Utazó hullámok és a lángterjedés sebessége

Szakdolgozat

Csaba Ákos

Témavezető: Simon Péter egyetemi docens
Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

2010.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A szakdolgozatom az utazó hullámokról szól és ezeknek egy konkrét felhasználási területéről, a lángterjedés modellezéséről. Az utazó hullámok speciális alakú megoldásai parciális differenciálegyenleteknek, segítségükkel általában valamilyen hatás terjedését írhatjuk le.

A dolgozat első fejezetében bebizonyítjuk az ilyen típusú megoldások létezését bizonyos feltételek mellett, ez a rész [Fife, P.C., Mathematical aspects of reacting and diffusing systems, Springer,1979.] könyvének 4.fejezete alapján készült. A 2. fejezetben rátérünk a lángterjedés 1 dimenziós modelljére, a kiinduló fizikai egyenletek felírása után, előbb kvalitatív tulajdonságokat bizonyítunk az utazó hullám megoldásokról, majd a 3. fejezetben becsléseket adunk a lángterjedés sebességére adiabatikus esetben. Ez utóbbi két fejezet [Peter L. Simon , John H. Merkin , Stephen K. Scott , Bifurcations in non-adibatic flame propagation models] cikke alapján készült.

2. Az Utazó hullámról általában

2.1. Reakció-diffúzió egyenlet

Reakció-diffuzió egyenleten a következő alakú szemilineáris parabolikus parciális differenciálegyenletrendszert értünk:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + F(u) \qquad (1)$$

Ahol $u(t, x_1, .., x_{n-1})$ egy $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény, t az időt $x_1, .., x_{n-1}$ pedig a helyet jelöli a térben. D diagonális mátrix és minden eleme pozitív és a diffuziós együtthatókat tartalmazza, Δu a Laplace operátor, F pedig az összes reakciót leíró vektorfüggvény.

A reakció-diffuzió egyenletek számos természettudományos jelenség modellezésére alkalmasak: populációs modellek, vírusok terjedését leíró modellek, kémiai reakciók leírása, idegsejtek közti ingerületvezetés, illetve a lángterjedés modellje, amellyel mi is bővebben foglalkozunk.

2.2. Az utazó hullám megoldás létezése

Vegyük a fenti reakció-diffuzió egyenlet 1 dimenziós, kanonikus változatát:

$$\partial_t u(t,x) = \partial_{xx} u(t,x) + f(u(t,x)) \tag{2}$$

Ennek egy $u(t,x)$ megoldását akkor hívjuk utazó hullám megoldásnak, ha $u(t,x) = U(x-ct)$ alakú, egy adott $c \in \mathbb{R}$-re, amit az utazó hullám sebességének hívunk.

Ebben a szakaszban bebizonyítjuk az utazó hullám létezését bizonyos megkötések mellett: U-ra, illetve f-re.
Legyen $f(0) = f(1) = 0$ és $f \in C^1[0,1]$, és olyan utazó hullámot keresünk, amire teljesül, hogy:

$$\lim_{z\to-\infty} U(z) = 0, \quad \lim_{z\to+\infty} U(z) = 1, \quad 0 \leq U(z) \leq 1 \tag{3}$$

$$\lim_{z\to-\infty} U'(z) = 0, \quad \lim_{z\to+\infty} U'(z) = 0. \tag{4}$$

Először bebizonyítjuk, hogy a fenti tulajdonságú U utazó hullám függvény szigorúan monoton növő az egész $\mathbb{R}$-en, tehát $U'(z) > 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}, \quad (z = x - ct)$.

2.2.1. U szigorú monotonitása

Helyettesítsünk be $u(t,x) = U(x-ct)$-vel a (2) egyenletbe:

$$U''(z) + cU'(z) + f(U(z)) = 0 \tag{5}$$

A fenti egyenletet egy kétdimenziós autonóm differenciálegyenlet rendszerré alakíthatjuk. Ehhez vezessük be a $P(z)$ függvényt, ami az U deriváltfüggvénye lesz.

$$U'(z) = P(z) \tag{6}$$

$$P'(z) = -cP(z) - f(U(z)) \tag{7}$$

Ahol a második egyenlet az (5) a deriváltfüggvénnyel kifejezve. Vizsgálhatjuk a fenti rendszer fázisképét az (U,P) fázissíkon. Az utazó hullám függvényünk

U (illetve annak deriváltfüggvénye P) egy megoldása lesz a fenti autonóm rendszernek, azaz egy trajektória az (U,P) fázissíkon. Most egyenlőre azt szeretnénk belátni, hogy ementén a trajektória mentén $P > 0$,és így $U'(z) > 0$.

A rendszer egyensúlyi pontjai ott lesznek, ahol a jobboldal 0 lesz, tehát $P = 0$-ban az első egyenletnél ,és azon U értékekre ,ahol $f(U) = 0$,tehát $U = 0$-ra és $U = 1$-re. Az U-ra tett megkötéseink alapján: (3)-(4) így az utazó hullám trajektóriája a (0,0) egyensúlyi pontot köti össze az (1,0) egyensúlyi ponttal, hiszen a $-\infty$-ben $(U, P) = (0, 0)$, a $+\infty$-ben pedig $(U, P) = (1, 0)$.

Azt is tudjuk, hogy a trajektória a $[0, 1] \times (-\infty, +\infty)$ sávban van az (U,P) síkon. Továbbá bármilyen pályára teljesülnie kell, hogy $P > 0$ esetén jobbra halad, míg a $P < 0$ tartományban balra, mert $P = U' > 0$ esetén U szigorúan monoton nő, a másik esetben pedig szigorúan csökken.
A fenti tulajdonságokból adódik, hogy $P \geq 0$ az utazó hullám mentén, ugyanis az ellenkező esetben a trajektória metszené önmagát, vagy elhagyná a $[0, 1] \times (-\infty, +\infty)$ sávot, melyek egyike sem lehetséges. U szigorú monotonitásához már csak a $P = 0$ esetet kell kizárni.

Tegyük fel, hogy az utazó hullám pályája átmegy egy $(U_0, 0)$ ponton, ahol $U_0 \in (0, 1)$, ekkor létezne egy hullám, amire: $U(0) = U_0$, továbbá $U'(0) = 0$
.
Azt állítjuk, hogy: $U''(0) \neq 0$, ellenkező esetben az (5)-ből:

$$U''(0) + cU'(0) + f(U(0)) = f(U_0) = 0$$

Ha pedig $f(U_0) = 0$, akkor az $U \equiv U_0$, megoldása az (5)-nek. Mivel ez egy közönséges differenciálegyenlet, ezért a megoldás ekkor egyértelműen az $U \equiv U_0$ függvény, ezt viszont nem tekintjük utazó hullámnak. Tehát valóban: $U''(0) \neq 0$.

Ebben az esetben viszont $P'(0) = U''(0) \neq 0$,ugyanakkor $P(0) = 0$. A kettő együtt pedig azt jelenti, hogy P előjelet vált, ahogy az utazó hullám trajektóriája átmegy az $(U_0, 0)$ ponton. Azonban azt már láttuk, hogy P végig nemnegatív a trajektória mentén, így ellentmondásra jutottunk, ezzel a $P = 0$ esetet is kizártuk.

Beláttuk, hogy $U'(z) > 0$ az egész $\mathbb{R}$-en.

