

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

Biszak Előd Tamás

# Digitalizált térképek 3-dimenziós ábrázolása

Témavezető: Dr. Csikós Balázs

BSc szakdogozat

Természettudományi Kar  
Matematika BSc szak

2010. június 3.

## *Kivonat*

A szakdolgozatban digitalizált térképek 3-dimenziós ábrázolásának elméleti kérdéseivel foglalkoztam. Ha egy adott térképet 3-dimenzióban, domborzattal együtt szeretnénk megjeleníteni, az első fontos feladat, hogy ismerjük a térkép milyen módon, milyen eljárással lett levetítve a földgömből. Ezen információk alapján meg kell tudnunk állapítani a térkép tetszőleges pontjának földrajzi koordinátái, az adott ponton a tengerszint feletti magasságot. Ezért az első fejezet a térképészeti vetületekkel, tulajdonságaikkal, vetületi átszámításokkal foglalkozik. A második fejezetben a program egy rövid leírása történik, amelyben működése matematikai hátterét ismerhetjük meg, valamint néhány monitorkép is bemutatásra kerül az eredmények szemléltetése végett.

# Tartalomjegyzék

<b>Kivonat</b>	<b>i</b>
<b>Ábrák jegyzéke</b>	<b>iii</b>
<b>1. Térképészeti vetületek</b>	<b>1</b>
1.1. Hiperfelületekről általánosan . . . . .	1
1.2. 3-dimenziós felületekről . . . . .	3
1.2.1. Ívhossz . . . . .	4
1.2.2. Szög . . . . .	5
1.2.3. Terület . . . . .	6
1.3. A gömb vetületei . . . . .	8
1.3.1. Kúpvetületek . . . . .	8
1.3.2. Azimutális vetületek . . . . .	13
1.3.3. Hengervetületek . . . . .	24
1.4. A forgási ellipszoidról . . . . .	29
<b>2. Az alkalmazásról</b>	<b>31</b>
2.1. Működés . . . . .	31
2.1.1. Egy pixel ”útja” . . . . .	31
2.1.2. Mozgás . . . . .	33
2.2. Monitorképek . . . . .	37
<b>Irodalomjegyzék</b>	<b>37</b>

# Ábrák jegyzéke

1.1. Kúpvetületek. . . . .	9
1.2. Kőrcikk poláris és Descartes-féle koordinátái közötti összefüggés. . . . .	10
1.3. Perspektív vetítés gömbről síkra. . . . .	15
1.4. Azimutális vetületek vetületi egyenletei. . . . .	17
1.5. A gnomikus vetület. . . . .	18
1.6. Az ortografikus vetület. . . . .	19
1.7. A sztereografikus projekció. . . . .	22
1.8. Területtartó azimutális vetület. . . . .	23
1.9. Meridiánokon hossz tartó azimutális vetület. . . . .	25
1.10. A területtartó hengervetület. . . . .	26
1.11. Cassini-vetület vetületi egyenletei. . . . .	29
2.1. Rodrigues-formula adott $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ vektor egyenes körüli elforgatottjára . . .	36
2.2. Kárpátok a Második katonai felmérésen . . . . .	37
2.3. Dunakanyar a Második katonai felmérésen I. . . . .	38
2.4. Dunakanyar a Második katonai felmérésen II. . . . .	38
2.5. Dunakanyar a Harmadik katonai felmérésen . . . . .	39
2.6. Dunakanyar a Második katonai felmérésen III. . . . .	39
2.7. Dunakanyar a Második katonai felmérésen IV. . . . .	40
2.8. Budapest és környéke a Második katonai felmérésen . . . . .	40
2.9. Balaton a Harmadik katonai felmérésen. . . . .	41
2.10. Balaton a Második katonai felmérésen . . . . .	41

## 1. fejezet

# Térképészeti vetületek

Mivel a Föld szabálytalan idom, először olyan idommal kell helyettesítenünk, amely alakját és méreteit tekintve jól közelíti a Föld felszínét, de matematikailag jól kezelhető. Ez az úgynevezett **alapfelület**. Alapfelületnek forgási ellipszoidot vagy gömböt szoktunk választani. Ha adott egy térkép (jelölés:  $\Omega$ ), legyen  $f : \Omega \mapsto M$  leképezés, amelyben  $M$  jelöli az alapfelületet, egy  $p \in \Omega$  pont képe, azon  $p' \in M$ , amit ábrázol. Ekkor ezen  $f$  függvény az alapfelület, vagy egy részének egy paraméterezését adja. Ha két térképünk van (jelölés:  $\Omega_1, \Omega_2$ ), amelyek adott alapfelület ugyanazon részét ábrázolják, és adott  $p \in \Omega_1$  pont  $\Omega_2$  belső koordinátáját szeretnénk megtudni, akkor ehhez egy adott felület két paraméterezése közötti átmeneti leképezést kell ismernünk. Tehát **térképészeti vetület** alatt az adott alapfelület paraméterezéseit (térképeit) fogjuk érteni, azon megkövetéssel, hogy ez folytonosan differenciálható legyen.

### 1.1. Hiperfelületekről általánosan

1. *Definíció.* Egy  $\mathbb{R}^n$ -beli  $C^m$ -osztályú paraméterezett hiperfelület egy  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$  nyílt tartományból  $\mathbb{R}^n$ -be menő  $\mathbf{r} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$   $C^m$ -osztályú leképezés.

$\Omega$  lefedhető a koordinátatengelyekkel párhuzamos egyenesekkel, melyek természetes módon paraméterezhetők egy  $t \mapsto u_0 + te_i$  leképezéssel, ahol  $u_0 \in \Omega$ ,  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ . A  $t \mapsto \mathbf{r}(u_0 + te_i)$  görbék az  $\mathbf{r}$  paraméterezés paramétervonalai. A paramétervonalak

sebességvektora  $t = 0$ -ban:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(u_0 + te_i)|_{t=0} = \partial_i\mathbf{r}(u_0) =: \mathbf{r}_i(u_0).$$

Tehát  $\mathbf{r}_1(u_0), \dots, \mathbf{r}_{n-1}(u_0)$  az  $\mathbf{r}(u_0)$ -ot átmenő paramétervonalak sebességvektorai.

2. *Definíció.*  $\mathbf{r}$  reguláris paraméterezés, ha legalább  $\mathcal{C}^1$ -osztályú és a parciális deriváltak lineárisan függetlenek  $\forall u_0 \in \Omega$  esetén.

Ezentúl feltesszük, hogy a paraméterezés injektív és reguláris.

Legyen  $M$  az  $\mathbf{r}$  leképezés értékkészlete. Ha feltesszük, hogy a paraméterezés injektív akkor tetszőleges  $p = \mathbf{r}(u_0)$  ponton  $t = 0$  időpillanatban áthaladó  $M$ -beli  $\gamma$  görbe paraméterezhető  $\mathbf{r} \circ u$  alakban, ahol  $u : [a, b] \mapsto \Omega$ , sima paraméterezett görbe,  $0 \in [a, b]$ ,  $u(0) = u_0$ . Ekkor ezen görbe sebességvektora a  $t = 0$  időpillanatban

$$\gamma'(0) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{r}_i(u_0) \cdot u^{i'}(0), \quad (1.1)$$

ahol  $u^i$  az  $u$   $i$ -edik koordinátafüggvényét jelöli. Tehát a parciális deriváltak egy lineáris kombinációja, valamint tetszőleges lineáris kombinációjuk megadja egy  $p$ -n átmenő görbe  $p$ -beli sebességvektorát.  $T_p M \stackrel{jel}{=} \{ \mathbf{r}_1(u_0), \dots, \mathbf{r}_{n-1}(u_0) \text{ lineáris kombinációi} \} = M$   $p$ -beli érintőtere.

3. *Definíció.* Az  $\mathbf{r}$  paraméterezett hiperfelület  $N$  egységnormális mezője az az  $N : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$  leképezés, melyre:

- $N(u_0)$  merőleges  $\mathbf{r}_i(u_0)$ -ra  $i = 1 \dots n - 1$
- $|N(u_0)| = 1$
- $\mathbf{r}_1(u_0), \dots, \mathbf{r}_{n-1}(u_0), N(u_0)$  pozitív irányításúak.

Az  $N$  vektormezőt  $n = 3$  esetén a következő képpen számolhatjuk ki:  $N = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}$

4. *Definíció.* A hiperfelület első alapformája a  $p = \mathbf{r}(u_0)$  pontban az a

$$I_p : T_p M \times T_p M \mapsto \mathbb{R}$$

leképezés, melyre

$$I_p(v, w) = \langle v, w \rangle,$$

ahol  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  a szokásos skaláris szorzatot jelöli.

5. *Definíció.* A hiperfelület második alapformája a  $p = \mathbf{r}(u_0)$  pontban az a

$$II_p : T_p M \times T_p M \mapsto \mathbb{R}$$

leképezés, melyre

$$II_p(v, w) = \sum_{i,j=1}^{n-1} \langle \mathbf{r}_{ij}(u_0), N(u_0) \rangle v^i w^j,$$

ahol a  $v^i$  és  $w^i$  számok a  $v$  és  $w$  vektorok koordinátái az  $\mathbf{r}_1(u_0), \dots, \mathbf{r}_{n-1}(u_0)$  bázisban.

Ezen bilineáris függvényekhez tartozó mátrixokat a  $\mathbf{r}_1(u_0), \dots, \mathbf{r}_n(u_0)$  bázisban jelöljük  $\mathcal{G}(u_0)$ -val, illetve  $\mathcal{B}(u_0)$ -val. Ekkor:

$$\mathcal{G}(u_0) = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{r}_1(u_0), \mathbf{r}_1(u_0) \rangle & \dots & \langle \mathbf{r}_1(u_0), \mathbf{r}_{n-1}(u_0) \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{r}_{n-1}(u_0), \mathbf{r}_1(u_0) \rangle & \dots & \langle \mathbf{r}_{n-1}(u_0), \mathbf{r}_{n-1}(u_0) \rangle \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B}(u_0) = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{r}_{1,1}(u_0), N(u_0) \rangle & \dots & \langle \mathbf{r}_{1,n-1}(u_0), N(u_0) \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{r}_{n-1,1}(u_0), N(u_0) \rangle & \dots & \langle \mathbf{r}_{n-1,n-1}(u_0), N(u_0) \rangle \end{bmatrix}$$

## 1.2. 3-dimenziós felületekről

Az előző részben szereplő  $\mathcal{G} = \{g_{ij}\}_{i,j=1}^{n-1}$  mátrix mindent elárul az adott felületen távolságokról, területekről, szögekről.

A fenti jelölésekkel legyen  $\gamma = \mathbf{r} \circ u$  egy felületen futó görbe. Ekkor

$$I_p(\gamma'(t), \gamma'(t)) = \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle =$$

$$\begin{aligned} \left\langle \mathbf{r}_1(u(t))u^{1'}(t) + \mathbf{r}_2(u(t))u^{2'}(t), \mathbf{r}_1(u(t))u^{1'}(t) + \mathbf{r}_2(u(t))u^{2'}(t) \right\rangle = \\ g_{11}(t)(u^{1'}(t))^2 + 2g_{12}(t)u^{1'}(t)u^{2'}(t) + g_{22}(t)(u^{2'}(t))^2, \end{aligned}$$

ahol  $g_{ij}(t)$  az  $\mathbf{r}(u(t))$  ponthoz tartozó fent definiált  $\mathcal{G}(u(t))$  mátrix megfelelő eleme.

### 1.2.1. Ívhossz

Legyen  $\gamma$  felületen futó görbe. Jelölje  $l(\gamma)$  az ívhosszt. Ekkor a fenti jelölésekkel:

$$\begin{aligned} l(\gamma) &= \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{g_{11}(t)(u^{1'}(t))^2 + 2g_{12}(t)u^{1'}(t)u^{2'}(t) + g_{22}(t)(u^{2'}(t))^2} dt \end{aligned}$$

A képletből azonnal látszik, hogy ha  $G(t) = I$ ,  $\forall t \in [a, b]$ , akkor az adott görbe hossztartó módon parametrizálódik, illetve, ha  $G(t) = \lambda I$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , akkor  $\sqrt{\lambda}$  arányú nyújtás történik.

Ha feltesszük, hogy  $u \in \mathcal{C}^1$ , akkor könnyen látható, hogy a  $\gamma = \mathbf{r} \circ u$  paraméterezés akkor és csak akkor hossztartó, ha

$$\begin{aligned} f_1(t) &\stackrel{jel}{=} \sqrt{g_{11}(t)(u^{1'}(t))^2 + 2g_{12}(t)u^{1'}(t)u^{2'}(t) + g_{22}(t)(u^{2'}(t))^2} \\ &= f_2(t) \stackrel{jel}{=} \sqrt{(u^{1'}(t))^2 + (u^{2'}(t))^2} \end{aligned}$$

$\forall t \in [a, b]$ .

Ha ugyanis lenne egy olyan  $t_1 \in [a, b]$ , melyre ez nem teljesülne, például  $f_1(t_1) > f_2(t_1)$  lenne, akkor annak egy elég kis  $U$  környezetére létezne olyan  $\epsilon > 0$ , melyre igaz, hogy  $f_1(t) > f_2(t) + \epsilon$   $t \in U$ -ra. Ekkor viszont ezen az  $U \subset [a, b]$ -n nem lehetne egyenlő a két integrál. Tehát a hossztartóság szükséges és elégséges feltétele, hogy

$$(g_{11}(t) - 1)(u^{1'}(t))^2 + 2g_{12}(t)u^{1'}(t)u^{2'}(t) + (g_{22}(t) - 1)(u^{2'}(t))^2 = 0 \quad \forall t \in [a, b] \quad (1.2)$$

teljesüljön.

