontosan ilyen függvényt konstruáltunk. ∎

8.2. Dini-deriváltak

8.4. Definíció. *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény. Ekkor definiáljuk D^+f, D_+f, D^-f, D_-f-et a következőképp:*

$$D^+f(x_0) = \limsup_{x \to x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, D_+f(x_0) = \liminf_{x \to x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

$$D_-f(x_0) = \liminf_{x \to x_0-0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, D^-f(x_0) = \limsup_{x \to x_0-0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ezek a függvény x_0 pontbeli Dini-deriváltjai.

8.5. Definíció. *Terjesszük ki a fenti definíciót arra az esetre, ha $f : A \to \mathbb{R}$, ahol A zárt. Ekkor definiáljuk $D^+f(x)$-et a következőképp:*

- *ha $\exists x_n \in A$, hogy $x < x_n$ és $x_n \to x$, akkor $D^+f(x)$ legyen a fenti értelemben definiálva.*
- *ha ilyen sorozat nincs, de $\exists y \in A.$, $x < y$, akkor legyen $z = min\{y : y \in A, y > x\}$. Ekkor $z \in A$ nyilván teljesül, és $D^+f(x) = \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$.*
- *ha $\forall y \in A$ $y \le x$, akkor nem értelmezzük.*

Hasonlóan definiáljuk a többi Dini-deriváltat is.

A továbbiakban $max(A)$-tól és $min(A)$-tól eltekintünk, hisz feltehető, hogy A nem korlátos egyik oldalról sem.

Az alábbi állítások analógok a [1]-ben találhatókkal, noha azok kevésbé általánosak.

8.5. Állítás. *Legyen $A \subset \mathbb{R}$ zárt halmaz, $f : A \to \mathbb{R}$ folytonos, $D^+f \ge 0$ A-n. Ekkor f monoton növő.*

BIZONYÍTÁS. Először tekintsük azt az esetet, mikor $D^+f > 0$ mindenütt. Ekkor tegyük fel, hogy $\exists$ u, v $\in A$, hogy $u < v$, de $f(u) > f(v)$. Most, ha $(u, v) \cap A = \emptyset$, akkor nyilván $D^+f(u) = \frac{f(v)-f(u)}{v-u} < 0$, ez ellentmondás. Legyen tehát $y \in (f(v), f(u))$, tetszőleges. Legyen $x_0 = \{x : f(x) \ge$

$y, y \leq v\}$, a zártság és f folytonossága miatt létezik és nyilván $x_0 < v$ $(f^{-1}([y, +\infty)) \cap (-\infty, v]$ zárt és nem tartalmazza v-t). Ekkor $x \in (x_0, v]$ esetén $f(x) < y$. Így $D^+f \leq 0$, ez ellentmond a feltételnek. Most pedig legyen $D^+f \geq 0$ és $f_\epsilon(x) = f(x)+\epsilon x$. Ekkor $D^+f(x) = D^+f(x)+\epsilon$, tehát mivel f_ϵ folytonos is, ezért monoton nő minden ϵ-ra. Másrészt $f_\epsilon \to f$ pontonként, ha $\epsilon \to 0$, tehát maga f is monoton növő. ∎

8.6. Állítás. *Legyen f, A az előző tétel szerint értelmezve, és teljesüljön még, hogy $c \leq Df \leq d$, valamelyik Dini-deriváltra az egész A-n. Ekkor*

$$c \leq \frac{f(u) - f(v)}{u - v} \leq d$$

$\forall u \neq v$-re A-ból.

Bizonyítás. D^+f-re látjuk be az állítást. Legyen $g(x) = f(x) - cx$, $h(x) = dx - f(x)$. Ekkor $D^+g \geq 0$, $D^+h \geq D_+h = d - D^+f \geq 0$. Így g és h monoton növőek A-n, tehát $u, v \in A$-ra, $u < v$ esetén $f(u) - cu \leq f(v) - cv$, hasonlóan h-ra is, ebből átrendezve kapjuk az egyenlőtlenséget. A bizonyítás a többi Dini-deriváltra teljesen hasonló. ∎

8.2. Következmény. *Ha D^+f, D_+f, D^-f, D_-f valamelyike az x_0 pontban folytonos, x_0 A-nak torlódási pontja, akkor ott f differenciálható és a deriváltja megegyezik azon Dini-derivált értékével, mely folytonos volt az adott pontban.*

Ez nyilvánvaló következménye a 8.6. Állításnak.