2.2.2. Létezés

U szigorúan monoton növő tehát, így a deriváltfüggvénye $U'(z)$ kifejezhető az eredeti $U(z)$ fügvénnyel: $U'(z) = P(U(z))$, ahol P a $[0,1]$-en értelmezett, pozitív a $(0,1)$-en , továbbá $P(0) = P(1) = 0$, mert $U(-\infty) = 0$ és $U'(-\infty) = 0$, illetve $U(+\infty) = 1$ és $U'(+\infty) = 0$.
Az (5) egyenlet ekkor a P függvénnyel felírva:

$$P'(U)P(U) + cP(U) + f(U) = 0 \tag{8}$$

$$P(0) = 0 \quad P(1) = 0 \tag{9}$$

Az (5) egyenlet egy megoldása ekkor megadható (8)- (9) egy megoldásának segítségével, ehhez integrálnunk kell: $U'(z) = P(U)$-t , illetve az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $U(0) = \frac{1}{2}$.

Ha $f \in C^1[0,1]$ és $f(0) = f(1) = 0$, akkor az utazó hullám megoldások és (8)- (9) egyenlet $(0,1)$-en pozitív megoldásai között egy oda-vissza egyértelmű kapcsolat van.

c előjele:

Az utazó hullám sebességének: c-nek az előjelét meghatározhatjuk az f függvény ismeretében. Ehhez vegyük a (8) egyenletet, és integráljuk a $[0,1]$-en:

$$\int_0^1 P'(U)P(U)\mathrm{d}U + c\int_0^1 P(U)\mathrm{d}U = -\int_0^1 f(U)\mathrm{d}U$$

A bal oldalon az első inegrál a (9) alapján:

$$\int_0^1 P'(U)P(U)\mathrm{d}U = \int_0^1 \frac{1}{2}P^2(U)'\mathrm{d}U = \frac{1}{2}P^2(U)]_0^1 = 0$$

Így, kapjuk:

$$c\int_0^1 P(U)\mathrm{d}U = -\int_0^1 f(U)\mathrm{d}U$$

Tudjuk, hogy a pozitív P függvény integrálja is pozitív, így

$$c \geq 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f(U)\mathrm{d}U \leq 0$$

$$c \leq 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f(U)\mathrm{d}U \geq 0$$

Az egyensúlyi pontok geometriai osztályozása

Végül rátérünk az utazó hullám létezésére. Mint már az előbbiek során láttuk, ehhez elég bizonyos c-re egy olyan trajektóriát találni az (U, P) fázissíkon, ami összeköti a $(0, 0)$ egyensúlyi pontot, az $(1, 0)$ egyensúlyi ponttal. Egy ilyen tulajdonságú pálya létezése és egyértelműsége, az egyensúlyi pontok típusától függ. A $(0, 0)$ és az $(1, 0)$ egyensúlyi pontok típusát pedig, a (6)- (7) autonóm egyenletről lévén szó az egyensúlyi pontokban való linearizálással kaphatjuk meg.

Vegyük először a $(0, 0)$ pontot, ekkor a rendszer jobb oldalának Jacobi-mátrixa a $(0, 0)$ pontban, és így a linearizált:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f'(0) & -c \end{pmatrix}$$

Az A mátrix sajátértékeit egy másodfokú egyenlet megoldásával számolhatjuk ki:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4f'(0)}}{2} \tag{10}$$

A sajátértékek alapján a $(0, 0)$ pont háromféle lehet:

1.eset(csomó)

$f'(0) > 0$ és $c^2 \geq 4f'(0)$, ebben az esetben mindkét sajátérték valós, és ugyanolyan előjelűek, tehát a $(0, 0)$ egyensúlyi pont egy csomó lesz. Azt is tudjuk, hogy az első negyedsíkba belépő orbitok jobbra haladnak ($P > 0$ esetén U is nő) és így a $(0, 0)$ stacionárius pont instabil csomó lesz, a trajektóriák kifelé mennek belőle. Ez egyben azt is jelenti, hogy mindkét sajátérték pozitív, és így $c < 0$, a gyökképlet alapján.

2.eset(nyereg)
$f'(0) < 0$ ekkor mindkét sajátérték valós, de ellenkező előjelűek, és így az egyensúlyi pont egy nyereg lesz.
3.eset(fókusz/centrum)
$c^2 < 4f'(0)$, ekkor mindkét sajátérték komplex, és így az egyensúlyi pont centrum, vagy fókusz lesz. Ez az eset, viszont kizárja a $(0,0)$-t $(1,0)$-val összekötő trajektóriák létezését, mivel egy ilyen metszené a spirált, ami nem lehetséges.
Ugyanez az esetszétválasztás adódik az $(1,0)$ egyensúlyi pontra is, ami ugyancsak csomó vagy nyereg lehet a fentiek alapján. Összeségében tehát négyféle lehetőségünk van, de ez tovább redukálható kettőre.
Egyrészt tegyük fel ugyanis, hogy $(0,0)$ és $(1,0)$ is csomó. Azt is tudjuk, hogy a $(0,0)$ instabil csomó és ennek alapján megállapítottuk, hogy $c < 0$. Az $(1,0)$-nak viszont stabil csomónak kell lennie a $(0,0)$-nál elmondottakhoz hasonlóan , a trajektóriáknak befelé kell menniük az $(1,0)$-ba. Ez azt jelenti, hogy az $(1,0)$-hoz tartozó sajátértékek negatívak, és így $c > 0$, ami ellentmondás.

Másrészt, az az eset, amikor a $(0,0)$ nyereg és az $(1,0)$ csomó lenne, a következő változócserével visszavezethető a fordított esetre, tehát amikor a $(0,0)$ csomó és az $(1,0)$ nyereg: $U_1 := 1 - U, \quad f_1(U_1) := -f(1-U_1)$.

Elég tehát csak két esetet megvizsgálnunk: amikor mindkét egyensúlyi pont nyereg, illetve amikor a $(0,0)$ csomó és az $(1,0)$ nyereg:

2.2.3. Nyereg-nyereg trajektória

Mint már láttuk a 2.esetnél, ez azt jelenti, hogy $f'(0) < 0$,illetve $f'(1) < 0$. Ebben a szakaszban olyan megoldását keressük a (8)- (9) egyenletnek, amire $P > 0$ a $(0,1)$ nyílt intervallumon. Bebizonyítjuk, hogy létezik egy egyértelmű c sebesség érték, amire létezik, sőt egyértelműen utazó hullám megoldás. Mint azt majd látni fogjuk, ehhez további megszorításokat kell tennünk az f függvényre.

A bizonyításban a következő monotonitási lemmát alkalmazzuk, amit itt bizonyítás nélkül közlünk:

2.2.1. Lemma (Kanel). *Legyen $f(u) \leq 0$ elég kis pozitív u értékekre, továbbá $P_1(U)$ és $P_2(U)$ legyen két különböző megoldása a (8) egyenletnek (tehát az első síknegyedbe az origóból belépő megoldások: $P_1(U) = P_2(U) = 0$), a hozzájuk tartozó c_1 és c_2 értékekkel.*

Ha $c_1 = c_2$, akkor $P_1(U) \equiv P_2(U)$, amennyiben $P_1(U) > 0, \quad U > 0$ Továbbá, ha $c_1 > c_2$,akkor $P_1(U) < P_2(U)$, szintén amennyiben $P_1(U) > 0, \quad U > 0$

Megjegyezzük, hogy f nempozitivitása kis pozitív számokra, a mi esetünkben annak a következménye, hogy $f'(0) < 0$ és $f(0) = 0$.