Legyen most  $\mathbf{r} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{s} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^3$  két paraméterezett felület  $\mathcal{G}_r = \{g_{ij}\}_{i,j=1}^3$ , illetve  $\mathcal{G}_s = \{h_{ij}\}_{i,j=1}^3$  első alapforma mátrixokkal,  $M_r$ , illetve  $M_s$  értékészletekkel. Legyen  $\gamma = \mathbf{r} \circ u$ ,  $u : [a, b] \rightarrow \Omega$  az  $M_r$ , illetve  $\hat{\gamma} = \mathbf{s} \circ u$  az  $M_s$  felületen futó görbe. Világos,



hogy annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy tetszőleges  $[a', b'] \subseteq [a, b]$ -re a  $\gamma|_{[a', b]}$  és  $\hat{\gamma}|_{[a', b]}$  hosszaik megegyezzenek:

$$\begin{aligned} f_1(t) &\stackrel{jel}{=} \sqrt{g_{11}(t)(u^1(t))^2 + 2g_{12}(t)u^1(t)u^2(t) + g_{22}(t)(u^2(t))^2} \\ &= f_2(t) \stackrel{jel}{=} \sqrt{(h_{11}(t)(u^1(t))^2 + 2h_{12}(t)u^1(t)u^2(t) + h_{22}(t)(u^2(t))^2)} \end{aligned}$$

$\forall t \in [a, b]$ -re azaz, hogy

$$(g_{11}(t) - h_{11}(t))(u^1(t))^2 + 2(g_{12}(t) - h_{12}(t))u^1(t)u^2(t) + (g_{22}(t) - h_{22}(t))(u^2(t))^2 = 0 \quad (1.3)$$

$\forall t \in [a, b]$ -re.

Ha ugyanis lenne egy olyan  $t_1 \in [a, b]$ , melyre ez nem teljesülne, például  $f_1(t_1) > f_2(t_1)$  lenne, akkor annak egy elég kis  $U$  környezetére létezne olyan  $\epsilon > 0$ , melyre igaz, hogy  $f_1(t) > f_2(t) + \epsilon$   $t \in U$ -ra. Ekkor viszont ezen az  $U \subset [a, b]$ -n nem lehetne egyenlő a két integrál.

### 1.2.2. Szög

6. *Definíció.* Ha  $\gamma, \phi$  két felületen futó,  $t_0$  időpillanatban metsző, a  $t_0$  pontban regulárian paraméterezett görbe, akkor az általuk bezárt  $\alpha$  szögön a  $\gamma'(t_0)$  és  $\phi'(t_0)$  vektorok által bezárt  $\alpha$  szöget értjük.

Ekkor

$$\cos \alpha = \frac{\langle \gamma'(t_0), \phi'(t_0) \rangle}{|\gamma'(t_0)| |\phi'(t_0)|}.$$

Azonnal látszik, hogy pontosan akkor szögtartó egy pontban a paraméterezés, ha  $G = \lambda I$ , mivel  $\gamma = \mathbf{r} \circ u$ ,  $\phi = \mathbf{r} \circ v$ -ből

$$\frac{\langle \gamma'(t_0), \phi'(t_0) \rangle}{|\gamma'(t_0)| |\phi'(t_0)|} = \frac{g_{11}u^1v^1 + 2g_{12}u^1v^2 + g_{22}u^2v^2}{\sqrt{g_{11}(u^1)^2 + 2g_{12}u^1u^2 + g_{22}(u^2)^2} \sqrt{g_{11}(v^1)^2 + 2g_{12}v^1v^2 + g_{22}(v^2)^2}},$$

ahonnan  $G = \lambda I$ -ből.

$$\frac{\lambda u^1v^1 + \lambda u^2v^2}{\sqrt{\lambda(u^1)^2 + \lambda(u^2)^2} \sqrt{\lambda v^1{}^2 + \lambda v^2{}^2}} = \frac{u^1v^1 + u^2v^2}{\sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2} \sqrt{(v^1)^2 + (v^2)^2}}.$$

Illetve ellenkező esetben, ha  $g_{12}$  nem nulla akkor  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ , ha  $g_{11} \neq g_{22}$ , akkor  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$  triviális ellenpélda.

1. *Állítás.* Legyen  $\mathbf{r} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{s} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^3$  két paraméterezett felület  $\mathcal{G}_r = \{g_{ij}\}_{i,j=1}^3$ , illetve  $\mathcal{G}_s = \{h_{ij}\}_{i,j=1}^3$  első alapforma mátrixokkal. Legyenek  $\gamma = \mathbf{r} \circ u$ ,  $\phi = \mathbf{r} \circ v$  az első felületen futó,  $\mathbf{r}(u_0)$  pontban metsző regulárisan paraméterezett görbék. Legyen továbbá  $\hat{\gamma} = \mathbf{s} \circ u$ ,  $\hat{\phi} = \mathbf{s} \circ v$  a  $\gamma$  és  $\phi$  által az  $s$  felületen meghatározott görbék. Ekkor a  $\hat{\gamma}$  és  $\hat{\phi}$  által bezárt szög akkor, és csak akkor egyezik meg a  $\gamma$  és  $\phi$  által bezárttal tetszőlegesen  $\gamma$  és  $\phi$  esetén, ha  $\mathcal{G}_r = \lambda \mathcal{G}_s$ , valamilyen  $\lambda : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ -re.

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy  $\mathcal{G}_r = \lambda \mathcal{G}_s$ , valamilyen  $\lambda : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ -re. Ekkor  $\lambda_0 = \lambda(u_0)$  jelöléssel

$$\begin{aligned} \frac{\langle \gamma'(t_0), \phi'(t_0) \rangle}{|\gamma'(t_0)| |\phi'(t_0)|} &= \frac{g_{11}u^1v^1 + 2g_{12}u^1v^2 + g_{22}u^2v^2}{\sqrt{g_{11}(u^1)^2 + 2g_{12}u^1u^2 + g_{22}(u^2)^2} \sqrt{g_{11}(v^1)^2 + 2g_{12}v^1v^2 + g_{22}(v^2)^2}} \\ &= \frac{\lambda_0 (h_{11}u^1v^1 + 2h_{12}u^1v^2 + h_{22}u^2v^2)}{\lambda_0 \left( \sqrt{h_{11}(u^1)^2 + 2h_{12}u^1u^2 + h_{22}(u^2)^2} \sqrt{h_{11}(v^1)^2 + 2h_{12}v^1v^2 + h_{22}(v^2)^2} \right)} \\ &= \frac{\langle \hat{\gamma}'(t_0), \hat{\phi}'(t_0) \rangle}{|\hat{\gamma}'(t_0)| |\hat{\phi}'(t_0)|} \end{aligned}$$

Ellenkező esetben tekintsük az  $r_1, r_2$ , illetve a nekik megfelelő  $s_1, s_2$  bezárt szögei közötti összefüggést:

$$\frac{\langle r_1, r_2 \rangle}{\sqrt{\langle r_1, r_1 \rangle} \sqrt{\langle r_2, r_2 \rangle}} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}} \sqrt{g_{22}}} = \frac{\lambda_1 h_{12}}{\sqrt{\lambda_2 h_{11}} \sqrt{\lambda_3 g_{22}}},$$

ami a  $\lambda_1 = \sqrt{\lambda_2 \lambda_3}$  esettől eltekintve ellenpélda. Ha  $\lambda_1 = \sqrt{\lambda_2 \lambda_3}$   $r_1$ , illetve  $r_1 + r_2$  és  $s_1, s_1 + s_2$  bezárt szögei különböznek.  $\square$

### 1.2.3. Terület

Legyen  $R \subseteq M$  kompakt lezárású nyílt, jelölje  $A(R)$   $R$  felszínét. Ekkor  $D = \mathbf{r}^{-1}(R)$  jelöléssel:

$$A(R) = \int_D |\mathbf{r}_1(u, v) \times \mathbf{r}_2(u, v)| d(u, v)$$

Az integrandus négyzete, szemelőtt tartva a  $\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$  összefüggést, melyből

$$\left( \frac{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}{|\mathbf{r}_1||\mathbf{r}_2|} \right)^2 + \left( \frac{\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \rangle}{|\mathbf{r}_1||\mathbf{r}_2|} \right)^2 = 1$$

a következővel egyenlő:

$$|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|^2 = |\mathbf{r}_1|^2 |\mathbf{r}_2|^2 - \langle \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \rangle^2 = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = \det \mathcal{G}.$$

Ebből azonnal látszik, hogy a területtartás elégséges feltétele, hogy  $\det \mathcal{G}(u, v) = 1$   $\forall (u, v) \in \Omega$  legyen. A szükségesség az  $(u, v) \mapsto \det \mathcal{G}(u, v)$  függvény folytonosságából következik. Ha van egy olyan  $p = (u_0, v_0)$  pont, melyre például  $\det \mathcal{G}(u_0, v_0) > 1$ , akkor annak van egy kis  $U_p$  környezete, ahol  $\det G > 1 + \epsilon$  valamely elég kicsi  $\epsilon > 0$ -ra. Tehát

$$\int_{U_p} \sqrt{\det \mathcal{G}(u, v)} d(u, v) > (1 + \epsilon) \cdot A(U_p) > A(U_p).$$

2. *Állítás.* Legyen  $\mathbf{r} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{s} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^3$  két paraméterezett felület  $\mathcal{G}_r = \{g_{ij}\}_{i,j=1}^3$ , illetve  $\mathcal{G}_s = \{h_{ij}\}_{i,j=1}^3$  első alapforma mátrixokkal, valamint  $M_r$ , illetve  $M_s$  értékkészletekkel. Ekkor

$$A(R) = A(\mathbf{s}(\mathbf{r}^{-1}(R))) \quad \forall R \subseteq M_r \text{ kompakt lezárasú nyílt}$$

$\Updownarrow$

$$\det \mathcal{G}_r(p) = \det \mathcal{G}_s(p) \quad \forall p \in \Omega$$

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy  $\det \mathcal{G}_r(p) = \det \mathcal{G}_s(p) \quad \forall p \in \Omega$ . Legyen  $R \in M_r$  tetszőleges kompakt lezárasú nyílt halmaz.  $D \stackrel{jel}{=} \mathbf{r}^{-1}(R)$ . Ekkor

$$A(R) = \int_D \sqrt{\det \mathcal{G}_r(u, v)} d(u, v) = \int_D \sqrt{\det \mathcal{G}_s(u, v)} d(u, v) = A(\mathbf{s}(D)).$$

Ha létezik  $p_1 \in \Omega$ , amelyre például  $\det \mathcal{G}_r(p_1) > \det \mathcal{G}_s(p_1)$ , akkor a  $\det$  függvény folytonossága miatt létezik  $\epsilon > 0$  és  $p_1$ -nak kis  $U$  környezete, melyre

$\det \mathcal{G}_r(p) > \det \mathcal{G}_s(p) + \epsilon \forall p \in U$ , melyből

$$A(U) = \int_{\mathbf{r}^{-1}(U)} \sqrt{\det \mathcal{G}_r(u, v)} d(u, v) > \int_{\mathbf{r}^{-1}(U)} \sqrt{\det \mathcal{G}_s(u, v)} d(u, v) = A(\mathbf{s}(\mathbf{r}^{-1}(U)))$$

□

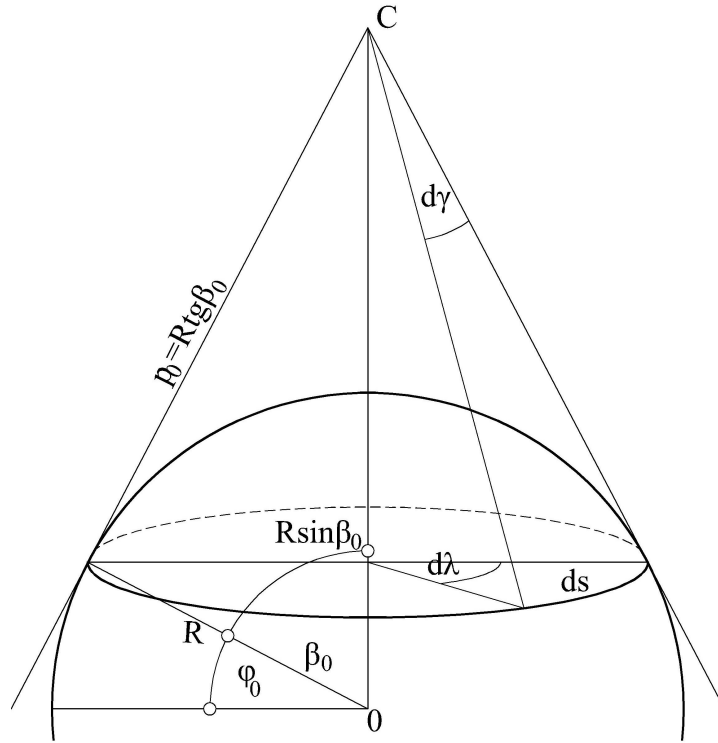
### 1.3. A gömb vetületei

- Ebben a részben az  $M$  alapfelületnek az  $R$  sugarú gömböt választjuk.
- **Vetületen** tehát egy legalább  $C^1$  osztályú paraméterezést értünk valamely  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  paramétertartománnyal.
- A gömb standard paraméterezése azon  $\mathbf{r} : [-\pi, \pi] \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \mapsto \mathbb{R}^3$  leképezést értjük, mely a  $(\lambda, \varphi)$  ponthoz az  $(R \sin \lambda \cos \varphi, R \sin \lambda \sin \varphi, R \cos \lambda)$  pontot rendeli.
- Egy adott vetület **vetületi egyenletén** azon  $f : [-\pi, \pi] \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \mapsto \mathbb{R}^2$  függvényt értjük, mely egy adott  $p \in M$  pont  $(\varphi, \lambda)$  standard koordinátáihoz az adott vetületbeli koordinátáit rendeli.
- **Északi póluson** a  $\mathbf{r}(0, \frac{\pi}{2})$ , **déli póluson** az  $\mathbf{r}(0, -\frac{\pi}{2})$  pontot értjük.
- **Paralelkörök**, illetve **meridiánok** alatt a standard paraméterezés első, illetve második változó szerinti paramétervonalait értjük.
- Kezdőmeridiánon, illetve egyenlítőn a  $[0, 2\pi] \ni t \mapsto \mathbf{r}(0, -\frac{\pi}{2} + \frac{t}{2})$ , illetve a  $[0, 2\pi] \ni t \mapsto \mathbf{r}(-\pi + t)$  görbékét értjük.