8.3. Alkalmazások

8.7. Állítás. *(FNSA) Legyen $X \subset \mathbb{R}$, $|X| \leq \aleph_1$ és $X \notin \mathcal{N}$. Legyen $h : X \to \mathbb{R}$ bijekció, Lipschitz. Ekkor van egy olyan A nem megszámlálható halmaz X-ben, hogy $h|A$ relatíve $C^1(A)$.*

8.2. Lemma. *Legyen $f : H \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz, ahol H tetszőleges $H \subset \mathbb{R}$. Ekkor f kiterjeszthető Lipschitz függvényként $\overline{H}$-ra.*

Bizonyítás. (8.2. Lemma) Könnyen látható, hogy Lipschitz függvényként kieterjed $\overline{H}$-ra. Ennek igazolása teljesen hasonló a 2.3. Állításéhoz. Most

$\overline{H}$ komplementere diszjunkt nyílt intervellumok uniója. Itt adjuk meg f-et lineárisan, vagyis ha az intervellum korlátos két végpontja $a, b \in \overline{H}$, akkor $F(\alpha a + (1-\alpha)b) = \alpha f(a) + (1-\alpha)f(b)$, ha $x \in (a,b)$. Ez pedig teljesíti a feltételeket, ugyanis $|f(x) - f(c)| \leq \alpha|f(a) - f(c)| + (1-\alpha)|f(b) - f(c)| \leq L|c - x|$, ha $c \notin (a,b)$, egyébként pedig a linearitás miatt triviális. ∎

Bizonyítás. (8.7. Állítás) A 8.2. Lemma miatt h kiterjeszthető Lipschitzként egész $\mathbb{R}$-re. Az így kapott kiterjesztés legyen h_1. Tudjuk, hogy minden Lipschitz függvény λ majdnem minden pontban differenciálható, és mivel minden megszámlálható halmaz $\mathcal{N}$-beli, így van olyan $A_1 \subset X$, hogy h A_1 minden pontjában differenciálható. Ekkor 8.1. Állítás szerint van olyan $A_2 \subset A_1$ nem megszálálható, melyen $h_1'|A_2$ monoton, egy monoton függvény megszámlálható sok pont kivételével folytonos is, tehát $h_1'|A$ $|A| = \aleph_1$ folytonos, azaz $h|A$ relatíve $C^1(A)$. ∎

8.8. Állítás. *(MA+FNSA)Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $|H| = \aleph_1$, $f : X \to \mathbb{R}$ $f \in D^1(H)$, f Lipschitz. Ekkor van olyan folytonosan differenciálható függvény $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hogy $|\{x : f(x) = g(x)\}| = \aleph_1$.*

Bizonyítás. Először tekintsük f'-t. Beláttuk, hogy FNSA+MA mellett van olyan folytonos függvény amely nem megszámlálható sok pontban egyezik meg vele. Ez speciálisan azt jelenti, hogy van olyan $X \subset H$ nem megszámlálható, melyre megszorítva f' egyenletesen folytonos.

Most Baldwin tételének bizonyításához hasonlóan járunk el, téglatestek uniója illetve véges sok pont lesz maga a kénszerképzet. Feltehető hogy egy korlátos intervellumban van X. Legyen $h(x,y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ X^2-en értelmezett függvény függőleges vagy vízszintes egyenesekre megszorítva folytonos, hiszen $lim_{x \to x_0} h(x, x_0)$ véges. $A \in [X]^{<\omega}$, $D \subset (\mathbb{R} \setminus (X \cup h(X^2))$ megszámlálható, egész $\mathbb{R}$-ben sűrű. $\mathcal{S}$-et definiáljuk úgy, hogy a $\{\cup_{i=1}^n (a_i^1, a_i^2) \times (b_i^1, b_i^2) \times (c_i^1, c_i^2) : a_i^j, b_i^j, c_i^j \in D\}$ halmaz azon elemei, melyekre $(a_i^1, a_i^2) \times (b_i^1, b_i^2)$ diszjunktak és uniójuk fedi X^2-et. A kényszerképzet elemei olyan (A, S) párok hogy $x_0 \in A$ esetén $((x, x_0), h(x, x_0)) \in S$ minden $x \in X$-re. A rendezés ugyanaz mint Baldwin tételénél. Mivel megszámlálható sok különböző S van ezért ez a kényszerképzet is MAF-os. Ismét tekintjük az önmagával vett megszámlálható szorzatot, és olyan $E_{i,n}$ sűrű részhalmazokat veszünk, melyekre az i. koordinátában (A, S) szerepel, akkor minden S-beli elem átlója legfeljebb $1/n$ hosszú. Ahhoz hogy lássuk, hogy ez valóban sűrű legyen n rögzített. Az $x \to h(x, x_0)$ függvény rögzített x_0-ra x_0 egy környezetén kívül egyenletesen folytonos. Ezt az alábbi számolás mutatja:

$$|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}|=$$

$$|\frac{(y-x)f(x)-x(f(x)-f(y))+x_0(f(y)-f(x))}{(y-x_0)(x-x_0)}|\leq M|x-y|$$

Valamely x_0-tól függő M konstanssal, kihasználva, hogy f Lipschitz. innen már látszik, hogy midegyik S finomítható 1/n-nél kisebb átmérőjű téglatestekre. Ekkor MA miatt (használva a D_x halmazokat) van olyan $Y \subset X$ nem megszámlálható, hogy $h|Y$ folytonos minden pontban (D(X) pontjaiban f folytonossága miatt foytonos lesz, most beláttuk, hogy Y^2 minden pontjában folytonos).

Most terjesszük ki f-et $\overline{Y}$-ra Lipschitzként, tekintsük D^+f-et. Mivel $h|Y^2$ folytonos, ezért ha $x \to x_0$, $x_0 \in Y$, akkor $D^+f(x) \to f'(x_0)$ (itt felhasználjuk, hogy Y sűrű $\overline{Y}$-ban). Másrészt, használva a 8.2. Következményt és azt, hogy $f'|Y$ egyenletesen folytonos kapjuk, hogy D^+f folytonos $\overline{Y}$ pontjaiban is, azaz $f'(z)=lim_{x\to z}f'(x)$, $x \in Y$, sőt a kiterjesztéssel az egyenletes folytonosság is megmarad. De ekkor használható Whitney kiterjesztési tétele.
■

Ezzel sajnos nem válaszoltuk meg azt a kérdést, hogy konzisztens-e, hogy nincs $(C^1\cup(C^1)^{-1})S_{\aleph_1}$ halmaz, viszont jelentősen leegyszerűsítettük, ugyanis elég lenne belátni a következőt:

Kérdés. (FNSA+MA)-ból következik-e, hogy egy $\aleph_1$ számosságú halmazon értelmezett Lipschitz függvény differenciálható egy nem megszámlálható részhalmazon?

Hivatkozások

[1] *Laczkovich Miklós: Valós Függvénytan*, ELTE Budapest, 1995.

[2] *Alexander S. Kechris: Classical Descriptive Set Theory*, Graduate Texts in Mathematics 156, Springer-Verlag, 1994.

[3] *Krzysztof Ciesielski, Janus Pawlikowski: The Covering Property Axiom, CPA: A Combinatorical Core of the Iterated Perfect Set Model* Cambridge Tracts in Mathematics 164, Cambridge University Press, 2004.

[4] *Abraham, Uri;Rubin, Matatyahu; Shelah, Saharon, On the consistency of some partition theorems for continuous colorings, and the structure of $\aleph_1$-dense real order types.* Ann. Pure Appl. Logic 29 (1985), no. 2, 123–206.

[5] *Tomek Bartoszyński, Haim Judah: Set Theory On The Structure Of The Real Line* A. K. Peters Ltd., 1995.

[6] *Csirmaz László: Forszolás (jegyzet)*

[7] *Kenneth Kunen: Set Theory An Introduction to Independence Proofs*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1983.

[8] *Steprans, Juris, Decomposing Euclidean space with a small number of smooth sets*, Trans. Amer. Math. Soc. 351 (1999), no. 4.

[9] *Agronsky, S.; Bruckner, A. M.; Laczkovich, M.; Preiss, D. Convexity conditions and intersections with smooth functions.* Trans. Amer. Math. Soc. 289 (1985), no. 2, 659–677.

[10] *Baldwin, Stewart Martin's axiom implies a stronger version of Blumberg's theorem*, Real Anal. Exchange 16 (1990/91), no. 1, 67–73.

[11] *John C. Oxtoby: Measure and Category* Graduate Texts in Mathematics 2, Springer-Verlag, 1980.

[12] *Ciesielski, Krzysztof Decomposing symmetrically continuous and Sierpiński-Zygmund functions into continuous functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 127 (1999), no. 12, 3615–3622.