A lemma alapján világos, hogy egy adott c értékre legfeljebb csak egy olyan pálya van, ami az első síknegyedbe az origóból lép be. Ez garantálja az utazó hullám megoldás egyértelműségét. Azt is tudjuk, hogy a $(0,0)$ nyereg, így definició szerint valóban létezik az első síknegyedbe az origóból belépő megoldás tetszőleges c-re.

Legyen T_c ez a trajektória, ami korlátos, mivel egyrészt a $Q = [0,1] \times [0,+\infty)$ félsávban van, másrészt a deriváltja P' korlátos, ami a (8) alapján látszik. Tehát T_c mentén a P korlátos lesz, így a trajektóriának valahol el kell hagynia a Q félsávot: ennek a pontnak a koordinátái legyenek: (U_c, P_c). Azt is tudjuk, hogy a trajektória ebben a félsávban balról jobbra halad, így kétféle eset lehetséges: $0 < U_c \leq 1$ és $P_c = 0$, azaz a trajektória a félsáv határát a $P = 0$ vízszintes egyenes mentén metszi, vagy pedig $U_c = 1$ és $P_c > 0$, azaz a metszéspont az $U = 1$ függőleges egyenesen van.

Tegyük fel, hogy $c < 0$ és megmutatjuk, hogy elég nagy abszolút értékű c-re P szigorúan monoton növő lesz a $(0,1)$-en és így ezekre a c értékekre a T_c a függőleges egyenest metszi: $U_c = 1$ és $P_c > 0$.

Indirekt tegyük fel, hogy P felveszi a maximumát: P_{max} , egy $U_{max} < 1$-re. Ekkor ebben a pontban

$$P'(U_{max}) = -c - \frac{f(U_{max})}{P(U_{max})} = 0$$

a (8) alapján, és így:

$$P_{max} = -\frac{f(U_{max})}{c} = \frac{f(U_{max})}{|c|} > 0$$

Ekkor $U_{max} < U_0$, ahol U_0 az f legkisebb $(0,1)$-beli gyöke, mert az ellenkező esetben tudjuk, hogy f negatív a $(0,U_0)$-on $(f'(0) < 0)$, és így P_{max} negatív lenne. Ugyancsak f $(0,U_0)$-beli negativitása miatt, $\forall U \in (0,U_0)$-ra

$$P'(U) = -c - \frac{f(U)}{P(U)} \geq -c = |c|$$

Azaz a P deriváltját alulról tudjuk becsülni $|c|$-vel, és így a Lagrange tétel miatt $P(U_0) \geq |c|U_0$, ellenkező esetben lenne, olyan $(0,U_0)$-beli, ahol a derivált kisebb, mint $|c|$. Kapjuk végül a következő egyenlőtlenséget:

$$|c|U_0 \leq P(U_0) \leq P_{max} = \frac{f(U_{max})}{|c|}$$

Mivel U_0 és $f(U_{max})$ véges értékek, ezért elég nagy abszolút értékű c-re ellentmondásra jutunk a fenti egyenlőtlenségből. Ezzel beláttuk, hogy elég nagy negatív c sebességre a P szigorúan monoton növő a $(0,1)$-en, és így $U_c = 1$ és $P_c > 0$.

Vegyünk egy ilyen c-t, amire T_c metszi az $U = 1$ függőleges egyenest. A Kanel lemma alapján tudjuk, hogyha el kezdjük növelni ezt a c értéket, akkor a P(U) szigorúan csökkenni fog, méghozzá c-től függően folytonosan.

Tehát lesz egy olyan $c = c_0$ érték, amire $P_{c_0} = 0$ és vagy $U_{c_0} = 1$, (ez esetben megkaptuk az utazó hullám megoldást), vagy $U_{c_0} < 1$. Célunk az utóbbi eset kizárása.

Tegyük fel, hogy $U_{c_0} < 1$, ez akkor fordul elő, amikor a T_{c_0} trajektória a határhelyzete lesz azon trajektóriáknak, amikre $P > 0$ végig a trajektória mentén a $(0,1)$-en, és $c \to c_0$ alulról.

c_0-hoz elég közeli c-kre a P deriváltfüggvényének legalább két gyöke lesz a $(0,1)$ intervallumon. Ez abból látszik, hogy ezen trajektóriák határhelyzete egy olyan P függvény, ami 0-ban és U_{c_0}-ban 0 , a két érték között pedig pozitív.

Legyen a két gyök: U_1 és U_2 :

$$0 = P'(U_1) = -c - \frac{f(U_1)}{P(U_1)}$$

$$0 = P'(U_2) = -c - \frac{f(U_2)}{P(U_2)}$$

Legyen U_1 a kisebb a kettő közül: $U_1 < U_2$, ekkor $P(U_1) > P(U_2)$. A határhelyzetből adódóan:

$$\lim_{c \to c_0} U_2 = U_{c_0}, \quad \lim_{c \to c_0} P(U_2) = 0$$

Továbbá $-c = \frac{f(U_1)}{P(U_1)} = \frac{f(U_2)}{P(U_2)}$, és így $f(U_1) > f(U_2)$. Az is látszik, hogy $c \to c_0$ esetén: $f(U_{c_0}) = 0$. Ezzel megkaptuk f egy $U_{c_0} \in (0,1)$-beli gyökét. Ugyanakkor f-nek nem ez az egyetlen gyöke a $(0,1)$-en. Tudjuk, hogy $f(U) < 0$ elég kis pozitív U értékekre, (mert $f(0) = 0$ és $f'(0) < 0$) ,továbbá $f(U_1) > 0$, így f folytonos lévén kell lennie egy másik $(0, U_1)$-beli gyökének is.

Tudjuk, hogy $f'(0) < 0$ és $f'(1) < 0$, emiatt f-nek van legalább egy $(0,1)$-beli gyöke. A fentiek alapján, ha f-ről feltesszük, hogy pontosan 1 db $(0,1)$-beli gyöke van, akkor kizárható a fent tárgyalt eset: $U_{c_0} < 1$, és így $U_{c_0} = 1$, $P_{c_0} = 0$ teljesül, amivel megtaláltuk a keresett utazó hullám megoldást, amennyiben mindkét stacionárius pont nyereg.

2.2.4. Csomó-nyereg trajektória

Tudjuk az 1. és 2. eset alapján, hogy $f'(0) > 0$, illetve $f'(1) < 0$. Az egyszerűség kedvéért azt is feltesszük, hogy $f(u) > 0$ a $(0,1)$ intervallumon. Ekkor $\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u > 0$, és így $c < 0$.

Az $(1,0)$ egyensúlyi pont nyereg, így az előző nyereg-nyereg tárgyaláshoz hasonlóan lesz egy T trajektória, ami a pozitív negyedsíkból megy az $(1,0)$ pontba.

Vegyünk egy $\mu > 0$ értéket, illetve a $P = \mu U$ egyenest az (U,P) síkon. Legyen ennek az egyenesnek a metszéspontja az $U = 1$ függőleges egyenessel az A pont. Az origót jelöljük O-val, az $(1,0)$ pontot pedig B-vel.

Ha elkezdünk visszafelé haladni a T trajektórián, akkor két eset lehetséges. Egyrészt juthatunk egy egyensúlyi pontba az OBA háromszög belsejében, ez nem lehetséges, mert azt már láttuk, hogy csak két egyensúlyi pont van és ezek egyike sincs a háromszögön belül. Ha T nem egy egyensúlyi pontból jön az OBA háromszög belsejéből, akkor valahol metszenie kell a háromszögvonalat. A továbbiakban ezt az esetet vizsgáljuk.