#### 1.3.1. Kúpvetületek

Egy vetületet akkor nevezünk kúpvetületnek, ha a paramétertartomány egy körcikk és létezik egy  $P$  pont a gömbön, melyre

- a  $P$ -n átmenő főkörök képei egy  $O$  középpontú sugársorhoz tartoznak;



1.1. ÁBRA. Kúpvetületek.

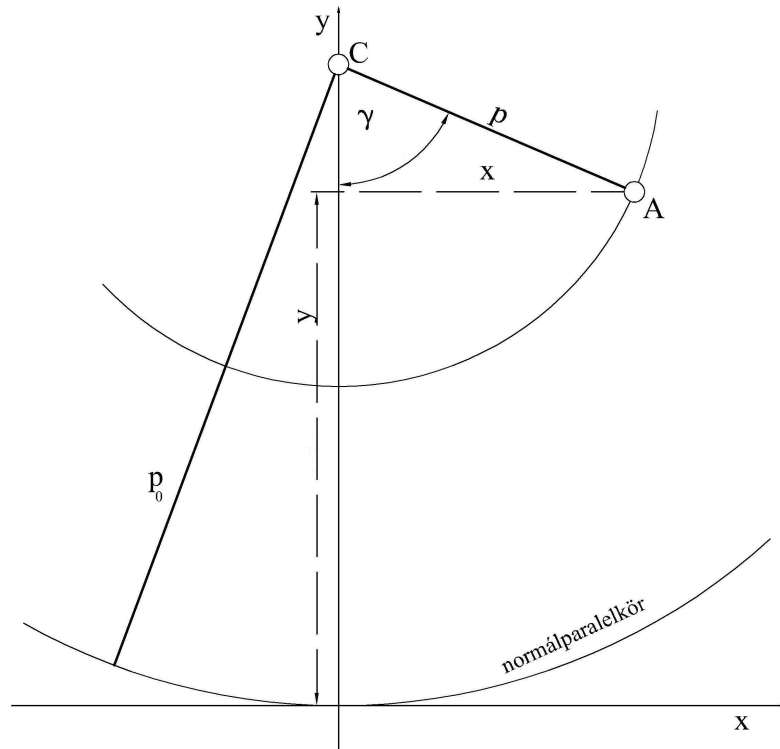
- az  $OP$  egyenesre merőleges síkok által kimetszett körök képei  $O$  középpontú koncentrikus körök ívei. Minden kör úgy képződik a neki megfelelő körívre, hogy azonos hosszú körívek képei is azonos hosszúak.

Az egyszerűség kedvéért most normális elhelyezésű kúpvetületekkel fogunk foglalkozni, amikor is ez a  $P$  pont az északi pólus. Ekkor persze a sugársort a meridiánképek alkotják, a koncentrikus köröket pedig a paralelkörök képei.

A  $p_0$  sugarú  $\Omega$  körcikket természetes módon paraméterezhetjük poláris koordinátákkal, úgy hogy egy  $A \in \Omega$  pont  $(p, \gamma)$  koordinátái az egyik  $r_0$  kezdősugárral bezárt szög, valamint a középponttól való távolság. Ekkor az 1.2. ábrán látható módon elhelyezett körcikk egy  $A(p, \gamma)$  koordinátájú pontjának koordinátái az ábrán berajzolt derékszögű koordináta-rendszerben:

$$x = p \sin \gamma,$$

$$y = p_0 - p \cos \gamma.$$



1.2. ÁBRA. Körcikk poláris és Descartes-féle koordinátái közötti összefüggés.

### Kúpvetületekhez tartozó paraméterezés, a szög-, illetve területtartóság feltétele

Legyen  $A \in \Omega$  az  $(\alpha, r)$  polár-koordinátájú pont. Jelölje  $f : r \mapsto [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  azt a leképezést, amely az  $r$ -hez azt a szöget rendeli, amelyhez tartozó páralelkkör képe az  $O$  körüli  $r$  sugarú körív. Tegyük fel, hogy  $\alpha$  a kezdőmeridián képével bezárt szög. Ekkor az  $\alpha$  szögű pontokhoz tartozó meridián, ha a körcikk szöge  $\alpha_0$ ,  $\frac{2\pi}{\alpha_0}\alpha =: c\alpha$ , és  $R$ -et 1-nek választjuk,

$$\mathbf{p}(r, \alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r}(c\alpha, f(r)) = (\sin c\alpha \cos f(r), \sin f(r), \cos c\alpha \cos f(r)).$$

Ebből tetszőleges normális elhelyezésű kúpvetülethez tartozó paraméterezés:

$$\mathbf{s}(x, y) = \begin{bmatrix} \sin c \arcsin \left( \frac{y}{\sqrt{y^2 + (x - p_0)^2}} \right) \cos f(\sqrt{y^2 + (x - p_0)^2}) \\ \sin f(\sqrt{y^2 + (x - p_0)^2}) \\ \cos c \arcsin \left( \frac{y}{\sqrt{y^2 + (x - p_0)^2}} \right) \cos f(\sqrt{y^2 + (x - p_0)^2}) \end{bmatrix}^T$$

Ebből

$$P(r, \alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1(r, \alpha) \\ \mathbf{p}_2(r, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin c \alpha \sin f(r) f'(r) & \cos f(r) f'(r) & -\cos c \alpha \sin f(r) f'(r) \\ c \cos c \alpha \cos f(r) & 0 & -c \sin c \alpha \cos f(r) \end{bmatrix}$$

Ekkor a  $\mathbf{p}$  paraméterezés  $\hat{\mathcal{G}}$  első alapforma mátrixa az  $(r, \alpha)$  pontban:

$$\hat{\mathcal{G}}(r, \alpha) = \begin{bmatrix} (f'(r))^2 & 0 \\ 0 & c^2 \cos^2 f(r) \end{bmatrix}$$

Legyen  $\mathbf{q} : \mathbb{R}^+ \times [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{R}^3$  a sík poláris koordinátázása, azaz  $\mathbf{q}(r, \alpha) = (r \sin \alpha, r \cos \alpha, 0)$ .

Ekkor

$$\mathbf{q}_1(r, \alpha) = (\sin \alpha, \cos \alpha, 0),$$

$$\mathbf{q}_2(r, \alpha) = (r \cos \alpha, -r \sin \alpha, 0),$$

$$\langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_1 \rangle = 1,$$

$$\langle \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_2 \rangle = r^2,$$

$$\langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \rangle = 0,$$

ahonnan

$$\mathcal{G}_p(r, \alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}. \quad (1.4)$$

Innen a 1. állítás alapján a vetület pontosan akkor szögtartó, ha

$$\hat{\mathcal{G}}(r, \alpha) = \begin{bmatrix} (f'(r))^2 & 0 \\ 0 & c^2 \cos^2 f(r) \end{bmatrix} = \lambda(r) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix},$$

valamilyen  $\lambda : \mathbf{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényre, azaz

$$c^2 \cos^2 f(r) = (f'(r))^2 r^2,$$

vagyis ha kielégíti a következő differenciálegyenletet:

$$f'(r) = \pm c \frac{\cos f(r)}{r} \quad (1.5)$$

Mivel  $\det \mathcal{G}_p(r, \alpha) = r$ , a területtartóság feltétele a 2. állítás alapján, hogy  $f$  kielégítse a következő differenciál egyenletet:

$$c f'(r) \cos f(r) = r. \quad (1.6)$$

### **Példa szögtartó kúpvetületre**

Szögtartó kúpvetület azon

$$x = p \sin[n(\lambda - \lambda_0)],$$

$$y = p_0 - p \cos[n(\lambda - \lambda_0)]$$

vetületi egyenletekkel megadott vetület, melyben

$$n = \frac{\lg(\cos \varphi_1 \sec \varphi_2)}{\lg \left[ \tan\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\varphi_2\right) \cot\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\varphi_1\right) \right]},$$

$$p = F \tan^n\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\varphi\right),$$

$$p_0 = F \tan^n\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\varphi_0\right),$$

$$F = \frac{\cos \varphi_1 \tan^n\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\varphi_1\right)}{n},$$

ahol  $\varphi, \lambda$  a standard koordináták,  $\varphi_1, \varphi_2$  adott paralelkör,  $\lambda_0, \varphi_0$  adott meridiánhoz, illetve paralelkörhöz tartozó szögértékek.

3. *Állítás.* Ez a vetület tényleg szögtartó.



*Bizonyítás.* A fenti jelölésekkel

$$c = \frac{1}{n},$$

$$f(r) = 2 \arctan \left( \sqrt[n]{\frac{r}{F}} \right) - \frac{\pi}{2},$$

$$f'(r) = \frac{2}{1 + \left(\frac{r}{F}\right)^{\frac{2}{n}}} \cdot \frac{1}{n} \left(\frac{r}{F}\right)^{\frac{1}{n}-1} \cdot \frac{1}{F} = \frac{2 \left(\frac{r}{F}\right)^{\frac{1}{n}}}{rn \left(1 + \left(\frac{r}{F}\right)^{\frac{2}{n}}\right)}.$$

Ahonnán a

$$\cos(t) = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{1}{2}t\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{1}{2}t\right)}$$

képletből:

$$c \frac{\cos f(r)}{r} = \frac{1}{nr} \frac{1 - \tan^2\left(\frac{1}{2}f(r)\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{1}{2}f(r)\right)} = \frac{1 - \tan^2\left(\arctan\left(\sqrt[n]{\frac{r}{F}}\right) + \frac{\pi}{4}\right)}{nr \left(1 + \tan^2\left(\arctan\left(\sqrt[n]{\frac{r}{F}}\right) + \frac{\pi}{4}\right)\right)},$$

továbbá

$$\begin{aligned} \tan^2\left(\arctan\left(\sqrt[n]{\frac{r}{F}}\right) + \frac{\pi}{4}\right) &= \left(\frac{\tan\left(\arctan\left(\sqrt[n]{\frac{r}{F}}\right)\right) + \tan\frac{\pi}{4}}{1 - \tan\left(\arctan\left(\sqrt[n]{\frac{r}{F}}\right)\right)\tan\frac{\pi}{4}}\right)^2 \\ &= \left(\frac{\sqrt[n]{\frac{r}{F}} + 1}{1 - \sqrt[n]{\frac{r}{F}}}\right)^2 = \frac{\left(\frac{r}{F}\right)^{\frac{2}{n}} + 2\left(\frac{r}{F}\right)^{\frac{1}{n}} + 1}{\left(\frac{r}{F}\right)^{\frac{2}{n}} - 2\left(\frac{r}{F}\right)^{\frac{1}{n}} + 1} \end{aligned}$$

tovább alakítva

$$\frac{1 - \frac{\left(\frac{r}{F}\right)^{\frac{2}{n}} + 2\left(\frac{r}{F}\right)^{\frac{1}{n}} + 1}{\left(\frac{r}{F}\right)^{\frac{2}{n}} - 2\left(\frac{r}{F}\right)^{\frac{1}{n}} + 1}}{nr \left(1 + \frac{\left(\frac{r}{F}\right)^{\frac{2}{n}} + 2\left(\frac{r}{F}\right)^{\frac{1}{n}} + 1}{\left(\frac{r}{F}\right)^{\frac{2}{n}} - 2\left(\frac{r}{F}\right)^{\frac{1}{n}} + 1}\right)} = \frac{-4\left(\frac{r}{F}\right)^{\frac{1}{n}}}{nr \left(2\left(\frac{r}{F}\right)^{\frac{2}{n}} + 2\right)} = \frac{-2\left(\frac{r}{F}\right)^{\frac{1}{n}}}{nr \left(\left(\frac{r}{F}\right)^{\frac{2}{n}} + 1\right)} = -f'(r).$$

□

### 1.3.2. Azimutális vetületek

Egy vetületet akkor nevezünk azimutálisnak, ha létezik egy  $p \in M$  pont, amelyre:

- a  $p$ -n átmenő főkörök vetített képei sugársort alkotnak, melynek tartópontja a pont  $p'$  képe.

- ezen főkörök bezárt szögei megegyeznek a képek által bezárt szögekkel
- a  $p$ -hez tartozó átmérőre merőleges síkok által a gömbből kimetszett körök képei koncentrikus körök  $p'$  középponttal.

Ezen  $p$  pontot nevezzük a vetületi kezdőpontnak.

### Perspektív síkvetületek

Perspektív síkvetületnek azon azimutális vetületeket nevezzük, amikor egy adott  $p$  ponton áthaladó átmérőn adott  $Q$  pontból egy adott, az átmérőre merőleges  $s$  síkra vetítjük a gömb pontjait. Ezt a  $p$  pontot nevezzük **vetületi kezdőpontnak**, a  $Q$  pontot **vetítési középpontnak**, az  $s$  síkot **képfelületnek** nevezzük. Ha a vetületi kezdőpont az egyik pólus, akkor normális, ha az egyenlítő síkjában fekszik, akkor transzverzális vetületről beszélünk. Ha pedig egyéb helyzetben van akkor ferdetengelyű vetületnek hívjuk.

Vezessük le a perspektív síkvetületekhez tartozó vetületi egyenleteket. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy a  $K$  középpont a kezdőmeridiánon fekszik.