Tudjuk, hogy T balról jobbra halad, így a metszéspont nem lehet az AB egyenesen, mert a T végpontja B és így nem metszheti még egyszer az AB függőleges egyenest. A (8) egyenletből:

$$P'(U)P(U) = -cP(U) - f(U), \quad \text{illetve} \quad U'(z) = P(U)$$

$$\frac{U'(z)}{P'(U(z))} = \frac{U'(z)}{P'(U)P(U)} = \frac{P(U)}{-cP(U) - f(U)} < 0$$

A fenti egyenlőtlenség, elég kis $P(U)$ pozitív értékekre teljesülni fog, annak alapján, hogy $c < 0$ és $f(U) > 0$. Az egyenlőtlenség geometriai jelentése így az lesz, hogy az OB vízszintes szakaszhoz az OBA háromszög belsejéből közelítő trajektóriák balró jobbra haladnak. Ebből következik, hogy a T trajektória nem metszheti a háromszögvonalat egy OB belső pontban.

Vegyük most az OA egyenest ($P = \mu U$ egyenes). Az előzőekhez hasonlóan:

$$\frac{P'(U(z))}{U'(z)} = -c - \frac{f(U)}{P(U)} \geq -c - \frac{\nu U}{P(U)}$$

Ahol $\nu = \sup \frac{f(U)}{U} \geq f'(0)$, amivel a suprémum jelentése miatt teljesül a fenti egyenlőtlenség. Az OA egyenesen $P(U) = \mu U$, tehát:

$$\frac{P'(U(z))}{U'(z)} \geq -c - \frac{\nu}{\mu}$$

Így ha a $\mu > 0$ értékét úgy választjuk meg, hogy teljesüljön:

$$-c - \frac{\nu}{\mu} \geq \mu \tag{11}$$

akkor kapjuk, hogy a háromszög belsejét az OA nyílt szakaszon keresztül elhagyó trajektóriák megintcsak balról jobbra haladnak. Ez kizárja azt, hogy a T metszéspontja a háromszögvonallal az OA szakasz belsejében legyen.

Azt kaptuk, hogy amennyiben a (11) teljesül, a T trajektóriának muszáj az O pontból, tehát a $(0,0)$-ból indulnia. Ezzel megintcsak beláttuk az utazó hullám létezését.

Vizsgáljuk meg a (11) feltételt, amit a következő alakban írhatunk:

$$\mu^2 + c\mu + \nu \leq 0$$

Ami μ-re egy másodfokú egyenlőtlenség. A főegyüttható pozitív, így a bal oldal akkor lesz kisebb mint 0 ,ha egyrészt a diszkrimináns nemnegatív, azaz léteznek a gyökök, illetve ha μ a két gyök közé esik. A gyökök: $\frac{-c\pm\sqrt{c^2-4\nu}}{2}$

Tegyük fel c-re teljesül, hogy:

$$c \leq -\sqrt{4\nu} < 0 \tag{12}$$

Ekkor egyrészt $c^2 \geq 4\nu$ és így léteznek a gyökök, másrészt meg lehet úgy választani μ értékét, hogy a gyökök közé essen és pozitív legyen. Még azt is hozzá kell tennünk, hogy az 1.esetnél a csomóra vonatkozó kikötés: $c^2 \geq 4f'(0)$ nem sérül ezzel a c választással, mert $\nu \geq f'(0)$.

Összességében megállapíthatjuk, hogy minden olyan c-re, amire $c \leq -\sqrt{4\nu}$ teljesül, létezik a két egyensúlyi pontot összekötő trajektória, és így utazó hullám megoldás.

Rögtön hozzá kell tennünk, hogy ez nem szükséges feltétele az utazó hullám létezésének ebben az esetben. Valójában az is igaz, hogy létezik egy c_{max} maximális c érték, a következő intevallumban:

$$-\sqrt{4\nu} \leq c_{max} \leq -\sqrt{4f'(0)} \tag{13}$$

amire $\forall c \leq c_{max}$ értékre létezik utazó hullám.

Végül foglaljuk össze egy tételben az utazó hullám létezésére vonatkozó eredményeinket:

2.2.1. Tétel (Utazó hullám létezése). *Tegyük fel, hogy* $f(0) = f(1) = 0$.

1. Ha $f'(0) < 0$ és $f'(1) < 0$, illetve f-nek csak egyetlen gyöke van a $(0,1)$ intervallumban, akkor a (2) egyenletnek egyértelműen létezik utazó hullám megoldása, amire $\lim_{z\to-\infty} U(z) = 0, \quad \lim_{z\to+\infty} U(z) = 1$.

2. Ha $f'(0) > 0$ és $f'(1) < 0$, illetve $f(u) > 0$ az $u \in (0,1)$ értékekre, akkor létezik egy $c_{max} < 0$, és minden c értékre akkor és csak akkor létezik c sebességű utazó hullám a $\lim_{z\to-\infty} U(z) = 0, \quad \lim_{z\to+\infty} U(z) = 1$ tulajdonsággal , ha $c < c_{max}$.

2.3. Az utazó hullám megoldás kiszámítása

Bizonyos konkrét esetekben, speciális alakú f-ekre ki tudjuk számítani az utazó hullám megoldást és annak sebességét c-t is. Induljunk ki az (5) egyenletből.

2.3.1. Állítás. *Ha $f(u) = u(1-u)(u-a)$ alakú, ahol $a \in [0,1)$ tetszőleges,akkor az*

$$u''(x) + cu'(x) + u(x)(1-u(x))(u(x)-a) = 0 \tag{14}$$

$$u(-\infty) = 0, \qquad u(+\infty) = 0 \tag{15}$$

egyenletnek lesz megoldása $u(x) = \frac{1}{1+e^{bx}}$ alakban.

Keressük a megoldást $u(x) = \frac{1}{1+e^{bx}}$ alakban, ahol $b \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor

$$u'(x) = \frac{-be^{bx}}{(1+e^{bx})^2}$$

$$u''(x) = \frac{-b^2(1+e^{bx})^2 + be^{bx}2(1+e^{bx})be^{bx}}{(1+e^{bx})^4} =$$

$$= \frac{b^2e^{bx}(e^{bx}-1)}{(1+e^{bx})^3}$$

$$1-u(x) = \frac{e^{bx}}{1+e^{bx}} \qquad u(x)-a = \frac{1-a-ae^{bx}}{1+e^{bx}}$$

Tehát behelyettesítve a (14) egyenletbe kiszámolható b ,és így a konkrét megoldás illetve c is az utazó hullám sebessége.

$$\frac{b^2e^{bx}(e^{bx}-1)}{(1+e^{bx})^3} - c\frac{be^{bx}}{(1+e^{bx})^2} + \frac{e^{bx}(1-a-ae^{bx})}{(1+e^{bx})^3} = 0$$

$$b^2e^{bx}(e^{bx}-1)-cbe^{bx}(1+e^{bx})+e^{bx}(1-a-ae^{bx})=0$$

$$e^{bx}(b^2-cb-a)-b^2-cb+1-a=0$$

$\forall x\in\mathbb{R}$-re ez csak úgy lehetséges ,ha:

$$-b^2-cb+1-a=0 \quad \text{és} \quad b^2-cb-a=0$$

A két egyenletet pedig kivonva egymásból:

$$2b^2=1 \quad b=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{,mivel} \quad \lim_{x\to-\infty}u(x)=1$$

$$-c\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}=a \quad \text{és így} \quad c=\sqrt{2}(\frac{1}{2}-a)$$

Összefoglalva a megoldás és az utazó hullám sebessége:

$$u(x)=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{\sqrt{2}}x}} \qquad c=\sqrt{2}(\frac{1}{2}-a)$$

3. Lángterjedés

3.1. Bevezetés

A lángterjedés tanulmányozásában kiemelkedő szerepe van az egyirányú 1 dimenziós modelleknek.Az egyenletes lángterjedést vizsgálhatjuk matematikailag,differenciálegyenletek segítségével.

A lángterjedés dinamikáját leíró fizikai egyenletek tömeg,momentum és energia megmaradási egyenletek illetve állapotegyenletek. Ezek az egyenletek önmagukban túl bonyolultak az analitikus tanulmányozás számára, ezért általában izobár folyamatként közelítjük a lángterjedést. Ekkor a kiinduló fizikai egyenletek (hivatkozva: [4][5]):

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0$$

$$\rho(\partial_t A + v\partial_x A) = \rho D \partial_x^2 A - k_0 e^{\frac{-E}{RT}} \rho A$$

$$\rho C_p(\partial_t T + v\partial_x T) = \lambda \partial_x^2 T + q k_0 e^{\frac{-E}{RT}} \rho A - (T - T_a)h$$

Ahol A a gyúlékony anyag tömegeloszlása (idő és hely függvényében), ρ a sűrűség, T a hőmérséklet, E az aktivációs energia, R az egyetemes gázállandó, h a hőveszteség paramétere, D az anyag diffuziós állandója, k_0 konstans, T_a a környezet hőmérséklete.

A fenti egyenleteket a vizsgálat számára egyszerűbb alakra hozhatjuk változócserékkel, illetve a következő paraméterek bevezetésével: (részletesebben lásd: [1])

$$L_A = \frac{\lambda}{D\rho C_p}, \quad c = \frac{m}{\varepsilon}\sqrt{\frac{C_p}{\rho\lambda k_0}e^{1/\varepsilon}}, \quad \gamma = \frac{h}{\rho C_p k_0 \varepsilon^2}e^{1/\varepsilon}$$

illetve:

$$f(b) = \varepsilon^{-2} exp\left(\frac{b-1}{\varepsilon b}\right)$$

$$L_A^{-1} a''(y) - c a'(y) - a(y) f(b(y)) = 0 \tag{16}$$

$$b''(y) - c b'(y) + a(y) f(b(y)) - \gamma b(y) = 0 \tag{17}$$

A következő peremfeltételekkel:

$$a \to 1, \quad b \to 0, \quad ha \quad y \to -\infty \qquad a' \to 0, \quad b' \to 0 \quad , ha \quad y \to +\infty. \tag{18}$$

Feltehető továbbá, hogy a és b korlátos, nemnegatív függvények, mivel a valóságban bekövetkező folyamatok anyag és hőmérséklet eloszlását írják le.

3.2. Létezés és kvalitatív tulajdonságok

A (16) - (17) differenciálegyenlet rendszerünk megoldásainak néhány tulajdonságát elemi számolásokkal is levezethetjük.

3.2.1. $+\infty$-beli határérték

Kezdjük először a és b $+\infty$-beli határértékével. Adjuk össze a (16) -t és a (17) -et, kapjuk:

$$L_A^{-1}a'' - ca' + b'' - cb' = \gamma b$$

Integráljuk a kapott egyenletet $-\infty$-től $+\infty$-ig, így egyrészt használhatjuk a peremfeltételeinket (18), másrészt az egyenletben megjelennek a kívánt határértékek:

$$L_A^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} a''(y)\mathrm{d}y - c\int_{-\infty}^{+\infty} a'(y)\mathrm{d}y + \int_{-\infty}^{+\infty} b''(y)\mathrm{d}y - c\int_{-\infty}^{+\infty} b'(y)\mathrm{d}y = \gamma\int_{-\infty}^{+\infty} b(y)\mathrm{d}y$$

$$a'(y)]_{-\infty}^{+\infty} - ca(y)]_{-\infty}^{+\infty} + b'(y)]_{-\infty}^{+\infty} - cb(y)]_{-\infty}^{+\infty} = \gamma\int_{-\infty}^{+\infty} b(y)\mathrm{d}y$$

A kiinduló differenciálegyenletekből és a illeve b korlátosságából és nemnegativitásából levezethető, hogy a', a'', b', b'' 0-hoz tartanak a $+/-\infty$-ben. Ennek segítségével, és a (18) segítségével a fenti egyenlet a következőre redukálódik:

$$\lim_{y\to+\infty} b(y) + \lim_{y\to+\infty} a(y) = 1 - \frac{\gamma}{c}\int_{-\infty}^{+\infty} b(y)\mathrm{d}y \tag{19}$$

Szintén a', a'', b', b'' ∞ -beli 0-hoz tartásának következménye,hogy $af(b)$ is 0-hoz tart $+/-\infty$-ben, ehhez elég a (16) egyenletre ránézni. Ekkor viszont a másik egyenletből (17) pedig ($\gamma > 0$) esetén, tehát amikor van hőveszteség kapjuk, hogy $b(y) \to 0$, midőn $y \to +\infty$. $a(y)$ $+\infty$-beli határértékét pedig a (19) kifejezés adja.

3.2.2. Monotonitás

Az a és b függvények monotonitását a következő ügyes trükkel vizsgálhatjuk: Szorozzuk meg a (16) egyenletet $L_A e^{-cL_A y}$-al:

$$a''(y)e^{-cL_A y} - cL_A a'(y)e^{-cL_A y} = L_A e^{-cL_A y} a(y) f(b(y))$$

Vegyük észre,hogy a bal oldal éppen $a'(y)e^{-cL_A y}$ deriváltja,és így ha a fenti egyenletet integráljuk egy egyenlőre fix $[y_1, y_2]$ intervallumon ,akkor kapjuk:

$$a'(y_2)e^{-cL_A y_2} - a'(y_1)e^{-cL_A y_1} = L_A \int_{y_1}^{y_2} e^{-cL_A s} a f(b) \mathrm{d}s \tag{20}$$

Tegyük fel,hogy $c < 0$ és tartsunk y_1-el $-\infty$-be. Ekkor $a'(y_1) \to 0$ és így tetszőleges $y = y_2 \in \mathbb{R}$-re azt kapjuk (20)-ből,hogy:

$$a'(y) = L_A e^{cL_A y} \int_{-\infty}^{y} e^{-cL_A s} a f(b) \mathrm{d}s \quad > 0 \tag{21}$$

A jobb oldali kifejezés pozitív,mert L_A és az exponenciális függvény azok,illetve a, $f(b)$,és $e^{-cL_A s}$ is szintén pozitívak és így az integráljuk is az. Így kapjuk, hogy a szigorúan monoton növő, ami ellentmond annak ,hogy $a(-\infty) = 1$ $a(+\infty) \leq 1$ (ez utóbbi a (19) hozománya). Tehát $c \geq 0$ áll, sőt $c = 0$ eset is kizárható, mivel ekkor a szigorúan konvex lenne, ellentmondásban a rá vonatkozó peremfeltételekkel. $c > 0$. Ismét a (21) egyenletnél $_2 \to +\infty$ -el adódik: tetszőleges $y = y_1 \in \mathbb{R}$ -re:

$$a'(y) = -L_A e^{cL_A y} \int_{-\infty}^{y} e^{-cL_A s} a f(b) \mathrm{d}s \quad < 0$$