Legyen a  $K$   $(\varphi_0, \lambda_0)$  standard koordinátájú pont a vetületi kezdőpont,  $Q$  a vetítési középpont  $D$  távolságra a gömb középpontjától. Az  $s$  sík  $f$  előjeles távolságra helyezkedjen  $K$ -tól, ahol a pozitív irány a  $Q$  irányával ellentétes. Rajta vegyük fel a pozitív irányítású derékszögű koordinátarendszert úgy, hogy  $K$  képe legyen az origó, az  $x$  tengely legyen a  $KP$  főkör képe, ahol  $P$  az északi pólust jelöli. Legyen  $A$  egy tetszőleges  $(\lambda, \varphi)$  koordinátájú vetíteni kívánt pont. Ekkor a  $PKA$  gömbháromszög oldalai:

$$PK = \frac{\pi}{2} - \varphi_0 =: \beta_0, \quad PA = \frac{\pi}{2} - \varphi =: \beta, \quad KA =: \beta'.$$

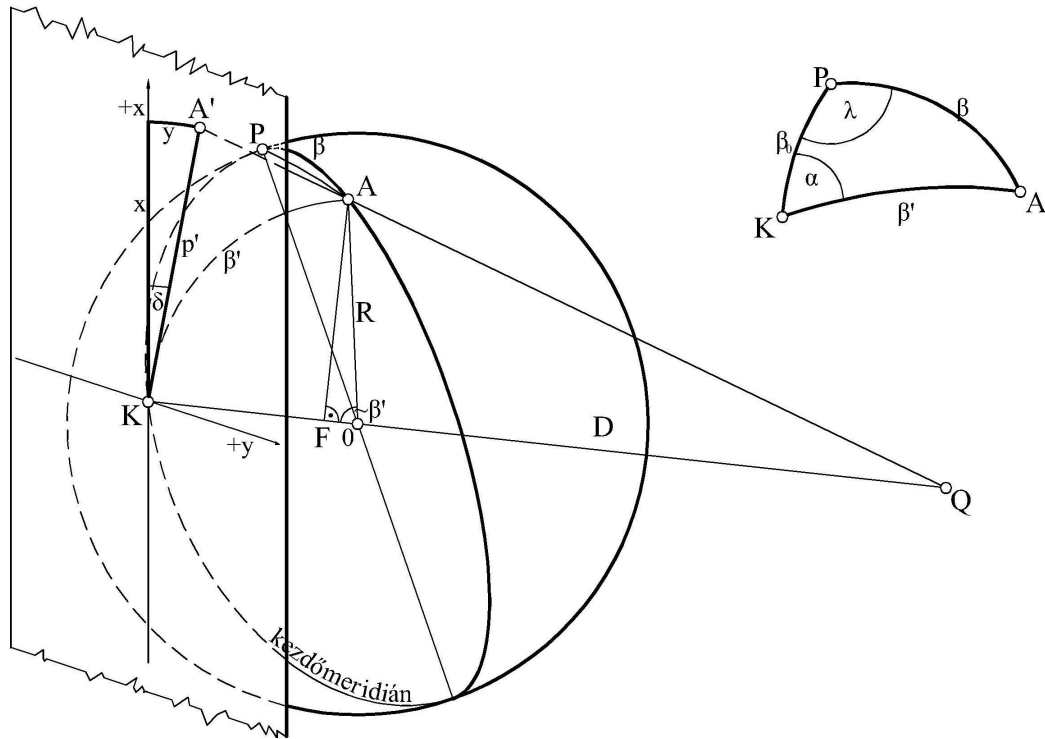
Legyen  $F$  az a pont, amit úgy kapunk, hogy  $A$ -ból merőlegest bocsátunk a  $QK$  egyenesre.

Ekkor:

$$\frac{KA'}{FA} = \frac{QK}{QF},$$

tehát

$$KA' = \frac{FA \cdot QK}{QF},$$



1.3. ÁBRA. Perspektív vetítés gömbről síkra.

$$FA = R \sin \beta', \quad QF = D + R \cos \beta', \quad QK = D + R + f,$$

amiből

$$p' := AK' = (D + R + f) \frac{R \sin \beta'}{D + R \cos \beta'}.$$

A  $PKA$  gömbháromszögre a gömbi koszinusz-, illetve szinusztételből

$$\sin \alpha \sin \beta' = \sin \lambda \sin \beta,$$

$$\cos \beta' = \cos \beta_0 \cos \beta + \sin \beta_0 \sin \beta \cos \lambda,$$

valamint érvényes rá a következő összefüggés:

$$\cos \alpha \sin \beta' = \sin \beta_0 \cos \beta - \cos \beta_0 \sin \beta \cos \lambda,$$

*Bizonyítás.* A koszinusztétel alapján

$$\cos \lambda = \frac{\cos \beta' - \cos \beta \cos \beta_0}{\sin \beta \beta_0}, \quad \cos \alpha = \frac{\cos \beta - \cos \beta' \cos \beta_0}{\sin \beta' \beta_0}$$

. Ezeket a képletbe helyettesítve:

$$\frac{\cos \beta - \cos \beta' \cos \beta_0}{\beta_0} = \sin \beta_0 \sin \beta - \frac{\cos \beta_0 (\cos \beta' - \cos \beta \cos \beta_0)}{\sin \beta_0}$$

$\Updownarrow$

$$\cos \beta - \cos \beta' \cos \beta_0 = \sin^2 \beta_0 \cos \beta - \cos \beta_0 \cos \beta' + \cos^2 \beta_0 \cos \beta$$

$\Updownarrow$

$$\cos \beta - \cos \beta' \cos \beta_0 = \cos \beta - \cos \beta' \cos \beta_0.$$

□

Ezeket helyettesítjük a képletbe, valamint vegyük figyelembe, hogy azimutális vetület lévén  $KA'$   $x$ -tengellyel bezárt szöge  $\alpha$ . Ekkor tehát a perspektív vetületek általános képlete:

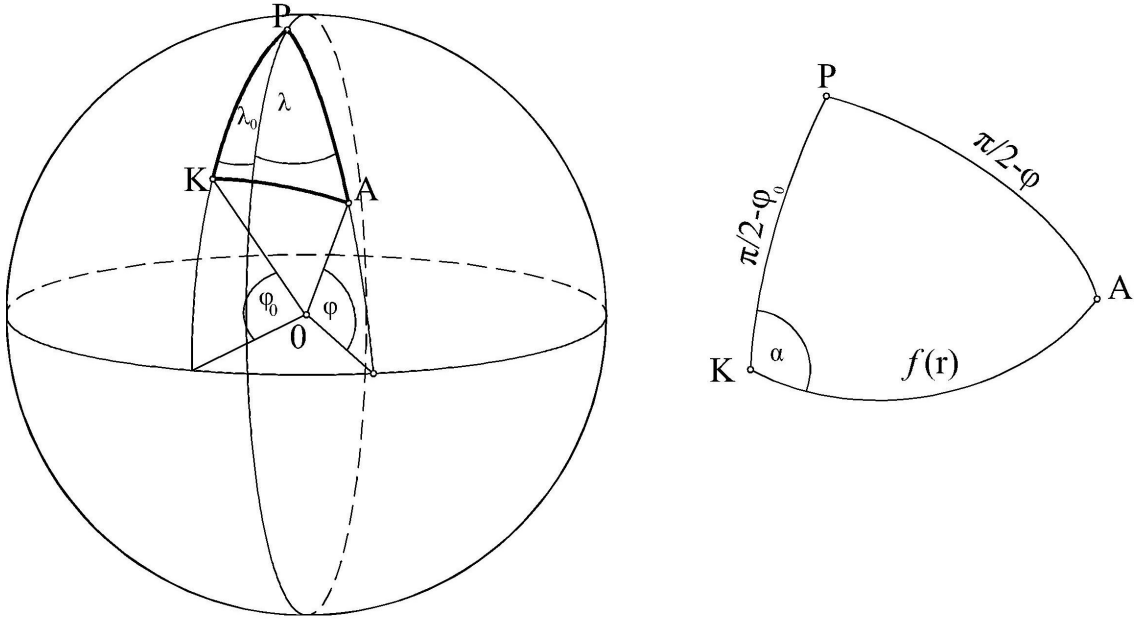
$$x = p' \cos \alpha = (D + R + f) \frac{R(\sin \beta_0 \cos \beta - \cos \beta_0 \sin \beta \cos \lambda)}{D + R(\cos \beta_0 \cos \beta + \sin \beta_0 \sin \beta \cos \lambda)}$$

$$y = p' \sin \alpha = (D + R + f) \frac{R \sin \beta \sin \lambda}{D + R(\cos \beta_0 \cos \beta + \sin \beta_0 \sin \beta \cos \lambda)}$$

Tehát a vetületi egyenletek:

$$\begin{aligned} x &= (D + R + f) \frac{R(\cos \varphi_0 \sin \varphi - \sin \varphi_0 \cos \varphi \cos \lambda)}{D + R(\sin \varphi_0 \sin \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \lambda)} \\ y &= (D + R + f) \frac{R \cos \varphi \sin \lambda}{D + R(\sin \varphi_0 \sin \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \lambda)} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Ezen képletekből tehát  $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$  helyettesítéssel a normális,  $\varphi_0 = 0$  helyettesítéssel a transzverzális,  $f = 0$  helyettesítéssel pedig az érintően elhelyezett síkra vonatkozó perspektív síkvetület egyenleteit kapjuk.



1.4. ÁBRA. Azimutális vetületek vetületi egyenletei.

### Azimutális vetületek általános vetületi egyenletei

Legyen  $K (\lambda_0, \varphi_0)$  standard koordinátájú pont a vetítési kezdőpont.  $A$  tetszőleges  $(\lambda, \varphi)$  koordinátájú pont. Jelölje  $P$  az északi pólust. Ekkor az  $AKP$  gömbháromszögre a gömbi koszinusz-, illetve szinusztételt alkalmazva:

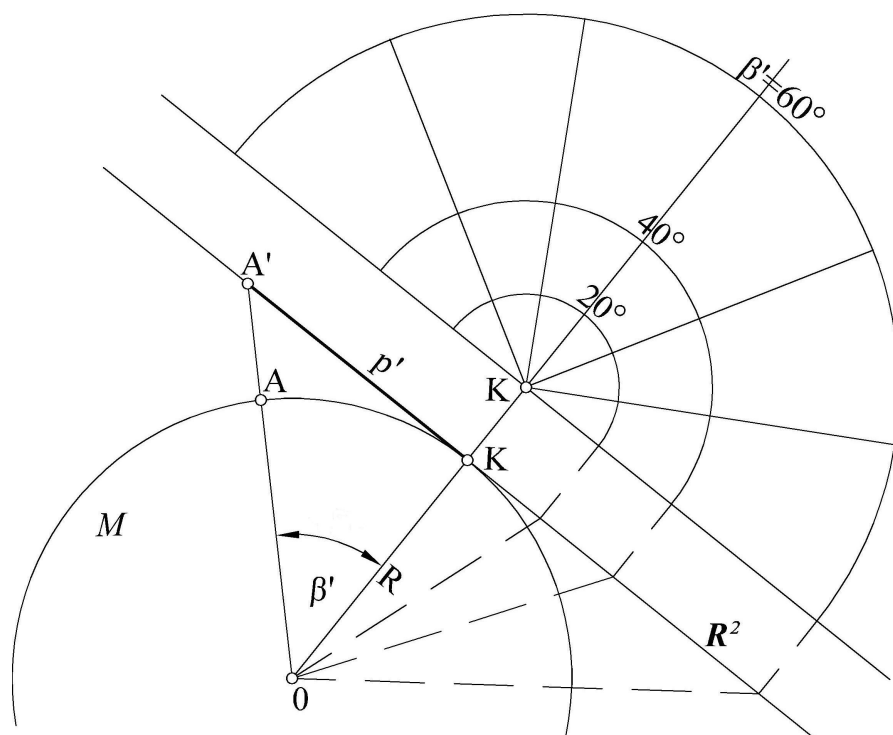
$$\begin{aligned} \cos AK &= \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \lambda, \\ \sin \alpha &= \frac{\cos \varphi \sqrt{1 - (\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \lambda)^2}}{\sin \lambda}. \end{aligned}$$

ahonnan a síkbeli vetület polárkoordinátáit megkaphatjuk:

$$\begin{aligned} r &= f^{-1}(\arccos(\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \lambda)) \\ \alpha &= \arcsin \left( \frac{\cos \varphi \sqrt{1 - (\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \lambda)^2}}{\sin \lambda} \right) \end{aligned} \quad (1.8)$$

### Néhány nevezetes perspektív síkvetület

A **gnomikus vetület** szerkesztését Thalesnek tulajdonítjuk. A vetület síkja érint a  $p$  pontban, a vetítési középpontja a gömb középpontja, azaz  $D = 0$ , tehát az benne van minden főkör síkjában, tehát minden főkör képe egyenes, ami azt jelenti, hogy a vetületen két pontot összekötve a két pontot összekötő főkört kapjuk, ezért jelentősége van a tengerészetben és a hosszútávú repülésben. A gnomikus vetület vetületi egyenletei



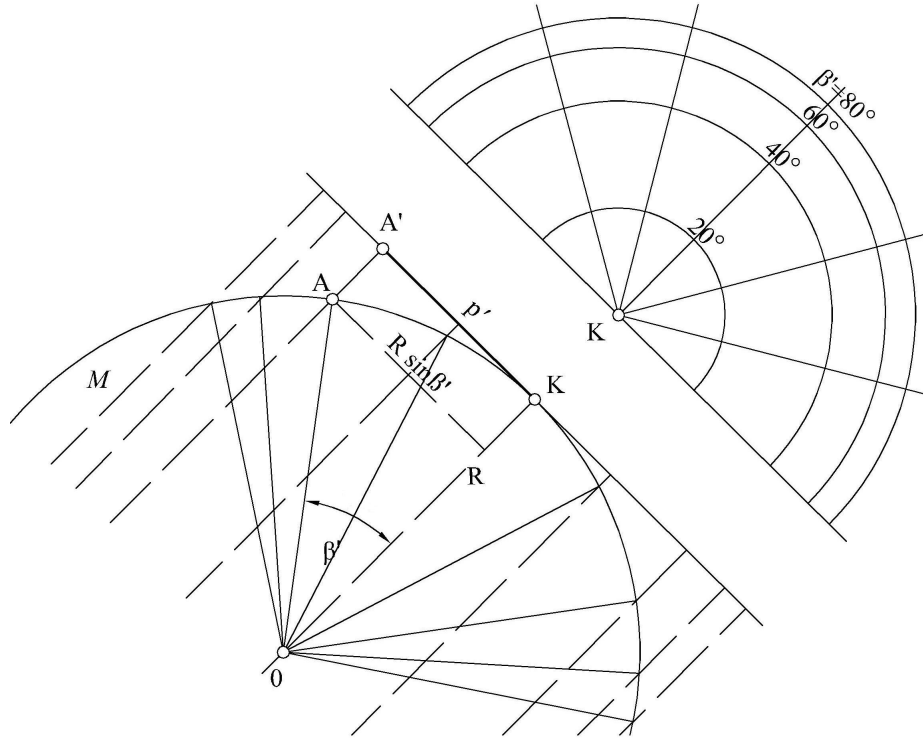
1.5. ÁBRA. A gnomikus vetület.