Ezzel beláttuk,hogy a szigorúan monoton csökkenő. b monotonitása γ-tól függ. Amikor $\gamma > 0$,tehát hőveszteség esetén már láttuk, hogy $b(y) \to 0$ mindkét végtelenhez tartás esetén.Így b(y) nem lehet se egyételműen növekvő, se csökkenő. Adiabatikus esetben viszont ($\gamma = 0$) megállapítható b szigorú monoton növekedése. Szorozzuk meg a (17) kiinduló egyenletünket e^{-cy}-al, majd integráljuk a $(y, +\infty)$ halmazon:(ne feledjük $\gamma = 0$)

$$\int_{y}^{+\infty} (b''(y) - cb'(y))e^{-cy} \mathrm{d}y + \int_{y}^{+\infty} e^{-cy} a(y) f(b(y)) \mathrm{d}y = 0$$

$$b'(y)e^{-cy}]_y^{+\infty} + \int_y^{+\infty} e^{-cy}a(y)f(b(y))\mathrm{d}y = 0$$

$$b'(y)e^{-cy} = \int_y^{+\infty} e^{-cy}a(y)f(b(y))\mathrm{d}y = 0$$

A levezetésben használtuk,hogy $b'(y)$ eltűnik $+\infty$-ben. A fenti egyenlet jobb oldala pozitív, ahogy azt a korábbiakban már egyszer beláttuk, és így $b'(y) > 0$, b szigorúan monoton növő.
Szeretnénk b $+\infty$-beli határértékét is meghatározni, az adiabatikus ($\gamma = 0$) esetben. Azt már láttuk, hogy b' és b'' is 0-hoz tart $+\infty$-ben ,ekkor még a kiinduló (16) egyenletből kapjuk, hogy $af(b)$ is szintén 0-hoz tart. b szigorúan monoton növő és így az $f(b) = \varepsilon^{-2}exp\left(\frac{b-1}{\varepsilon b}\right)$ nem tarthat 0-hoz a $+\infty$ -ben. $af(b)$ 0-hoz tart, de f(b) nem ,ez csak úgy lehetséges ,ha $\lim_{y\to+\infty} a(y) = 0$. A (19) egyenletünk adiabatikus esetben adja, hogy $\lim_{y\to+\infty} a(y) + \lim_{y\to+\infty} b(y) = 1$ és így $\lim_{y\to+\infty} b(y) = 1$
Foglaljuk össze egy állításban az a-ra és b-re kapott kvalitatív tulajdonságokat.

3.2.1. Állítás. *Ha a és b kielégítik a (16)-(17) differenciálegyenlet rendszert, és c az utazó hullám sebessége az egyenletben, akkor a következő tulajdonságok igazak: a, mint fügvény szigorúan monoton csökkenő, $c > 0$.*
Hőveszteség esetén ($\gamma > 0$)

$$\lim_{y\to+\infty} a(y) = 1 - \frac{\gamma}{c}\int_{-\infty}^{+\infty} b(s)\mathrm{d}s \quad , \textit{és} \quad \lim_{y\to+\infty} b(y) = 0$$

Adiabatikus esetben ($\gamma = 0$) *pedig b szigorúan monoton növekvő és* $\lim_{y\to+\infty} a(y) = 0$ *, illetve* $\lim_{y\to+\infty} b(y) = 1$

Megmutatható $L_A = 1$ esetén, hogy a lángterjedés sebessége adiabatikus esetben nagyobb, mint amikor hőveszteséggel is számolnunk kell. Numerikus eredmények igazolják, hogy ugyanez igaz egyéb L_A értékek esetén is, konkrét matematikai bizonyítások viszont csak az $L_A = 1$ esetre vannak, lásd: [5].

3.2.3. Az utazó hullám létezése

Ebben a kis részben az utazó hullám létezéséről teszünk említést. A legegyszerűbb esetet véve : $\gamma = 0$ és $L_A = 1$, és összeadva (16) és (17) egyenleteket:

$$(a+b)'' - c(a+b)' = 0$$

Egy másodrendű állandó együtthatós differenciálegyenletet kapunk $a+b$-re. Tudjuk, hogy $a+b$ korlátos. A fenti egyenlet megoldásai exponenciális függvények lineáris kombinációi, így az $a+b$ keresett függvényre az egyetlen szóba jöhető megoldás a konstans függvény. Az előző állításban bizonyítottuk, hogy $\lim_{y\to+\infty} a(y) = 0$, illetve $\lim_{y\to+\infty} b(y) = 1$, és így $a+b=1$, amivel (16) - (17) egyenletrendszer a következő alakra redukálódik:

$$b''(y) - cb'(y) + (1-b(y))f(b(y)) = 0 \tag{22}$$

A fenti egyenlet utazó hullám megoldásának a létezése következik a 2. fejezetben leírtak alapján. Jelen esetben az $(1,0)$ pont nyereg lesz, azonban a $(0,0)$ nem lesz se csomó, se nyereg. Ha $f > 0$ a 0 egy környezetében, akkor azt kapjuk, mint a csomó-nyereg esetén: tehát létezik egy c_{max} érték, amire $\forall c < c_{max}$ esetén c értékre létezik utazó hullám. Ha $f = 0$ a 0 egy környezetében, akkor pedig a nyereg-nyereg esethez hasonlóan az általános tételünk élesítésével adódik, hogy pontosan egy c értékre létezik utazó hullám megoldás.

4. Analitikus becslések a lángterjedés sebességére adiabatikus esetben

Induljunk ki a következő közönséges másodrendű differenciálegyenletből, amit az előző szakaszban kaptunk: (22)

$$b''(y) - c_{ad}b'(y) + (1 - b(y))f(b(y)) = 0 \tag{23}$$

Ahol az f függvény a következő:

$$f(b) = 0,\ \text{ha } b \leq b_I \qquad \text{és } f(b) = \varepsilon^{-2}exp\left(\frac{b-1}{\varepsilon b}\right),\ \text{ha } b > b_I$$

Továbbá a következő peremfeltételek teljesülnek a b függvényre és deriváltjára b'-re: $b \to 0$,ha $y \to -\infty$,illetve $b \to 1$ ha $y \to +\infty$ továbbá $b' \to 0$,ha $y \to -\infty$,illetve ha $y \to +\infty$

Integráljuk a (23) -es egyenletet $-\infty$-től $+\infty$-ig ,kapjuk:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} b''(y)\mathrm{d}y - c_{ad}\int_{-\infty}^{+\infty} b'(y)dy + \int_{-\infty}^{+\infty}(1 - b(y))f(b(y))\mathrm{d}y = 0 \text{ ,azaz:}$$

$$[b'(y)]_{-\infty}^{+\infty} - c_{ad}[b(y)]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty}(1 - b(y))f(b(y))\mathrm{d}y = 0 \text{ , kapjuk :}$$

$$c_{ad} = \int_{-\infty}^{+\infty}(1 - b(y))f(b(y))\mathrm{d}y \tag{24}$$

Szorozzuk meg a (23)-et $b(y)$-al,majd utána integráljuk $-\infty$-től $+\infty$-ig ,kapjuk:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} b''(y)b(y)\mathrm{d}y - c_{ad}\int_{-\infty}^{+\infty} b'(y)b(y)dy + \int_{-\infty}^{+\infty} b(y)(1 - b(y))f(b(y))\mathrm{d}y = 0$$

Innen a parciális integrálás szabálya szerint: $\int_{-\infty}^{+\infty} b''(y)b(y)\mathrm{d}y = b'(y)b(y)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} b'(y)^2\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} b'(y)^2\mathrm{d}y$,mivel $b'(y)b(y)]_{-\infty}^{+\infty}$ a peremfeltételek miatt 0 lesz.