a (1.7) egyenletbe  $D = 0$ ,  $f = 0$  helyettesítéssel:

$$x = R \frac{\cos \varphi_0 \sin \varphi - \sin \varphi_0 \cos \varphi \cos \lambda}{\sin \varphi_0 \sin \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \lambda},$$

$$y = R \frac{\cos \varphi \sin \lambda}{\sin \varphi_0 \sin \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \lambda}.$$

Az **ortografikus vetület** esetén a  $Q$  vetítési középpont a végtelenben van, vagyis tulajdonképpen merőleges vetítés történik. Az ortografikus vetület egyenletetei a (1.8)



1.6. ÁBRA. Az ortografikus vetület.

egyenletbe  $f^{-1} = \cos$  függvényt helyettesítve:

$$r = \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \lambda,$$

$$\alpha = \arcsin \left( \frac{\cos \varphi \sqrt{1 - (\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \lambda)^2}}{\sin \lambda} \right).$$

### Azimutális vetületekhez tartozó paraméterezés, a szögtartóság, terület-tartóság feltétele

Legyen  $K$  a  $(\lambda_0, \varphi_0)$  standard koordinátájú pont a vetületi kezdőpont. Azimutális vetületnél tetszőleges  $p(r, \alpha)$  poláris koordinátájú pont ösképet úgy kapjuk meg, hogy azon főkörön, mely merőleges  $K$  meridiánjára és átmegy  $K$ -n felmérünk egy bizonyos távolságot, mely csak  $r$ -től függ. Tehát a paraméterezést előállíthatjuk a következő

alakban ( $f(r)$  jelzi ezen távolsághoz tartozó szög nagyságát):

$$\begin{bmatrix} \cos \lambda_0 & 0 & \sin \lambda_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \lambda_0 & 0 & \cos \lambda_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_0 & \sin \varphi_0 \\ 0 & -\sin \varphi_0 & \cos \varphi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos f(r) & -\sin f(r) \\ 0 & \sin f(r) & \cos f(r) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos f(r) & -\sin f(r) \\ 0 & \sin f(r) & \cos f(r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_0 & -\sin \varphi_0 \\ 0 & \sin \varphi_0 & \cos \varphi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \lambda_0 & 0 & -\sin \lambda_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \lambda_0 & 0 & \cos \lambda_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \lambda_0 \cos \lambda_0 \\ \sin \varphi_0 \\ \cos \lambda_0 \cos \varphi_0 \end{bmatrix}$$

ami tovább egyenlő:

$$\begin{bmatrix} \cos \lambda_0 & 0 & \sin \lambda_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \lambda_0 & 0 & \cos \lambda_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_0 & \sin \varphi_0 \\ 0 & -\sin \varphi_0 & \cos \varphi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Végeredményben tetszőleges azimutális vetülethez tartozó  $p$  paraméterezés, ha a síkon poláris koordináta-rendszert veszünk fel:

$$\mathbf{p}(r, \alpha) =$$

$$\begin{bmatrix} \cos \lambda_0 \sin f(r) \sin \alpha + \cos f(r) \cos \varphi_0 \sin \lambda_0 - \sin \varphi_0 \sin f(r) \cos \alpha \sin \lambda_0 \\ \sin f(r) \cos \alpha \cos \varphi_0 + \sin \varphi_0 \cos f(r) \\ -\sin \lambda_0 \sin f(r) \sin \alpha + \cos \lambda_0 \cos f(r) \cos \varphi_0 - \sin \varphi_0 \sin f(r) \cos \alpha \cos \lambda_0 \end{bmatrix}^T$$

Ahonnán a sík Descartes-féle koordinátáival,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\alpha = \arccos \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ .

$$\mathbf{s}(x, y) =$$

$$\begin{bmatrix} \cos \lambda_0 \sin f(\sqrt{x^2 + y^2}) \sin \alpha + \cos f(\sqrt{x^2 + y^2}) \cos \varphi_0 \sin \lambda_0 - \sin \varphi_0 \sin f(\sqrt{x^2 + y^2}) \cos \alpha \sin \lambda_0 \\ \sin f(\sqrt{x^2 + y^2}) \cos \alpha \cos \varphi_0 + \sin \varphi_0 \cos f(\sqrt{x^2 + y^2}) \\ -\sin \lambda_0 \sin f(\sqrt{x^2 + y^2}) \sin \alpha + \cos \lambda_0 \cos f(\sqrt{x^2 + y^2}) \cos \varphi_0 - \sin \varphi_0 \sin f(\sqrt{x^2 + y^2}) \cos \alpha \cos \lambda_0 \end{bmatrix}^T$$

A szögtartótság, illetve területtartótság feltételének bizonyításához tegyük fel, hogy  $K$  a  $(0, 0, 1)$ koordinátájú pont. Tehát  $\lambda_0 = 0$  és  $\varphi_0 = 0$ . Ekkor:



$$\mathbf{p}(r, \alpha) = (-\sin f(r) \cos \alpha, \cos f(r), -\sin f(r) \sin \alpha),$$

a deriváltak:

$$P(r, \alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1(r, \alpha) \\ \mathbf{p}_2(r, \alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos f(r) f'(r) \cos \alpha & -\sin f(r) f'(r) & -\cos f(r) f'(r) \sin \alpha \\ \sin f(r) \sin \alpha & 0 & -\sin f(r) \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Ekkor a  $\mathbf{p}$  paraméterezés  $\hat{\mathcal{G}}$  első alapforma mátrixa az  $(r, \alpha)$  pontban:

$$\hat{\mathcal{G}}(r, \alpha) = \begin{bmatrix} (f'(r))^2 & 0 \\ 0 & \sin^2 f(r) \end{bmatrix}.$$

(1.4) alapján a szögtartóság pontosan akkor teljesül, ha

$$\hat{\mathcal{G}}(r, \alpha) = \begin{bmatrix} (f'(r))^2 & 0 \\ 0 & \sin^2 f(r) \end{bmatrix} = \lambda(r) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix},$$

valamilyen  $\lambda : \mathbf{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényre, ahonnan

$$\sin^2 f(r) = (f'(r))^2 r^2,$$

tehát a szögtartóság szükséges és elégséges feltétele, hogy  $f$  kielégítse a következő differenciálegyenletet:

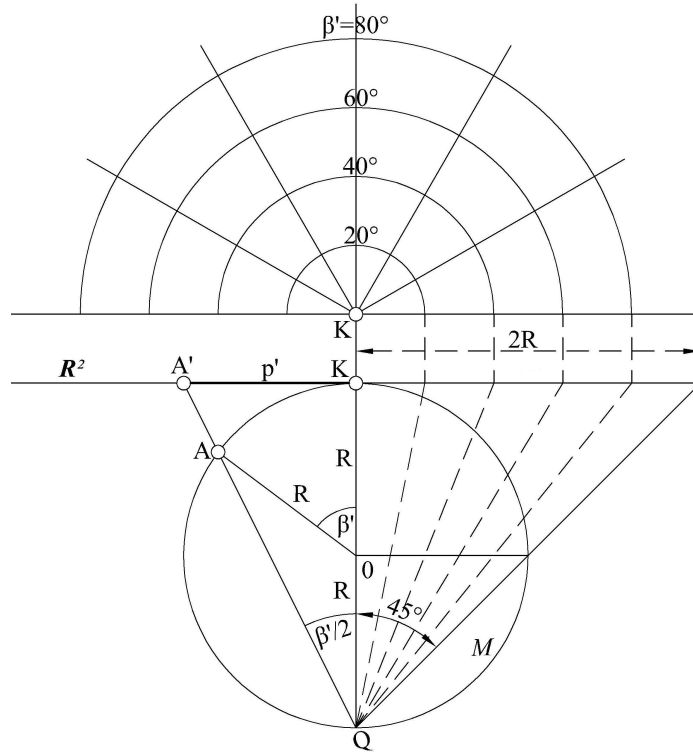
$$f'(r) = \pm \frac{\sin f(r)}{r}. \quad (1.9)$$

A területtartóság feltétele, hogy  $f$  kielégítse a következő differenciálegyenletet:

$$f'(r) \sin f(r) = r. \quad (1.10)$$

**A sztereografikus vetület**

Sztereografikus vetületről abban az esetben beszélünk, ha a perspektív vetület képtere a  $p$  pontban érinti a síkot, a vetítési középpont pedig az ellentétes oldalon a gömbön helyezkedik el.



1.7. ÁBRA. A sztereografikus projekció.

Ekkor a vetületi egyenletek, mivel  $D = R$ ,  $f = 0$ :

$$x = 2R \frac{\cos \varphi_0 \sin \varphi - \sin \varphi_0 \cos \varphi \cos \lambda}{1 + \sin \varphi_0 \sin \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \lambda},$$

$$y = 2R \frac{\cos \varphi \sin \lambda}{1 + \sin \varphi_0 \sin \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \lambda},$$

a fenti jelölésekkel.

4. *Állítás.* A sztereografikus projekció szögtartó.

*Bizonyítás.* A korábbi jelöléseket használva

$$f(r) = 2 \arctan \left( \frac{r}{2} \right),$$

$$f'(r) = \frac{1}{1 + \frac{r^2}{4}},$$

ahonnan a

$$\sin(t) = \frac{2 \tan(\frac{1}{2}t)}{1 + \tan^2(\frac{1}{2}t)}$$

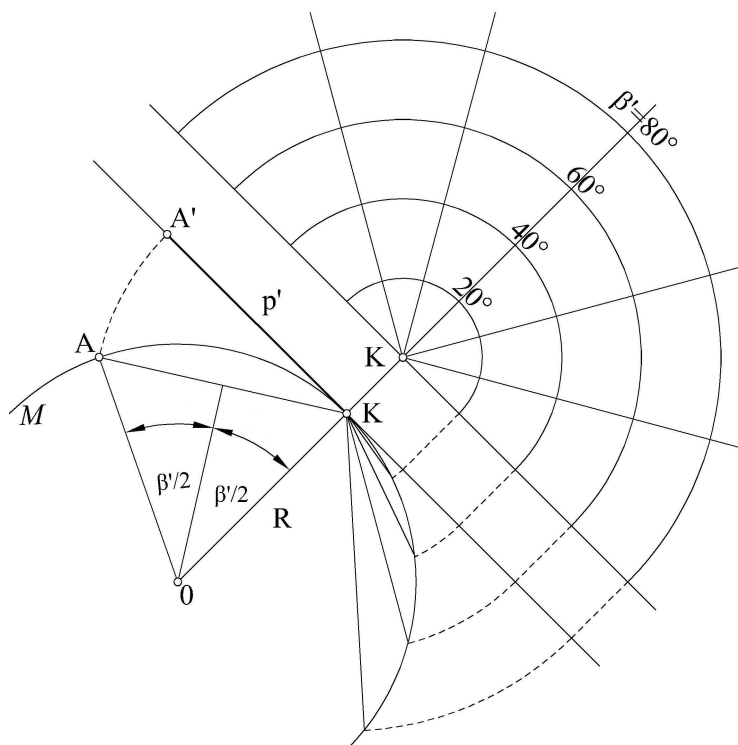
képletből

$$\frac{\sin f(r)}{r} = \frac{2 \tan(\frac{1}{2}f(r))}{r (1 + \tan^2(\frac{1}{2}f(r)))} = \frac{r}{r (1 + \frac{r^2}{4})} = \frac{1}{1 + \frac{r^2}{4}} = f'(r).$$

□

### Néhány nem perspektív azimutális vetület

**Területtartó azimutális vetületet** a következő módon szerkezhethetünk. A vetítendő pontot a kezdőponttal összekötő húr hosszát felmérjük a megfelelő főkör képére  $K$  képből. Ekkor a vetületi egyenletek a (1.8) egyenlet alapján  $f^{-1}(x) = 2 \sin \frac{x}{2}$ -ből:



1.8. ÁBRA. Területtartó azimutális vetület.

$$r = 2 \sin \frac{(\arccos(\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \lambda))}{2},$$

$$\alpha = \arcsin \left( \frac{\cos \varphi \sqrt{1 - (\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \lambda)^2}}{\sin \lambda} \right).$$

5. *Állítás.* Ez a vetület valóban területtartó.

*Bizonyítás.* Esetünkben

$$f(r) = 2 \arcsin \left( \frac{r}{2} \right),$$

$$f'(r) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{2}\right)^2}},$$

ahonnan

$$\begin{aligned} f'(r) \sin f(r) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{2}\right)^2}} \sin \left( 2 \arcsin \left( \frac{r}{2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{2}\right)^2}} 2 \left( \frac{r}{2} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{r}{2}\right)^2} = r. \end{aligned}$$

□

**Meridiánokon hossztartó azimutális vetületet** úgy szerkeztethetünk, hogy a vetítendő  $A$  pont képét úgy kapjuk, hogy ha a kezdőponttal összekötő főkör képére  $K$  képétől  $R\beta$  távolságot mérünk fel, ahol  $R$  a gömb sugara,  $O$  a gömb középpontja  $\beta$  az  $OA$ ,  $OK$  egyenesek által bezárt szög.

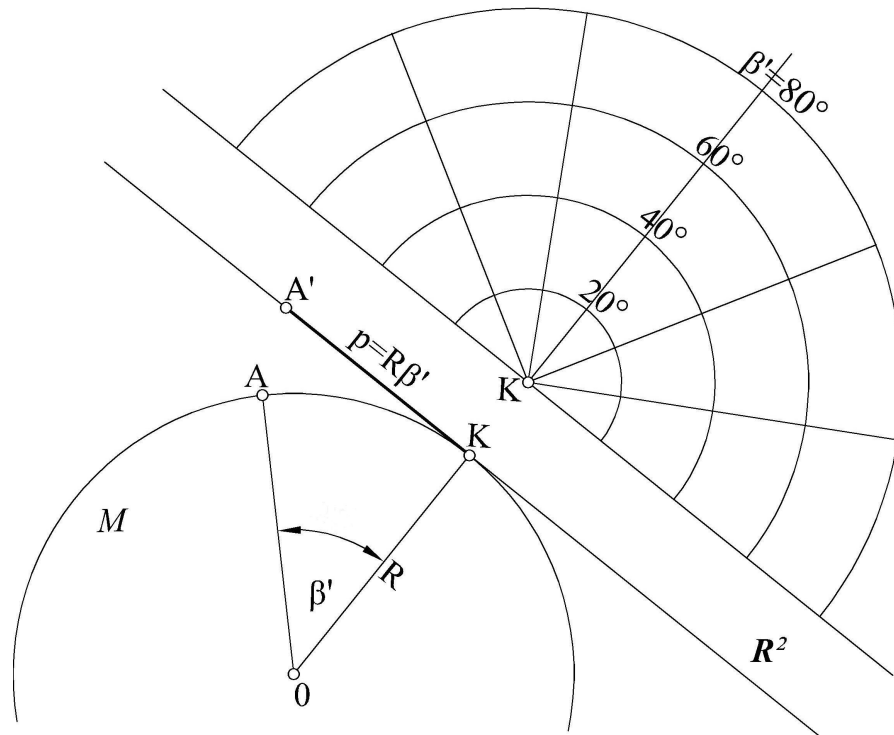
Ekkor a vetületi egyenletek a (1.8) egyenlet alapján  $f^{-1}(x) = Rx$ -ből:

$$r = R \arccos(\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \lambda)$$

$$\alpha = \arcsin \left( \frac{\cos \varphi \sqrt{1 - (\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \lambda)^2}}{\sin \lambda} \right)$$

### 1.3.3. Hengervetületek

Egy vetületet akkor nevezünk hengervetületnek, ha az  $\Omega$  paramétertartomány téglalap és létezik egy  $P \in M$  pont, melyre



1.9. ÁBRA. Meridiánokon hossztartó azimutális vetület.

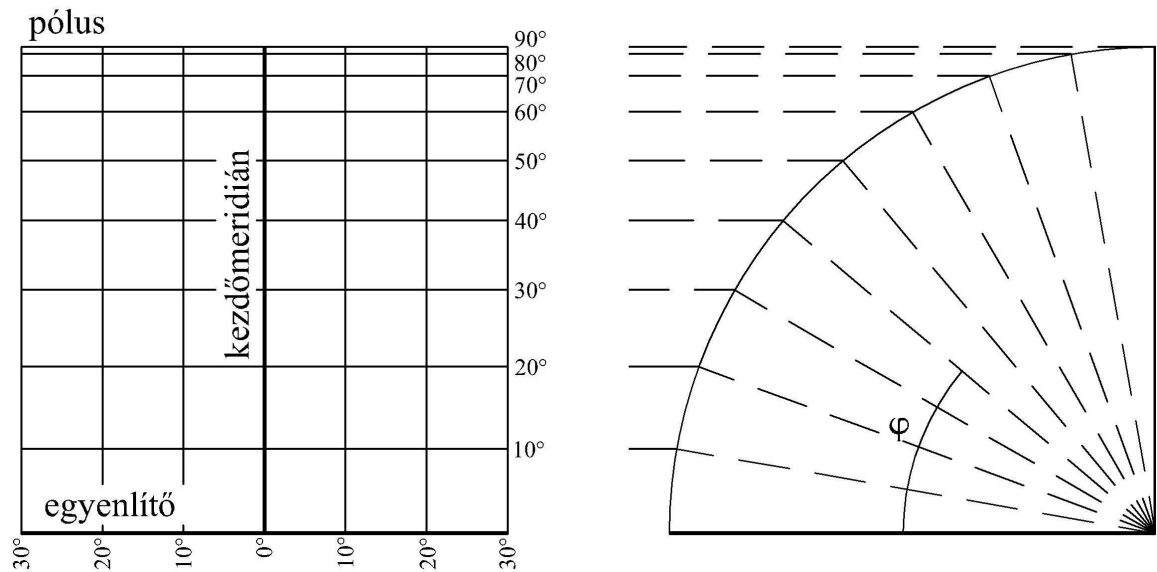
- $P$ -n átmenő főkörök képei párhuzamos egyenesek;
- $OP$  egyenesre merőleges síkok által kimetszett körök képei párhuzamos egyenesek és merőlegesek az előzőkre.

Ezen  $P$  pontot nevezzük a vetületi kezdőpontnak.

### Lambert-féle területtartó hengervetület

Területtartó hengervetületet oly módon gyárthatunk, hogy a hengert úgy helyezzük a gömbhöz, hogy az alkotói a föld tengelyével párhuzamosak legyenek, majd a gömb pontjainak képét a pontból a föld tengelyére állított merőleges és a henger metszéspontja adja a 1.10. ábra szerint. Ekkor ha a sík koordináta-rendszerét úgy vesszük fel, hogy az  $x$  tengely az egyenítő, az  $y$  tengely a kezdő meridián képei legyenek, a hengert a  $\mathbf{r}(-\pi, t)$   $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  görbe képénél vágjuk fel, a skálázás egysége a gömb  $R$  sugara, akkor a vetületi egyenletek:

$$x = \lambda \cos \varphi_0,$$



1.10. ÁBRA. A területtartó hengervetület.

$$y = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi_0},$$

ahol  $\varphi_0 \in (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  adott.

6. *Állítás.* A Lambert-féle hengervetület területtartó és a  $\varphi_0$  koordinátájú paralelkörön hosszaránytartó.

*Bizonyítás.* Először a területtartóságot bizonyítjuk. A vetületi egyenletekből:

$$\lambda = \frac{x}{\cos \varphi_0},$$

$$\varphi = \arcsin(y \cos \varphi_0).$$

Tehát a vetülethez tartozó paraméterezés:

$$\mathbf{s}(x, y) = \left( \sin \frac{x}{\cos \varphi_0} \cos \arcsin(y \cos \varphi_0), y \cos \varphi_0, \cos \frac{x}{\cos \varphi_0} \cos \arcsin(y \cos \varphi_0) \right)$$

Ekkor:

$$\mathbf{s}_1(x, y) = \left( \frac{\cos \frac{x}{\cos \varphi_0} \cos \arcsin(y \cos \varphi_0)}{\cos \varphi_0}, 0, -\frac{\sin \frac{x}{\cos \varphi_0} \cos \arcsin(y \cos \varphi_0)}{\cos \varphi_0} \right),$$

$$\mathbf{s}_2(x, y) = \left( -\frac{\sin \frac{x}{\cos \varphi_0} y \cos^2 \varphi_0}{\sqrt{1 - (y \cos \varphi_0)^2}}, \cos \varphi_0, -\frac{\cos \frac{x}{\cos \varphi_0} y \cos^2 \varphi_0}{\sqrt{1 - (y \cos \varphi_0)^2}} \right),$$

$$\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_1 \rangle = \frac{\cos^2 \arcsin(y \cos \varphi_0)}{\cos^2 \varphi_0},$$

$$\langle \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_2 \rangle = \frac{\cos^2 \varphi_0}{1 - (y \cos \varphi_0)^2},$$

$$\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \rangle = 0.$$

Tehát:

$$\mathcal{G}(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\cos^2 \arcsin(y \cos \varphi_0)}{\cos^2 \varphi_0} & 0 \\ 0 & \frac{\cos^2 \varphi_0}{1 - (y \cos \varphi_0)^2} \end{bmatrix},$$

$$\det \mathcal{G}(x, y) = \frac{\cos^2 \arcsin(y \cos \varphi_0)}{1 - (y \cos \varphi_0)^2} = \frac{1 - (y \cos \varphi_0)^2}{1 - (y \cos \varphi_0)^2} = 1.$$

A hossztartóság bizonyításához  $\gamma := \mathbf{r} \circ u$ , ahol  $u(t) = (0, \varphi_0) + t\mathbf{e}_1$   $t \in [-\pi, \pi]$ . Ekkor  $u'(t) = (0, 1)$ -ből a hossztartóság feltétele az 1.2 képlet szerint, hogy  $g_{11}(u(t)) = \lambda$   $\lambda \in \mathbb{R}$   $\forall t \in [-\pi, \pi]$ -re.

$$g_{11}(t, \varphi_0) = \frac{1 - \varphi_0^2 \cos^2 \varphi_0}{\cos^2 \varphi_0} =$$

□

### Hengervetület hossztartó meridiánokkal

Ha azt akarjuk, hogy a meridiánok hossztartóak legyenek azonnal adódnak is a vetületi egyenletek. Ha úgy állítjuk fel a koordináta-rendszert a hengeren, mint az előző részben akkor a fenti jelölésekkel:

$$x = \lambda \cos \varphi_0,$$

$$y = \varphi.$$

7. *Állítás.* Ez a vetület hossztartó a meridiánokon és a  $\varphi_0$  paralelkörön.

*Bizonyítás.* A vetülethez tartozó paraméterezés:

$$\mathbf{r}(x, y) = \left( \sin \frac{x}{\cos \varphi_0} \cos y, \sin y, \cos \frac{x}{\cos \varphi_0} \cos y \right),$$

$$\mathbf{r}_1(x, y) = \left( \frac{\cos \frac{x}{\cos \varphi_0} \cos y}{\cos \varphi_0}, 0, -\frac{\sin \frac{x}{\cos \varphi_0} \cos y}{\cos \varphi_0} \right),$$

$$\mathbf{r}_2(x, y) = \left( -\sin \frac{x}{\cos \varphi_0} \sin y, \cos y, -\cos \frac{x}{\cos \varphi_0} \sin y \right),$$

$$\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1 \rangle = \frac{\cos^2 y}{\cos^2 \varphi_0},$$

$$\langle \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2 \rangle = 1,$$

$$\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \rangle = 0.$$

Tehát:

$$\mathcal{G}(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\cos^2 y}{\cos^2 \varphi_0} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ahonnan  $y = \varphi_0$  helyettesítéssel láthatjuk, hogy  $\varphi_0$  paralelkörön hossztartó a paraméterezés. A meridiánokat természetesen paraméterezhetjük az  $u : t \mapsto r(u_0 + te_2)$  leképezéssel. Ekkor  $u^{1'}(t) = 0$ ,  $u^{2'}(t) = 1$ , ahonnan a (1.2) egyenletbe behelyettesítve:

$$\left( \frac{\cos^2 y}{\cos^2 \varphi_0} - 1 \right) \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 0 + (1 - 1) \cdot 1 = 0,$$

tehát a meridiánokon is beláttuk a hossztartóságot. □

### A Cassini-féle vetület

A Cassini-féle vetület ugyanolyan módon keletkezik, mint a feljebb taglalt, meridiánokon hossztartó hengervetület azzal a különbséggel, hogy először a földet elforgatjuk úgy, hogy a kezdő meridián menjen az egyenlítőbe.

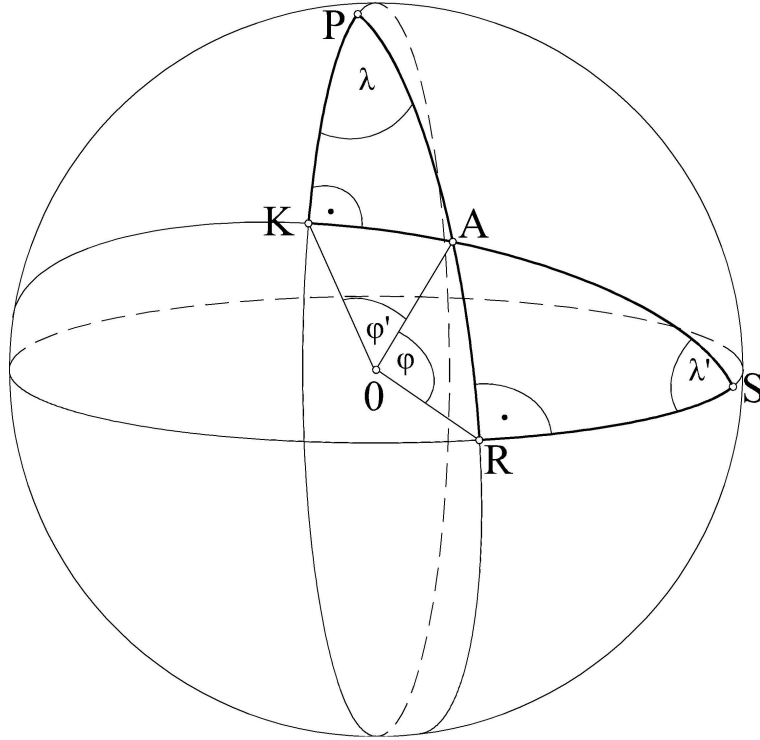
8. *Állítás.* A Cassini-féle vetülethez tartozó vetületi egyenletek:

$$x = \arcsin(\cos \varphi \sin \lambda),$$

$$y = \arctan\left(\frac{\tan \varphi}{\cos \lambda}\right),$$

a fenti jelölésekkel.





1.11. ÁBRA. Cassini-vetület vetületi egyenletei.

*Bizonyítás.* Jelölje  $P$  az északi pólust, standard koordinátájú pontot. Legyen  $A$  tetszőleges  $(\lambda, \varphi)$  standard koordinátájú pont,  $R$  a  $(\lambda, 0)$ ,  $Q$   $(0, \varphi)$  standard koordinátájú pontok. Ekkor az ábrán látható jelölésekkel a  $PAQ$  illetve  $RAS$  derékszögű gömbháromszögekből:

$$\tan \lambda' = \frac{\tan \varphi}{\sin(\frac{\pi}{2} - \lambda)} = \frac{\tan \varphi}{\cos(\lambda)},$$

$$\sin \varphi' = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin \lambda = \cos \varphi \sin \lambda,$$

ahonnan az állítás már következik. □

## 1.4. A forgási ellipszoidról

- $a$ -val, illetve  $b$ -vel jelöljük a fél nagy-, illetve kistengelyét.
- Az  $\frac{a-b}{b}$  hányadost lapultságnak nevezzük( jelölés:  $f$ ).
- Az első excentricitást jelölje  $e = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}$ .