Továbbá $c_{ad}\int_{-\infty}^{+\infty} b'(y)b(y)dy = c_{ad}\frac{1}{2}b^2(y)]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{2}c_{ad}$ szintén a peremfeltételek miatt,és így kapjuk:

$$c_{ad} + 2\int_{-\infty}^{+\infty} b'(y)^2\mathrm{d}y = 2\int_{-\infty}^{+\infty} b(y)(1 - b(y))f(b(y))\mathrm{d}y \tag{25}$$

Szorozzuk meg a (23)-et $b'(y)$-al,majd utána integráljuk $-\infty$-től $+\infty$-ig ,kapjuk:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} b''(y)b'(y)\mathrm{d}y - c_{ad}\int_{-\infty}^{+\infty} b'(y)^2 dy + \int_{-\infty}^{+\infty} b'(y)(1-b(y))f(b(y))\mathrm{d}y = 0$$

Az első tag a parciális integrálás szabálya szerint: $\int_{-\infty}^{+\infty} b''(y)b'(y)\mathrm{d}y = b'(y)^2]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} b'(y)b''(y)\mathrm{d}y$ ahol $b'(y)^2]_{-\infty}^{+\infty} = 0$ és így szükségszerűen $\int_{-\infty}^{+\infty} b''(y)b'(y)\mathrm{d}y = 0$,mivel a bal és a jobb oldalon is ugyanaz az integrál állt.
A harmadik tag az $s = b(y)$ helyettesítéssel:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} b'(y)(1-b(y))f(b(y))\mathrm{d}y = \int_0^1 (1-s)f(s)\mathrm{d}s$$

,hiszen azt is tudjuk,hogy $0 < b(y) < 1$,mert $b(y)$ szigorúan monoton növő és $\lim_{b\to-\infty} = 0$,illetve $\lim_{b\to+\infty} = 1$.
Tehát összeségében kapjuk végül:

$$c_{ad}\int_{-\infty}^{+\infty} b'(y)^2 dy = \int_0^1 (1-s)f(s)\mathrm{d}s \tag{26}$$

A (24) felhasználásával kapjuk a következő egyenlőtlenséget:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1-b(y))f(b(y))\mathrm{d}y = c_{ad} > \int_{-\infty}^{+\infty} b(y)(1-b(y))f(b(y))\mathrm{d}y$$

,mert $0 < b(y) < 1$,illetve ugyanebből a (25) felhasználásával:

$$c_{ad} > \int_{-\infty}^{+\infty} b(y)(1-b(y))f(b(y))\mathrm{d}y = \frac{c_{ad}}{2} + \int_{-\infty}^{+\infty} b'(y)^2 dy$$

Majd ebből és a (26) segítségével:

$$c_{ad} > 2\int_{-\infty}^{+\infty} b'(y)^2 dy = 2\frac{\int_0^1 (1-s)f(s)\mathrm{d}s}{c_{ad}} \quad \text{,és így kapjuk:}$$

$$c_{ad}^2 > 2\int_0^1 (1-s)f(s)\mathrm{d}s \tag{27}$$

4.1. Az alsó korlát

Tudjuk,hogy a b függvény szigorúan monoton növő,ekkor a deriváltfüggvényét b'-t ki tudjuk fejezni,mint b függvénye: $b' = p(b)$,ahol $p > 0$,a $0 < b < 1$-en ,és így a (23) a következő alakban írható:

$$p'(b)p(b) - c_{ad}p(b) + (1-b)f(b) = 0 \tag{28}$$

$$p(0) = 0, \quad p(1) = 0 \tag{29}$$

Integráljuk a kapott egyenletet a [0,1]-en:

$$\int_0^1 p'(b)p(b)\mathrm{d}b - c_{ad}\int_0^1 p(b)\mathrm{d}b + \int_0^1 (1-b)f(b)\mathrm{d}b = 0$$

Az első tag $p^2(b)]_0^1 = 0$ a (29) miatt ,és így változócserével:

$$\int_0^1 (1-s)f(s)\mathrm{d}s = c_{ad}\int_0^1 p(s)\mathrm{d}s \tag{30}$$

Térjünk vissza a (28)-hoz és osszuk el p(b)-vel ($b' = p(b) > 0$)

$$p'(b) = c_{ad} - \frac{(1-b)f(b)}{p(b)} \le c_{ad} \tag{31}$$

,mert $\frac{(1-b)f(b)}{p(b)} \ge 0$,hiszen $0 < b < 1$,továbbá $p(b)$ pozitív,mert b szigorúan monoton növő ,illetve $f(b) = \varepsilon^{-2}exp\left(\frac{b-1}{\varepsilon b}\right)$ szintén nagyobb 0.
Ezt az egyenlőséget a [0,b]-n integrálva:

$$p(b) = c_{ad}b - \int_0^b \frac{(1-s)f(s)}{p(s)}\mathrm{d}s \tag{32}$$

Azután ezt integráljuk a [0,1]-en:

$$\int_0^1 p(s)\mathrm{d}s = \frac{c_{ad}}{2} - \int_0^1\int_0^b \frac{(1-s)f(s)}{p(s)}\mathrm{d}s\mathrm{d}b \tag{33}$$

A kettősintegrált így is átírhatjuk:

$$\int_0^1\int_0^b \frac{(1-s)f(s)}{p(s)}\mathrm{d}s\mathrm{d}b = \int_s^1\int_0^1 \frac{(1-s)f(s)}{p(s)}\mathrm{d}s\mathrm{d}b = \int_0^1\int_s^1 \frac{(1-s)f(s)}{p(s)}\mathrm{d}b\mathrm{d}s =$$

$$= \int_0^1 \frac{(1-s)^2 f(s)}{p(s)} \mathrm{d}s$$

Ezt, valamint $\int_0^1 p(s)\mathrm{d}s$-t kifejezve a (30)-ból, majd (33)-be helyettesítve adódik:

$$\frac{1}{c_{ad}} \int_0^1 (1-s) f(s)\mathrm{d}s = \frac{c_{ad}}{2} - \int_0^1 \frac{(1-s)^2 f(s)}{p(s)} \mathrm{d}s$$

$$\int_0^1 \frac{s(1-s)f(s)}{s} \mathrm{d}s + \int_0^1 \frac{c_{ad}(1-s)^2 f(s)}{p(s)} \mathrm{d}s = \frac{c_{ad}^2}{2}$$

A (32)-ből $p(s) \leq c_{ad}s$,mert a nemnegatív $\frac{(1-s)f(s)}{p(s)}$ függvény integrálja a [0,b]-n szintén nemnegatív. A fenti egyenletből,így:

$$\int_0^1 \frac{s(1-s)f(s)}{s} \mathrm{d}s + \int_0^1 \frac{c_{ad}(1-s)^2 f(s)}{c_{ad}s} \mathrm{d}s \leq \frac{c_{ad}^2}{2}$$

A bal oldalon összevonva az integrálokat $(1-s)s + (1-s)^2 = 1-s$ alapján kapjuk az alsó becslést:

$$\int_0^1 \frac{(1-s)f(s)}{s} \mathrm{d}s \leq \frac{c_{ad}^2}{2} \tag{34}$$

Ezzel c_{ad}-re a (27)-nél egy erősebb becslést kaptunk.