- A második excentricitást jelölje  $e' = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2}}$ .
- Az ellipszoid **standard paraméterezése** alatt azon  $r : [-\pi, \pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \mapsto \mathbb{R}^3$  leképezést értjük, ami a  $(\lambda, \varphi)$  ponthoz a  $(a \cos \lambda \cos \phi, b \sin \phi, a \sin \lambda \cos \phi)$  pontot rendeli, ahol  $\varphi = \frac{a \sin \phi}{b^2 \cos^2 \phi + a^2 \sin^2 \phi}$ .
- Egy adott vetület **vetületi egyenlete** alatt azon  $f : [-\pi, \pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \mapsto \mathbb{R}^2$  függvényt értjük, ami egy adott  $p \in M$  pont  $(\varphi, \lambda)$  standard koordinátáihoz az adott vetületbeli koordinátáit rendeli.
- **Északi póluson** a  $r(\frac{\pi}{2}, 0)$ , **déli póluson** a  $r(-\frac{\pi}{2}, 0)$  pontot értjük.
- **Paralelkörök**, illetve **meridiánok** alatt az első, illetve második változó szerinti paramétervonalakat értjük.
- Az ellipszoidra jellemző mennyiségek között triviáisan fennállnak a következő összefüggések:  $e'^2 = \frac{e^2}{1-e^2}$ ,  $e^2 = \frac{e'^2}{1+e'^2}$ ,  $(1-e^2)(1+e'^2) = 1$ ,  $f = 1 - \sqrt{1-e^2}$ ,  $e^2 = 2f - f^2$ .

9. *Állítás.* Adott  $(\varphi, \lambda)$  standard koordinátájú pont második koordinátája az egyenlítő síkjával bezárt szöget adja meg.

*Bizonyítás.* Mivel ez az ellipszoid az  $(a \cos \phi, b \sin \phi)$  ellipszoid  $y$  tengely körül megforgatott képe, elegendő az állítást adott meridián síkjában igazolni. Ekkor a  $(\lambda, \varphi)$  standard koordinátájú pontban a normális  $\frac{(b \cos \phi, a \sin \phi)}{b^2 \cos^2 \phi + a^2 \sin^2 \phi}$ , ennek az  $x$  tengellyel bezárt szöge

$$\frac{a \sin \phi}{b^2 \cos^2 \phi + a^2 \sin^2 \phi} = \varphi.$$

□

## 2. fejezet

# Az alkalmazásról

A program C++-ban íródott, a megjelenítéshez az OpenGL könyvtárat használtam. Az input egy ECW vagy JP2 formátumú fájl, ezt jeleníti meg 3-dimenzióban, domborzattal, továbbá lehetőségünk van a billentyűzet és az egér segítségével közelíteni a Föld felszíne felé, forgatnunk a kamerát a Föld, illetve saját tengelye körül.

### 2.1. Működés

#### 2.1.1. Egy pixel "útja"

Nevezzük a Föld standard koordinátázásának azon koordinátázást, ahol az  $y$  tengely a Föld forgástengelye ( az északi és a déli pólus összekötő egyenes ), az  $z$  tengely az egyenlítő síkjának és a kezdőmeridián síkjának metszete, valamint az  $x$  tengely ezekre merőleges és  $x, y, z$  pozitív irányítású. Tegyük fel, hogy adott egy téglalap alakú térkép, azaz

- egy  $n \times m$ -es színértékű mátrix ( jelölés:  $BMP = \{a_{i,j}\}_{i,j=0}^{i=n-1,j=m-1}$  ),
- az  $M$  alapfelület ( gömb, vagy forgási ellipszoid ),
- egy  $\mathbf{r} : \Omega \mapsto M$  reguláris, injektív, legalább  $C^1$ -osztályú paraméterezés,
- $u_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ ,  $a_{0,0}$  vetületbeli koordinátái,

- $d_1$  állandó,  $a_{i,j}$  és  $a_{i+1,j}$  vetületbeli koordinátáik különbsége tetszőleges  $0 \leq i, j$ ,  
 $i \leq n - 1, j \leq m$ -re.
- $d_2$  állandó,  $a_{i,j}$  és  $a_{i,j+1}$  vetületbeli koordinátáik különbsége tetszőleges  $0 \leq i, j$ ,  
 $i \leq n, j \leq m - 1$ -re.

Legyen adott továbbá  $a, b > 0$ , valamint egy  $N$  forgási ellipszoid  $a$  és  $b$  nagy, illetve kis féltengelyekkel. Legyen

$$[-\pi, \pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \supset H \stackrel{jel}{=}$$

$$\left\{ h_{ij} = \left( -\pi + i \frac{\pi}{180 \cdot 1200}, \frac{\pi}{2} - j \frac{\pi}{2 \cdot 180 \cdot 1200} \right) : i = 0..2 \cdot 180 \cdot 1200, j = 0..180 \cdot 1200 \right\}$$

az ellipszoid standard koordinátázásának három szögmásodpercenkénti rácspontjai,

$SRTM = \{s_{ij}\}_{i,j=0}^{n,m}$  valósértékű mátrix. Ennek  $s_{ij}$  eleme a  $H \ni h_{ij}$  standard koordinátájú pontban érintő síkra merőleges egyenes  $N$ -nel, illetve Földdel való metszetének különbségét adja meg ( elnevezés: magasság ).

Jelölje továbbá  $t : \Omega \mapsto \mathbb{R}^2$  a vetületi egyenleteket.

Ezen információk alapján szeretnénk adott  $(i, j)$ -re,  $0 \leq i, j, i \leq n, j \leq m$ , kiszámítani  $a_{ij}$  standard koordinátáit.

Először is ki kell számolnunk a vetületbeli koordinátáit, ezt a következő egyenletek alapján tehetjük meg:

$$x = x_0 - d_1 i, \quad y = y_0 - d_2 j.$$

A vetületi egyenletekből megkaphatjuk az adott alapfelület standard koordinátázásában a pont koordinátáit. Ebből átszámoljuk az  $N$  felületbeli  $(\lambda, \varphi)$  standard koordinátáiba. Ekkor  $(\lambda, \varphi)$  előáll a hozzá legközelebb álló három  $H$ -beli pont konvex kombinációjaként, azaz  $(\lambda, \varphi) = \alpha_1 h_{i_1 j_1} + \alpha_2 h_{i_2 j_2} + \alpha_3 h_{i_3 j_3}$ , ahol  $\sum_i \alpha_i = 1, \alpha_i > 0 \quad i = 1..3$ . Ekkor legyen  $s = \alpha_1 s_{i_1 j_1} + \alpha_2 s_{i_2 j_2} + \alpha_3 s_{i_3 j_3}$  a  $(\lambda, \varphi)$  standard koordinátájú pontban a közelítő magasság. Ekkor

$$(a \cos \lambda \cos \phi, b \sin \phi, a \sin \lambda \cos \phi) + sN(\lambda, \varphi),$$

képletbe helyettesítve, ahol  $N(\lambda, \varphi)$  az  $(b \cos \phi \cos \lambda, a \sin \phi, b \cos \phi \sin \lambda)$  vektor normáltja, az adott pontbeli egységnormális, valamint  $\varphi = \frac{a \sin \phi}{b^2 \cos^2 \phi + a^2 \sin^2 \phi}$ , kaphatjuk meg a pont tényleges, standard koordinátáit.

### 2.1.2. Mozgás

A kamerával közelíthetünk a földgömb közepéhez, valamint forgathatjuk a kamerát a földgömb, valamint saját tengelye körül is. Ezen forgatások gyors és hatékony kivitelezése érdekében kvaterniókat használunk.

7. *Definíció.* Kvaterniók ( jelölés:  $\mathbb{H}$  ) alaphalmaza  $H = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4\}$ . Ezen értelmezünk három műveletet a skalárral való szorzást, az összeadást és a kvaterniószorzás. A skalárral való szorzás, valamint az összeadás  $\mathbb{R}^4$  szokásos skalárral való szorzása, illetve összeadása, azaz

$$(a_1, b_1, c_1, d_1) + (a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2),$$

$$\lambda(a, b, c, d) = (\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda d).$$

A kvaterniószorzás definiálásához jelöljük az  $\mathbb{R}^4$  standard bázisát  $\mathbf{1} \stackrel{jel}{=} e_1, \mathbf{i} \stackrel{jel}{=} e_2, \mathbf{j} \stackrel{jel}{=} e_3, \mathbf{k} \stackrel{jel}{=} e_4$ -val. Ekkor tetszőleges  $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^4$  elem  $a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$  alakban áll elő.  $\mathbf{1}$  lesz az egységelem a kvaterniószorzásra nézve, ezért az elemeket  $a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$  alakban fogjuk írni. Ezután a műveletet először a bázis elemeken definiáljuk a következőképpen:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1,$$

majd ezen összefüggéseket, valamint az asszociativitást és disztributivitást használva definiálhatjuk tetszőleges két elem szorzatát.

Ezek alapján  $p, q \in \mathbb{H}$ ,  $p = a_1 + b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k}$ ,  $q = a_2 + b_2\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + d_2\mathbf{k}$ ,  $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R}$   
 $i = 1, 2$ , két tetszőleges elemre

$$pq = a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)\mathbf{i} + \\ + (a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)\mathbf{j} + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)\mathbf{k}.$$

10. *Állítás.* A kvaterniók algebrát alkotnak  $\mathbb{R}$  felett.

*Bizonyítás.* A vektortér tulajdonságok  $\mathbb{R}^4$   $\mathbb{R}$  feletti vektortér mivoltából következnek.

A kvaterniószorzat disztributivitása az összeadás műveletre nézve definíciójából következik.

Legyen  $a, b \in \mathbb{R}^4$ ,  $p, q \in \mathbb{H}$ ,  $p = a_1 + b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k}$ ,  $q = a_2 + b_2\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + d_2\mathbf{k}$ ,  $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R}$   
 $i = 1, 2$ , ekkor

$$(ap)(bq) = (aa_1 + ab_1\mathbf{i} + ac_1\mathbf{j} + ad_1\mathbf{k})(ba_2 + bb_2\mathbf{i} + bc_2\mathbf{j} + bd_2\mathbf{k}) \\ = aa_1ba_2 - ab_1bb_2 - ac_1bc_2 - ad_1bd_2 + (aa_1bb_2 + ab_1ba_2 + ac_1bd_2 - ad_1bc_2)\mathbf{i} + \\ + (aa_1bc_2 - ab_1bd_2 + ac_1ba_2 + ad_1bb_2)\mathbf{j} + (aa_1bd_2 + ab_1bc_2 - ac_1bb_2 + ad_1ba_2)\mathbf{k} \\ = (ab)(a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)\mathbf{i} + \\ + (a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)\mathbf{j} + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)\mathbf{k}) \\ = (ab)(pq)$$

Ezzel az összes algebratulajdonságot beláttuk. □

8. *Definíció.* Egy  $q = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \in \mathbb{H}$  imaginárius része:  $\Im q = b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \in \mathbf{H}$ .

9. *Definíció.* Egy  $q = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \in \mathbb{H}$  valós része:  $\Re q = a \in \mathbb{R}$ .

10. *Definíció.* Egy  $q = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \in \mathbb{H}$  hossza  $|q| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \in \mathbb{R}$ .

Jelölés: Legyen  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ , ekkor  $a + \mathbf{v}$  alatt  $a + v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k} \in \mathbb{H}$ -t értjük.

11. *Definíció.* Egy  $q = a + \mathbf{v}$  kvaternió konjugáltja  $\bar{q} = a - \mathbf{v}$ .

11. *Állítás.*  $p, q \in \mathbb{H}$ , melyekre  $\Re p = 0$ ,  $\Re q = 0$ . Ekkor  $p = 0 + \mathbf{u}$ ,  $q = 0 + \mathbf{v}$   $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ ,  
valamint  $pq = -\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ , ahol  $\times$  a vektoriális,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  a skaláris szorzást jelöli.

*Bizonyítás.*

$$\begin{aligned} pq &= -u_1v_1 - u_2v_2 - u_3v_3 + (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k} \\ &= -\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \mathbf{u} \times \mathbf{v} \end{aligned}$$

□

Tulajdonságok:

- $\overline{(\bar{q})} = q$ ,
- $\overline{p + q} = \bar{p} + \bar{q}$ ,
- $\overline{\lambda q} = \lambda \bar{q}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ -ra,
- $\overline{pq} = \bar{q}\bar{p}$
- $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|}$ .

12. *Definíció.*  $q$  kvaternióval való konjugálás, azon  $C_q : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  leképezés, melyre  $C_q(p) = qpq^{-1}$ .

Tulajdonságok:

- $C_1$  az identitás, mivel  $C_1(v) = 1 \cdot v \cdot 1 = v$ .
- $pq$ -val való konjugálás a  $C_p \circ C_q$  leképezés, mivel

$$C_{pq}(v) = (pq)v(pq)^{-1} = (pq)v(q^{-1}p^{-1}) = p(qvq^{-1})p^{-1} = C_p \circ C_q(v).$$

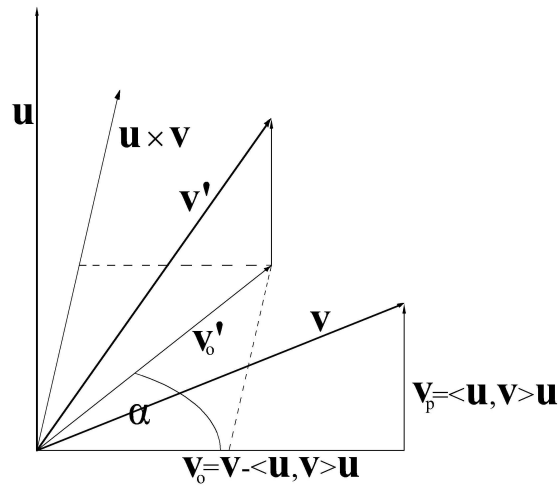
- $C_q$  inverzleképezése  $C_{q^{-1}}$ , mivel  $C_q \circ C_{q^{-1}} = C_{qq^{-1}} = C_1$ .

12. *Állítás.* Legyen  $q = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \mathbf{u} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ , ahol  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$  egységvektor,  $p = 0 + \mathbf{v}$ , valamilyen  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ -re. Ekkor  $C_q(p) = 0 + \mathbf{v}'$ , ahol  $\mathbf{v}'$   $\mathbf{v}$   $\mathbf{u}$  irányvektorú egyenes körül pozitív irányba  $\alpha$  szöggel elforgatott képe.