4.2. A felső korlát

Induljunk ki $f(b) = \varepsilon^{-2} exp\left(\frac{b-1}{\varepsilon b}\right) 1_{[b_I,\infty)}(b)$ -ből . Vezessük be a következő segédfüggvényt:

$$A(b) = -2 \int_{b_I}^b \frac{c_{ad}}{p(s)} \mathrm{d}s - 2\ln(b_I)$$

Ekkor $A'(b) = -2\frac{c_{ad}}{p(b)}$, mert az A(b) a jobb oldal primitív függvénye. $s \in (0, b_I)$ -re még a (32)-ből kapjuk,hogy $p(s) = c_{ad}s$,mert ilyen s-ek mellett az f függvény 0 lesz , és így a levonandó integrál is. Így,ha $A(b)$-t integráljuk a $(0, b_I)$-n a következőt kapjuk:

$$\int_0^{b_I} A(b)\mathrm{d}b = -2 \int_0^{b_I} \int_{b_I}^b \frac{1}{s} \mathrm{d}s\mathrm{d}b - 2 \int_0^{b_I} \ln(b_I)\mathrm{d}b$$

Az első tag,felhasználva,hogy $\ln(x)$ primitív függvénye $x\ln(x) - x$:

$$-2 \int_0^{b_I} \int_{b_I}^b \frac{1}{s} \mathrm{d}s\mathrm{d}b = -2 \int_0^{b_I} \ln(b) - \ln(b_I)\mathrm{d}b = -2[x\ln(x) - x]_0^{b_I} + 2 \int_0^{b_I} \ln(b_I)\mathrm{d}b =$$

$$= (-2b_I \ln(b_I) + 2b_I) + (2b_I \ln(b_I)) = 2b_I$$

Hiszen a $\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ a L'Hospital szabállyal könnyen levezethető. A második tag:

$$-2\int_0^{b_I} \ln(b_I)\mathrm{d}b = -2b_I \ln(b_I) \quad \text{tehát:}$$

$$\int_0^{b_I} A(b)\mathrm{d}b = 2b_I - 2b_I \ln(b_I) \tag{35}$$

Ha $b \in (0, b_I)$, akkor $A(b) = -2\ln(b) = ln(\frac{1}{b^2})$, mert ez kielégíti a (13)-ast:

$$\int_0^{b_I} -2\ln(b)\mathrm{d}b = -2[x\ln(x) - x]_0^{b_I} = 2b_I - 2b_I \ln(b_I)$$

$$e^{A(b)} = \frac{1}{b^2} = \frac{c_{ad}^2}{p^2(b)} \tag{36}$$

Ha $s \in (b_I, 1)$, akkor a (32)-esből $p(s) < c_{ad}s$, mert az integrál pozitív lesz, amit levonunk. Az $s \in (0, b_I)$ esetnél tárgyaltakhoz hasonlóan, itt $\frac{c_{ad}}{p(s)} > \frac{1}{s}$,és így végül $A(b)$-re nem $-\ln(b^2)$-et, kapunk,hanem $A(b) < -\ln(b^2)$-et. Így

$$e^{A(b)} < \frac{1}{b^2} \quad , \text{ha} \quad b \in (b_I, 1) \tag{37}$$

Összevetve (36)-et és (37)-öt, adódik:

$$e^{A(b)} \leq \frac{1}{b^2} \quad ,\text{ha} \quad b \in (0, 1) \tag{38}$$

Tehát (38) miatt $e^{A(b)}$ korlátos lesz az 1 környezetében,továbbá $p^2(1) = p(1) = 0$ miatt:

$$\lim_{b\to 1} p^2(b)e^{A(b)} = 0 \tag{39}$$

Vegyük az alsó korlátnál használt (28)-os kiinduló egyenletünket,és szorozzuk meg $2e^{A(b)}$-vel ,kapjuk:

$$2p'(b)p(b)e^{A(b)} - 2c_{ad}p(b)e^{A(b)} + 2(1-b)f(b)e^{A(b)} = 0$$

Vegyük észre,hogy az első két tag összege éppen $(p^2(b)e^{A(b)})'$

$$(p^2(b)e^{A(b)})' = 2p(b)p'(b)e^{A(b)} + p^2(b)e^{A(b)}A'(b) =$$

$$= 2p(b)p'(b)e^{A(b)} + p^2(b)e^{A(b)}\left(\frac{-2c_{ad}}{p(b)}\right) == 2p(b)p'(b)e^{A(b)} - 2c_{ad}p(b)e^{A(b)}$$

És így:

$$(p^2(b)e^{A(b)})' + 2(1-b)f(b)e^{A(b)} = 0$$

Integráljunk a $[\mathrm{b}_1, b_2] - n \quad (0 < \mathrm{b}_1 < b_2 < 1)$, kapjuk:

$$p^2(b_1)e^{A(b_1)} - p^2(b_2)e^{A(b_2)} = 2\int_{b_1}^{b_2}(1-b)f(b)e^{A(b)}\mathrm{d}b < 2\int_{b_1}^{b_2}\frac{(1-b)f(b}{b^2}\mathrm{d}b \tag{40}$$

Az utóbbi egyenlőtlenség (38)-ból adódott. Tartsunk most b_1-el 0-hoz, b_2-vel 1-hez. Ekkor $p^2(b_2)e^{A(b_2)} \to 0$ a (39)-es miatt. Továbbá $p^2(b_1)e^{A(b_1)} \to c_{ad}^2$,mert (36)-esből tudjuk, hogy $p^2(b)e^{A(b)} \equiv c_{ad}^2$ a $(0, b_I)$-n , és így a 0-beli határérték is c_{ad}^2 lesz.

A (4.2)-asból így, kapjuk a felső korlátot:

$$c_{ad}^2 < 2\int_0^1 \frac{(1-s)f(s}{s^2}\mathrm{d}s \tag{41}$$

4.2.1. Tétel (a lángterjedés sebességének becslése). *Tegyük fel,hogy* $L_A = 1$ *és* $f(b) = \varepsilon^{-2}exp\left(\frac{b-1}{\varepsilon b}\right)1_{[b_I,\infty)}(b)$ *Ekkor az adiabatikus láng terjedési sebességére a következő becslések állnak fenn:*

$$2I_1 < c_{ad}^2 < 2I_2 \tag{42}$$

$$2I_0 < c_{ad}^2 < \frac{2I_1}{1-\sqrt{2I_1}} \tag{43}$$

Ahol

$$I_0 = \int_0^1 (1-s)f(s)\mathrm{d}s, \quad I_1 = \int_0^1 \frac{(1-s)f(s)}{s}\mathrm{d}s, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{(1-s)f(s)}{s^2}ds$$

Hivatkozások

[1] Peter L. Simon , John H. Merkin , Stephen K. Scott , Bifurcations in non-adibatic flame propagation models
[2] Fife, P.C., Mathematical aspects of reacting and diffusing systems, Springer,1979.
[3] Volpert, A.I., Volpert, V.A., Volpert, V.A., Traveling wave solutions of parabolic systems, AMS, 1994.
[4] Bebernes, J., Eberly, D., Mathematical problems from combustion theory, Springer,1989
[5] Zeldovich, Ya.B., Barenblatt, G.I., Librovich, V.B., Makhviladze, G.M., The mathe- matical theory of combustion and explosions, Consultants Bureau, 1985.