*Bizonyítás.*

$$\begin{aligned}
C_q(p) &= C_q(\mathbf{v}) = \left( \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \mathbf{u} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right) \mathbf{v} \left( \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \mathbf{u} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right) \\
&= \mathbf{v} \cos^2 \frac{\alpha}{2} + (\mathbf{u}\mathbf{v} - \mathbf{v}\mathbf{u}) \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - \mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{u} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \\
&= \mathbf{v} \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 2(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - (\mathbf{v} \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2\mathbf{u} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle) \sin^2 \frac{\alpha}{2} \\
&= \mathbf{v} (\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) 2(\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}) - (\mathbf{u} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle) \sin^2 \frac{\alpha}{2} \\
&= \mathbf{v} \cos \alpha + (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \sin \alpha - (\mathbf{u} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle) (1 - \cos \alpha) \\
&= (\mathbf{v} - \mathbf{u} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle) \cos \alpha + (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \sin \alpha - \mathbf{u} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \\
&= \mathbf{v}_o \cos \alpha + (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \sin \alpha - \mathbf{v}_p,
\end{aligned}$$

ahol  $\mathbf{v}_o$  és  $\mathbf{v}_p$  a  $\mathbf{v}$  vektor merőleges, illetve párhuzamos komponense az  $\mathbf{u}$  vektorra nézve. Ez pedig pont az  $\mathbf{v}$  vektor  $\mathbf{u}$  irányvektorú egyenes körüli pozitív irányba  $\alpha$  szöggel elforgatottja, ahogy az a 2.1. ábráról leolvasható.



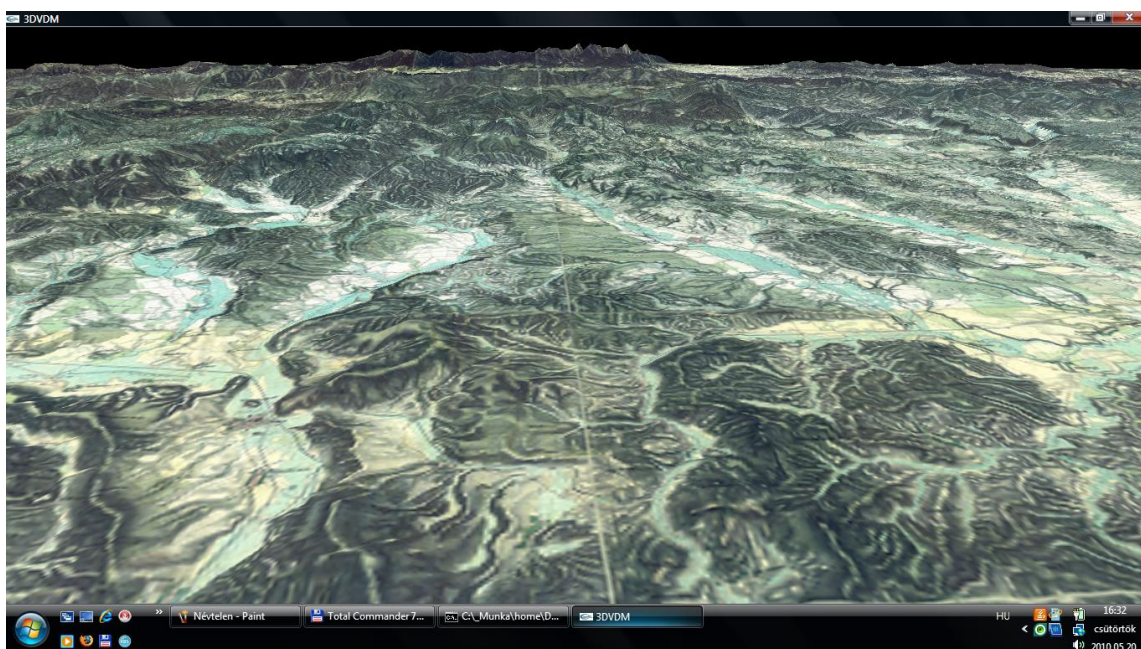
2.1. ÁBRA. Rodrigues-formula adott  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  vektor egyenes körüli elforgatottjára

□



## 2.2. Monitorképek

Ebben a részben bemutatunk néhány képet a program működéséről. Igyekeztünk olyan pillanatképeket készíteni, melyben jól megfigyelhető a domborzati viszonyok helyes ( a térképpel összhangban lévő ) megjelenítése.



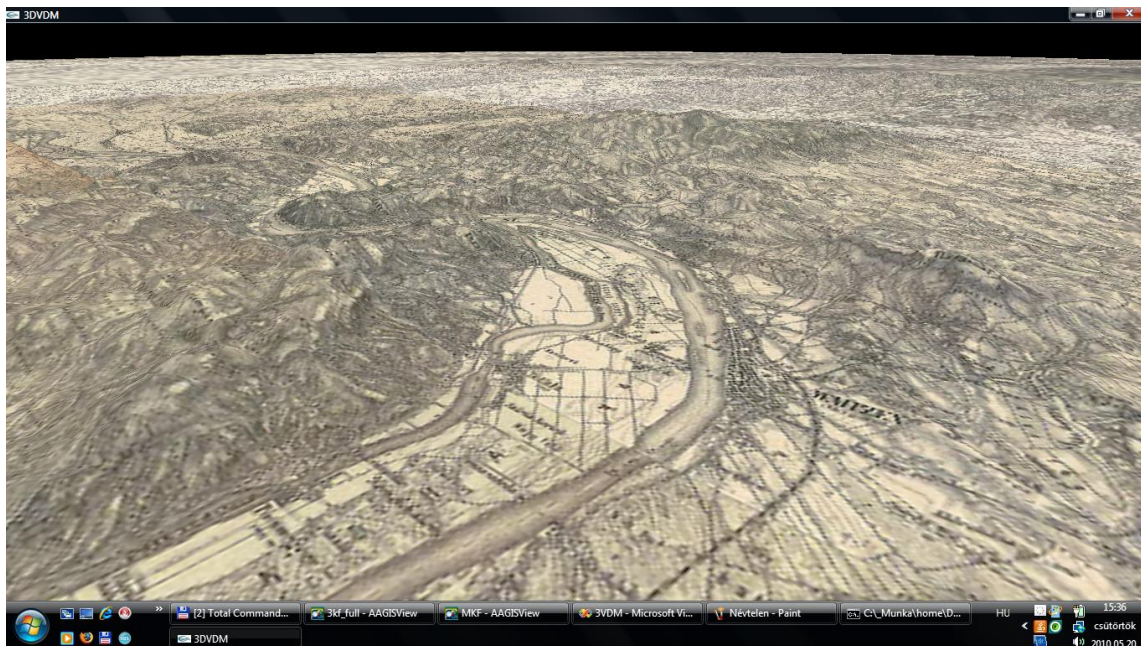
2.2. ÁBRA. Kárpátok a Második katonai felmérésen ( 1819-1869 ).



2.3. ÁBRA. Dunakanyar a Második katonai felmérésen ( 1819-1869 ).



2.4. ÁBRA. Dunakanyar a Második katonai felmérésen ( 1819-1869 ).



2.5. ÁBRA. Dunakanyar a Harmadik katonai felmérésen ( 1869-1887 ).



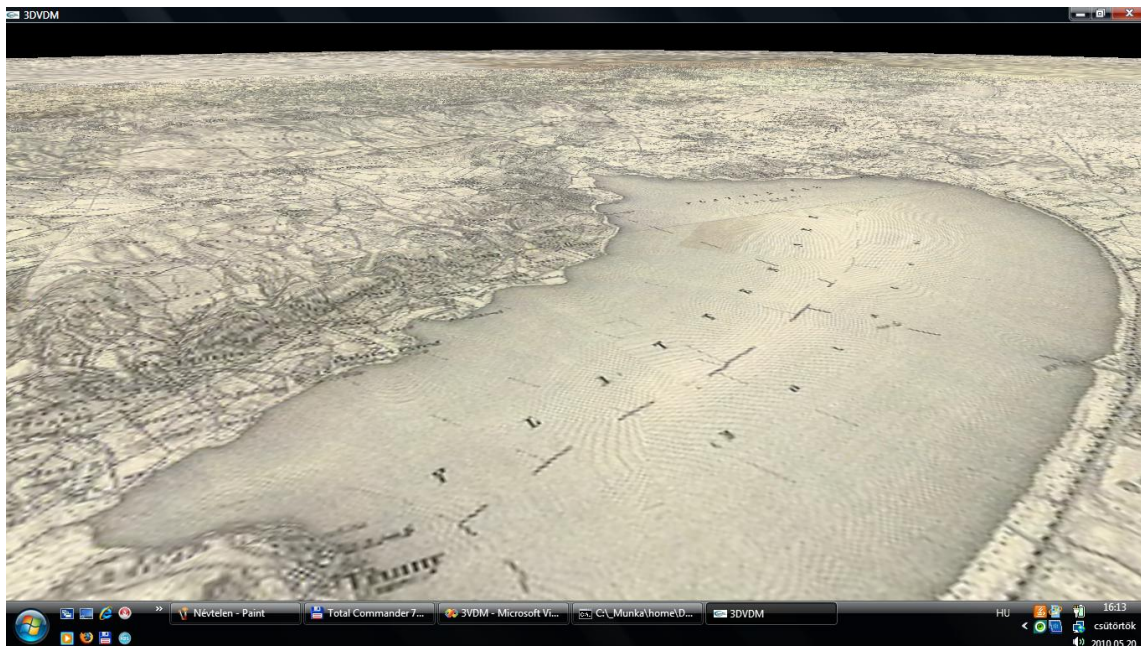
2.6. ÁBRA. Dunakanyar a Második katonai felmérésen ( 1819-1869 ).



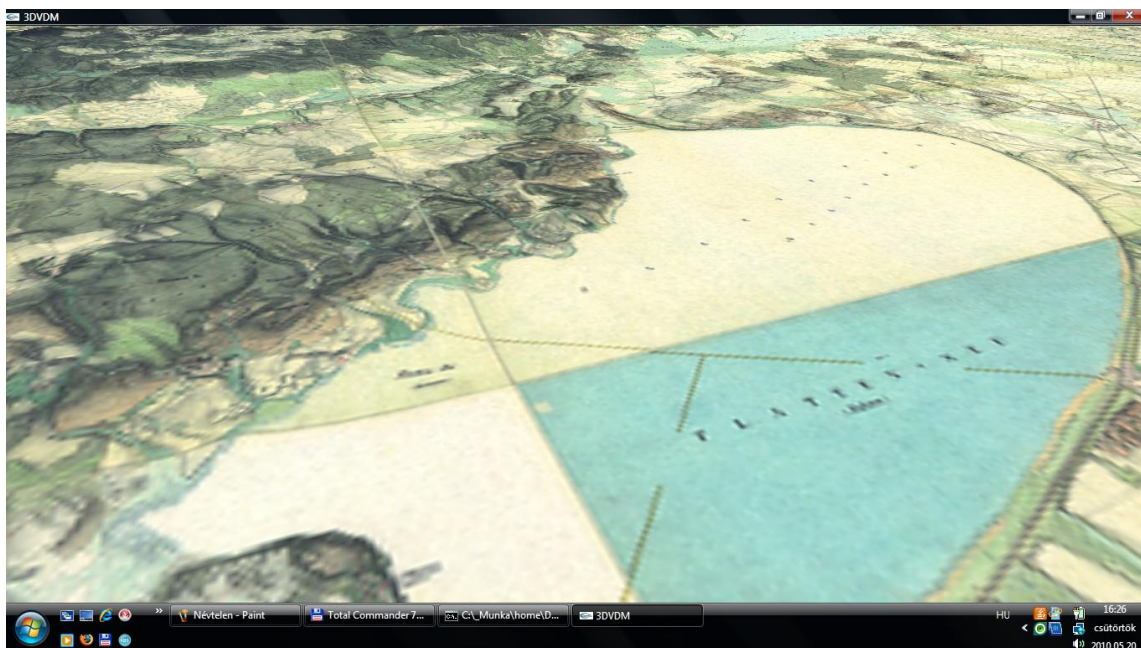
2.7. ÁBRA. Dunakanyar a Második katonai felmérésen ( 1819-1869 ).



2.8. ÁBRA. Budapest és környéke a Második katonai felmérésen(1819-1869).



2.9. ÁBRA. Balaton a Harmadik katonai felmérésen(1869-1887).



2.10. ÁBRA. Balaton a Második katonai felmérésen(1819-1869).

# Irodalomjegyzék

- [1] Varga József, *Vetülettan*. Műegyetemi kiadó, 2003.
- [2] [http://en.wikipedia.org/wiki/Quaternions\\_and\\_spatial\\_rotation](http://en.wikipedia.org/wiki/Quaternions_and_spatial_rotation)
- [3] <http://en.wikipedia.org/wiki/Quaternion>
- [4] [http://en.wikipedia.org/wiki/Map\\_projection](http://en.wikipedia.org/wiki/Map_projection)
- [5] [http://en.wikipedia.org/wiki/Lambert\\_cylindrical\\_equal-area\\_projection](http://en.wikipedia.org/wiki/Lambert_cylindrical_equal-area_projection)
- [6] [http://en.wikipedia.org/wiki/Equirectangular\\_projection](http://en.wikipedia.org/wiki/Equirectangular_projection)
- [7] [http://en.wikipedia.org/wiki/Lambert\\_conformal\\_conic\\_projection](http://en.wikipedia.org/wiki/Lambert_conformal_conic_projection)
- [8] [http://en.wikipedia.org/wiki/Cassini\\_projection](http://en.wikipedia.org/wiki/Cassini_projection)
- [9] [http://dds.cr.usgs.gov/srtm/version2\\_1/Documentation/](http://dds.cr.usgs.gov/srtm/version2_1/Documentation/)
- [10] <http://www.glprogramming.com/red/>
- [11] <https://svn.zib.de/lenne3d/lib/libecw/current/SDK.pdf>